P.F.I.E.V

CƠ HỌC CHẤT LỎNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HACHETTE Supérieur

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".

194 – 2006/CXB/8 – 323/GD Mã số: 7K474T6 - DAI

Cơ học chất lỏng

(Tái bản lần thứ hai)

Dưới sự hướng dẫn của

JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Descartes ở Tours

PHILIPPE DENÈVE
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Vaugelas ở Chambéry

ALAIN FAVIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Người dịch : NGUYỄN HỮU HỒ - LÊ BĂNG SƯƠNG

Năm thứ hai

PC - PC*

PSI-PSI*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Mécanique des fluides

sous la direction de

JEAN - MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint - Louis à Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Descartes à Tours

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Vaugelas à Chambéry

ALAIN FAVIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

2de année

PC - PC*

PSI-PSI*

HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ giáo trình này có liên quan đến các chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường đại học (Grandes écoles), được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của các chương trình mới, thì bộ giáo trình này đưa ra một sự đổi mới trong việc giảng dạy môn vật lí ở các lớp dự bị đại học.

• Trái với truyền thống đã in sâu đậm nét, mà theo đó vật lí bị xếp vào hàng môn học thứ yếu sau toán học vì các hiện tượng đã bị che lấp bởi khía cạnh tính toán. Tuy nhiên ở đây các tác giả đã cố gắng thu xếp để đặt toán học vào đúng chỗ của nó bằng cách ưu tiên dẫn dắt tư duy và lập luận vật lí, đồng thời nhấn mạnh lên các tham số có ý nghĩa và các hệ thức đã kết hợp chúng lại với nhau .

• Vật lí là một môn khoa học thực nghiệm nên phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả đã quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm nhưng vẫn không bỏ qua khía cạnh thực hành. Mong sao những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thày và trò cải tiến hoặc tạo ra các hoạt động thí nghiệm luôn luôn đầy chất sáng tạo.

• Vật lí không phải là một khoa học coi thường vật chất, chỉ chú trọng đến lập luận trừu tượng mà dửng dưng với thực tiễn công nghệ. Mỗi khi vấn đề được nêu lên, thì các tác giả đã dành một chỗ xứng đáng cho các áp dụng khoa học hay công nghiệp, đặc biệt để kích thích các nhà nghiên cứu và kĩ sư tương lai.

• Vật lí không phải là một khoa học thiếu tính độc đáo và vĩnh hằng, mà vật lí là sản phẩm của một thời đại và không tự tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả đã không coi thường các cứ liệu lịch sử các khoa học trong việc mô tả sự biến đổi của các mô hình lí thuyết cũng như thay thế các thí nghiệm trong bối cảnh của họ.

Nhóm tác giả mà Jean-Marie BRÉBEC đã phối hợp, gồm các giáo sư các lớp dự bị rất từng trải, đã có một bề dày các kinh nghiệm trong các kì thi tuyển vào các trường đại học và có năng lực khoa học cao được mọi người nhất trí công nhận. Nhóm này đã cộng tác chặt chẽ với các tác giả của bộ giáo trình của DURANDEAU và DURUPTHY cho cấp hai các trường trung học (tương đương trung học phổ thông của Việt Nam).

Sách cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo sách ở cấp trung học cả về hình thức, nội dung lẫn ý tưởng.

Chúng tôi bảo đảm rằng các cuốn sách này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để có được một sự trau dồi khoa học vững chắc.

J.P. DURANDEAU

Cơ học chất lỏng là một phần quan trọng của chương trình vật lí ; thật vậy, nó cho phép :

• có được các "hình ảnh" cụ thể về ý nghĩa vật lí của các toán tử khác nhau như toán tử dive và toán tử rota, là các công cụ thường dùng trong điện từ học ;

• và "nhìn thấy" một cách cụ thể các dạng cân bằng.

Trong ba chương đầu, tác giả nhấn mạnh vào việc mô hình hóa dòng chảy của một chất lỏng với hai cách mô tả khả dĩ : *hình thức luận Lagrange và hình thức luận Euler*. Hình thức luận Euler dẫn đến các công cụ đặc biệt như phép lấy đạo hàm toàn phần : các công cụ này cho phép nghiên cứu trong thời gian đầu các phương trình vi phân về bảo toàn khối lượng (mà không quên dạng tích phân), và sau đó mô tả một số dòng chảy của các chất lỏng, đặc biệt các dòng chảy thế.

Giáo trình sau đó chia thành ba phần lớn.

• *Động lực học các chất lỏng lí tưởng :* Sự biến đổi của trường vận tốc của các chất lỏng này tuân theo phương trình vi mô EULER, mà các tích phân dẫn đến các bất biến (trong đó có bất biến BERNOULLI).

• *Các chất lỏng thực :* Sau khi xác định độ nhớt của một chất lỏng NEWTON với các hệ quả khác nhau lên các dòng chảy (dòng chảy POISEUILLE, COUETTE), ta đề cập đến việc mô tả các dòng chảy của các chất lỏng thực, mà đặc tính rối hay không tùy thuộc vào số REYNOLDS Re. Số Re này cũng cho phép "lượng tử hóa" phần tương ứng với các hiện tượng đối lưu và khuếch tán.

• *Các dạng cân bằng :* Đã dành hẳn một chương cho việc áp dụng các định luật động lực học và nhiệt động học cho các chất lỏng khác nhau đang chuyển động theo dòng chảy, nghĩa là áp dụng các định luật đó cho các dạng cân bằng (động lượng, năng lượng,...).

Các khái niệm khác nhau này được minh họa bằng nhiều ví dụ dựa vào một số lớn các mô phỏng và ảnh chụp.

Mục lục

SỰ MÔ HÌNH HÓA MỘT CHẤT LỎNG ĐANG CHUYỂN ĐỘNG THEO DÒNG CHẢY

1

Mở đầu

Ta có thể mô tả dòng chảy của một chất lỏng nếu biết chuyển động của từng hạt nguyên tố của chất lỏng. Tuy nhiên, vì số hạt quá lớn, nên ta không thể tiến hành cách nghiên cứu như vậy được.

Việc nghiên cứu dòng chảy có thể được giới hạn ở chỗ chỉ cần biết chuyển động tập thể của một nhóm hạt nguyên tố cấu thành cái mà ta gọi là một hạt chất lỏng.

Vậy ta sẽ mô tả được chuyển động này nhờ một trong các dữ kiện sau đây :

- *hoặc biết quỹ đạo của từng hạt chất lỏng theo thời gian và vị trí của mỗi hạt ở một thời điểm ban đầu t_0 cho trước : đó là cách mô tả Lagrange, theo tên nhà toán học Pháp Louis LAGRANGE (1736 – 1813) ;*
- *hoặc biết vận tốc của mọi hạt chất lỏng ở mọi thời điểm t : đó là cách mô tả Euler, theo tên nhà toán học Thụy Sĩ Léonhard EULER (1707 – 1783).*

Thành thử ta có thể nghiên cứu dòng chảy của một chất lỏng với một trong hai cách mô tả trên. Tuy nhiên, cách mô tả EULER (trường vận tốc của các hạt chất lỏng phụ thuộc vào các tọa độ không gian và thời gian) là thực tế hơn cả.

MỤC TIÊU

- Các cách mô tả một chất lỏng đang chuyển động của Lgarange và Euler.
- Phép lấy đạo hàm toàn phần.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học của chất điểm.

1 Mẫu chất lưu

1.1. Chất lưu là gì ?

Ta đã đưa ra khái niệm về chất lưu (xem *H. Prépa, Nhiệt động lực học, năm thứ nhất*). Các trạng thái lỏng và khí đều là các chất lưu đối lập với trạng thái rắn.

1.1.1. "Biên giới" lỏng- khí

Tồn tại một sự khác biệt chủ yếu về cách hoạt động của chất khí và chất lỏng, chất khí bao giờ cũng choán toàn bộ thể tích dành cho nó, trong khi chất lỏng lại không.

Biên giới lỏng - khí được đặc trưng bởi sự khác nhau về cấp độ lớn của khối lượng riêng và mật độ hạt. Đối với chất lỏng thì các đại lượng đó lớn gấp khoảng ngàn lần các đại lượng tương ứng của chất khí : đó là kết quả mà chúng ta quan sát được đối với nước (*h.1*).

Khối lượng riêng lớn có nghĩa là các hạt rất gần nhau, và do đó, các lực tương tác phân tử trong các chất lỏng là rất lớn.

nước khí (P = 1 bar và T ≈ 400 K	**nước lỏng**
$\rho_{khí} \approx 0{,}5 kg.m^{-3}$	$\rho_{lỏng} \approx 1{,}0.10^3 kg.m^{-3}$
$n^*_{khí} \approx 2.10^{26} m^{-3}$	$n^*_{lỏng} \approx 3.10^{29} m^{-3}$

H.1. *Khối lượng riêng và mật độ hạt của nước khí (hơi nước) và nước lỏng.*

Áp dụng 1

Mật độ hạt của nước

Tính mật độ hạt n :*

• *của nước ở trạng thái lỏng ;*

• *của nước ở trạng thái khí ở nhiệt độ T = 400 K, dưới một áp suất P = 1 bar. Giả thiết chất khí này tuân theo định luật của các chất khí lý tưởng.*

Dữ liệu :

Khối lượng riêng của nước lỏng :

$$\rho = 1{,}0.10^3 kg.m^{-3}$$

Khối lượng mol của nước : $M = 18.10^{-3} kg.mol^{-1}$

Số Avogadro : $N_A = 6.10^{23} mol^{-1}$

Hằng số khí lý tưởng : $R = 8{,}31 J.K^{-1}.mol^{-1}$

• **Nước lỏng :** mật độ hạt bằng :

$$n^* = \frac{\rho}{M} N_A = \frac{10^3}{18.10^{-3}} 6.10^{23} \approx 3.10^{28} m^{-3}$$

• **Nước khí :** *chất khí này được coi là khí lý tưởng, nên lượng vật chất n = 1 mol chiếm thể tích :*

$$V = \frac{RT}{P} = \frac{8{,}31 \times 400}{10^5} = 3{,}3.10^{-2} m^3$$

Biết rằng N_A hạt chiếm thể tích đó nên ta có $n^* = 1{,}8.10^{25} m^{-3}$.

Ta thấy khối lượng riêng vào cỡ :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{18.10^{-3}}{3{,}3.10^{-2}} \approx 0{,}5 kg.m^{-3}$$

1.1.2. "Biên giới" lỏng - rắn

Thiết lập "biên giới" lỏng - rắn không đơn giản, nên ta cũng không cố đưa ra một định nghĩa chặt chẽ về chất lỏng đối lập với chất rắn.

Trong khi các chất rắn (gần như) không thể biến dạng, thì như mọi người đều biết, chất lỏng (trái ngược với chất rắn) lại có khả năng :

• "trôi chảy" (mạnh yếu tùy theo độ nhớt của nó) ;

• khít với hình dạng của bình chứa nó ;

• được khôi phục lại một khi nó bị "phân tán" đó đây (ví dụ, ta hãy hình dung các giọt nhỏ li ti của một máy phun dầu mà ta có thể thu hồi lại vào trong một cái cốc).

Sự khác biệt về tính cách hoạt động giữa chất rắn và chất lỏng được giải thích là do tính linh động cao hơn của các phân tử ở trạng thái lỏng.

Ta sẽ lại tìm thấy một sự khác biệt chủ yếu khác giữa chất lỏng và chất rắn khi nghiên cứu động học : các vận tốc của các điểm khác nhau của một vật rắn, liên kết cứng với nhau, đã làm xuất hiện vectơ quay tức thời $\overrightarrow{\Omega}$ của vật rắn. Như vậy, vận tốc của hai điểm M và P gắn vào một vật rắn sẽ có dạng :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MP}$$

(xem H– Prépa, Cơ học vật rắn, năm thứ hai). Vấn đề sẽ trở nên tinh tế hơn nhiều đối với các chất lỏng đang chuyển động.

Muốn đề cập đến việc nghiên cứu động học này, ta cần định rõ phạm vi nghiên cứu để xác định được vận tốc vĩ mô của chất lưu.

Chiều dài đặc trưng của dòng chảy này là độ rộng của sông đào

H.2. *Ở thang vĩ mô, chiều dài đặc trưng của dòng chảy này là độ rộng của sông đào (cầu Thở Dài ở Venise).*

1.2. Chất lưu là môi trường liên tục

Ta hãy xác định các chiều dài đặc trưng cho sự quan sát.

1.2.1. Thang vĩ mô

Ở thang *vĩ mô*, chất lưu là một môi trường *liên tục*.

Chiều dài L đặc trưng cho sự quan sát ở thang vĩ mô này bị áp đặt điều kiện bởi vấn đề nghiên cứu (*h.* 2).

Chiều dài đặc trưng của dòng chảy này là độ rộng của sông đào.

Ví dụ :

ví dụ	chọn chiều dài đặc trưng L
dòng chảy của một con sông	độ rộng của lòng sông
dòng chảy của chất lưu trong ống dẫn	đường kính ống dẫn
dòng chảy của chất lưu quanh vật cản	kích thước "ngang" của vật cản
nghiên cứu một đại dương	độ sâu của đại dương
dòng chảy của máu	đường kính của một tĩnh mạch hay động mạch ; giới hạn dưới của L có thể được xác định trong các ống mao mạch chẳng hạn (L lúc này vào cỡ một phần số của milimét)

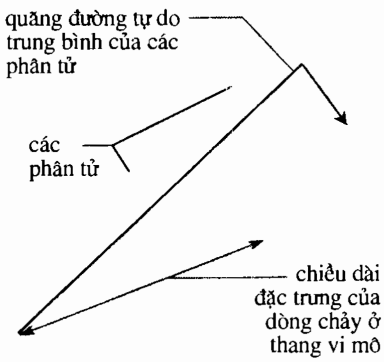
H.3. *Một số chiều dài đặc trưng L.*

1.2.2. Thang vi mô

Ở thang *vi mô*, chất lưu chủ yếu là *gián đoạn* : nó gồm các phân tử chuyển động nhiệt không ngừng.

Đối với một chất khí, thì chiều dài đặc trưng l kết hợp với thang vi mô này có thể là *quãng đường tự do trung bình của các phân tử* (khoảng cách trung bình mà một phân tử chạy qua giữa hai va chạm, vào cỡ micromét trong các điều kiện thông thường) hay là khoảng cách trung bình giữa các phân tử đó (*h.4*).

Các thang vĩ mô và vi mô này chỉ khác biệt rõ ràng nếu $L >> l$; sự phân biệt này không thể tồn tại được nữa, nếu l lớn hơn rõ rệt (chất khí ở áp suất rất thấp), trong khi L lại nhỏ đi rất nhiều (ví dụ các ống dẫn của một môi trường xốp).



H.4. *Ở thang vi mô, chất lưu được mô tả bởi chuyển động của các phân tử khác nhau. Chiều dài đặc trưng của thang này có thể được biểu diễn bởi khoảng cách trung bình giữa hai phân tử hay quãng đường tự do trung bình của chúng.*

Áp dụng 2

Khoảng cách trung bình giữa các phân tử

Tính khoảng cách trung bình giữa các phân tử đối với :

- *nước ở trạng thái lỏng ;*
- *nước ở trạng thái khí ở nhiệt độ T = 400K, dưới áp suất P = 1 bar. Giả thiết chất khí này tuân theo định luật các chất khí lý tưởng.*

Dữ liệu :

$\rho_{lỏng} = 1,0.10^3 kg.m^{-3}$; $N_A = 6.10^{23} mol^{-1}$; $M = 18.10^{-3} kg.mol^{-1}$; $R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}$

- **Nước lỏng** : biết rằng số hạt $N = \frac{\rho}{M} N_A$ chiếm một thể tích $1m^3$, nên khoảng cách trung bình giữa hai hạt là :

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{18.10^{-3}}{10^3 \times 6.10^{23}}} = \sqrt[3]{30.10^{-30}} \approx 3.10^{-10} m.$$

- **Nước hơi** : ở đây, khí được coi như khí lí tưởng, N_A phân tử chiếm thể tích $V = \frac{RT}{P}$, vậy khoảng cách trung bình giữa hai hạt bằng :

$$d = \sqrt[3]{\frac{RT}{PN_A}} = \sqrt[3]{\frac{8,31 \times 400}{10^5 \times 6.10^{23}}} = \sqrt[3]{55.10^{-27}}$$

$$\approx 40.10^{-10} m$$

1.2.3. Thang trung mô

Thang *trung mô* là thang trung gian giữa (thang) vĩ mô và (thang) vi mô, trong đó chất lưu vẫn còn là một môi trường liên tục.

Ở thang này, chất lưu bị "*cắt*" thành những *ô cơ bản* (hay ô vô cùng nhỏ) gọi là các *phần tử chất lưu*, hay các *hạt chất lưu*. (chứa một số lớn phân tử). Ích lợi của sự mô tả liên tục chất lưu là ở chỗ các đại lượng vĩ mô có thể được kết hợp với các hạt chất lưu này. Các hạt này có một khối lượng cơ bản không đổi trong tiến trình vận động của chất lưu.

Vận tốc của một hạt chất lưu, có tâm tại điểm M ở thời điểm t, bằng giá trị trung bình của các vận tốc các phân tử của hạt. Thành thử ta thu được một *giá trị vĩ mô địa phương* của vận tốc chất lưu, nghĩa là được xác định tại một điểm M ở thời điểm t. Lưu ý rằng vận tốc này sẽ khác không nếu chất lưu đang chuyển động vĩ mô.

Xuất phát từ khái niệm này, ta có thể nghiên cứu được sự phân bố nhiệt độ hay phân bố áp suất trong chất lưu. Hiệu lực của cách mô tả nói trên (mà ta sẽ trở lại sau) gắn liền với giá trị của a là kích cỡ của hạt chất lưu. Kích cỡ này phải đủ nhỏ ở mức vĩ mô để có thể coi các đại lượng là liên tục, nhưng lại phải đủ lớn ở mức vi mô (lúc này hạt chất lưu chứa một số rất lớn các phân tử) để có thể bỏ qua những thăng giáng kết hợp với chuyển động nhiệt chẳng hạn.

Sự mô tả chất lưu xuất phát từ chuyển động của các hạt chất lưu này sẽ cho phép ta sử dụng phép tính tích phân.Ta hãy thử xác định các kích thước của hạt chất lưu nếu giả thiết hạt có dạng lập phương cạnh a : như vậy chiều dài đặc trưng này sẽ xác định thang trung mô

Ví dụ :

Xét chuyển động của nước lỏng trong một ống dẫn có đường kính 10cm :

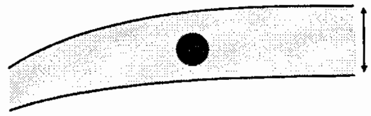
- đối với dòng chảy này, ta có $L \approx 10^{-1} m$;

• khối lượng riêng của nước là $\rho = 10^3 \text{kg.m}^{-3}$. Khối lượng mol (phân tử gam) của nước là $M = 18.10^{-3} \text{kg.mol}^{-1}$, khoảng cách trung bình giữa hai phân tử nước vào cỡ $\sqrt[3]{\dfrac{M}{N_A \rho}} \approx 3.10^{-10}\text{m}$, nghĩa là $l \approx 10^{-10}\text{m}$ với $N_A = 6.10^{23}\text{mol}^{-1}$;

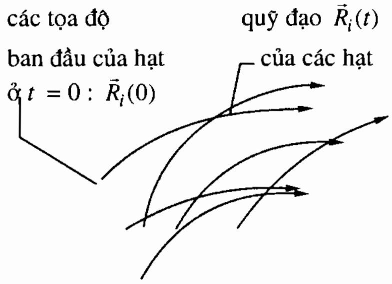
• Cho a giá trị thỏa mãn $l << a << L$, ví dụ $10^{-10}\text{m} << a << 10^{-1}\text{m}$. Giả thử ta lấy $a \approx 10^{-6}\text{m} = 1\mu\text{m}$.

Một thể tích $1\mu\text{m}^3$ nước chứa một khối lượng $\text{d}m = 10^{-15}\text{kg}$ nước, nghĩa là chứa $\dfrac{\text{d}mN_A}{M}$ phân tử nước, khoảng $\dfrac{10^{-15} \times 6.10^{23}}{18.10^{-3}} \approx 3.10^{10}$ phân tử !

Như vậy hạt chất lỏng có khối lượng dm bằng 10^{-15}kg, chiếm một thể tích $\text{d}\tau = 10^{-18}\text{m}^3$ (hình lập phương có cạnh a = 1 μm) và chứa khoảng 10^{10} hạt (*h*.5).



H.5. *Dòng chảy của chất lỏng. Ở thang trung mô, các kích thước của hạt chất lỏng đều nhỏ so với L và lớn đối với l là khoảng cách trung bình giữa hai phân tử.*

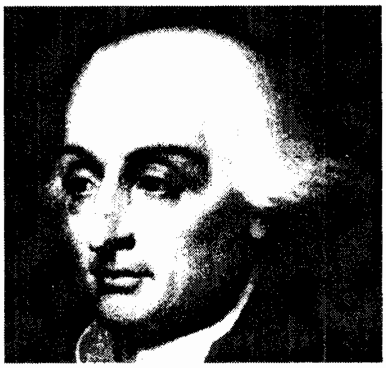


H.6. *Mô tả Lagrange : chuyển động vĩ mô của chất lỏng được xác định khi biết các quỹ đạo của từng hạt chất lỏng tạo thành.*

Một cách lựa chọn khác cũng hoàn toàn có hiệu lực đối với tình huống nói trên là lấy một hạt chất lỏng có khối lượng *dm* bằng 10^{-6}kg, chiếm một thể tích $\text{d}\tau = 10^{-9}\text{m}^3$ (hình lập phương có cạnh a = 1 mm) và chứa khoảng 10^{16} hạt. Nhưng sự tồn tại các lực nhớt có thể khiến cho cách lựa chọn này (a tương đối lớn) bị sai lệch ở lân cận các vật chướng ngại (vì xuất hiện các lớp giới hạn, *xem chương* 5).

Ở thang trung mô, các kích thước đặc trưng của hạt chất lỏng phải nhỏ, so với L và lớn so với l (là khoảng cách trung bình giữa hai phân tử). Phải có một số rất lớn phân tử (10^{10}) tạo thành hạt chất lỏng đó để đạt tới các trung bình cục bộ có tính chất vĩ mô.

Thang đo hạt chất lưu, thang trung mô, là trung gian giữa thang vi mô và thang vĩ mô. Nó cho phép kết hợp vào hạt đó, các đại lượng vĩ mô dùng để mô tả chất lưu như một môi trường liên tục.



H.7. *Louis* LAGRANGE (1736 - 1813).

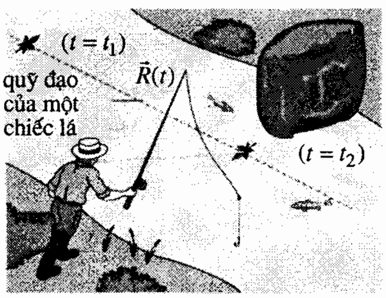
2 Quan điểm Lagrange

Ta hãy chú ý tới một chất lỏng (về mặt vĩ mô) đang chuyển động trong hệ quy chiếu nghiên cứu, chuyển động thường được gọi là *dòng chảy.*

Nghiên cứu dòng chảy này, ví dụ như mô tả chuyển động của từng hạt chất lỏng (đã được định nghĩa ở trên) hợp thành chất lỏng đó. Biết quỹ đạo $\vec{R}_i(t)$ của mỗi hạt (đặt ở tọa độ $\vec{R}_i(0)$ lúc t = 0) mà ta theo sát chuyển động của nó, thì ta sẽ lập lại được chuyển động của toàn chất lỏng (*h.6*). Cách mô tả này tương ứng với *quan điểm Lagrange*, do tên nhà toán học Louis LAGRANGE (1736 - 1813) (h.7).

• *Ví dụ 1 : Người câu cá*

Trên bờ sông, một người đi câu, ẩn mình trong quan niệm Lagrange, ngắm nhìn sợi dây câu (mà anh ta quăng xuống nước) trôi dạt theo dòng nước, hay nhìn những chiếc lá trôi trên mặt nước, khi người đó dõi theo chuyển động của các hạt này bị cuốn theo nước trên sông (*h.8*).



H.8. *Người đi câu đặt mình trong hình thức luận Lagrange đang nhìn theo những chiếc lá xuôi dòng.*

• *Ví dụ 2 : Giao thông trên đường trục ô tô (trên xa lộ hay trên đường cao tốc).*

Khi có một dòng xe cộ trên đường cao tốc, thì có khả năng mô tả luồng giao thông này nhờ biết quỹ đạo của từng xe ô tô : sự mô tả này tương ứng với quan điểm Lagrange (*h.*9).

Chất lưu được mô tả ở mỗi thời điểm bởi tập hợp các vận tốc của các hạt chất lưu tạo thành nó, các hạt mà ta cho "dán nhãn" chỉ số i bằng cách xác định vị trí ban đầu của chúng $\vec{R}_i(0)$ ở thời điểm t = 0. Tập hợp các vận tốc này có dạng $\vec{V}_i(t) = \dfrac{d\vec{R}_i(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}_i(t),t)$, các đại lượng này chỉ phụ thuộc tường minh vào thời gian đối với một hạt đang được xem xét ($\vec{R}_i(t)$ là một hàm số đã biết).

Thành thử, theo hình thức luận Lagrange, thì vận tốc của mỗi hạt chỉ phụ thuộc thời gian t (đã biết qũy đạo) và như vậy, phụ thuộc các tọa độ ban đầu của hạt (*xem áp dụng* 3).

Vậy ta có thể xác định cách mô tả chất lưu của Lagrange như sau :

Chuyển động của chất lưu sẽ được mô tả hoàn toàn nếu biết các quỹ đạo $\vec{R}_i(t)$ của từng hạt được dán nhãn "i" của chất lưu.

Vận tốc của các hạt này được xác định bởi :

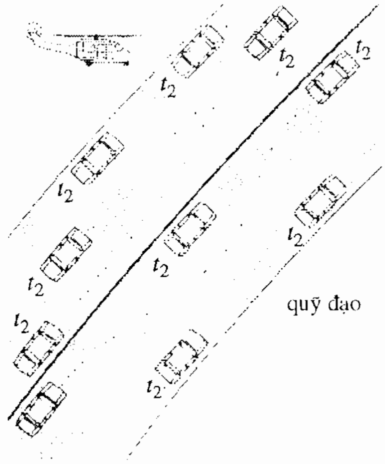
$$\vec{V}_i(t) = \frac{d\vec{R}_i(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}_i(t),t), \ldots, \vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}(t),t)$$

Với $\vec{R}_i(t)$ là vị trí ở thời điểm t của hạt mà lúc ban đầu t = 0 nó ở vị trí $\vec{R}_i(0)$.

Các vận tốc này được kết hợp với các hạt chất lưu, chỉ phụ thuộc tường minh vào thời gian và các tọa độ ban đầu của hạt, và như vậy chỉ phụ thuộc vào $\vec{R}(t)$.

Chú ý :

Đối với các đại lượng "Lagrange", ta sẽ giữ cách viết $\vec{R}(t)$ (chứ không phải $\vec{r}$), và X (t), Y (t), ... V (t) (chứ không phải $\vec{v}$).



H.9. *Khi ta quan sát các quỹ đạo của các xe cộ khác nhau (giữa $t = t_1$ và $t = t_2$), thì ta đứng trên hình thức luận của Lagrange.*

Áp dụng 3

Biểu thức của vận tốc trong hình thức luận Lagrange

Có một dòng chảy được xác định trong hình thức luận Lagrange dưới dạng :

$X_i(t) = X_{0,i}(1+bt)$ *với b không đổi*

$Y_i(t) = Y_{0,i}$

trong đó $X_{0,i}$ và $Y_{0,i}$ biểu diễn các tọa độ (ban đầu) của hạt được dán nhãn thứ i ở thời điểm t = 0.

Xác định vận tốc $\vec{V}_i(t)$ của các hạt này.

Biểu thị vận tốc này dưới dạng $\vec{V}_i(\vec{R}_i(t), t)$.

Vận tốc của một hạt được cho bởi :

$$\vec{V}_i(\vec{R}_i(t),t) = \vec{V}_i(t) = \frac{d\vec{R}_i(t)}{dt}$$

điều này cho, đối với hạt được dán nhãn "i", vận tốc : $\vec{V}_i(t) = \dfrac{dX_i(t)}{dt}\vec{e}_x = X_{0,i}b\vec{e}_x$, nghĩa là :

$$\vec{V}_i(t) = V_i(\vec{R}_i(t),t) = X_{0,i}b\vec{e}_x.$$

do đó : $\vec{V}_i(\vec{R}_i(t),t) = \dfrac{X_i(t)}{1+bt}b\vec{e}_x$.

Ta được đúng một vận tốc $\vec{V}_i(t)$ là hàm của quỹ đạo $\vec{R}_i(t)$ và t.

3 Quan điểm Euler

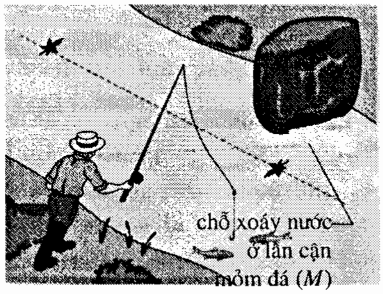
Ta xét cùng một dòng chảy của chất lỏng trong hệ quy chiếu nghiên cứu.

3.1. Cách mô tả dòng chảy của Euler

Cũng tồn tại một cách mô tả khả dĩ khác về chuyển động của toàn bộ chất lỏng. Ta tự đặt mình tại một điểm M trong không gian và nghiên cứu sự tiến triển của một đại lượng vĩ mô nào đó của chất lỏng theo thời gian. Việc này tương ứng với *cách mô tả dòng chảy của Euler*

Ví dụ 1 : Người đi câu.

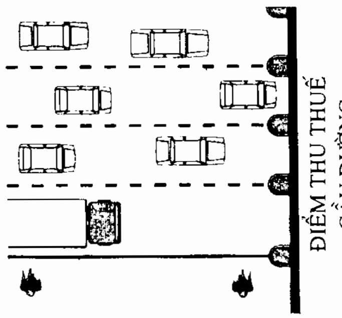
Một người đi câu, mệt mỏi vì không kiếm được gì, có thể bắt đầu nghĩ vơ vẩn bằng cách quan sát một chỗ nước xoáy đang xảy ra ở gần một mỏm đá nổi giữa sông. Làm như thế, người ấy không còn quan tâm đến một hạt chất lỏng đang chuyển động nữa, mà là quan tâm đến một điểm riêng biệt trong không gian mà tại đó có nhiều hạt mới của chất lỏng chuyển tới không ngừng. Ông ta quan sát vận tốc của những hạt đó, tại một điểm cố định trong không gian, theo thời gian ; như vậy, ông ta đã tự đặtmình theo hình thức luận Euler để mô tả dòng chảy này (H.10).



H.10. *Người đi câu quan sát xem chất lỏng chảy như thế nào quanh mỏm đá; người ấy đứng trên hình thức luận của Euler.*

Ví dụ 2 : Giao thông trên trục đường ô tô

Thỉnh thoảng, các cảnh sát giao thông đứng bên rìa đường trục ô tô để "*quan sát*" vận tốc các xe cộ. Họ có thể mô tả dòng chảy giao thông theo thời gian nhờ biết vận tốc các xe đi qua chỗ mà họ "*đứng quan sát*". Những người cảnh sát này đã đứng trên hình thức luận Euler để mô tả dòng chảy giao thông (H.11).



H.11. *Hai cảnh sát, trong khi quan sát các vận tốc xe cộ, đã đứng trên hình thức luận Euler để mô tả dòng chảy giao thông. Ở cùng một thời điểm t, họ không quan sát thấy cùng những xe như nhau. Vậy hai cảnh sát không nhất thiết quan sát thấy cùng một vận tốc như nhau.*

Sự mô tả Euler về một chất lỏng, xuất phát từ tên nhà toán học Léonhard EULER (1707 - 1783) (H.12), cho phép xác định, tại một điểm cho trước trong không gian, các sự biến đổi theo thời gian của một vài đặc trưng của chất lỏng như vận tốc, áp suất, nhiệt độ....

3.2. Tính độc lập của các tọa độ không gian và thời gian

Ta lại lấy hai ví dụ trên.

Ví dụ 1 : Người đi câu.

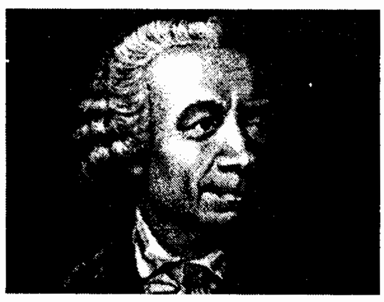
Người đi câu, trong khi quan sát một cuộn xoáy nước đang vận động ở lân cận một mỏm đá nổi giữa sông, đã chỉ quan tâm đến dòng chảy tại một điểm riêng biệt trong không gian. Người ấy quan sát vận tốc của các hạt chất lỏng, tại một điểm cho trước trong không gian, theo thời gian. *Như vậy, không có bất kỳ một mối quan hệ nào giữa các tọa độ của điểm đó với thời gian.*

Ví dụ 2 : Giao thông trên đường trục ô tô.

Những người cảnh sát giao thông "*quan sát*" vận tốc các xe theo thời gian tại một điểm riêng biệt trên đường. *Như vậy, không có bất kì một mối quan hệ nào giữa các tọa độ của điểm mà họ đang đứng với thời gian.*

Khi dùng cách mô tả Euler về dòng chảy của một chất lỏng, thì tập hợp các vận tốc tạo thành một trường vectơ $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(M, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$ phụ thuộc đồng thời vào không gian và thời gian : $\vec{r}$ và t (hay x, y, z và t) đều là các *biến số độc lập*.

Vậy ta có thể xác định cách mô tả chất lưu của Euler như sau :



H.12. *Léonhard* EULER (1707 - 1783).

Chuyển động của chất lưu sẽ được mô tả hoàn toàn nếu biết các vận tốc của các hạt chất lưu đi qua một điểm *M* cho trước trong không gian ở thời điểm $t : \vec{v}(M, t)$

- **Các tọa độ không gian và thời gian là các biến số độc lập.**
- **Hình thức luận này được sử dụng để mô tả sự biến đổi của các đại lượng đặc trưng khác của chất lưu theo thời gian, như áp suất $P(M, t)$, nhiệt độ $T(M, t)$, v.v... của nó.**
- **Quan điểm của Euler mô tả trạng thái của chất lưu đang chuyển động là kết hợp các trường với nó như : trường vận tốc, trường áp suất, trường nhiệt độ , v.v...**

Chú ý :

Đối với các đại lượng "Euler", ta lại dùng ký hiệu $\vec{r}$ (không phải $\vec{R}$) và $\vec{v}$ (chứ không phải $\vec{V}$).

3.3. Ví dụ về biểu thức của trường vận tốc theo hình thức luận Euler

Thường khi nghiên cứu chuyển động của chất lưu, bao giờ cũng có một đại lượng cho phép mô tả dòng chảy như : mức chất lưu trong ống, lưu lượng chảy ra từ một bể chứa, ...

Đại lượng này cho phép mô tả vĩ mô sự vận động của chất lưu.

Theo hình thức luận EULER, thì ta phải tìm $\vec{v}(M, t)$ tại mọi điểm *M* của chất lưu ; bao giờ cũng phải chọn một mốc để xác định vị trí điểm *M* sao cho không "mâu thuẫn" với đại lượng trước đây.

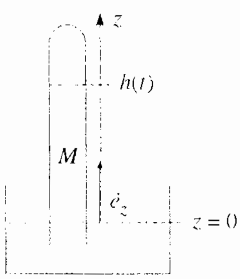
Khi mô tả chuyển động của một chất lưu theo hình thức luận Euler, thì tồn tại một biến số so mốc (hay mô tả) trạng thái (sự vận động) của chất lưu và một biến số cho phép xác định vị trí của điểm M theo quan điểm Euler.

Áp dụng 4

Trường vận tốc của chất lưu trong một ống thẳng đứng

Hãy tìm biểu thức về trường vận tốc của một chất lưu trong một ống thẳng đứng, biết rằng vận tốc là thẳng đứng và đồng nhất, ở thời điểm t, đối với mọi hạt.

Mặt thoáng của chất lưu trong ống được xác định vị trí bởi độ cao h(t) của nó (H.13a).



H.13a. *Mức của mặt thoáng chất lỏng biến đổi theo vận tốc h(t)*

Vận tốc mà ta có thể biểu thị tại điểm M là $\vec{v}(M,t)$ theo hình thức luận của EULER, còn $h(t)$ là tọa độ phụ thuộc thời gian và xác định độ cao của chất lưu trong ống (H.13a).

Ta xác định vị trí điểm M bằng độ cao z của nó trên trục ($z\,z'$) hướng lên trên (H.13b). Vận tốc $\vec{v}(M,t)$ theo hình thức luận Euler được cho bởi biểu thức :

$$\vec{v}(M,t) = \dot{h}(t)\vec{e}_z .$$

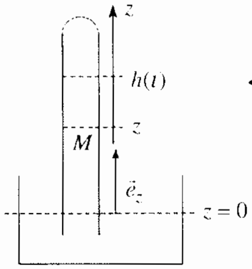
<u>*Chú ý*</u> :

Nhất thiết phải dùng hai ký hiệu h và z, vì $h(t)$ biểu diễn mức chất lỏng và z là độ cao của điểm M. Sự phụ thuộc của $\vec{v}(M,t)$ theo :

• *các tọa độ không gian được thể hiện bởi trung gian $\vec{e}_z$;*

• *thời gian được thể hiện bởi trung gian $\dot{h}(t)$*

$h(t)$ là tọa độ xác định vị trí của mức chất lỏng, còn z là tọa độ Euler.



◀ **H.13b.** *Mức mặt thoáng chất lỏng biến đổi theo vận tốc $\dot{h}(t)$. Vận tốc trong hình thức luận Euler được cho bởi $\vec{v}(M,t) = \dot{h}(t)\vec{e}_z$.*

▶ **Để tập luyện : bài tập 1 và 2.**

3.4. Tính duy nhất của vận tốc của một hạt chất lưu

• Theo quan điểm *Euler*, ta phải biết vận tốc của hạt tại M lúc t : $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t)$

• Theo quan điểm *Lagrange*, thì phải biết hạt (nghĩa là tìm kiếm nhãn của nó, *xem* §2), mà qũy đạo đi qua điểm M lúc t ($\vec{r} = \vec{R}(t)$), do vậy phải biết các tọa độ ban đầu của nó $\vec{R}(t=0)$ lúc $t = 0$.

Biết hạt này đi qua r lúc t ($\vec{r} = \vec{R}(t)$), thì vận tốc của nó lúc t là :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}(t),(t) \text{ , và ta có } \vec{V}(\vec{R}(t),t) = \vec{v}(\vec{r},t) .$$

Vận tốc Euler $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t)$ và vận tốc Lagrange $\vec{V}(\vec{R}(t),t)$ nhất thiết phải đồng nhất như nhau. Tuy nhiên, việc xử lý toán học các vận tốc này lại rất khác nhau tùy thuộc hình thức luận được sử dụng :

• Cách mô tả Lagrange dành cho các hạt chất lỏng mà ta đang theo dõi sự dịch chuyển của chúng, và kết hợp vào chúng một vận tốc.

• Cách mô tả Euler dành cho các điểm của không gian mà ta kết hợp vào chúng một trường các vận tốc phụ thuộc không gian và thời gian (là các biến số độc lập).

Ở thời điểm t, tại điểm M ta có : $\vec{V}(\vec{R}(t),t)_{LAGRANGE} = \vec{v}(\vec{r},t)_{EULER}$

Để "lại tìm thấy", xuất phát từ trường vectơ Euler $\vec{v}(\vec{r},t)$, vận tốc Lagrange của hạt tại $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ lúc t, thì cần phải tìm hạt mà quỹ đạo $\vec{R}(t)$ đi qua M ở thời điểm t là :

$$\vec{r} = \vec{R}(t) .$$

• **Cùng một vận tốc như nhau có hai cách thể hiện: $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{R}(t),t)$.**

• **Theo hình thức luận Euler thì ta có : $\vec{v}(M,t)$ hay $\vec{v}(\vec{r},t)$ với $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.**

• **Theo hình thức luận Lagrange thì ta có : $\vec{V}(t) = \vec{V}(\vec{R}(t),t)$, và hạt đang xét là hạt có quỹ đạo ở $\vec{R}(t) = \overrightarrow{OM}$ lúc t.**

Áp dụng 5

Biểu thức của vận tốc theo hình thức luận Euler

Ta trở lại áp dụng 3, liên quan đến một dòng chảy được xác định theo hình thức luận Lagrange dưới dạng :

$X_i(t) = X_{0,i}(1+bt)$ *với b không đổi*

$Y_i(t) = Y_{0,i}$,

trong đó $X_{0,i}$ *và* $Y_{0,i}$ *biểu diễn các tọa độ (ban đầu) của hạt được dán nhãn i lúc* $t = 0$.

Hãy xác định trường các vận tốc của dòng chảy này theo hình thức luận Euler.

Theo hình thức luận Lagrange, ta đã thu được :

$$\vec{V}_i(t) = \vec{V}(\vec{R}_i(t),t) = \frac{X_i(t)}{1+bt} b\vec{e}_x$$

Sự chuyển từ hình thức luận Lagrange sang hình thức luận Euler được thực hiện bằng cách coi hạt được dán nhãn i sẽ đi qua một điểm có hoành độ x ở thời điểm t nếu $x = X_i(t)$

Khi đó, tại điểm này, ta có thể viết :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{x}{1+bt}\vec{e}_x$$

Đây là trường các vận tốc theo hình thức luận Euler.

4 Biểu diễn và thể hiện các dòng chảy

Ta sẽ lại tìm thấy đối tính Lagrange - Euler trong sự biểu diễn bằng đồ thị các dòng chảy.

4.1. Quỹ đạo : quan điểm Lagrange

Ta hãy thử tìm các quỹ đạo của các hạt (quan điểm Lagrange) bằng cách sử dụng trường các vận tốc của một chất lỏng (quan điểm Euler)

H.14. *Các quỹ đạo của các hạt (ở đây là các xe cộ). Mỗi qũy dạo tương ứng với một xe khác nhau.*

4.1.1. Định nghĩa

Tập hợp *các qũy đạo của các hạt chất lỏng theo thời gian* thể hiện như một yếu tố thông tin đầu tiên. Loại biểu diễn này đi theo các hạt chất lỏng hiển nhiên là cách mô tả Lagrange

Ta có thể tưởng tượng hình ảnh của giao thông ô tô trên một mạng đường cao tốc : hình ảnh này không phải hoàn toàn là vô tư, vì việc nghiên cứu sự giao thông này thể hiện sự nghiên cứu một dòng chảy (vả lại người ta cũng nói về sự lưu thông của chất lỏng ...). Thành thử, sự biểu diễn các qũy đạo của các xe cộ cho phép thu được các thông tin về "dòng chảy" của sự giao thông (*H.*14). Có thể làm rõ các qũy đạo bằng cách chụp ảnh ban đêm với thời gian lộ sáng dài. Các dấu vết đèn pha xe cộ trên âm bản đã cụ thể hóa các qũy đạo của các xe cộ đó.

Để làm rõ các quỹ đạo của các hạt chất lỏng, ta có thể cho thêm vào chất lỏng đó các hạt nhôm mịn nhỏ và chụp ảnh với thời gian lộ sáng dài (*H.*15).

H.15. *Khi có dòng chảy này (sóng lừng), các hạt vẽ các quỹ dạo gần như vòng tròn.*

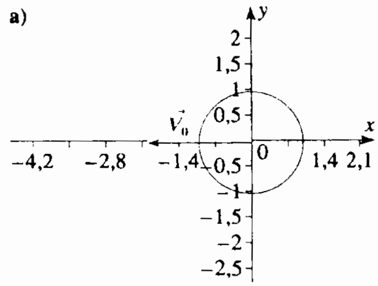
Xuất phát từ dữ liệu của trường Euler các vận tốc của chất lỏng $\vec{v}(\vec{r},t)$, và dùng sự tương ứng của các vận tốc được định nghĩa ở § **3.4** ($\vec{v}(\vec{r},t)_{\text{EULER}} = \vec{V}(\vec{R}(t),t)_{\text{LAGRANGE}}$), ta sẽ thu được quỹ đạo $\vec{R}(t)$ của hạt có mặt ở $\vec{r}$ lúc t bằng cách lấy tích phân theo thời gian của một hệ các phương trình vi phân.

Trong tọa độ Descartes mà ở đó $\dot{R}(t) = X(t)\vec{e}_x + Y(t)\vec{e}_y + Z(t)\vec{e}_z$ thì hệ phương trình vi phân thuộc dạng :

$$\frac{dX}{dt} = V_x(X(t), Y(t), Z(t), t)\ ;\ \frac{dY}{dt} = V_y(X(t), Y(t), Z(t), t)\ ;\ \frac{dZ}{dt} = V_z(X(t), Y(t), Z(t), t),$$

hay ta còn có thể đặc trưng dòng chảy của một chất lỏng nhờ biết các quỹ đạo của các hạt chất lỏng mà phương trình vi phân được xác định bởi :

$$\frac{dX}{V_x(X(t), Y(t), Z(t), t)} = \frac{dY}{V_y(X(t), Y(t), Z(t), t)} = \frac{dZ}{V_z(X(t), Y(t), Z(t), t)} = dt\ .$$



H.16a. *Hình trụ trong một chất lỏng lúc đầu nằm yên.*

Hằng số tích phân cho phép nhận biết hạt đi qua điểm M ở thời điểm t.

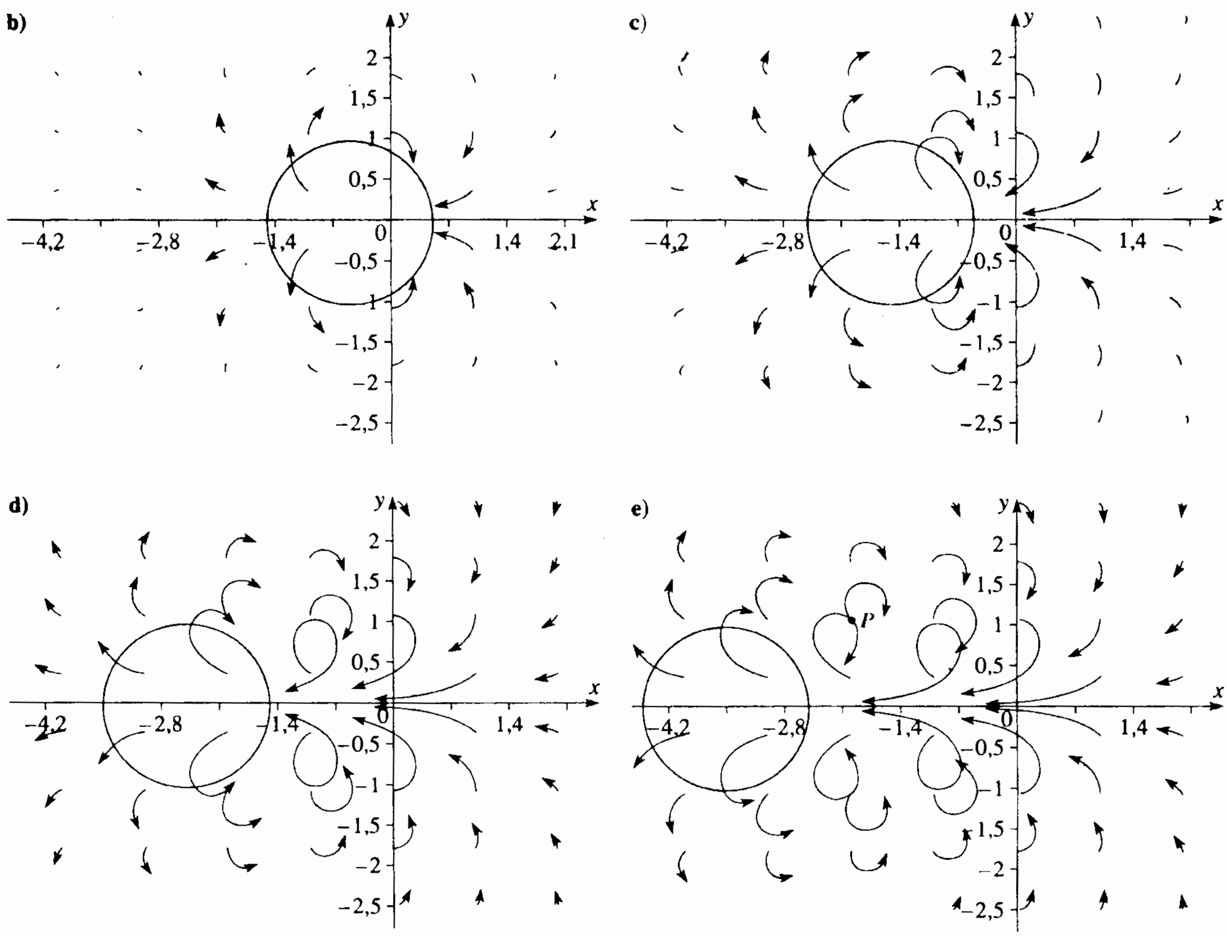
Ta sẽ nhận được nghiệm bằng một phép tính tích phân, thường chỉ có thể được thực hiện theo phương pháp số.

4.1.2. Ví dụ

Ta hãy xét chuyển động ở vận tốc không đổi $\vec{V}_0$ của một hình trụ trong một chất lỏng ban đầu nằm yên. Nếu đặt mình trong hệ quy chiếu gắn với chất lỏng thoạt đầu nằm yên, thì ta có thể làm thấy rõ dần dần các quỹ đạo của các hạt khác nhau của chất lỏng tùy theo sự dịch chuyển của hình trụ $(H.16)$.

H.16b, c, d và e. *Các mô phỏng cho thấy các quỹ đạo của các hạt chất lỏng, khi có chuyển động tiến lên của một hình trụ trong một chất lỏng lúc đầu nằm yên.*

▼



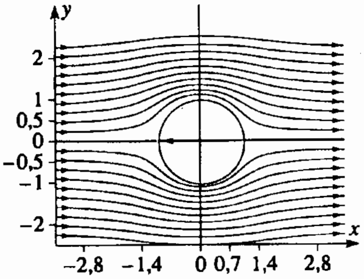
Ta có thể đưa ra những nhận xét và bình chú gì về các mô phỏng này ?

• Ta đã coi các hạt chất lỏng được phân bố đều lúc $t = 0$ trong một mặt phẳng vuông góc với các đường sinh của hình trụ (các điểm A_i). Các hạt này không tìm lại được vị trí ban đầu của chúng sau khi hình trụ đi qua.

• Có những qũy đạo cắt nhau, nghĩa là ta thấy rõ các điểm không gian mà đối với chúng thì vận tốc các hạt chất lỏng phụ thuộc tường minh vào thời gian

$$\vec{V}(P,t_1) \neq \vec{V}(P,t_2).$$

Trường vận tốc Euler trong hệ quy chiếu này không phải là trường dừng : nó phụ thuộc tường minh vào biến số t.



H.17a. *Sự mô phỏng cho thấy dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình trụ.*

4.2. Đường dòng: quan điểm Euler

4.2.1. Định nghĩa

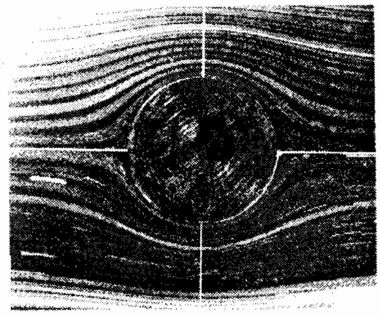
Sự biểu diễn, *ở một thời điểm* t_0 *cho trước*, tập hợp các *đường dòng* (các đường sức của trường vận tốc Euler của các hạt chất lỏng) của một chất lỏng đang chuyển động, cho ta các thông tin rất lí thú về dòng chảy của chất lỏng.

Ta trở lại ví dụ về giao thông ô tô.

Ta sẽ có khả năng nhận được một bản âm các đường dòng của sự lưu thông ô tô : trên một bức ảnh chụp với thời gian lộ sáng ngắn, thì các vệt sáng đèn pha là những đoạn nhỏ biểu thị, bằng phương và chiều dài của chúng, vận tốc của mỗi xe.

Với các đường sức của trường các vận tốc của chất lỏng (các đường dòng), thì ta lại tìm thấy quan niệm của Euler về một dòng chảy.

Phương trình các đường dòng này có thể được thiết lập bằng cách vẽ một phần tử $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$ của đường dòng, cộng tuyến với vectơ vận tốc $\vec{v}(M,t_0)$.



H.17b. *Dòng chảy xung quanh một hình trụ chiều dày nhỏ và ở vận tốc nhỏ. Sự thể hiện rõ dòng chảy nhờ các tia dầu lanh trong dầu vazơlin.*

Ta có thể đặc trưng dòng chảy của một chất lỏng bằng cách xác định các đường dòng (đường sức của trường vận tốc Euler của các hạt chất lỏng) ở thời điểm t_0, mà phương trình vi phân được cho bởi :

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}.$$

Sự lấy tích phân hệ này, ở t_0 cho trước, sẽ cho ta phương trình các đường dòng ở thời điểm đó.

Phương pháp tính này giống hệt phương pháp được dùng trong điện từ học để nghiên cứu các đường sức của điện trường hay từ trường.

4.2.2. Ví dụ

Ta lại xét ví dụ về chuyển động ở vận tốc không đổi $\vec{V}_0$ của một hình trụ trong một chất lỏng thoạt đầu nằm yên.

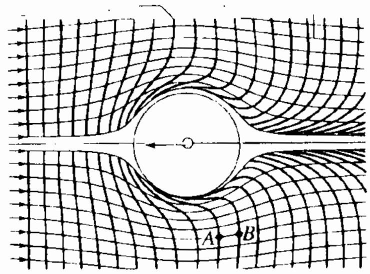
Khi đứng trong hệ quy chiếu của hình trụ : thì ta có thể nhìn thấy rõ các đường dòng (*H.*17).

Hình 17b biểu diễn một cách khác để làm thấy rõ dòng chảy này.

Chú ý :

Khi xem các hình mô phỏng hay các bức ảnh này, ta có thể nghĩ rằng một "đường chất lỏng", thoạt tiên vuông góc với dòng chảy ban đầu sẽ ít biến dạng ; tuy nhiên không đúng thế.

Trên hình mô phỏng tiếp sau (H.17c), ta đã làm nổi bật sự biến đổi của một "đường chất lỏng" như trên. Các đường này được vẽ ở những khoảng thời gian đều đặn : khoảng thời gian để một hạt chất lỏng đi từ A đến B là một bất biến khi dựng hình mô phỏng này. Sự biến dạng của "đường chất lỏng" rất mạnh.



H.17c. *Minh họa sự biến dạng của một "đường chất lỏng". Khoảng thời gian mà một hạt chất lỏng cần để đi từ A đến B là một bất biến trên hình này.*

Áp dụng 6

Các cách biểu diễn một trường quay : mô hình sóng lừng

Trường các vận tốc (hình thức luận Euler) của một dòng chảy hai chiều có dạng :

$$\vec{v} = v_0(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y).$$

Hãy xác định các quỹ đạo của các hạt và các đường dòng.

- **Các đường dòng**

Lúc t_0 thì trường các vận tốc là đều : các đường dòng là những đường thẳng hợp thành một góc ωt với trục (Ox)

- **Các quỹ đạo**

Khi lấy tích phân $\frac{dX}{dt} = v_0\cos\omega t$ và $\frac{dY}{dt} = v_0\sin\omega t$, thì ta được :

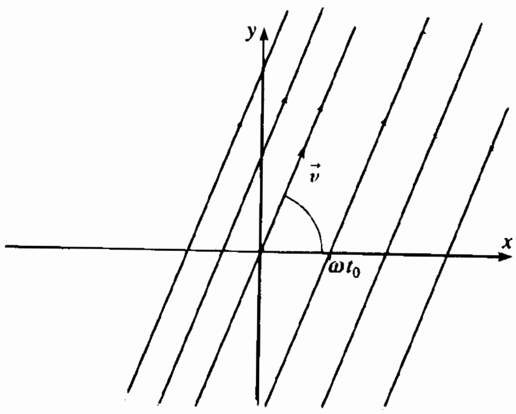
$$X(t) = X_0 + \frac{v_0}{\omega}(1-\sin\omega t) \text{ và } Y(t) = Y_0 + \frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

trong đó X_0 và Y_0 biểu diễn các tọa độ của vị trí ban đầu của hạt được xét lúc $t = 0$, hoặc :

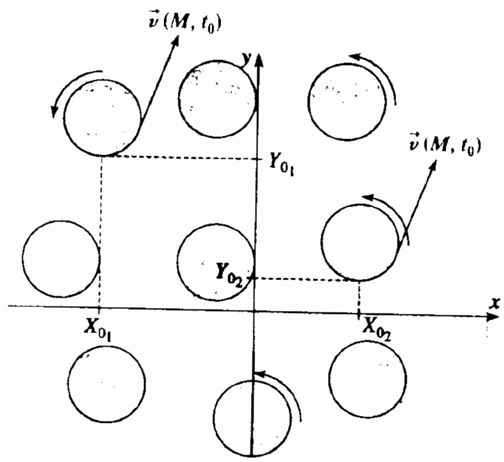
$$(X - X_0)^2 + \left(Y - Y_0 - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

nghĩa là phương trình của một vòng tròn bán kính $\frac{v_0}{\omega}$ và có tâm ở $\left(X_0, Y_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)$.

- Các đường dòng và quỹ đạo được biểu diễn trên *hình* 18.



H.18a. *Các đường dòng lúc t_0 là những đường thẳng.*



H.18b. *Quỹ đạo của các hạt khác nhau theo thời gian là các vòng tròn có cùng bán kính.*

4.3. Các đường phát xạ : cách tiếp cận thực nghiệm

Trong thực tế, khi ta muốn nghiên cứu chuyển động của một chất lưu ở lân cận một vật cản (như dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một chân vịt đang quay, hay dòng không khí xung quanh cánh của máy bay), thì vấn đề "cô lập" từng hạt chất lỏng để theo dõi qũy đạo của nó, hay biểu diễn các vận tốc của các hạt ở một thời điểm đã cho là không đơn giản.

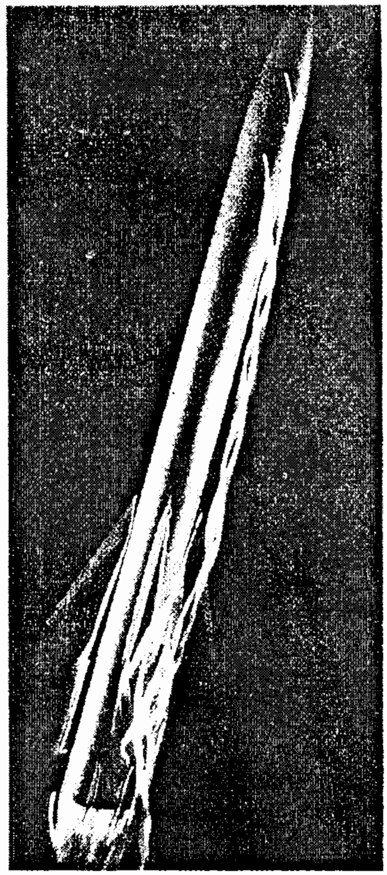
Muốn thấy rõ dòng chảy, người ta phải dùng đến các *chất đánh dấu* : tại các điểm riêng biệt của dòng chảy, người ta có thể thả một chất (càng ít làm nhiễu loạn chuyển động của chất lỏng càng tốt) được chất lưu kéo theo. Có thể là các khói trong một chất khí, các bong bóng hay các giọt chất nhuộm màu trong một chất lỏng.

Như vậy, ở một thời điểm đã cho, toàn bộ các hạt đi qua điểm này đều được "đánh dấu" và tạo thành một đường cong gọi là *đường phát xạ* (hay đường đánh dấu).

Trên *hình* 19, ta làm hiện rõ các đường phát xạ khi có một dòng chảy quanh một vật cản. Qua các lỗ nhỏ, một chất nhuộm màu được phát ra hướng về bên ngoài vật cản này ở dưới áp suất rất thấp.

Trong *bài tập 1,* ta sẽ xét một ví dụ xác định *đường phát xạ.*

Ta có thể đặc trưng dòng chảy của một chất lỏng bằng sự nhận biết các đường phát xạ ở thời điểm t_0, được tạo ra bởi tập hợp các điểm trong không gian bị chiếm bởi các hạt, trước đây đã đi qua một điểm M_0 cho trước.



H.19. *Sự thể hiện các đường phát xạ. Các chỗ nước xoáy trên một vật thể hình thoi đang đi tới. Sự làm hiện rõ bằng các tia phát xạ nhuộm màu.*

<u>*Chú ý :*</u>

Đối với một dòng chảy bất kỳ, thì các qũy đạo, các đường dòng và các đường phát xạ là những đường khác nhau. Tại một điểm M đã cho trong không gian, ở thời điểm t, thì qũy đạo của hạt ở đó, đường dòng và đường phát xạ đi qua điểm M là ba đường tiếp tuyến giữa chúng với nhau (xem bài tập 1).

4.4. Trường hợp các chế độ dừng

Ta gọi dòng chảy *dừng*, hay *khôngđổi,độc lập với thời gian*, là dòng chảy mà trường các vận tốc Euler không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian.

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r}).$$

Trong loại dòng chảy này, vận tốc của chất lỏng tại một điểm đã cho bao giờ cũng như nhau.

Nói cách khác, tất cả các hạt chất lỏng khi đi qua cùng một điểm ở những thời điểm khác nhau, đều có cùng một vận tốc, đặc trưng cho điểm đó. Các đường dòng đều "đứng im" và thời gian lúc đó không còn giữ bất kì một vai trò nào nữa (một bức ảnh, chụp ở một thời điểm bất kỳ với một thời gian lộ sáng bất kì, sẽ cho cùng một hình ảnh dòng chảy như nhau : như vậy, có sự đồng nhất của ba loại đường cong này.

Một dòng chảy dừng $\vec{v}(\vec{r})$ (độc lập với thời gian) phải sao cho trường các vận tốc của chất lỏng không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian : khi đó, có một sự đồng nhất giữa các quỹ đạo, các đường dòng và các đường phát xạ (đường đánh dấu).

Áp dụng 7

Dòng chảy trong một nhị diện vuông

1) *Ta xét một dòng chảy hai chiều thứ nhất mà trường các vận tốc, được xác định trong hệ quy chiếu $(O : x, y, z)$, trong miền $x > 0$ và $y > 0$, có dạng :*

$$\vec{v}(\vec{r},t) = -kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y .$$

Ta có thể nói gì về dòng chảy này ?

Hãy xác định các quỹ đạo của các hạt và các đường dòng.

2) *Cùng câu hỏi như trên đối với một dòng chảy ba chiều thứ hai :*

$$\vec{v}(\vec{r},t) = -kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y + a\omega\cos\omega t\vec{e}_z$$

1) Dòng chảy thứ nhất giả thiết là dừng, như vậy, sẽ có sự đồng nhất giữa các qũy đạo và các đường dòng.

Các qũy đạo nhận được từ các phương trình :

$$\frac{dX}{dt} = -kX(t), \text{ nghĩa là } X = X_0e^{-kt}$$

$$\text{và } \frac{dY}{dt} = +kY(t), \text{ nghĩa là } Y = Y_0e^{+kt}.$$

do đó : $XY = X_0Y_0$.

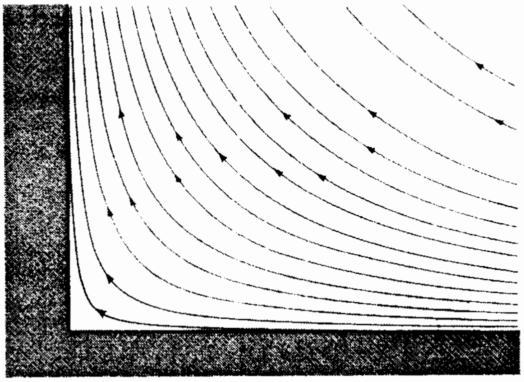
Như vậy, ta thu được một họ đường hypebon đều.

Các đường dòng nhận được từ :

$$\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{+ky}, \text{ nghĩa là } \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \text{ vậy } xy = \text{cte}.$$

Ta lại tìm thấy đúng cùng một họ các đường cong, vì ta đang ở chế độ dừng.

Các quỹ đạo và các đường dòng được biểu diễn trên *hình* 20.



H.20. *Các quỹ đạo và các đường dòng trong một nhị diện vuông.*

2) Trường hợp thứ hai tương ứng với một dòng chảy không dừng.

Các quỹ đạo là $X = X_0e^{-kt}$, $Y = Y_0e^{+kt}$ và $\frac{dZ}{dt} = a\omega\cos\omega t$, do đó $Z = Z_0 + a\sin\omega t$.

Như vậy, có sự chồng chất lên chuyển động trước, một chuyển động hình sin của z với biên độ a.

Đối với các đường dòng ta có :

$$\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{+ky} = \frac{dz}{a\omega\cos\omega t_0}$$

mà sự lấy tích phân ở t_0 cho ta $xy = \text{cte}$;

$$z = -\frac{a\omega\cos\omega t_0}{k}\ln x + \text{cte} \text{ và } z = \frac{a\omega\cos\omega t_0}{k}\ln y + \text{cte}.$$

Trường các vận tốc phụ thuộc rõ ràng vào thời gian, nên không còn có sự đồng nhất giữa các quỹ đạo và các đường dòng nữa.

4.5. Tầm quan trọng của hệ quy chiếu nghiên cứu

Ta hãy minh họa nhận xét này bằng các quan sát trước đây đối với dòng chảy ổn định (không đổi) của một chất lỏng xung quanh một hình trụ rắn.

Nhớ rằng hình trụ đang chuyển động tịnh tiến với vận tốc không đổi $\vec{V}_0$ trong chất lỏng thoạt đầu nằm yên.

• Hệ quy chiếu của hình trụ

Trong hệ quy chiếu của hình trụ thì trường các vận tốc không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian : ta có sự đồng nhất giữa các đường dòng và các quỹ đạo.

• **Hệ quy chiếu của chất lỏng thoạt đầu nằm yên**

Trong hệ quy chiếu của chất lỏng thoạt đầu nằm yên, thì trường các vận tốc phụ thuộc rõ ràng vào thời gian : không còn có sự đồng nhất giữa các đường dòng và các qũy đạo nữa.

Áp dụng 8 chứng tỏ rằng ta không có sự trùng khớp giữa hai họ đường cong theo hệ quy chiếu mà ta đang làm việc trong đó.

Áp dụng 8

Chuyển động của một hình trụ trong một chất lỏng thoạt đầu nằm yên

Một hình trụ bán kính a dịch chuyển với vận tốc không đổi V_0, vuông góc với các đường sinh của nó, trong một chất lỏng ban đầu nằm yên.

Gọi $\mathcal{R}$ là hệ quy chiếu gắn với chất lỏng thoạt đầu nằm yên, được xác định vị trí bởi hệ trục trực chuẩn, cố định $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ với $\vec{V}_0 = -V_0\vec{e}_x (V_0 > 0)$ và (Oz) song song với các đường sinh của hình trụ.

Gọi $\mathcal{R}'$ là hệ quy chiếu gắn với hình trụ, được xác định vị trí bởi hệ tọa độ cực $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ có gốc là trục hình trụ đi qua điểm O'. Lúc $t = 0$ người ta giả thiết O và O' trùng nhau (H. 21).

Trường các vận tốc trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}'$ được cho bởi :

$$\vec{v}'(r,\theta,t) = \left| \begin{array}{l} +V_0\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta.\vec{e}_r \\ -V_0\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta.\vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

1) *Hãykhảo sát vận tốc đối với $r = a$ và $r = \infty$*

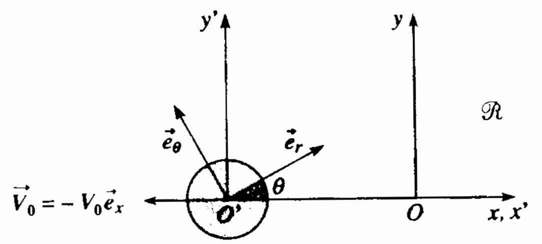
Xác định vận tốc này ở $r = a$ đối với :

$$\theta = 0,\ \theta = +\frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ và } \theta = \pi .$$

2) *Xác định trường các vận tốc $\vec{v}(M,t)$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ của chất lỏng thoạt đầu nằm yên.*

3) *Chứng tỏ rằng các đường dòng là các vòng tròn trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$.*

4) *Hãy viết các phương trình vi phân của các qũy đạo các hạt chất lỏng trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ (người ta sẽ không tìm cách giải các phương trình này !).*



H.21. *Hình trụ có tâm O' và bán kính a. Vận tốc của hình trụ đối với chất lỏng thoạt đầu nằm yên, có dạng $\vec{V}_0 = -V_0\vec{e}_x$.*

1) Đối với $r = a$, thì vận tốc xuyên tâm.

$$\vec{v}_r'(r,\theta,t) = +V_0\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta.\vec{e}_r$$

bằng không, nghĩa là vận tốc của chất lỏng tiếp tuyến với hình trụ và bằng :

$$\vec{v}'(r,\theta,t) = -2V_0\sin\theta.\vec{e}_\theta .$$

Đối với $r = \infty$, thì vận tốc bằng :

$\vec{v}'(r,\theta,t) = +V_0\cos\theta\,\vec{e}_r - V_0\sin\theta.\vec{e}_\theta$, điều này tương ứng với vận tốc $-\vec{V}_0$, vì $\vec{V}_0 = \left| \begin{array}{l} -V_0\cos\theta.\vec{e}_\theta \\ +V_0\sin\theta.\vec{e}_\theta \end{array} \right.$,

ở xa hình trụ trong hệ quy chiếu của hình trụ.

Ta hãy xét các trường hợp đặc biệt $\{r = a ; \theta = 0\}$ và $\{r = a ; \theta = \pi\}$: vận tốc của chất lỏng bằng không, hai điểm đặc biệt này được gọi là các *điểm dừng*.

Đối với $\left\{r = a; \theta = \dfrac{\pi}{2}\right\}$: $\vec{v}'\left(a, \dfrac{\pi}{2}, t\right) = -2V_0\vec{e}_\theta$;

Đối với $\left\{r = a; \theta = \dfrac{3\pi}{2}\right\}$: $\vec{v}'\left(a, \dfrac{3\pi}{2}, t\right) = +2V_0\vec{e}_\theta$.

2) Công thức cộng vận tốc khi có sự thay đổi hệ quy chiếu cho phép ta viết : $\vec{v}(M,t) = \vec{v}\,'(M,t) + \vec{V}_0$, điều này cho ta :

$$\vec{v}(r,\theta,t) = \vec{v}\,'(r,\theta,t) - \vec{V}_0 = \left| \begin{array}{l} -V_0 \dfrac{a^2}{r^2}\cos\theta . \vec{e}_r \\ -V_0 \dfrac{a^2}{r^2}\sin\theta . \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

biết rằng $\vec{V}_0 = \left| \begin{array}{l} -V_0 \cos\theta . \vec{e}_r \\ +V_0 \sin\theta . \vec{e}_\theta \end{array} \right.$

3) Giờ ta đi tìm các đường dòng, nghĩa là các đường trường vận tốc $\vec{v}(M,t_0)$ trong $\mathscr{R}$.

Vì thời điểm t_0 là cố định, nên có thể nghien cứu các đường trường nhờ mốc $(0'\,;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$. Phương trình vi phân của chúng được xác định (lúc t_0, nhưng ở đây thời gian không can dự vào) bởi :

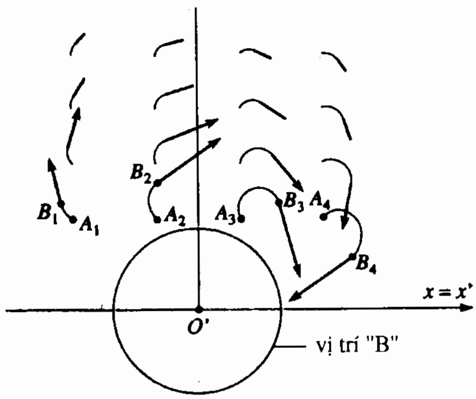
$$\frac{\mathrm{d}r}{v_r(r,\theta,t_0)} = \frac{r\,\mathrm{d}\theta}{v_\theta(r,\theta,t_0)},$$

nghĩa là $\dfrac{r^2\mathrm{d}r}{V_0 a^2\cos\theta} = \dfrac{r^3\mathrm{d}\theta}{V_0 a^2 \sin\theta}$ hay $\dfrac{\mathrm{d}r}{r} - \dfrac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = 0$.

mà nghiệm là $r = 2R_0\sin\theta$, phương trình của một vòng tròn bán kính R_0 và tâm $(x' = 0,\ y' = R_0)$. Thật vậy, khi nhân với r, và nhận thấy rằng $y' = r\sin\theta$ và $r^2 = x'^2 + y'^2$, thì ta được : $x'^2 + y'^2 = 2R_0 y'$, hay

$$\frac{x'^2}{R_0^2} + \frac{(y' - R_0)^2}{R_0^2} = 1.$$

Như vậy, ở thời điểm t_0, các đường dòng được cấu tạo bằng các đoạn của các vòng tròn mà các tâm đều ở trên đường thẳng $(O'\,y')$. Điều này được thể hiện rất rõ nhờ các hình mô phỏng kết hợp (*H. 22a, b, c và d).*



H.22.a. *Làm hiện rõ các quỹ đạo và các vận tốc của các hạt khác nhau ở một thời điểm t cho trước.*

4) Để nghiên cứu các quỹ đạo, ta biểu thị rõ các thành phần vận tốc trong hệ quy chiếu $(0\,;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$:

$$\vec{v}(r,\theta,t) = \left| \begin{array}{l} V_0 \dfrac{a^2}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,\vec{e}_x \\ -2V_0 \dfrac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_y \end{array} \right.$$

Biết rằng $\sin\theta = \dfrac{y'}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x'}{r}$, $r^2 = x'^2 + y'^2$.

$x' = x + V_0 t$ và $y' = y$, ta được :

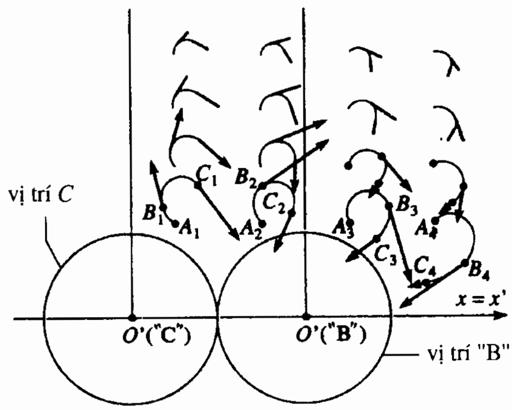
$$\vec{v}(x,y,t) = \left| \begin{array}{l} V_0 \dfrac{a^2(y^2 - (x + V_0 t)^2)}{[(x + V_0 t)^2 + y^2]^2}\vec{e}_x \\ -2V_0 \dfrac{a^2(x + V_0 t)y}{[(x + V_0 t)^2 + y^2]^2}\vec{e}_y \end{array} \right.$$

Nếu đặt $\vec{v}(x,y,t) = \vec{V}(X(t),Y(t),t)$, thì các quỹ đạo sẽ là các nghiệm của các phương trình vi phân sau đây : $\dfrac{\mathrm{d}X}{V_x(X(t),Y(t),t)} = \dfrac{\mathrm{d}Y}{V_y(X(t).Y(t) < t)}$,

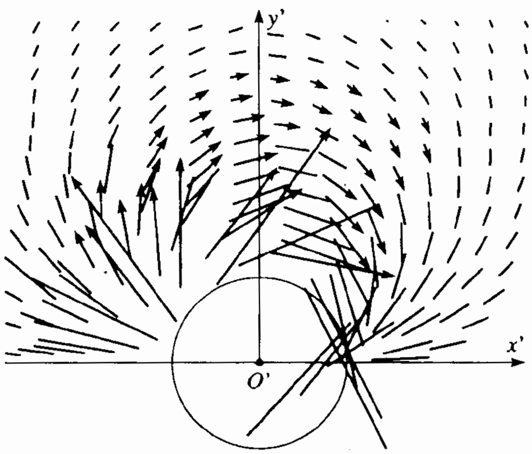
nghĩa là :

$$\frac{\mathrm{d}X}{V_0 a^2 (Y(t)^2 - (X(t) + V_0 t)^2)} = \frac{\mathrm{d}Y}{-2V_0 a^2 (X(t) + V_0 t) Y(t)} = \frac{\mathrm{d}t}{[(X(t) + V_0 t)^2 + Y(t)^2]^2},$$

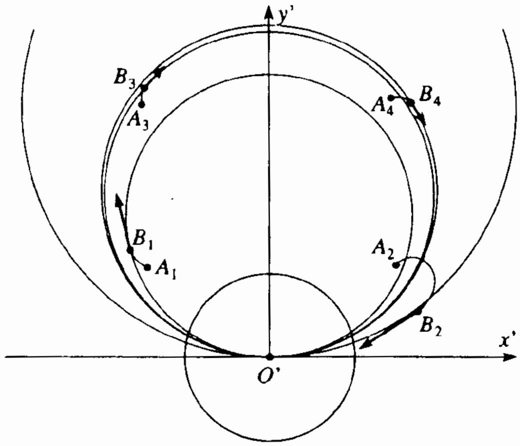
nghĩa là chỉ duy nhất phép tích phân mới cho phép làm thấy rõ các quỹ đạo (*H.*22).



H.22b. *Làm hiện rõ các quỹ đạo và các vận tốc của các hạt khác nhau đối với hai thời điểm t cho trước.*



H.22c. *Cái nhìn bao quát về trường các vận tốc ở một thời điểm t.*



H.22d. *Các đường dòng là các vòng tròn.*

5 Phép lấy đạo hàm toàn phần

5.1. Ý nghĩa vật lý của một biến thiên toàn phần

Ta hãy xét chuyển động rơi của một người nhảy dù (*H.23*) có vận tốc thẳng đứng không đổi $\vec{v} = v\vec{e}_z$ với $v < 0$ trong bầu khí quyển mà nhiệt độ không đổi, nhưng lại phụ thuộc độ cao theo định luật :

$$T(z) = T_0 + \alpha z \text{ với } \alpha < 0$$

Như vậy, tồn tại một gradiên nhiệt độ $\overrightarrow{\text{grad}}\, T = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z = \alpha\vec{e}_z$.

Giả sử người nhảy dù muốn nghiên cứu các độ biến thiên nhiệt độ T_{para} : $\dfrac{\mathrm{d}T_{\text{para}}}{\mathrm{d}t}$ mà người ấy "nhìn thấy" trong thời gian rơi của mình.

■ **Phương pháp 1**

Giả sử người nhảy dù tới đất lúc t_0, nên độ cao của người ấy lúc nhảy $Z_{\text{para}}(t)$ được cho bởi :

$$Z_{para} = v(t - t_0) \text{ với } v < 0.$$

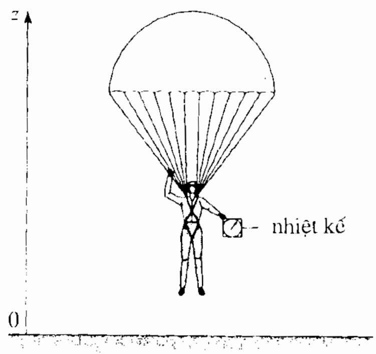
Vì chỉ thị của nhiệt kế là tức thời, nên nhiệt kế sẽ chỉ rõ nhiệt độ :

$$T_{\text{para}} = T_0 + \alpha Z_{\text{para}} = T_0 + \alpha v(t - t_0).$$

Như vậy, ta được $\dfrac{\mathrm{d}T_{\text{para}}}{\mathrm{d}t} = \alpha v > 0$.

■ **Phương pháp 2**

Trong thời gian dt, người nhảy dù đã dịch chuyển được $dZ = v dt$ mà ta còn có thể viết $\mathrm{d}\vec{M} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$. Độ biến thiên nhiệt độ tương ứng được xác định bởi $\mathrm{d}T_{\text{para}} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}Z$ mà ta cũng có thể viết $\mathrm{d}T = \overrightarrow{\text{grad}}\,T \cdot \mathrm{d}\vec{M}$.



H.23. *Người nhảy dù nghiên cứu sự biến đổi của nhiệt độ trong thời gian rơi của mình (giả thiết là nhiệt kế cho nhiệt độ tức thời T_{para} tồn tại ở độ cao của người nhảy dù).*

Đặt $dZ = v\mathrm{d}t$, nghĩa là $\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$, do đó $\mathrm{d}T_{\text{para}} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}v\,\mathrm{d}t$, hay $\mathrm{d}T_{\text{para}} = \vec{v}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ T\,\mathrm{d}t$.

Ta còn nhận được $\dfrac{\mathrm{d}T_{\text{para}}}{\mathrm{d}t} = \alpha v$. Hệ thức này cũng có thể được viết $\dfrac{\mathrm{d}T_{\text{para}}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,T$.

Độ biến thiên này biểu diễn độ biến thiên cục bộ của nhiệt độ "được nhìn thấy" bởi người nhảy dù mà ta coi như một hạt. Nó mang tên *biến thiên toàn phần* hay *đạo hàm toàn phần* của nhiệt độ được ký hiệu "$\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$" để khỏi nhầm lẫn với đạo hàm riêng phần đối với thời gian : $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ (đại lượng triệt tiêu trong trường hợp ta quan tâm) hay đạo hàm riêng phần đối với độ cao z : $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ (đại lượng bằng α trong trường hợp này).

Thành thử một người nhảy dù, khi cầm trong tay một nhiệt kế và quan sát nhiệt độ biến đổi theo thời gian, thực ra là đo đạo hàm toàn phần $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$.

Trong ví dụ xét trên (thì nhiệt độ là dừng nhưng không đều), người nhảy dù quan sát một độ biến thiên (gọi là *biến thiên* đối lưu) $\dfrac{DT}{Dt} = \vec{v}.\overrightarrow{grad}\,T$

Nếu người đó có thể làm ngừng sự rơi của mình, thì anh ta sẽ quan sát thấy, ở chế độ không dừng, một sự biến đổi cục bộ về nhiệt độ : $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$ của nhiệt độ tại điểm mà anh ta dừng lại.

Trong trường hợp tổng quát, ta có : $\dfrac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)T$.

5.2. Ý nghĩa vật lý của một biến thiên toàn phần đối với một chất lưu

Ví dụ trên đây cho phép hiểu rõ khái niệm về phép lấy đạo hàm toàn phần. Ta hãy tưởng tượng một người (*H*.24) "ngồi trên" một hạt chất lưu: các độ biến thiên của các đại lượng mà anh ta đo được là các độ biến thiên toàn phần. Đối với hạt chất lưu này, thì các phép lấy đạo hàm của một đại lượng vô hướng g (hay đại lượng vectơ $\vec{G}$) được ký hiệu là $\dfrac{\mathrm{D}g}{\mathrm{D}t}$, hay $\dfrac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t}$.

H.24. *Sự làm nổi bật khái niệm biến thiên toàn phần hay đạo hàm toàn phần.*

Như vậy đạo hàm toàn phần của một hàm vô hướng g sẽ có dạng :

$$\frac{\mathbf{D}g}{\mathbf{D}t} = \frac{g(M + \mathrm{d}\vec{M},\, t + \mathrm{d}t) - g(M, t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{với } \mathrm{d}\vec{M} = \vec{v}(M, t)\mathrm{d}t$$

Và với hàm vectơ $\vec{G}$ cũng như thế :

$$\frac{\mathbf{D}\vec{G}}{\mathbf{D}t} = \frac{\vec{G}(M + \mathrm{d}\vec{M},\, t + \mathrm{d}t) - \vec{G}(M, t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{với } \mathrm{d}\vec{M} = \vec{v}(M, t)\mathrm{d}t.$$

Chú ý :

Giả thử khi đo dòng chảy của một chất lưu, ta thu được các kết quả sau : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ *hay* $\frac{DP}{Dt} = 0$. *Điều này có ý nghĩa vật lí gì ?*

Khi ta đi theo một hạt chất lưu thì khối lượng riêng ρ của hạt đó không biến đổi theo thời gian. Vậy hạt chất lưu này có khối lượng không đổi (theo định nghĩa), thể tích của nó cũng không biến đổi theo thời gian. Và như vậy áp suất P tác dụng lên hạt chất lưu cũng không biến đổi theo thời gian.

5.3. Phép lấy đạo hàm toàn phần của một đại lượng vô hướng g

Trong sự mô tả động học các dòng chảy, ta đã đi từ khái niệm Lagrange đến khái niệm Euler, thiên về trường các vận tốc của chất lưu. Ta thử tìm cách biểu thị sự lấy đạo hàm toàn phần của một đại lượng vô hướng.

Ta biết rằng $\vec{v}(\vec{r}, t)_{\text{Euler}} = \vec{V}(\vec{R}(t), t)_{\text{Lagrange}}$ trong đó $\vec{R}(t)$ biểu diễn qũy đạo của hạt đi qua M lúc t. Vậy, ở thời điểm t, ta có :

$$\vec{r} = \vec{R}(t) = \vec{OM}.$$

Ta hãy xét một đại lượng vô hướng $g(\vec{r}, t)$ (viết theo hình thức luận Euler), với g có thể biểu diễn khối lượng riêng ρ, áp suất P, ... và tìm cách tính :

$$\frac{Dg}{Dt}.$$

Trong thời gian dt, hạt di chuyển từ điểm M (X, Y, Z) đến điểm $M'(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$ với $dX = v_x dt$, $dY = v_y dt$ và $dZ = v_z dt$, nghĩa là $d\vec{M} = \vec{v}dt$. Đại lượng g biến thiên "Dg" sao cho :

$$Dg = \frac{\partial g}{\partial x}dX + \frac{\partial g}{\partial y}dY + \frac{\partial g}{\partial z}dZ + \frac{\partial g}{\partial t}dt,$$

do đó : $Dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}v_x + \frac{\partial g}{\partial y}v_y + \frac{\partial g}{\partial z}v_z + \frac{\partial g}{\partial t}\right)dt$, tương ứng với một phép lấy đạo hàm toàn phần.

Đạo hàm toàn phần của một đại lượng vô hướng g bằng :

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + v_x\frac{\partial g}{\partial x} + v_y\frac{\partial g}{\partial y} + v_z\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\, g = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)g.$$

Đạo hàm toàn phần này được phân tích thành :

- **$\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$ là đạo hàm đối lưu, nó biểu thị tính chất không đều của g ;**
- **$\frac{\partial}{\partial t}$ là đạo hàm riêng, nó biểu thị tính chất thay đổi của g.**

Thành thử ta có thể viết đạo hàm toàn phần của khối lượng riêng như sau :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\, \rho.$$

5.4. Phép lấy đạo hàm toàn phần của một đại lượng vectơ $\vec{G}$

Ta giữ nguyên các ký hiệu như trên, và xét một đại lượng vectơ $\vec{G}(\vec{r},t)$ (theo hình thức luận Euler), ví dụ $\vec{G}$ có thể biểu diễn vận tốc $\vec{v}(\vec{r},t)$.

Ta viết $\vec{G}$ dưới dạng : $\vec{G} = G_x\vec{e}_x + G_y\vec{e}_y + G_z\vec{e}_z$. Các vectơ $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị cố định (hệ tọa độ Descartes trực chuẩn) của hệ quy chiếu mà ta đang làm việc trong đó. Các vectơ đơn vị này đều bất biến theo thời gian.

Vậy, đạo hàm toàn phần của $\vec{G}$ có dạng $\dfrac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\mathrm{D}G_x}{\mathrm{D}t}\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{D}G_y}{\mathrm{D}t}\vec{e}_y + \dfrac{\mathrm{D}G_z}{\mathrm{D}t}\vec{e}_z$

Nhưng ta biết rằng $\dfrac{\mathrm{D}G_x}{\mathrm{D}t} = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G_x + \dfrac{\partial G_x}{\partial t}$ (và các hệ thức tương đương đối với các tọa độ của G theo $\vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$ là : G_y và G_z), nhờ đó ta được :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial G_x}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G_x\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial G_y}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G_y\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial G_z}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, G_z\right)\vec{e}_z,$$

nghĩa là : $\dfrac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)G_x\vec{e}_x + \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)G_y\vec{e}_y + \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)G_z\vec{e}_z$.

vậy thì : $\dfrac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(G_x\vec{e}_x + G_y\vec{e}_y + G_z\vec{e}_z)$. hay :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(G_x\vec{e}_x + G_y\vec{e}_y + G_z\vec{e}_z).$$

Để giữ lại một hệ thức vectơ, ta đưa vào toán tử $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})$, mà biểu thức ký hiệu trong tọa độ Descartes có dạng:

$$(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Đạo hàm toàn phần của một đại lượng vectơ $\vec{G}$ được xác định bởi :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{G}}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{G}.$$

Đạo hàm toàn phần này còn được phân tích thành :

- **$\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ là đạo hàm đối lưu, nó biểu thị tính chất không đều của $\vec{G}$;**
- **$\dfrac{\partial}{\partial t}$ là đạo hàm riêng phần, nó biểu thị tính chất không ổn định của $\vec{G}$.**

Chú ý :

- *Như vậy, trong tọa độ Descartes, biểu thức khai triển có dạng :*

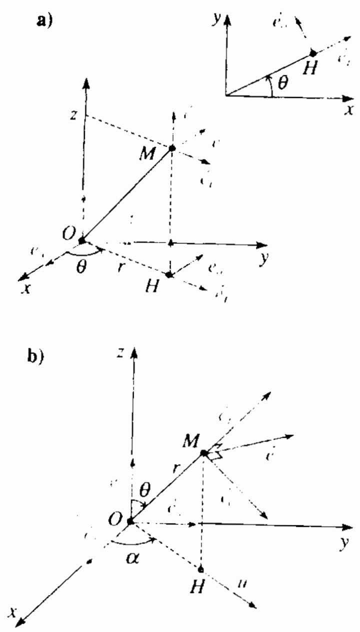
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}G_x}{\mathrm{D}t} \\ \dfrac{\mathrm{D}G_y}{\mathrm{D}t} \\ \dfrac{\mathrm{D}G_z}{\mathrm{D}t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial G_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial G_z}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_x\dfrac{\partial G_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial G_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial G_x}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial G_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial G_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial G_y}{\partial z} \\ v_x\dfrac{\partial G_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial G_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial G_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Trong các hệ tọa độ khác với các tọa độ Descartes, biểu thức $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G}$ *vẫn còn hiệu lực, và có dạng (H. 25) trong :*

- tọa độ trụ : $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(G_r\vec{e}_r + G_\theta\vec{e}_\theta + G_z\vec{e}_z)$;

- tọa độ cầu : $\frac{D\vec{G}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(G_r\vec{e}_r + G_\theta\vec{e}_\theta + G_\varphi\vec{e}_\varphi)$;

và đừng quên rằng chính các vectơ $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ và $\vec{e}_\varphi$ đều có thể lấy đạo hàm được đối với các biến số không gian.



H.25. *Các hệ trục được sử dụng.*
a. *Các tọa độ trụ.*
b. *Các tọa độ cầu.*

5.2. Áp dụng : gia tốc của một hạt

Bây giờ ta tìm cách biểu thị gia tốc của một hạt chất lỏng xuất phát từ trường Euler các vận tốc. Theo định nghĩa, thì đây là độ biến thiên vận tốc của hạt này khi ta đi theo nó ; và như vậy đây là đạo hàm toàn phần của vận tốc : $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$, nghĩa là : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\vec{v}(M + d\vec{M}, t + dt) - \vec{v}(M, t)}{dt}$ với $d\vec{M} = \vec{v}(M,t)dt$.

Ta phải có (điều mà ta sẽ kiểm nghiệm trong các áp dụng khác nhau và các bài tập) :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}(M,t)_{\text{EULER}}}{Dt} = \frac{d\vec{V}(\vec{R}(t),t)_{\text{LAGRANGE}}}{dt} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}.$$

Áp dụng công thức lấy đạo hàm toàn phần của một đại lượng vectơ cho vận tốc của một hạt chất lưu, thì ta được :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}.$$

Xuất phát từ trường Euler các vận tốc, ta sẽ có được gia tốc của một hạt chất lưu bằng cách tính đạo hàm toàn phần của $\vec{v}$:

$$\boldsymbol{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}.$$

Ta ký hiệu $\frac{D}{Dt} = \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}} + \frac{\partial}{\partial t}$ là đạo hàm toàn phần này. Nó được phân tích thành :

- **$\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$ là đạo hàm đối lưu, nó biểu thị tính chất không đều của vận tốc ;**
- **$\frac{\partial}{\partial t}$ là đạo hàm riêng, nó biểu thị tính chất không ổn định của vận tốc này.**

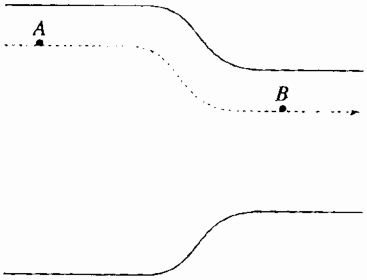
Chú ý là $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$ (xem phụ lục).

Để hiểu rõ số hạng đối lưu, ta lấy ví dụ về một ghềnh sông.

Ta đặt mình ở chế độ dừng : vận tốc của chất lỏng tại mỗi điểm của dòng sông đều giữ nguyên một giá trị không đổi theo thời gian : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})$.

Vận tốc không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian, vậy số hạng gia tốc ở $\frac{\partial}{\partial t}$ bằng không .

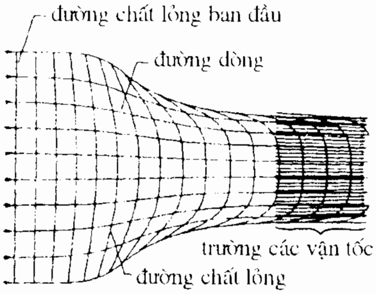
Các đường dòng lúc đó sẽ đồng nhất với các quỹ đạo của các hạt (H.26a). Lòng sông có mặt cắt nhỏ hơn ở ngang mức của điểm B, và bằng "trực giác", ta thấy vận tốc ở B lớn hơn vận tốc ở A. Một hạt chất lỏng, đi từ A đến B, sẽ thấy vận tốc của nó tăng lên : như vậy, nhất thiết hạt đã tăng tốc, tuy rằng trường vận tốc của chất lỏng không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian. Ở chế độ dừng, gia tốc là thuần đối lưu, nghĩa là được gắn với chuyển động hay sự đối lưu của chất lỏng.



H.26a. *Ống dẫn có một chỗ hẹp lại : chất lỏng ở chế độ ổn định được tăng tốc.*

<u>*Chú ý :*</u>

Trên hình 26b, ta đã vẽ sự biến đổi của một đường chất lỏng : đường này bị biến dạng mạnh, nhưng trường các vận tốc ở mặt cắt lại gần như đều.



H.26b. *Sự biến đổi các đường chất lỏng của một chất nước khi có chỗ hẹp lại.*

Áp dụng 9

Dòng chảy trong một nhị diện vuông

Giả sử có dòng chảy hai chiều (xem áp dụng 7) mà trường các vận tốc, được xác định trong miền $x > 0$ và $y > 0$, là $\vec{v}(M,t)$ ($-kx$, ky) trong một hệ quy chiếu (0 ; x, y, z).

Hãy xác định gia tốc của một hạt chất lỏng.

• Công trong hình thức luận Euler

Ta có :

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{Dv_x}{Dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - kx\dfrac{\partial}{\partial x} + ky\dfrac{\partial}{\partial y}\right) - kx = k^2x \\ a_y = \dfrac{Dv_y}{Dt} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - kx\dfrac{\partial}{\partial x} + ky\dfrac{\partial}{\partial y}\right) + ky = k^2y \end{cases}$$

do đó : $\vec{a} = k^2\overrightarrow{OM}$.

• Công trong hình thức luận Lagrange

Các quỹ đạo của dòng chảy này được xác định bởi :

$$X = X_0e^{-kt} \quad \text{và} \quad Y = Y_0e^{+kt}.$$

Ta tính vận tốc $\vec{V}(t)$ (hình thức luận Lagrange) :

$$\begin{cases} V_x(t) = \dfrac{dX}{dt} = -kX_0e^{-kt} = -kX(t) \\ V_y(t) = \dfrac{dY}{dt} = +kY_0e^{+kt} = +kY(t) \end{cases}$$

và gia tốc $\vec{a}$:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x(t)}{dt} = \dfrac{d(-kX_0e^{-kt})}{dt} = k^2X_0e^{-kt} = k^2X(t) \\ a_y = \dfrac{dV_y(t)}{dt} = \dfrac{d(kY_0e^{+kt})}{dt} = k^2Y_0e^{+kt} = k^2Y(t) \end{cases}$$

Như vậy ta thu được đúng cùng những kết quả như nhau đối với :

$$\vec{r} = \vec{R}(t) = X(t)\vec{e}_x + Y(t)\vec{e}_y$$

Chú ý rằng một sự tính toán có hệ thống gia tốc của một hạt chất lưu mà sử dụng phép lấy đạo hàm toàn phần, thì đôi khi là vô ích, nhất là trong tọa độ trụ, điều mà ta có thể thấy trong ví dụ sau đây.

Giả sử phải tính gia tốc của một hạt chất lưu đối với một dòng chảy phẳng của chất lưu mà trường các vận tốc trong hình thức luận Euler được xác định bởi :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r, t)\vec{e}_\theta .$$

Dùng phép lấy đạo hàm toàn phần ta được :

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t).\overrightarrow{\text{grad}}\right)v(r, t)\vec{e}_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(r, t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)v(r, t)\vec{e}_\theta$$

$$= \frac{\partial v(r, t)}{\partial t}\vec{e}_\theta + \frac{v^2(r, t)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta = \frac{\partial v(r, t)}{\partial t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2(r, t)}{r}\vec{e}_r$$

<u>Chú ý :</u>

Các biến số không gian và thời gian là các biến độc lập, nên không cần phải dùng đến phép lấy đạo hàm theo thời gian của các vectơ đơn vị $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$.

• Các đường dòng và các qũy đạo đều là các vòng tròn $(\vec{v}_r = \vec{0})$. Trên một qũy đạo bán kính $R = r$ (R độc lập với thời gian), thì vận tốc Lagrange của hạt ở M được xác định bởi $\vec{V}(\vec{R}(t), t) = V(R, t)\vec{e}_\theta$ $(R = \text{cte})$. Vận tốc này phụ thuộc rõ ràng vào thời gian, nên gia tốc của hạt được xác định bởi :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(\vec{R}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V(R, t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{V^2(R, t)}{R}\vec{e}_r ,$$

là biểu thức cổ điển của gia tốc được tính toán theo hình thức luận Lagrange. Biểu thức này hoàn toàn đồng nhất với :

$$\vec{a} = \frac{\partial v(r, t)}{\partial t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2(r, t)}{r}\vec{e}_r .$$

▶ **Để tập luyện : bài tập 3, 4, 7 và 8.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ Thang đo kích cỡ hạt chất lưu là thang trung mô, trung gian giữa các thang vi mô và vĩ mô. Nó cho phép kết hợp với hạt này các đại lượng vĩ mô để mô tả chất lưu như một môi trường liên tục.

■ CÁCH MÔ TẢ CHẤT LƯU CỦA LAGRANGE

Chuyển động của chất lưu được mô tả hoàn toàn nếu biết các quỹ đạo $\vec{R}_i(t)$ của từng hạt chất lưu. Vận tốc của các hạt này được xác định bởi $\vec{V}(\vec{R}_i(t),t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}_i(t)}{\mathrm{d}t}$ với $\vec{R}_i(t)$ là vị trí ở thời điểm t của hạt mà ban đầu hạt ở $\vec{R}_i(0)$ lúc $t = 0$.

Các vận tốc này, kết hợp với các hạt chất lưu, chỉ phụ thuộc rõ ràng vào thời gian và các tọa độ ban đầu của hạt, nghĩa là chỉ phụ thuộc vào $\vec{R}(t)$.

■ CÁCH MÔ TẢ CHẤT LƯU CỦA EULER

Chuyển động của chất lưu được mô tả hoàn toàn nếu biết các vận tốc của các hạt chất lưu đi qua một điểm M cho trước trong không gian ở thời điểm t : $\vec{v}(M, t)$.

• Các tọa độ không gian và thời gian là các biến số độc lập.

• Hình thức luận này được sử dụng để mô tả sự biến đổi của các đại lượng đặc trưng khác của chất lưu theo thời gian như áp suất $P(M, t)$, nhiệt độ $T(M, t)$ của nó, v.v...

• Quan điểm Euler mô tả trạng thái của chất lưu đang chuyển động bằng cách kết hợp các trường với chất lưu như : trường vận tốc, trường áp suất, trường nhiệt độ ...

• Khi mô tả chuyển động của một chất lưu theo hình thức luận Euler, thì tồn tại một biến số đánh dấu (hay mô tả) trạng thái (chuyển động) của chất lưu, và một biến số cho phép một sự định vị Euler của điểm M

■ KẾT LUẬN

• Cùng một vận tốc có hai cách thể hiện : $\vec{v}(\vec{r}, t)=\vec{V}(\vec{R}(t), t)$.

• Trong hình thức luận Euler, ta có : $\vec{v}(M, t)$ hay $\vec{v}(\vec{r}, t)$ với $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.

• Trong hình thức luận Lagrange thì : $\vec{V}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{V}(\vec{R}(t), t)$; hạt được khảo sát là hạt có quỹ đạo ở $\vec{R}(t)=\overrightarrow{OM}$ ở thời điểm t.

■ DÒNG CHẢY CỦA MỘT CHẤT LỎNG

• Dòng chảy của một chất lỏng được đặc trưng bởi :

– các quỹ đạo của các hạt : quỹ đạo của một hạt được tạo thành bởi tập hợp các điểm trong không gian mà hạt chiếm giữ theo thời gian ;

– các đường dòng : ở t_0 cho trước, đường dòng là một đường cong mà vectơ vận tốc tiếp tuyến với nó tại mọi điểm ;

– Các đường phát xạ : ở t_0 cho trước, đường phát xạ được tạo thành bởi tập hợp các điểm trong không gian bị chiếm bởi các hạt trước đây đã đi qua một điểm M_0 cho trước.

• Phương trình vi phân nghiệm đúng quỹ đạo các hạt chất lưu có dạng :

$$\frac{dX}{V_x(X(t),Y(t),Z(t),t)}=\frac{dY}{V_y(X(t),Y(t),Z(t),t)}=\frac{dZ}{V_z(X(t),Y(t),Z(t),t)}=dt.$$

Hằng số tích phân cho phép ta nhận biết hạt đi qua M ở thời điểm t.

• Ta có thể đặc trưng dòng chảy của một chất lưu bằng việc xác định các đường dòng (là đường trường của trường các vận tốc Euler của các hạt chất lưu) ở thời điểm t_0, mà phương trình vi phân có dạng :

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)}=\frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)}=\frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}.$$

• Một dòng chảy dừng $\vec{v}(\vec{r})$ phải sao cho trường các vận tốc của chất lưu không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian. Khi đó có sự đồng nhất giữa các quỹ đạo, các đường dòng và các đường phát xạ.

■ PHÉP LẤY ĐẠO HÀM TOÀN PHẦN

• Phép lấy đạo hàm toàn phần của một hàm vô hướng g có dạng $\frac{Dg}{Dt}=\frac{g(M+d\vec{M},t+dt)-g(M,t)}{dt}$ và cũng tương tự với một hàm vectơ $\vec{G}$: $\frac{D\vec{G}}{Dt}=\frac{\vec{G}(M+d\vec{M},t+dt)-\vec{G}(M,t)}{dt}$ với $d\vec{M}=\vec{v}(M,t)dt$ trong cả hai trường hợp.

• Đạo hàm toàn phần của một đại lượng vô hướng được cho bởi :

$$\frac{Dg}{Dt}=\frac{\partial g}{\partial t}+\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,g=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)g.$$

Đạo hàm toàn phần của một đại lượng vectơ $\vec{G}$ được cho bởi :

$$\frac{D\vec{G}}{Dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G}.$$

Các đạo hàm toàn phần này được phân tích thành :

• $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$ là đạo hàm đối lưu, nó biểu thị tính chất không đều của đại lượng ;

• $\frac{\partial}{\partial t}$ là đạo hàm riêng, nó biểu thị tính chất không ổn định của đại lượng.

• Xuất phát từ trường vận tốc Euler, ta nhận được gia tốc của một hạt chất lưu bằng cách tính đạo hàm toàn phần của $\vec{v}$;

$$\vec{a}=\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}.$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

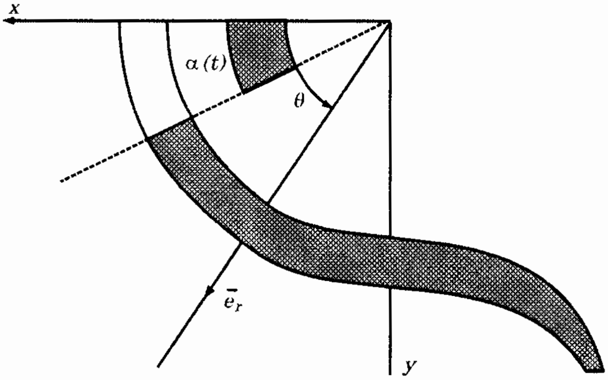
1* Trường các vận tốc và gia tốc trong hình thức luận Euler

1) Hãy viết theo hình thức luận Euler trường các vận tốc của một chất lưu chảy ra từ một ống có dạng một phần tư vòng tròn bán kính R với các đặc trưng như sau :

- vận tốc của một hạt là trực xuyên tâm ;
- các vận tốc của các hạt, ở thời điểm t, đều giống nhau về độ lớn.

Mặt thoáng của chất lưu trong ống được định vị bởi góc $\alpha(t)$.

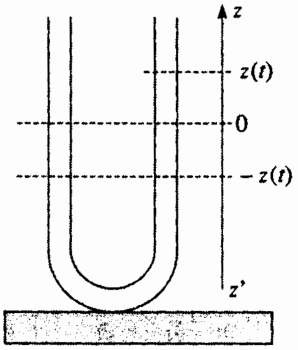
2) Hãy tính gia tốc của một hạt chất lưu.



2* Trường Euler các vận tốc của một chất lỏng trong một ống hình chữ *U*

Hãy viết biểu thức của trường các vận tốc của một chất lỏng trong ống chữ U, biết rằng vận tốc giống hệt nhau về độ lớn, ở thời điểm t, đối với mọi hạt chất lỏng.

Mặt thoáng của chất lỏng ở nhánh phải ống chữ U được định vị bởi độ cao $z(t)$ của nó.



3* Nghiên cứu trường các vận tốc trong hình thức luận Euler

Giả sử có một dòng chảy được xác định theo hình thức luận Lagrange dưới dạng :

$X(t) = X_0(1+bt)$ với b không đổi

$Y(t) = Y_0$.

Hãy xác định gia tốc của một hạt, trực tiếp và bằng cách dùng hình thức luận Euler.

4* Đường dòng và quỹ đạo

Giả sử một trường vận tốc, với trục (Oz) thẳng đứng và hướng lên cao, được xác định bởi $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = u_0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{vmatrix}$.

Hãy xác định các quỹ đạo, các đường dòng và đường phát xạ xuất phát từ điểm (0, 0).

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5** Trường các vận tốc trong một nhị diện

Cho một hệ quy chiếu $\mathcal{R}'(0' ; x', y', z')$ chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{V}_0 = V_0\vec{e}_y$ đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}(0 ; x, y, z)$. Trong $\mathcal{R}'$ có thể có một dòng chất lỏng chảy trong nhị diện vuông $(0 ; x', y')$ (các vách (Ox') và (Oy') lúc đó trở thành di động đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$) được mô tả bởi trường vận tốc :

$$\vec{v}'\left(\frac{x'}{\tau}, -\frac{y'}{\tau}, 0\right).$$

Hãy xác định trong $\mathcal{R}$ phương trình :

- của quỹ đạo hạt đi qua $M_0(x_0, y_0)$ lúc t_0 ;
- của đường dòng đi qua $M_0(x_0, y_0)$ lúc t_0 ;
- của đường phát xạ đi qua $M_0(x_0, y_0)$ lúc t_0 .

6* Tính sức điện động cảm ứng

Một khung dây có dạng hình vuông cạnh a chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{V}_0 = V_0\vec{e}_x$, trực giao với mặt phẳng của nó, trong một miền có từ trường.

$$\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\vec{e}_y .$$

Hãy xác định sức điện động cảm ứng e trong khung.

7* Dòng chảy giữa hai hình trụ

Dòng chảy của một chất lỏng giữa hai hình trụ đồng tâm, bán kính R_1 và R_2, quay xung quanh trục chung của chúng với các vận tốc góc Ω_1 và Ω_2, có thể được mô tả bởi trường các vận tốc $\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_\theta$.

1) Xác định các hằng số A và B bằng cách viết tính liên tục của các vận tốc của chất lỏng và của các hình trụ ở R_1 và R_2.

2) Hãy bình chú trường hợp $\Omega_1 = \Omega_2$.

3) Hãy xác định gia tốc của một hạt chất lỏng.

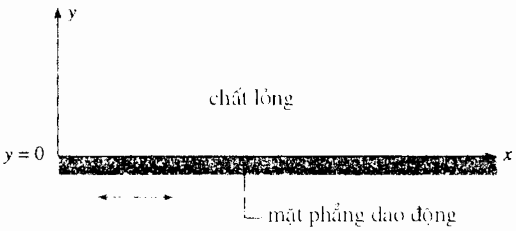
8* Tính gia tốc của một hạt chất lỏng

Người ta khảo sát dòng chảy của một chất lỏng giữa vô cực và mặt phẳng $y = 0$ được kích thích một chuyển động dao động dạng $X = a \sin \omega t$.

Người ta đề xuất một trường vận tốc của chất lỏng dạng:

$$\vec{v}(x,y,t) = a\omega e^{-ky}\cos(\omega t - ky)\vec{u}_x = v(y,t)\vec{e}_x.$$

Hãy xác định gia tốc của một hạt chất lỏng.



LỜI GIẢI

1 1) *Người ta xác định vị trí điểm M trong hệ tọa độ cực* $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Tất cả các hạt đều có cùng một vận tốc về độ lớn, bằng $R\dot{\alpha}(t)$.

Vận tốc $\vec{v}(M,t)$, *trong hình thức luận Euler, được xác định bởi hệ thức sau đây:*

$$\vec{v}(M,t) = R\dot{\alpha}(t)\vec{e}_\theta.$$

Chú ý:

Ở đây cần thiết phải dùng hai ký hiệu α *và* θ *(hay hai hệ tọa độ), vì* $\alpha(t)$ *biểu thị mức chất lỏng và* θ *là độ cao của điểm M. Sự phụ thuộc của* $\vec{v}(M,t)$ *vào các tọa độ không gian được thể hiện bởi trung gian* $\vec{e}_\theta$ *và vào tọa độ thời gian được thể hiện bởi trung gian* $\alpha(t)$. $\alpha(t)$ *là tọa độ, xác định vị trí mức chất lỏng vì* θ *là tọa độ Euler.*

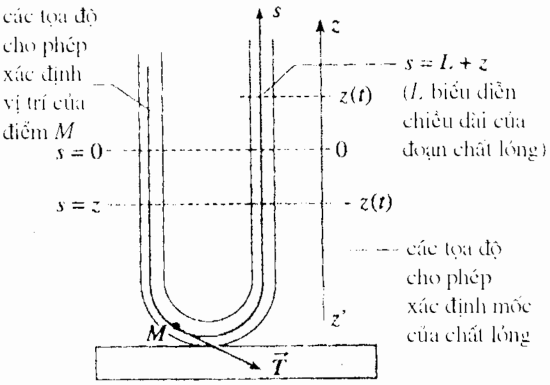
2) *Biết rằng* $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t) = R\dot{\alpha}(t)\vec{e}_\theta$, *nên gia tốc của hạt được cho bởi:*

$$\vec{a}(\vec{r},t) = R\ddot{\alpha}(t)\vec{e}_\theta - R\dot{\alpha}^2(t)\vec{e}_r.$$

và rằng tính toán phải được thực hiện trong hình thức luận Euler hay Lagrange.

2 *Ta xác định vị trí điểm M bằng hoành độ cong s. Vận tốc* $\vec{v}(M,t)$ *trong hình thức luận Euler được cho bởi biểu thức:*

$$\vec{v}(M,t) = \dot{z}(t)\vec{T}.$$



Chú ý:

Cần thiết phải dùng hai hệ tọa độ, vì z biểu diễn mức chất lỏng và s là độ cao của điểm M.

Sự phụ thuộc của $\vec{v}(M,t)$ *vào các tọa độ không gian được thể hiện bởi trung gian* $\vec{T}$, *và sự phụ thuộc vào thời gian được thể hiện bởi trung gian* $\dot{z}(t)$.

3 *Vận tốc của một hạt được cho bởi* $\vec{V}(\vec{R}(t),t) = \vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{R}(t)}{dt}$,

do đó:

$$\vec{V}(t) = \frac{dX(t)}{dt}\vec{e}_x = X_0 b\vec{e}_x, \text{ nghĩa là } \vec{V}(\vec{R}(t),t) = X_0 b\vec{e}_x.$$

Biết rằng $\vec{V}(\vec{R}(t),t) = \dfrac{X(t)}{1+bt} b\vec{e}_x$, *nên biểu thức của vận tốc trong hình thức luận Euler có dạng:* $\vec{v}(\vec{r},t) = \dfrac{x}{1+bt} b\vec{e}_x$. *Trường các vận tốc là không dừng. Gia tốc của một hạt bằng không, vì* $\vec{V}(\vec{R}(t),t)$ *không phụ thuộc thời gian.*

Sự tính toán gia tốc trong hình thức luận Euler cho ta:

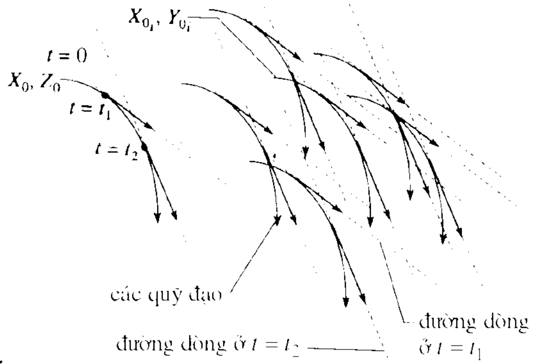
$$a(t) = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{xb}{1+bt}\right)}{\partial t} + \left(\frac{xb}{1+bt}\right)\frac{\partial\left(\frac{xb}{1+bt}\right)}{\partial x} = -\frac{xb^2}{(1+bt)^2} + \frac{xb^2}{(1+bt)^2} = 0$$

4 • *Các quỹ đạo là các đường cong có phương trình* $\frac{\mathrm{d}X}{u_0} = \frac{\mathrm{d}Z}{-gt + v_0} = \mathrm{d}t$, *nghĩa là* $X(t) = u_0 t + X_0$ *và* $Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + Z_0$, *nghĩa là các đường parabon.*

• *Các đường dòng là các đường cong có phương trình* $\frac{\mathrm{d}x}{u_0} = \frac{\mathrm{d}z}{-gt + v_0}$, *nghĩa là các đường thẳng có độ dốc* $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{-gt + v_0}{u_0}$ *ở thời điểm t.*

• *Đường phát xạ không có thăng giáng, nghĩa là phương trình của nó vẫn y nguyên ở mọi thời điểm t. Nó được cấu thành từ đường parabon xuất phát từ điểm (0 , 0).*

Trên đồ thị dưới đây, người ta làm thấy rõ đồng thời các qũy đạo và các đường dòng ở các thời điểm khác nhau $(t_2 > t_1)$.



5 *Ta thu được trường các vận tốc trong* $\mathscr{R}$ *bằng cách cộng các vận tốc :*

$$\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}'} + \vec{v}_e(M) \text{ nghĩa là } \vec{v} = \vec{v}' + V_0\vec{e}_y$$

(với $x = x'$ *và* $y = y' + V_0 t$*), do đó :*

$$\vec{v}\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{y - V_0 t}{\tau} + V_0, 0\right).$$

• **Quỹ đạo**

Ta nhận được quỹ đạo bằng phép lấy tích phân các phương trình vi phân :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{\tau} \text{ và } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_0 - \frac{y - V_0 t}{\tau}$$

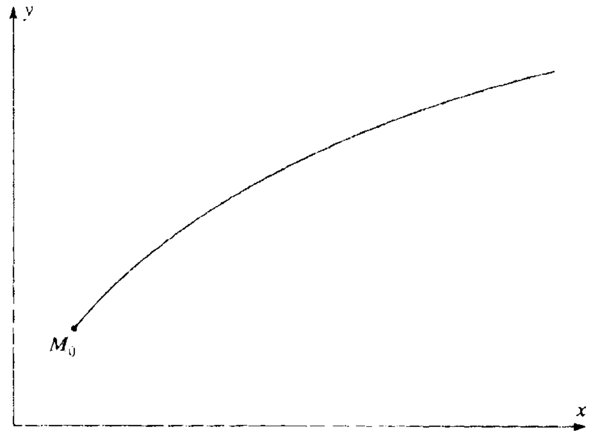
với các điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ *và* $y(t_0) = y_0$. *Phương trình tham số hóa của quỹ đạo phải tìm là :*

$$x = x_0 e^{\frac{t - t_0}{\tau}} \quad (1) \text{ và } \quad y = V_0 t + (y_0 - V_0 t_0)e^{-\frac{t - t_0}{\tau}} \quad (2).$$

Khử t trong hai phương trình, ta được quỹ đạo $y = f(x)$:

$$y = V_0 t_0 + V_0 \tau \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + x_0 \frac{y_0 - V_0 t_0}{x}.$$

Quỹ đạo được biểu diễn bởi đường cong dưới đây: quỹ đạo có thể được làm thấy rõ, đối với một hạt "được đánh dấu" trên bức ảnh chụp với thời gian lộ sáng rất dài.



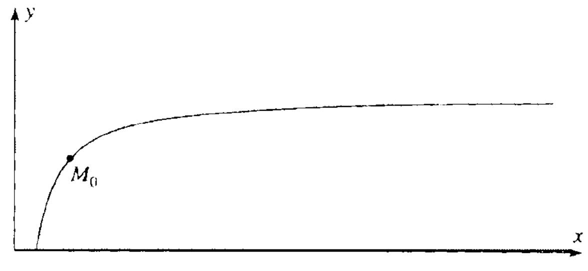
• **Đường dòng**

Ta nhận được đường dòng bằng phép lấy tích phân, ở thời điểm t_0, *phương trình vi phân*

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y - V_0 t_0 + V_0 \tau},$$

nghĩa là : $x(y - V_0(t_0 + \tau)) = \text{cte} = x_0(y_0 - V_0(t_0 + \tau))$.

Đây là phương trình của một hipebon (nó không tiếp tuyến với vách di động !). Đường dòng đi qua M_0 *lúc* t_0, *được biểu diễn bởi đường cong dưới đây : ta có thể làm thấy rõ đường dòng trên một ảnh chụp lúc* t_0 *với thời gian lộ sáng rất ngắn. Lúc đó, các hạt đã được đánh dấu để lại trên kính ảnh các vết vectơ tỷ lệ với vectơ vận tốc tức thời của chúng, và định hướng theo vận tốc này : lúc đó, cần phải dựng một đường tiếp tuyến với các vectơ này xuất phát từ* M_0.



• **Đường phát xạ**

Đường phát xạ đặc trưng, ở một thời điểm t cho trước, toàn bộ các hạt đã đi qua điểm M_0 *ở các thời điểm trước đấy. Như vậy, ta có được đường phát xạ ở thời điểm t, bằng cách khử* t_0 *trong hai phương trình (1) và (2) là các phương trình biểu diễn qũy đạo của mọi hạt đi qua* M_0 *với* t_0 *như một tham số.*

Phương trình (1) cho $t_0 = t - \tau \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$, *nghĩa là :*

$$\vec{V}_0.\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi + \left(y_0 - V_0 t + V_0\tau \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)\frac{x_0}{x}.$$

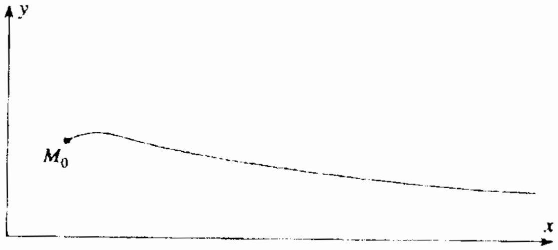
Phương trình này biểu diễn, ở thời điểm t, phương trình $y = g(x)$ của đường phát xạ.

Ta nhận thấy rằng nó chỉ có giá trị đối với $x > x_0$. Phần đường cong tương ứng với $x < x_0$ có thể được gọi là "đường hấp thụ" : nó biểu diễn tập hợp các hạt sẽ đi qua điểm M_0 ở một thời gian sau đối với t nếu đường phát xạ không thăng giáng.

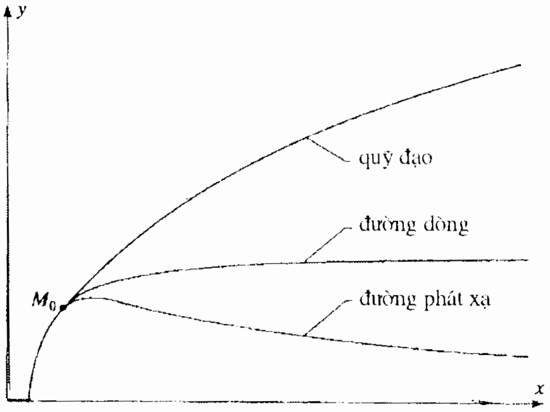
Đường phát xạ đòi hỏi tương ứng với lúc t_0. Như vậy, phương trình của nó là :

$$y = V_0 t_0 + \left(y_0 - V_0 t_0 + V_0\tau \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)\frac{x_0}{x}.$$

Nó được biểu diễn trên đường cong dưới đây và, một nguồn các chất đánh dấu nhuộm màu đặt tại M_0, có thể được làm thấy rõ bằng một ảnh chụp lúc t_0 với thời gian lộ sáng ngắn.



Việc loại bỏ ba sự mô phỏng trên chứng tỏ rằng cả ba đường cong đi qua cùng một điểm M_0, tất cả đều tiếp tuyến với nhau tại điểm này : vậy ở thời điểm t_0 chỉ có một vận tốc duy nhất ở M_0 !



6 *Thông lượng của $\vec{B}$ đi qua khung được xác định theo :*

$$\varphi(x,t) = B_0 a^2 \cos(kx - \omega t) = \varphi_0 \cos(kx - \omega t).$$

Sức điện động cảm ứng trong khung được cho bởi $e = -\frac{D\varphi}{Dt}$, nghĩa là :

$$e = -\frac{D\varphi}{Dt} = -\left(\vec{V}_0.\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = V_0\varphi_0 k\sin(kx-\omega t) - \varphi_0\omega\sin(kx-\omega t)$$

$$= (V_0 k - \omega)\varphi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Ta nhận xét một cách rất logic là nếu khung di chuyển với cùng một vận tốc như trường, thì sức điện động cảm ứng sẽ triệt tiêu.

7 1) *Khi viết $AR_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1$ và $AR_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2$, thì ta được :*

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{và} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

2) *Nếu $\Omega_1 = \Omega_2$, $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$, thì ta có một chuyển động quay "toàn bộ" của chất lỏng tựa như chuyển động quay của một vật rắn.*

3) *Theo công thức $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$ (xem phụ lục), thì ta được :*

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\left(Ar + \frac{B}{r}\right)^2\right)\vec{e}_r + 2A\vec{e}_z \wedge \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_\theta$$

$$= \left(A^2 r - \frac{B^2}{r^3}\right)\vec{e}_r - 2A\left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_r = -\left(A^2 r + \frac{B^2}{r^3} + \frac{2AB}{r}\right)\vec{e}_r$$

$$= -\frac{\left(Ar + \frac{B}{r}\right)^2}{r}\vec{e}_r.$$

Ta lại tìm thấy gia tốc của một chuyển động tròn đều : thật vậy, các đường dòng, do vậy các quỹ đạo, đều là các vòng tròn bán kính r. Theo quan niệm Lagrange, thì $R(t) = r = $ cte và vận tốc Lagrange biểu hiện dưới dạng $\vec{V} = \vec{v} = v(r)\vec{e}_\theta$, nghĩa là độc lập với thời gian.

8 *Ta nhận thấy rằng đối với $y = 0$, thì $\vec{v}(x,y,t) = a\omega\cos(\omega t)\vec{u}_x = \frac{dX}{dt}\vec{e}_x$; nghĩa là vận tốc của chất lỏng, ở $y = 0$, thì bằng vận tốc của mặt phẳng dao động.*

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial v(y,t)}{dt}\vec{e}_x = -a\omega^2 e^{-ky}\sin(\omega t - ky)\vec{e}_x.$$

Gia tốc có tính chất thuần túy cục bộ, vì các đường dòng là những đường thẳng cộng tuyến với trục (Ox) ; hơn nữa vận tốc không phụ thuộc vào biến số x.

SỰ BẢO TOÀN KHỐI LƯỢNG

2

Mở đầu

Trong điện từ học, chúng ta đã từng gặp phương trình bảo toàn điện tích :

$\mathrm{div}(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ *với* $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$, *cũng như phương trình bảo toàn năng lượng (trong một miền không có dòng điện) :*

$$\mathrm{div}(\vec{S}) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{với} \quad \vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

là vectơ Poynting, $\vec{E}$ *là điện trường,* $\vec{B}$ *là từ trường và* $u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$ *là mật độ thể tích của năng lượng điện từ.*

Ta dự tính sẽ tìm được một phương trình có cùng bản chất như thế đối với phương trình bảo toàn khối lượng dưới dạng tích phân và dưới dạng vi phân.

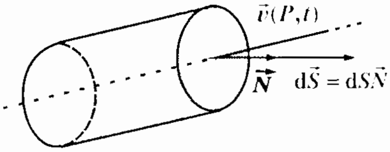
MỤC TIÊU

- Cách thiết lập cân bằng khối lượng.
- Các phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân và vi phân.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Hình thức luận Euler.
- Phép lấy đạo hàm toàn phần.
- Phép tính thông lượng của một vectơ.

1 Lưu lượng khối



H.1. *Các hạt đi qua dS đều ở trong hình trụ.*

1.1. Định nghĩa

Ta lấy một mặt có định hướng $\vec{S}$ *cố định* trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Gọi δm là khối lượng nguyên tố đi qua mặt $\vec{S}$ này trong thời gian δt. Theo định nghĩa, thì khối lượng δm này bằng $\delta m = D_m \delta t$, trong đó D_m biểu diễn lưu lượng khối của chất lỏng đi qua mặt này.

Do vậy lưu lượng khối D_m được biểu thị ra $kg.s^{-1}$.

Ta hãy xác định đại lượng D_m này.

Các hạt chất lỏng đi qua một phần tử diện tích $d\vec{S} = dS\vec{N}$ ($\vec{N}$ là pháp tuyến với phần tử diện tích này) có tâm ở P, trong thời gian δt, đều được chứa trong một hình trụ có đáy dS, đường sinh song song với $\vec{v}(P,t)$ và chiều dài $\delta\vec{l} = \vec{v}(P,t)\delta t$, và như vậy có thể tích ($H.1$) bằng :

$$d\tau = \vec{v}(P,t).d\vec{S}\delta t = \vec{v}(P,t).\vec{N}dS\delta t.$$

Điều này tương ứng với một khối lượng $\rho(P,t)d\tau = \rho(P,t)\vec{v}(P,t).d\vec{S}\delta t$, vậy là tương ứng với một lưu lượng khối nguyên tố :

$$dD_m = \rho(P,t)\vec{v}(P,t).d\vec{S} = \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS.$$

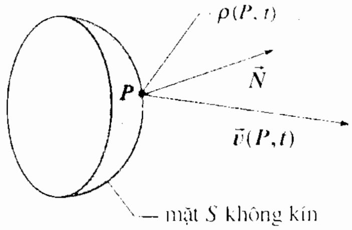
Lưu lượng khối đi qua một mặt S hữu hạn có định hướng (kín hay không) được xác định bởi tổng các lưu lượng nguyên tố này, và ta thu được ($H.2$) :

$$D_m = \iint_{\substack{\text{mặt } S\\ \text{không kín}}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{mặt } S\\ \text{không kín}}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS,$$

lưu lượng theo định nghĩa sẽ là dương nếu chất lỏng chảy theo chiều của $\vec{N}$, hay :

$$D_m = \oiint_{\substack{\text{mặt } S\\ \text{kín}}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS\ ;$$

đây là lưu lượng khối (đại số) đi ra, pháp tuyến $\vec{N}$ được định hướng ra phía ngoài mặt kín S ($H.3$).



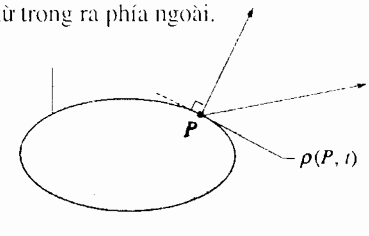
H.2. *Các biểu thức tham gia vào lưu lượng khối đi qua một mặt S không khép kín.*

Ta nhấn mạnh sự giống nhau của định nghĩa này với định nghĩa về mật độ dòng điện $\vec{j} = \rho\vec{v}$ đi qua một mặt có định hướng bằng cách định nghĩa vectơ $\vec{j}(P,t) = \rho(P,t)\vec{v}(P,t)$ là *mật độ thể tích của dòng khối lượng.*

Lưu lượng khối đi qua S có giá trị $D_m = \iint_{\substack{\text{mặt } S\\ \text{không kín}}} \vec{j}(P,t).\vec{N}dS$ **.**

Lưu lượng khối đi ra (đại số) có giá trị $D_m = \oiint_{\substack{\text{mặt } S\\ \text{kín}}} \vec{j}(P,t).\vec{N}dS$ **với**

$\vec{j}(P,t) = \rho(P,t)\vec{v}(P,t)$ **là mật độ thể tích của dòng khối lượng.**



H.3. *Các biểu thức tham gia vào lưu lượng khối đi ra khỏi mặt kín.*

1.2. Nguồn và giếng

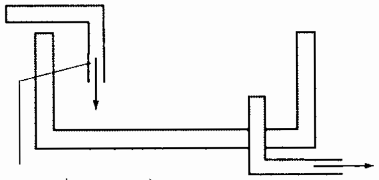
Tại một số điểm hay miền nào đó của một dòng chảy chất lỏng, đôi khi tồn tại các sự hiện ra khối lượng (các nguồn) hay mất đi khối lượng (các giếng). Các sự xuất hiện hay biến mất khối lượng đều được đặc trưng bởi một lưu lượng khối $D_{m,\,\text{nguồn}}$ (thường được xác định theo phương pháp đại số) : các phần tử điểm hay dài (đôi khi là các phần tử thể tích) cung cấp một khối lượng $D_{m,\,\text{nguồn}}\delta t$ trong thời gian δt.

Ví dụ về nguồn và giếng :

Khi làm đầy (và tháo cạn) một bể chứa bằng hai ống dẫn, thì ta có thể mô hình hóa tình huống này với một nguồn điểm và một giếng điểm (*H*.4).

Ta hãy thỏa thuận với nhau chỉ tên các phần tử này bằng thuật ngữ "nguồn" : như vậy, chúng sẽ được đặc trưng bởi các lưu lượng khối (đại số) dương hay âm.

Thường các nguồn này có thể được biểu diễn nhờ một thông lượng khối đi qua một mặt S kích thước nhỏ. Thành thử trong trường hợp trên, lưu lượng khối có thể được biểu thị như sau : $D_m = \rho S v$, khi chất lỏng có khối lượng riêng ρ đi qua mặt S với vận tốc v.



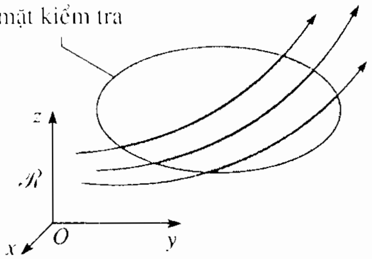
H.4. *Ví dụ về nguồn điểm và giếng điểm : sự làm đầy D_1 và sự tháo cạn D_2 một bể chứa một khối lượng chất lỏng nào đó nhờ hai ống dẫn.*

1.3. Mặt kiểm tra, mặt chứa các hạt chất lỏng

1.3.1. Mặt kiểm tra - Thể tích kiểm tra

Một *mặt kiểm tra* là một mặt cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu (*H*.5); đây là điều mà ta đã xét trong các tính toán trước đây.

Mặt kiểm tra này giới hạn một thể tích kiểm tra. Ta đã thấy rằng tồn tại các lưu lượng thể tích và lưu lượng khối khác không (trong trường hợp tổng quát) đi qua mặt này.



H.5. *Chất lỏng đi qua mặt kiểm tra cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu.*

1.3.2. Mặt chứa các hạt chất lỏng - Thể tích chứa các hạt chất lỏng

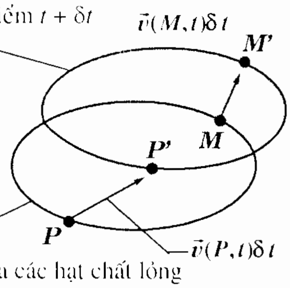
■ **Định nghĩa**

Mặt chứa các hạt chất lỏng là một mặt mà trên đó được sắp xếp liên tục các hạt chất lỏng. Do vậy các điểm của mặt này sẽ dịch chuyển với cùng một vận tốc như chất lỏng. Ta nói : mặt được "kéo theo" bởi chất lỏng (*H*.6).

Mặt chứa các hạt chất lỏng này giới hạn một thể tích các hạt chất lỏng.

■ **Hệ quả**

Mặt này tuy được kéo theo với cùng một vận tốc như chất lỏng , nhưng không hề có bất kì một sự chuyển vật chất nào đi qua mặt đó. Khối lượng M ở trong thể tích chứa các hạt chất lỏng này (giới hạn bởi mặt chứa các hạt chất lỏng) do vậy sẽ bất biến theo thời gian, điều mà ta có thể viết dưới dạng $\frac{DM}{Dt} = 0$.



H.6. *Sự vận động của một mặt chứa các hạt chất lỏng : mặt được "kéo theo" bởi chất lỏng. Khối lượng M của chất lỏng, được giới hạn bởi mặt đang chuyển động này, là bất biến theo thời gian.*

■ **Phép lấy đạo hàm toàn phần của một tích phân theo thể tích**

Giả sử ta phải tính toán đại lượng sau đây :

$$\frac{DG}{Dt} \quad \text{với} \quad G = \iiint_{\substack{\text{thể tích } V \\ \text{chứa các hạt chất lỏng}}} g(M,t)\,d\tau$$

Như vậy , nếu $g(M, t) = \rho(M, t)$ (khối lượng riêng), thì đại lượng G biểu diễn khối lượng chất lỏng nằm trong thể tích chứa các hạt chất lỏng (viết gọn : thể tích các hạt chất lỏng).

Theo định nghĩa, đạo hàm toàn phần của G, ký hiệu $\left(\dfrac{DG}{Dt}\right)$, được biểu thị là :

$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\underset{\substack{\text{thể tích các hạt chất lỏng}\\ \text{lúc } t+\delta t}}{\iiint} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau-\underset{\substack{\text{thể tích các hạt chất lỏng}\\ \text{lúc } t}}{\iiint} g(M,t)\mathrm{d}\tau}{\delta t}$$

Khi sử dụng các miền khác nhau được thể hiện trên *hình* 7, ta có thể viết :

$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\left[\iiint\limits_{V_3} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau+\iiint\limits_{\delta V_1} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau\right]-\left[\iiint\limits_{V_3} g(M,t)\mathrm{d}\tau+\iiint\limits_{\delta V_2} g(M,t)\mathrm{d}\tau\right]}{\delta t}$$

hay

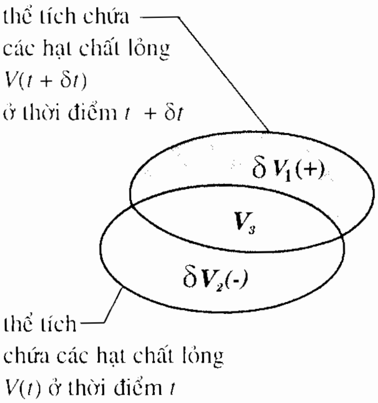
$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\left[\iiint\limits_{V_3} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau-\iiint\limits_{V_3} g(M,t)\mathrm{d}\tau\right]+\left[\iiint\limits_{\delta V_1} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau-\iiint\limits_{\delta V_2} g(M,t)\mathrm{d}\tau\right]}{\delta t},$$

nghĩa là :

$$\frac{DG}{Dt}=\frac{\left[\iiint\limits_{V_3}\frac{\partial g(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau\right]\delta t+\left[\iiint\limits_{\delta V_1} g(M,t+\delta t)\mathrm{d}\tau-\iiint\limits_{\delta V_2} g(M,t)\mathrm{d}\tau\right]}{\delta t}.$$

Khi dùng phần tử thể tích được quét bởi phần tử diện tích dS (*H*.8), ta sẽ được :

$$\frac{DG}{Dt}=\iiint\limits_{V}\frac{\partial g(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{S} g(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S.$$



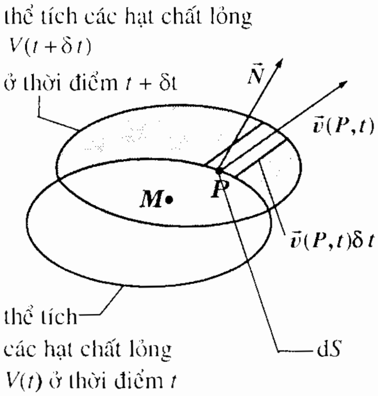
H.7. *Khi dịch chuyển thể tích chứa các hạt chất lỏng, ta đã làm nổi bật ba miền giữ các vai trò khác nhau.*

Đạo hàm toàn phần $\dfrac{DG}{Dt}$ của đại lượng G là tổng của hai số hạng :

- **độ biến thiên cục bộ** $\displaystyle\iiint\limits_{V}\frac{\partial g(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau$;
- **độ biến thiên đối lưu** $\displaystyle\oiint\limits_{S} g(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S$;

như vậy ta được :

$$\frac{DG}{Dt}=\iiint\limits_{V}\frac{\partial g(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\oiint\limits_{S} g(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S.$$



H.8. *Phần tử thể tích* dτ *bằng :*
d$\tau = \vec{v}(P,t).\vec{N}dS$

Ví dụ :

Nếu ta lấy $g = 1$, thì lúc đó đại lượng G biểu diễn thể tích chứa các hạt chất lỏng V. Đại lượng $\frac{DV}{Dt}$ khi đó sẽ bằng :

$$\frac{DV}{Dt} = \oiint_S \vec{v}(P,t).\vec{N}dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v})d\tau$$

(bằng cách dùng định lí OSTROGRADSKI)

Nếu $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, thì thể tích chứa các hạt chất lỏng không biến đổi. Khối lượng của thể tích chứa các hạt chất lỏng sẽ bất biến, khối lượng riêng cũng bất biến, và đây là điều mà ta đã biểu thị dưới dạng $\frac{D\rho}{Dt}$ (đặc trưng của một dòng chảy không thể nén được).

Ta sẽ trở lại phép lấy đạo hàm toàn phần này trong *chương* 6.

2 Cân bằng khối lượng : phương trình bảo toàn dạng tích phân

2.1. Phương trình tổng quát trong một môi trường không có nguồn

Ta hãy xét một thể tích *V cố định* (thể tích kiểm tra) trong không gian choán bởi chất lỏng, bị giới hạn bởi một mặt kín *S cố định* (mặt kiểm tra) trong hệ quy chiếu nghiên cứu (*H*.9), pháp tuyến $\vec{N}$ định hướng ra phía ngoài.

Giả sử là không tồn tại bất kì một nguồn (khối lượng) nào trong thể tích này.

Khối lượng chất lỏng $m(t)$ chứa trong thể tích V này ở mọi thời điểm t có dạng :

$$m(t) = \iiint_{\text{thể tích } V} \rho(M,t)d\tau \ .$$

Đó là phần chất lỏng liên tục đi vào và đi ra khỏi thể tích V này trong khi đi qua mặt kiểm tra *cố định* giới hạn nó : do vậy khối lượng $m(t)$ phụ thuộc thời gian.

■ **Độ biến thiên khối lượng δm trong thời gian δt của chất lỏng ở trong thể tích kiểm tra V cố định.**

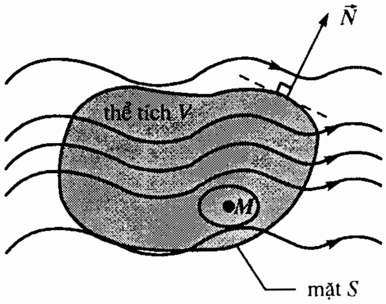
Đối với một thể tích nguyên tố $d\tau$, chứa khối lượng $dm = \rho(M, t)d\tau$, thì độ biến thiên $\delta(dm)$ trong thời gian δt sẽ là $\delta(dm) = \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau \delta t$.

Chú ý :

Điều chủ yếu phải hiểu đúng, là ở đây ta không theo dõi một hạt, mà bằng cách để "mắt dán vào" thể tích nguyên tố $d\tau$ cố định, bao quanh điểm M cố định, thì ta quan sát được độ biến thiên khối lượng theo thời gian trong đó. Như vậy, độ biến thiên khối lượng trên đơn vị thể tích ở đây chính là độ biến thiên cục bộ mà ta kết hợp vào đó phép lấy đạo hàm riêng theo theo gian.

Khối lượng tổng cộng $m(t)$ của chất lỏng ở trong thể tích V đã biến đổi trong thời gian δt một lượng :

$$\delta m = \iiint_{\text{thể tích } V \text{ cố định}} \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau \delta t \ .$$



H.9. *Mặt S kín (và cố định) giới hạn một thể tích V cố định. Pháp tuyến được định hướng ra phía ngoài.*

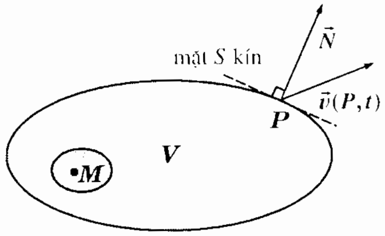
■ **Khối lượng δm đi vào thể tích V trong thời gian δt qua mặt S cố định giới hạn nó.**

Sự tăng khối lượng này tương ứng với khối lượng chất lỏng đã đi qua mặt kiểm tra S từ ngoài vào trong, trong thời gian δt, nghĩa là :

$$\delta m = -D_{m,\,\text{đi ra}}\delta t\ .$$

Nó được biểu thị dưới dạng :

$$\delta m = -\underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín,}\\ \text{cố định giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S\delta t\ .$$



H.10. *Sự cân bằng khối lượng kết hợp với một thể tích kiểm tra V cố định.*

Nhờ đó, ta được phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân :

$$\underset{\substack{\text{thể tích } V\\ \text{cố định}}}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín cố định,}\\ \text{giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\mathrm{d}\vec{S} = 0\ ,$$

với $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{N}\mathrm{d}S$ và $\vec{N}$ hướng ra ngoài mặt kín.

Sự cân bằng trong quá trình biến đổi khối lượng chứa trong một thể tích V cố định không nguồn (H.10) được thể hiện bởi phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân $\underset{\text{thể tích } V}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau = -D_{m,\,\text{đi ra}}$,

nghĩa là :

$$\underset{\substack{\text{thể tích } V\\ \text{cố định}}}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín cố định,}\\ \text{giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P.t).\vec{N}\mathrm{d}S = 0\ .$$

Không tồn tại bất kỳ một nguồn nào ở trong thể tích này.

Áp dụng 1

Sự bảo toàn lưu lượng khối

Giả sử có một dòng chảy chất lỏng không thể nén được mà trường các vận tốc trong hình thức luận Euler được xác định trong tọa độ trụ bởi :

$$\vec{v}(r,\theta,t) = \frac{D_v(t)}{2\pi r}\vec{e}_r\ .$$

Hãy tính lưu lượng khối $D_m(t)$ đi qua một hình trụ có trục (Oz), bán kính r và chiều cao h. Kết luận.

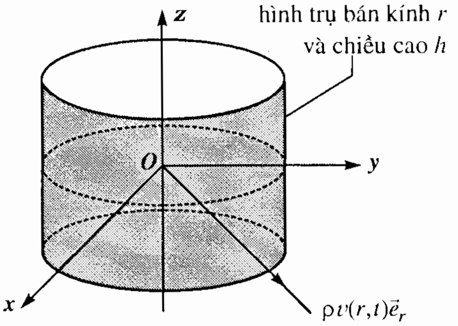
Ở một thời điểm t cho trước, thông lượng $\rho\vec{v}(M,t)$ đi qua một hình trụ có trục (Oz), bán kính r và chiều cao h (H.11) được xác định bởi :

$$D_m(t) = \rho v(r,\theta,t)2\pi rh = \rho\frac{D_v(t)}{2\pi r}2\pi rh = \rho hD_v(t)\ .$$

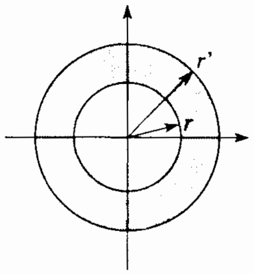
Lưu lượng khối này độc lập với bán kính r của hình trụ : như vậy, các lưu lượng khối đi qua hai hình trụ (H.12) bán kính r và r' (chiều cao h) là giống nhau.

Khối lượng chất lỏng ở giữa hai hình trụ này không biến đổi theo thời gian : điều này liên quan đến tính không thể nén được của chất lỏng (ρ = cte).

Kết luận này sẽ được khái quát hóa trong các tiết tiếp theo.



H.11. *Thông lượng ra của vectơ mật độ thể tích của dòng khối lượng $\rho v(r,t)\vec{e}_r$ đi qua hình trụ kín này bằng $\rho 2\pi\, rhv(r,t)$. Phần đóng góp của các mặt đáy hình trụ bằng không, vì $\vec{v}(M,t)$ vuông góc với $\vec{N}=\vec{e}_z$, pháp tuyến với các mặt này.*



H.12. *Khối lượng chất lỏng ở giữa hai hình trụ bán kính r và r' (chiều cao h) không biến đổi theo thời gian (ρ = cte) ; vậy, các lưu lượng khối đi qua hai hình trụ này giống như nhau.*

▶ **Để tập luyện: bài tập 3 và 4**

2.2. Phương trình tổng quát trong một môi trường có nguồn

Nếu tồn tại các nguồn (ở trong thể tích kiểm tra V) đặc trưng bởi một lưu lượng khối đại số $D_{m,\text{ nguồn}}$ thì độ tăng khối lượng δm của thể tích V tương ứng với khối lượng chất lỏng đã đi qua mặt kín S từ ngoài vào trong, trong thời gian δt (nghĩa là $\delta m_1 = -D_{m,\text{ đi ra}}\,\delta t$) lại được tăng thêm một lượng $\delta m_2 = D_{m,\text{ nguồn}}\,\delta t$.

Vậy , độ tăng đó được biểu thị theo :

$$\delta m = -\underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín cố định,}\\ \text{giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S\delta t + D_{m,\text{ nguồn}}\,\delta t\,.$$

Nhờ vậy, ta được một phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân:

$$\underset{\text{thể tích } V}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín}\\ \text{giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S = D_{m,\text{ nguồn}}$$

với $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{N}\mathrm{d}S$ và $\vec{N}$ hướng ra phía ngoài mặt kín.

Sự cân bằng trong quá trình biến đổi khối lượng chứa trong một thể tích cố định V (thể tích kiểm tra), chứa các nguồn, được thể hiện bởi phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân :

$$\underset{\text{thể tích } V}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau = -D_{m,\text{đi ra}} + D_{m,\text{nguồn}}\text{, nghĩa là :}$$

$$\underset{\text{thể tích } V}{\iiint} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \underset{\substack{\text{mặt } S \text{ kín}\\ \text{giới hạn } V}}{\oiint} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S = D_{m,\text{nguồn}}\,.$$

$D_{m,\text{nguồn}}$ là lưu lượng khối (đại số) của các nguồn ở trong thể tích V, được xác định theo phương pháp đại số.

Áp dụng 2

Nghiên cứu một nguồn

Cho một dòng chảy chất lỏng không thể nén được mà trường các vận tốc, theo hình thức luận Euler, được xác định trong tọa độ trụ bởi :

$$\vec{v}(r,\theta,t)=\frac{D_V(t)}{2\pi r}\vec{e}_r .$$

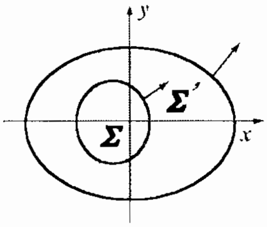
Chứng minh rằng tồn tại một nguồn trên trục (Oz).

Ta đã thấy rằng, trong *áp dụng* 1, dòng chảy này được đặc trưng bởi một lưu lượng khối :

$$D_m(t)=\rho v(r,\theta,t)2\pi rh=\rho\frac{D_V(t)}{2\pi r}2\pi rh=\rho hD_V(t).$$

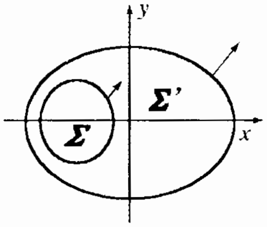
độc lập với bán kính r của hình trụ (chiều cao h). Biết rằng chất lỏng là không thể nén được, như vậy, có nghĩa là tồn tại một nguồn có lưu lượng khối $D_{m,\,nguồn}(t)=\rho hD_V(t)$, ở trên trục (Oz).

Vì chất lỏng là không thể nén được, nên các lưu lượng khối, đi qua mọi mặt kín (*H*.13a) bao quanh trục (Oz), đều như nhau. Thật vậy, khối lượng chất lỏng ở giữa các mặt này không biến đổi theo thời gian, và trong không gian này không có nguồn.



H.13a. *Các lưu lượng khối (đi ra) qua các mặt Σ và Σ' đều như nhau (tồn tại một nguồn ở O)*

Tình hình sẽ không như thế đối với các mặt không bao quanh trục (Oz), thành thử (*H*.13b) lưu lượng khối đi qua mặt Σ bằng không, trong khi lưu lượng khối qua mặt Σ' lại bằng $D_{m,\,nguồn}$.



H.13b. *Lưu lượng khối (đi ra) qua mặt Σ bằng không, trong khi lưu lượng khối qua mặt Σ' lại bằng lưu lượng khối của nguồn ở tại O.*

2.3. Trường hợp một chế độ dừng : sự bảo toàn lưu lượng khối

Ở chế độ không đổi độc lập với thời gian (hay chế độ dừng), ta có $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ (ρ không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian) : $\rho(M)$. Vậy phương trình bảo toàn khối lượng có dạng $D_{m,\,đi\,ra}=D_{m,\,nguồn}$.

Có sự bảo toàn lưu lượng khối : mọi thứ đi vào trong thể tích V (hay từ đó đi ra) phải đi qua một mặt cố định giới hạn thể tích đó.

2.4. Trường hợp một chất lỏng không thể nén được : sự bảo toàn lưu lượng khối

Đối với một chất lỏng không thể nén được, ta cũng có $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$. Do vậy phương trình bảo toàn khối lượng luôn luôn có dạng $D_{m,\,đi\,ra}=D_{m,\,nguồn}$, vì các *áp dụng* 1 và 2 đã chứng minh điều đó. Vậy ta có cùng các kết luận như sau :

Đối với một chất lỏng đang ở dòng chảy dừng, hay có khối lượng riêng không đổi, thì lưu lượng khối $D_{m,\,đi\,ra}$ đi qua mặt S giới hạn thể tích V bằng lưu lượng khối của các nguồn $D_{m,\,nguồn}$ ở trong thể tích đó.

Nếu không tồn tại bất kì một nguồn nào trong thể tích này ($D_{m,\text{ nguồn}} = 0$), thì lúc đó lưu lượng khối $D_{m,\text{ đi ra}}$ đi qua mặt S giới hạn thể tích đó sẽ bằng không :

$$D_{m,\text{ đi ra}} = 0 .$$

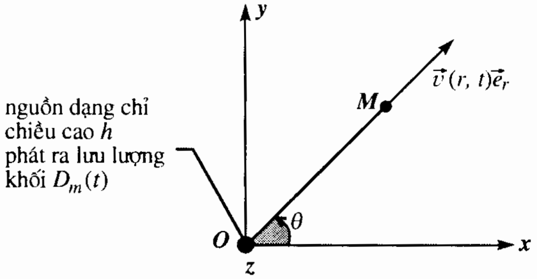
Áp dụng 3

Trường các vận tốc của một chất lỏng không thể nén được

Hãy tìm dạng của trường vận tốc của một chất lỏng không thể nén được (có khối lượng riêng ρ) được phát ra với một lưu lượng khối D_m (phụ thuộc hay không phụ thuộc vào thời gian), bởi một nguồn dài có chiều cao h trùng với trục (Oz) (H.14), biết rằng các hạt chất lỏng được phát ra vuông góc với nguồn dạng chỉ, nghĩa là :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = v(r,t)\vec{e}_r .$$

Hãy tính gia tốc của một hạt chất lỏng.



H.14. *Một nguồn dạng chỉ chiều cao h trùng với trục (Oz) phát ra một chất lỏng với lưu lượng khối $D_m(t)$.*

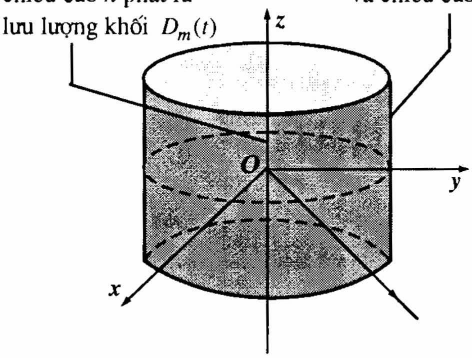
Chất lỏng là không thể nén được, và ở một thời điểm t cho trước, lưu lượng khối độc lập với việc chọn mặt *kín* bao quanh trục (Oz), mà qua đó toàn bộ chất lỏng chảy qua : lưu lượng khối đó bằng $D_m(t)$.

Vì vận tốc là xuyên tâm, nên ta hãy lấy mặt *kín* là một hình trụ có chiều cao h và bán kính r. Phần đóng góp vào lưu lượng khối của các mặt đáy hình trụ này bằng không : vận tốc $\vec{v}(M,t)$ nằm trong mặt phẳng song song với mặt đáy (H.15).

Như vậy lưu lượng khối sẽ giới hạn ở tích của $\rho v(r,t)$ với diện tích mặt bên $2\pi rh$ của hình trụ : thật vậy, vận tốc $\vec{v}(M,t)$ tại mọi điểm đều vuông góc với mặt bên của hình trụ.

Giả sử $D_m(t) = \rho 2\pi rhv(r,t)$, thì ta được :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{D_m(t)}{2\pi\rho h}\cdot\frac{1}{r}\vec{e}_r .$$



H.15. *Thông lượng ra của vectơ vận tốc $\rho v(r,t)\vec{e}_r$ đi qua hình trụ kín này bằng $\rho 2\pi rh\, v(r,t)$. Phần đóng góp của các mặt đáy hình trụ bằng không, vì $\vec{v}(M,t)$ vuông góc với $\vec{N} = \vec{e}_z$ pháp tuyến với các mặt này.*

Chú ý :

Ngay khi ta có một dòng chảy chất lỏng không thể nén được có tính đối xứng trụ, thì ta có thể viết ($r \neq 0$) :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{K(t)}{r}\vec{e}_r$$

(duy nhất chỉ tồn tại một nguồn trùng với trục (Oz) ; $r = 0$).

Gia tốc của một hạt chất lỏng bằng :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K(t)}{r}\right) + \frac{K(t)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K(t)}{r}\right)\right]\vec{e}_r$$

$$= \left[\frac{K'(t)}{r} + \frac{K(t)}{r}\left(-\frac{K(t)}{r^2}\right)\right]\vec{e}_r ,$$

nghĩa là :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left[\frac{K'(t)}{r} - \frac{K^2(t)}{r^3}\right]\vec{e}_r$$

$$= \left[\frac{D_m'(t)}{2\pi\rho hr} - \frac{D_m^2(t)}{(2\pi\rho h)^2}\frac{1}{r^3}\right]\vec{e}_r$$

2.5. Trường hợp một chất lỏng không thể nén được : sự bảo toàn lưu lượng thể tích

Biết rằng ρ là một hằng số, nên có thể xác định lưu lượng thể tích D_v theo :

$$D_m = \rho D_v \text{, nghĩa là } D_v = \iint_{\substack{\text{mặt } S \\ \text{không kín}}} \vec{v}(P,t).d\vec{S} \text{ hay } D_v = \oiint_{\substack{\text{mặt } S \\ \text{kín}}} \vec{v}(P,t)\vec{N}dS .$$

Trong trường hợp một chất lỏng không thể nén được, thì sự bảo toàn lưu lượng khối sẽ kéo theo sự bảo toàn lưu lượng thể tích.

▶ **Để tập luyện : bài tập 1 và 2**

Áp dụng 4

Dòng chảy không dừng có tính đối xứng cầu

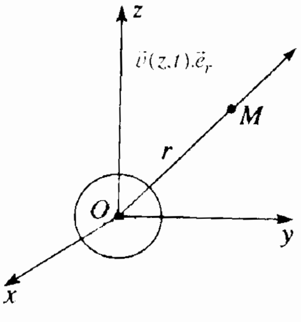
Giả sử có một bể chứa rộng mênh mông (các kích thước là vô hạn !) không có nguồn. Ở tâm O của nó tồn tại một hình cầu bán kính $a(t)$ biến thiên theo thời gian (H.16). Các vận tốc của chất lỏng giả thiết là xuyên tâm, nghĩa là :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = v(r,t)\vec{e}_r$$

1) *Tìm biểu thức của* $\vec{v}(a,t)$.

2) *Viết biểu thức của trường các vận tốc của chất lỏng này ?*

3) *Tính gia tốc của một hạt chất lỏng.*



H.16. *Nghiên cứu trường các vận tốc của một chất lỏng mà trong lòng nó tồn tại một hình cầu bán kính a (t) biến thiên theo thời gian.*

1) Một hạt tiếp xúc với hình cầu bán kính $a(t)$ sẽ có vận tốc $\frac{da}{dt}$: $\vec{v}(a,t) = \frac{da}{dt}\vec{e}_r$.

2) Chất lỏng là không thể nén được, nên vectơ vận tốc $\vec{v}(\vec{r},t) = v(r,t)\vec{e}_r$ có thông lượng bảo toàn, nghĩa là ở một thời điểm t cho trước, lưu lượng thể tích $D_V(t)$ (do vậy thông lượng của vectơ này) độc lập với việc chọn mặt kín bao quanh O mà toàn bộ chất lỏng chảy qua đó.

Vận tốc là xuyên tâm, nên ta tính thông lượng của nó đi qua hình cầu bán kính r : biểu thức này giới hạn ở tích của $v(r,t)$ với mặt cầu diện tích $4\pi r^2$ (vận tốc $\vec{v}(M,t)$ tại mọi điểm đều vuông góc với mặt cầu này) : $D_V(t) = 4\pi r^2 v(r,t)$, nghĩa là :

$$\vec{v}(r,t) = \frac{D_V(t)}{4\pi r^2}\vec{e}_r = \frac{K(t)}{r^2}\vec{e}_r .$$

Biết rằng $v(a,t) = \frac{da}{dt}$, nên ta được :

$$\vec{v}(r,t) = \frac{da}{dt}\frac{a^2(t)}{r^2}\vec{e}_r .$$

Chú ý :

Ngay khi ta gặp một dòng chảy chất lỏng không thể nén được có tính đối xứng cầu, là ta có thể viết (ở $r \neq 0$) :

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{K(t)}{r^2}\vec{e}_r$$

(tồn tại duy nhất một nguồn điểm ở O).

3) Gia tốc của một hạt chất lỏng bằng :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'(t)a^2(t)}{r^2}\right) + \frac{a'(t)a^2(t)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a'(t)a^2(t)}{r^2}\right)\right]\vec{e}_r$$

$$= \left(\frac{a''(t)a^2(t)}{r^2} + \frac{2a'^2(t)a(t)}{r^2} - 2\frac{a'^2(t)a^4(t)}{r^5}\right)\vec{e}_r$$

Ta thấy rằng khi $r = a$, thì đúng ta được :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = a''(t)\vec{e}_r$$

3 Cân bằng khối lượng : dạng vi phân

3.1. Phương trình tổng quát

Trước đây, ta đã thấy phương trình bảo toàn khối lượng *trong một môi trường không nguồn* có dạng :

$$\iiint_{\text{thể tích } V} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\,d\tau + \oiint_{\substack{\text{mặt } S \text{ kín}\\ \text{giới hạn } V}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS = 0$$

trong đó $\vec{N}$ là pháp tuyến với mặt kín được định hướng ra phía ngoài .

Định lí OSTROGRADSKI (*xem chương* 8) cho phép ta biến đổi tích phân thứ hai và phương trình bảo toàn sẽ có dạng :

$$\iiint_{\text{thể tích } V} \left[\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t))\right]d\tau = 0$$

Cho dù thể tích kiểm tra V cố định như thế nào thì đẳng thức trên vẫn được nghiệm đúng. Từ đó ta suy ra một hệ thức vi phân, nghĩa là một hệ thức được nghiệm đúng ở mọi điểm M của chất lỏng :

$$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = 0 \text{ hay } \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}(M,t) = 0\,.$$

Phương trình vi phân bảo toàn khối lượng trong một môi trường không nguồn có dạng :

$$\boldsymbol{\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(M,t))\vec{v}(M,t)) = 0 \text{ hay } \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}(M,t) = 0}$$

Áp dụng 5

Phương trình bảo toàn khối lượng

Hãy tìm lại phương trình vi phân bảo toàn khối lượng bằng cách thay thế đại lượng g(M, t), trong biểu thức toán học về phép lấy đạo hàm toàn phần của một tích phân theo thể tích (§3), bằng khối lượng riêng $\rho(M,t)$ *của chất lỏng.*

Nếu $\rho(M,t) = g(M,t)$, thì đại lượng G biểu diễn khối lượng chất lỏng của thể tích chứa các hạt (lỏng) . Theo định nghĩa, khối lượng của thể tích chứa các hạt này là bất biến, nghĩa là $\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$; do đó ta được :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0 = \iiint_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau + \oiint_S \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS$$

$$= \iiint_V \left\{\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t))\right\}d\tau\,.$$

Biểu thức này triệt tiêu cho dù chọn thể tích V như thế nào. Vậy, ta thu được phương trình vi phân bảo toàn khối lượng :

$$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = 0\,.$$

Chú ý :

Các phương trình này, về hình thức, giống hệt các phương trình thu được trong điện từ học về sự bảo toàn điện tích :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

trong đó ρ *là mật độ điện tích khối và* $\vec{j}$ *là vectơ mật độ dòng thể tích.*

Ta còn có một dạng khác của phương trình vi phân bảo toàn khối lượng bằng cách khai triển $\operatorname{div}(\rho\vec{v})$ dưới dạng :

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \rho . \vec{v}$$

và biết rằng $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \rho = \dfrac{D\rho}{Dt}$ (đạo hàm toàn phần), nên từ đó suy ra phương trình vi phân bảo toàn khối lượng trong một môi trường không có nguồn.

Phương trình vi phân bảo toàn khối lượng trong một môi trường không nguồn được viết là :

$$\frac{\mathbf{D}\rho}{\mathbf{D}t} + \rho \operatorname{\mathbf{div}} \vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}.$$

Chú ý :

Ta tự đặt câu hỏi sau : một chất lỏng có phải là không thể nén được nếu đối với một dòng chảy cho trước ta có $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ *?*

Điều kiện $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ *buộc* $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$*, nghĩa là cục bộ xung quanh một hạt chất lỏng mà ta theo dõi qũy đạo của nó thì khối lượng riêng là không đổi và ví dụ là bằng* ρ_1*. Nhưng chẳng có gì lại có thể cho ta biết được rằng liệu ở lân cận một hạt chất lỏng khác thì khối lượng riêng cũng có cùng một giá trị* ρ_1 *(H.17) hay không ? Vậy chất lỏng không cần thiết là không thể nén được, tuy nhiên sau đây ta cũng sẽ nói tới dòng chảy không thể nén được.*

3.2. Trường hợp chế độ dừng : bảo toàn lưu lượng khối

Ở chế độ dừng (không đổi, độc lập với thời gian), thì $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Như vậy ta được $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$.

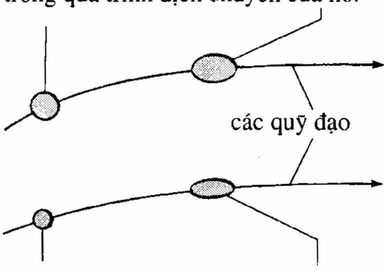
Vả lại, ta biết rằng (xem chương 8) một trường vectơ có đive *đồng nhất không* cũng là trường vectơ có thông lượng bảo toàn, nghĩa là :

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \vec{0}, \text{ từ đó } \oiint_S \rho\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S} = \vec{0};$$

khi đó, ta lại tìm thấy sự bảo toàn lưu lượng khối D_m ở chế độ dừng.

Khi có một dòng chảy dừng (không đổi, độc lập với thời gian), không nguồn, thì lưu lượng khối D_m được bảo toàn. Vectơ mật độ dòng khối lượng $\vec{j}(M,t)$ có thông lượng bảo toàn :

$$\operatorname{\mathbf{div}}(\vec{j}(M,t)) = \mathbf{0} \text{ hay } \operatorname{\mathbf{div}}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = \mathbf{0}.$$



H.17. *Dòng chảy không thể nén được : đạo hàm toàn phần của* ρ *triệt tiêu :*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

3.3. Trường hợp một chất lỏng không thể nén được : sự bảo toàn lưu lượng khối

Đối với một chất lỏng không thể nén được, thì ρ là một hằng số đặc trưng của chất lỏng và $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

Như vậy, ta được $\text{div}\,\vec{v} = 0$, nghĩa là :

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \text{, do đó } \oiint_S \vec{v}.d\vec{S} = \vec{0} \text{ ;}$$

lúc đó ta lại tìm thấy sự bảo toàn lưu lượng thể tích D_V đối với một chất lỏng không thể nén được :

Khi có một dòng chảy chất lỏng không thể nén được không nguồn, thì lưu lượng thể tích D_V được bảo toàn.

Vectơ vận tốc $\vec{v}(M,t)$ có thông lượng bảo toàn :

$$\mathbf{div}(\vec{v}(M,t)) = \mathbf{0}\,.$$

<u>*Chú ý :*</u>

Tiếp tục phần nhận xét trước đây, ta có thể khẳng định rằng chỉ cần dòng chảy không thể nén được là đủ để bảo đảm sự bảo toàn của D_V.

Áp dụng 6

Các dòng chảy không thể nén được

Chứng minh rằng các trường vận tốc sau đây nghiệm đúng điều kiện $\text{div}(\vec{v}(M,t)) = \vec{0}$ *:*

a) $\vec{v}(M,t) = \frac{K(t)}{r}\vec{e}_r$ *trong tọa độ trụ ;*

b) $\vec{v}(M,t) = \frac{K(t)}{r^2}\vec{e}_r$ *trong tọa độ cầu.*

a) Tọa độ trụ :

$$\text{div}(\vec{v}(M,t)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{K(t)}{r}\right) = 0$$

<u>*Chú ý :*</u>

Trường vectơ duy nhất dạng $f(r)\vec{e}_r$ trong tọa độ trụ, nghiệm đúng $\text{div}\,\vec{v} = 0$, phải có dạng $\frac{K}{r}\vec{e}_r$ ($r \neq 0$). Ở $r = 0$ (vậy là ở trên trục (Oz)) tồn tại các nguồn (*xem áp dụng* 3).

b) Tọa độ cầu :

$$\text{div}(\vec{v}(M,t)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{K(t)}{r^2}\right) = 0$$

<u>*Chú ý :*</u>

Trường vectơ duy nhất dạng $f(r)\vec{e}_r$ trong tọa độ cầu, nghiệm đúng $\text{div}\,\vec{v} = 0$, phải có dạng $\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ ($r \neq 0$). Ở $r = 0$ (vậy là ở O) tồn tại một nguồn (*xem áp dụng* 4).

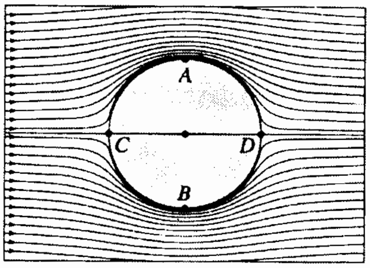
3.4. Sự bảo toàn lưu lượng thể tích : đặc trưng của các đường sức trường

Ta biết rằng đối với một chất lỏng không thể nén được, không nguồn, thì lưu lượng thể tích được bảo toàn, và như vậy thì vectơ $\vec{v}$ có thông lượng bảo toàn (div $\vec{v} = 0$) .

Nhưng khi một vectơ có thông lượng bảo toàn, thì thông lượng của vectơ này đi qua mọi mặt dựa lên một ống trường đã cho lại là một số cố định.

Khi các đường sức trường sít nhau, thì vectơ lại có môđun lớn hơn.

Sau đây ta sẽ xét một vài sơ đồ các đường sức của trường vận tốc để minh họa nhận xét trên.



H.18. *Dòng chảy xung quanh một hình cầu. Ở C và D, vận tốc bằng không.*

• *Ví dụ* 1 : Dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình cầu bán kính a (H.18).

Sơ đồ các đường dòng cho ta thấy rõ trường tại các điểm A điểm B ở lân cận hình cầu, mạnh hơn ở vô cùng về môđun. Điều này phù hợp với biểu thức của trường các vận tốc :

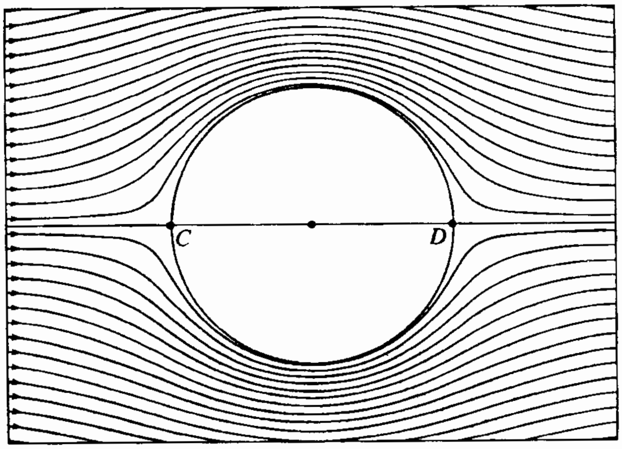
$$\vec{v} = \left| \begin{array}{l} v_0\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ -v_0\left(1+\dfrac{a^3}{2r^3}\right)\sin\theta \end{array} \right. .$$

Môđun của trường là cực đại ở $r = a : v = \dfrac{3}{2}v_0 \sin\theta$ với $\theta = \dfrac{\pi}{2}\left(\text{hay } -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

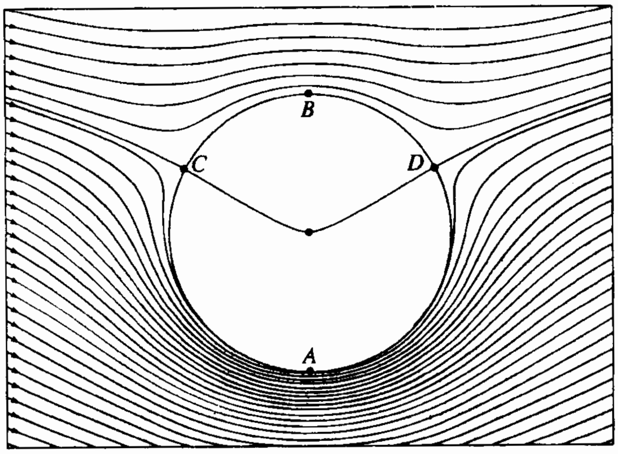
• *Ví dụ* 2 : Dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình trụ bán kính a đang quay (h.19 a và b).

Sơ đồ các đường dòng cho ta thấy trường ở lân cận hình trụ tại A mạnh hơn tại B về mô đun. Điều này phù hợp với biểu thức của trường các vận tốc :

$$\vec{v} = \left| \begin{array}{l} v_0\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ -v_0\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \dfrac{C}{2\pi r} \text{ (với } C > 0) \end{array} \right.$$



H.19a. *Dòng chảy xung quanh một hình trụ (C = 0). Ở C và D, vận tốc bằng không.*



H.19b. *Dòng chảy xung quanh một hình trụ (C ≠ 0). Ở C và D, vận tốc bằng không.*

Ta hãy lưu ý đến vận tốc của chất lỏng trên mặt hình trụ ($r = a$) :

$$v_\theta = -2v_0 \sin\theta + \frac{C}{2\pi a}.$$

Với $\theta = -\frac{\pi}{2}$, thì vận tốc bằng $v_{\left(\theta=-\frac{\pi}{2}\right)} = 2v_0 + \frac{C}{2\pi a}$, và với $\theta = \frac{\pi}{2}$, thì

$v_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)} = -2v_0 + \frac{C}{2\pi a}$. Ta có đúng $\left|v_{\left(\theta=-\frac{\pi}{2}\right)}\right| > \left|v_{\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)}\right|$

Trong một dòng chảy có thông lượng vận tốc bảo toàn ($\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$), thì các miền trong đó các đường dòng sít lại nhau là những miền có vận tốc "được nâng cao".

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ LƯU LƯỢNG KHỐI

• **Lưu lượng khối đi qua S có giá trị** $D_m = \iint\limits_{\substack{\text{mặt } S \\ \text{không kín}}} \vec{j}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S.$

Lưu lượng khối đi ra (đại số) có giá trị $D_m = \oiint\limits_{\substack{\text{mặt } S \\ \text{kín}}} \vec{j}(P,t).\vec{N}\mathrm{d}S$ **với** $\vec{j}(P,t) = \rho(P,t)\vec{v}(P,t)$ **là**

mật độ thể tích của dòng khối lượng.

• **Đạo hàm toàn phần**

Đạo hàm toàn phần $\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}t}$ **của đại lượng** G **là tổng của :**

$$\frac{\mathrm{D}G}{\mathrm{D}t} = \iiint\limits_V \frac{\partial g(M.t)}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \oiint\limits_S g(Pt)\vec{v}(P,t).\vec{N}.\mathrm{d}S\,.$$

■ CÂN BẰNG KHỐI LƯỢNG

• Sự cân bằng trong quá trình biến đổi khối lượng chứa trong một thể tích cố định V không có nguồn, được thể hiện bởi phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân $\iiint\limits_{\text{thể tích } V} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau = -D_{\text{m, đi ra}}$, nghĩa là :

$$\iiint\limits_{\substack{\text{thể tích } V \\ \text{cố định}}} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}\,d\tau + \oiint\limits_{\substack{\text{mặt } S \text{ kín} \\ \text{cố định, giới hạn } V}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS = 0\,.$$

• Sự cân bằng trong quá trình biến đổi khối lượng chứa trong một thể tích cố định V (thể tích kiểm tra), có đựng nguồn, được thể hiện bởi phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân :

$$\iiint\limits_{\text{thể tích } V} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau = -D_{\text{m, đi ra}} + D_{\text{m, nguồn}}\,,$$

nghĩa là

$$\iiint\limits_{\text{thể tích } V} \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau + \oiint\limits_{\substack{\text{mặt } S \text{ kín} \\ \text{giới hạn } V}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS = D_{\text{m,nguồn}}\,.$$

$D_{\text{m, nguồn}}$: lưu lượng khối của các nguồn ở bên trong thể tích V được xác định theo phương pháp đại số

• Ở chế độ dừng, cũng như đối với một chất lỏng không thể nén được, lưu lượng khối $D_{\text{m, đi ra}}$ đi qua mặt S giới hạn thể tích V bằng lưu lượng khối $D_{\text{m, nguồn}}$ của các nguồn ở trong thể tích đó.

Nếu không tồn tại bất kì một nguồn nào trong thể tích này ($D_{\text{m,nguồn}} = 0$), thì lúc đó lưu lượng khối $D_{\text{m, đi ra}}$ đi qua mặt S giới hạn thể tích đó sẽ bằng không : $D_{\text{m, đi ra}} = 0$.

• Phương trình bảo toàn khối lượng dạng vi phân trong một môi trường không nguồn được viết như sau :

$$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = 0 \text{ hay } \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(M,t) = 0$$

hay $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

• Khi có một dòng chảy dừng (không đổi, độc lập với thời gian), không nguồn, thì lưu lượng khối D_m được bảo toàn. Vectơ dòng khối lượng $\vec{j}(M,t)$ có lưu thông bảo toàn :

$$\operatorname{div}(\vec{j}(M,t)) = \vec{0} \text{ hay } \operatorname{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = \vec{0}\,.$$

• Đối với một chất lỏng không thể nén được, không nguồn, thì lưu lượng thể tích được bảo toàn. Vectơ vận tốc $\vec{v}(M,t)$ có thông lượng bảo toàn :

$$\operatorname{div}\vec{v}(M,t) = 0\,.$$

• Trong một dòng chảy có thông lượng vận tốc bảo toàn ($\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$), thì các miền mà các đường dòng trong đó sít lại nhau là các miền có vận tốc "được nâng cao".

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

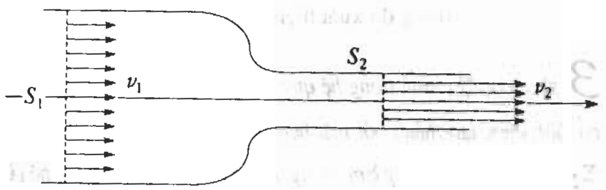
1 Dòng chảy chất lỏng không thể nén được trong một ống dẫn

Cho một dòng chảy chất lỏng không thể nén được trong một ống dẫn có một chỗ thắt lại.

Tiết diện ngang giảm từ S_1 về S_2. Giả thiết vận tốc chất lỏng không đổi trên toàn tiết diện và bằng v_1 ở mức của S_1 và v_2 ở mức của S_2.

Tìm hệ thức liên kết v_1, v_2, S_1 và S_2 ? Kết luận.

Mô tả các đường dòng.



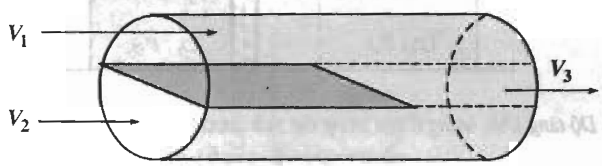
2 Dòng chảy của một chất lỏng không thể nén được

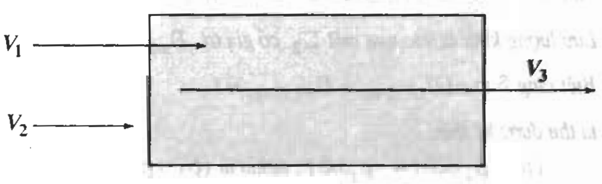
Giả sử có một dòng chảy chất lỏng không thể nén được đi qua một hình trụ tiết diện S, có gắn một tấm phân cách chia tiết diện hình trụ thành hai phần bằng nhau.

Khi vào hình trụ, các vận tốc chất lỏng là V_1 và V_2, còn khi ra khỏi hình trụ ở xa tấm phân cách, thì vận tốc chất lỏng là V_3.

Hãy tính V_3 theo V_1 và V_2. Khảo sát trường hợp đặc biệt $V_2 = \frac{V_1}{2}$.

Vẽ dáng đi của các đường dòng.





VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 ★ Sự lan truyền của một mặt đầu sóng

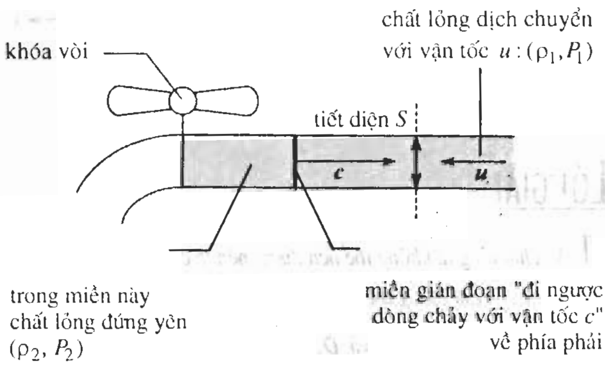
Có một dòng chảy chất lỏng ở vận tốc không đổi u trong một ống tiết diện S giả thiết là không thể biến dạng được.

Nhờ một khóa vòi, người ta làm ngừng đột ngột dòng chảy này : khi đó, xuất hiện một vùng gián đoạn áp suất và khối lượng riêng đi ngược trở lại trong ống.

Hãy biểu thị các hệ thức bảo toàn khối lượng :

a) khi ta ở trong hệ quy chiếu cố định ;

b) khi ta ở trong hệ quy chiếu gắn với vùng gián đoạn.

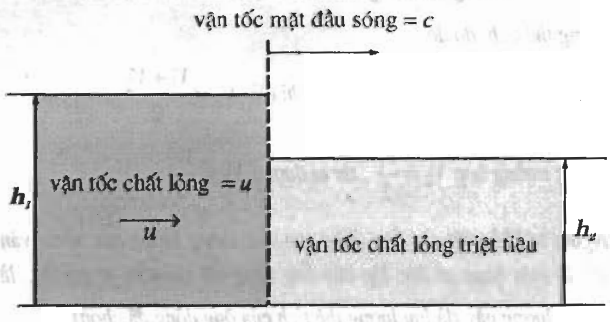


4 ★ Sự lan truyền của một sóng

Người ta mô hình hóa một sóng theo cách sau đây : mặt đầu sóng tiến lên phía trước với vận tốc c. Chất lỏng không thể nén được, khi sóng tới tác động, sẽ có vận tốc u, còn khi sóng chưa tới thì đứng yên. Hãy viết phương trình bảo toàn khối lượng theo các cách khác nhau :

a) trong hệ quy chiếu trên mặt đất ;

b) trong hệ quy chiếu gắn với mặt đầu sóng.

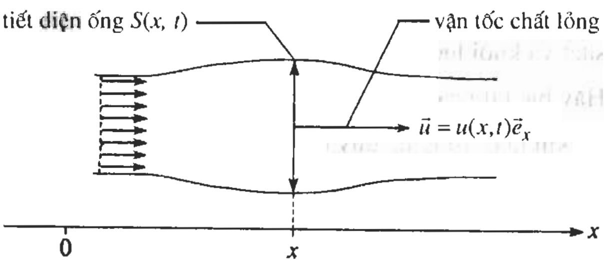


5 ★★ Phương trình bảo toàn khối lượng trong một ống có tiết diện biến thiên

Cho một dòng chảy chất lỏng có thể nén được. Tại một điểm có hoành độ x ở thời điểm t, chất lỏng có khối lượng riêng $\rho\ (x, t)$ và vận tốc $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x$.

Dòng chảy này được thực hiện trong một ống có tiết diện $S(x, t)$ biến đổi chậm theo các tọa độ không gian và thời gian.

Hãy nghiên cứu phương trình vi phân liên kết các đại lượng khác nhau này.



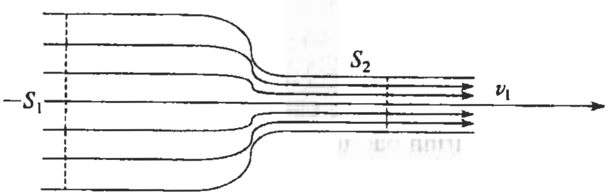
LỜI GIẢI

1 *Vì chất lỏng là không thể nén được, nên ta có sự bảo toàn các lưu lượng khối và lưu lượng thể tích :*

$$D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2 \text{ và } D_m = \rho D_v = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 .$$

Biết rằng $S_2 < S_1$ *, ta được* $v_2 > v_1$.

Do vậy các đường dòng sẽ sít nhau trong S_2 *hơn là trong* S_1 .



2 *Vì chất lỏng là không thể nén được, nên ta có sự bảo toàn lưu lượng thể tích, do đó :*

$$\frac{S}{2}V_1 + \frac{S}{2}V_2 = SV_3 \text{ nghĩa là } V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2} .$$

Trong trường hợp $V_2 = \frac{V_1}{2}$ *, thì ta được :* $V_3 = \frac{3V_1}{4}$.

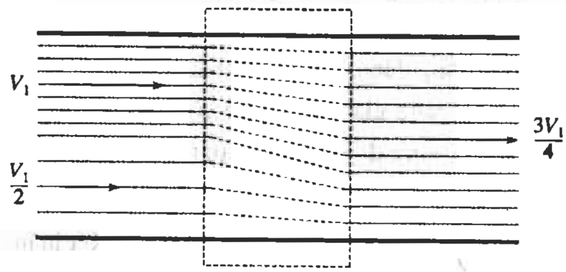
Người ta khảo sát các ống dòng sao cho thông lượng của vécto vận tốc là một hằng số độc lập của ống dòng đã chọn và ta gọi δ_v *là thông lượng này (là lưu lượng thể tích của ống dòng đã chọn).*

Nếu trong phần vận tốc V_1 *, số ống dòng là* N_1*, còn* N_2 *là trong phần vận tốc* V_2 *và* N_3 *là trong phần vận tốc* V_3*, thì lúc đó ta có :*

$$\frac{S}{2}V_1 = N_1\delta_v \quad \frac{S}{2}V_2 = \frac{S}{2}\frac{V_1}{2} = N_2\delta_v \text{ và } SV_3 = \frac{3SV_1}{4} = N_3\delta_v .$$

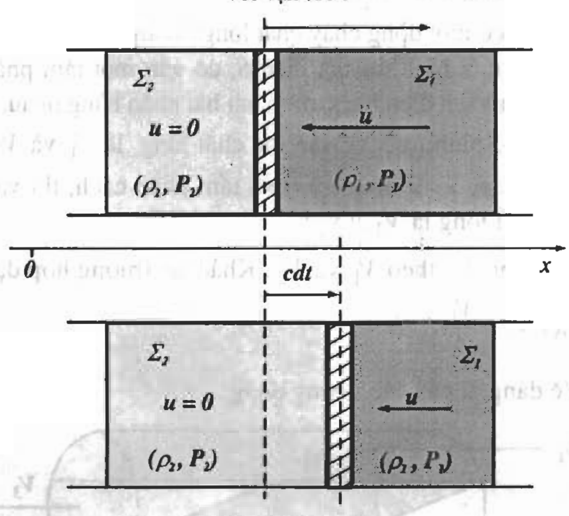
nghĩa là $N_2 = \frac{N_1}{2}$ *và* $N_3 = \frac{3N_1}{2}$ *. Ta nghiệm thấy* $N_1 + N_2 = N_3$.

Các hệ thức trên cho phép tìm thấy một dáng đi của các đường sức trường.



vùng bị nhiễu loạn mà
trong đó xuất hiện các lực nhớt.

3 a) *Ta tự đặt mình trong hệ quy chiếu cố định. Cho một mặt kín cố định được tạo thành bởi mặt bên của ống dẫn và hai mặt* Σ_1 *và* Σ_2 *. Độ tăng khối lượng* δm *(trong thời gian* δt*), ở bên trong thể tích giới hạn bởi mặt kín này, bằng khối lượng đi vào qua mặt này trong cùng thời gian* δt *như nhau.*



Độ tăng khối lượng ở bên trong thể tích được viết :

$$\delta m = (\rho_1 - \rho_2)Sc\delta t$$

Lưu lượng khối đi vào qua mặt Σ_1 *có giá trị* $D_{m1,\text{ đi vào}} = -\rho_1 Su$.

Lưu lượng khối đi vào qua mặt Σ_2 *có giá trị* $D_{m2,\text{ đi vào}} = 0$

Biết rằng $\delta m = (D_{m1,\text{ đi vào}} + D_{m2,\text{ đi vào}})\delta t$,

ta thu được hệ thức

$$(\rho_1 - \rho_2)Sc\delta t = -\rho_1 Su\delta t \text{, nghĩa là } (\rho_2 - \rho_1)c = \rho_1 u .$$

b) Ta đặt mình trong hệ quy chiếu gắn với miền gián đoạn. Cho một mặt kín cố định được cấu tạo bởi mặt bên ống dẫn và hai mặt Σ_1 và Σ_2.

Độ biến thiên khối lượng ở bên trong mặt kín này bằng không.

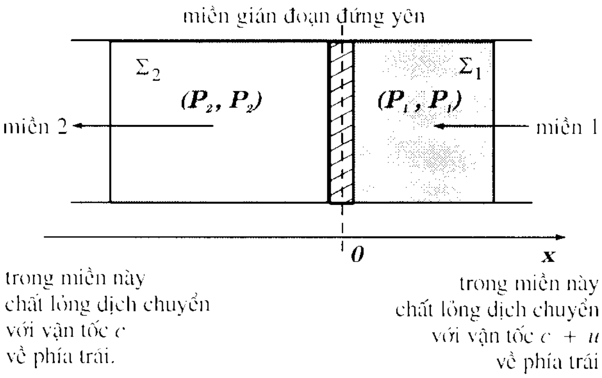
Thật vậy, tại mọi điểm của không gian, khối lượng riêng không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian. Trong các điều kiện này, lưu lượng khối đi qua mặt giới hạn thể tích này bằng không.

Trong miền 1, vận tốc của chất lỏng bằng $c + u$ về môđun, như vậy, lưu lượng đi ra qua mặt Σ_1 bằng $D_{m1,\text{ đi ra}} = -\rho_1 S(c+u)$.

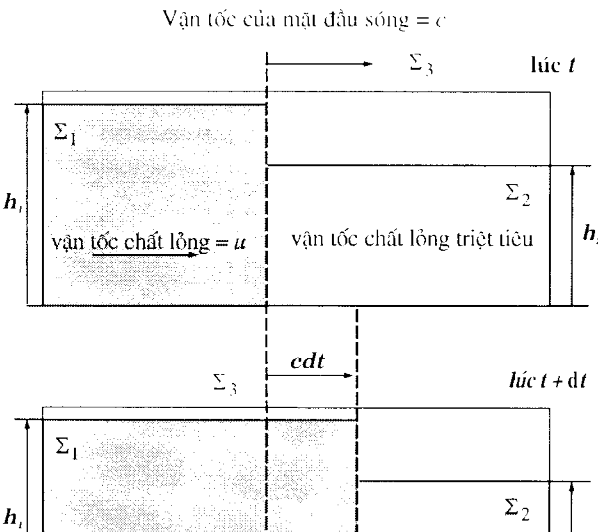
Trong miền 2, vận tốc chất lỏng bằng c về mô đun, vậy nên lưu lượng đi ra qua Σ_2 bằng $D_{m2,\text{ đi ra}} = \rho_2 Sc$.

Biết rằng $D_{m1,\text{ đi ra}} + D_{m2,\text{ đi ra}} = 0$, *nên ta được* $\rho_2 Sc = \rho_1 S(c+u)$, *nghĩa là :*

$$\rho_2 c = \rho_1 (c+u)\text{, vậy } (\rho_2 - \rho_1)c = \rho_1 u .$$



4 a)



Ta đang ở trong hệ quy chiếu cố định gắn với mặt đất. Cho một mặt kín cố định gồm mặt đất, hai mặt Σ_1, Σ_2 và mặt trên Σ_3. Độ tăng khối lượng δm (trong thời gian δt) ở bên trong thể tích giới hạn bởi mặt kín này bằng khối lượng đi vào qua mặt đó trong cùng thời gian δt như nhau.

Độ tăng khối lượng ở bên trong thể tích được viết : $\delta m = \rho(h_1 - h_2)Lc\delta t$.

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_1 có giá trị :

$$D_{m1,\text{ vào}} = \rho h_1 Lu .$$

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_2 có giá trị :

$$D_{m2,\text{ vào}} = 0$$

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_3 có giá trị :

$$D_{m3,\text{ vào}} = 0 .$$

Biết rằng $\delta m = (D_{m1,\text{ vào}} + D_{m2,\text{ vào}} + D_{m3,\text{ vào}})\delta t$, *nên ta được hệ thức :*

$$\rho(h_1 - h_2)Lc\delta t = \rho h_1 Lu\delta t\text{ , nghĩa là : } (h_1 - h_2)c = h_1 u .$$

b) *Ta đặt mình trong hệ quy chiếu gắn với mặt đầu sóng. Cho một mặt kín cố định gồm mặt đất, hai mặt Σ_1 và Σ_2 và mặt trên Σ_3. Độ biến thiên khối lượng ở bên trong mặt kín này bằng không. Thật vậy, tại mọi điểm trong không gian, khối lượng riêng không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian. Trong các điều kiện này, lưu lượng khối đi qua mặt giới hạn thể tích này triệt tiêu.*

Trong miền 1, vận tốc chất lỏng bằng $c - u$ về môđun, nên lưu lượng đi ra qua mặt Σ_1 bằng :

$$D_{m1,\text{ ra}} = \rho h_1 L(c-u) .$$

Trong miền 2, vận tốc chất lỏng bằng c về môđun, nên lưu lượng đi ra qua mặt Σ_2 bằng :

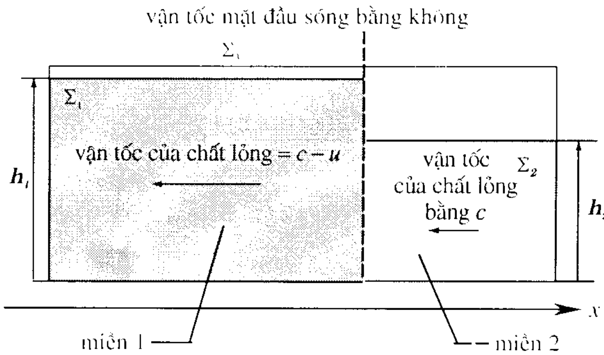
$$D_{m2,\text{ ra}} = -\rho h_2 Lc .$$

Thông lượng khối đi qua mặt Σ_3 bằng không, vậy :

$$D_{m3,\text{ ra}} = 0 .$$

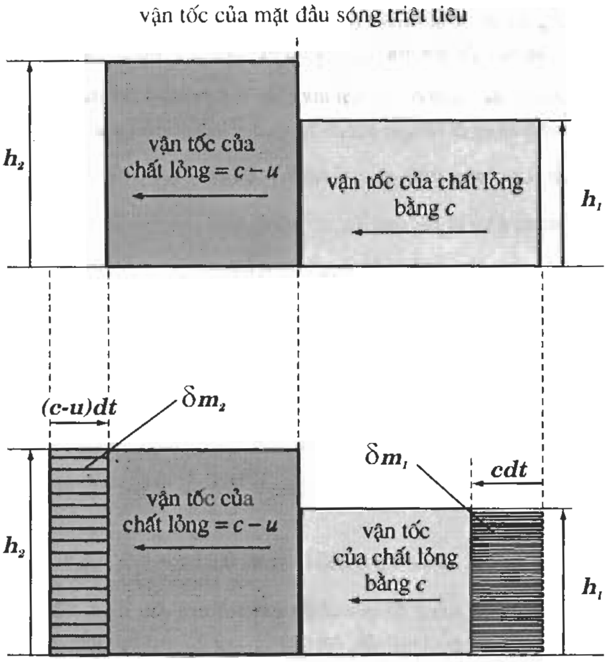
Biết rằng $D_{m1,\text{ ra}} + D_{m2,\text{ ra}} + D_{m3,\text{ ra}} = 0$, *nên ta được :*

$$\rho h_2 Lc = \rho h_1 L(c-u)\text{ , nghĩa là } h_2 c = h_1(c-u)$$



Có thể lập luận cách khác bằng cách lấy một mặt chứa các hạt chất lỏng giới hạn một phần chất lỏng. Trong thời gian δt, khối lượng "biến mất" δm_1 sẽ lại "tái hiện" ở δm_2 .

Biết rằng $\delta m_1 = \rho h_1 Lc\delta t$ *và* $\delta_{m2} = \rho h_2 L(c-u)\delta t$, *nên cách viết* $\delta m_1 = \delta m_2$ *sẽ cho cùng một kết quả như nhau.*



5 *Khi xét một thể tích V cố định bị giới hạn bởi một mặt S, thì phương trình bảo toàn khối lượng dạng tích phân có dạng :*

$$\iiint_{\text{thể tích } V} \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t}\, d\tau + \oiint_{\substack{\text{mặt kín } S \\ \text{giới hạn } V}} \rho(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}\, dS = 0 .$$

Ta áp dụng công thức này cho thể tích chất lỏng trong một mặt kín cố định Σ cấu tạo bởi Σ_1, Σ_2 và mặt bên Σ_L. Độ tăng khối lượng δm (trong thời gian δt) ở bên trong thể tích giới hạn bởi mặt kín này, bằng khối lượng đi vào qua mặt đó trong cùng khoảng thời gian δt như nhau.

Độ tăng khối lượng bên trong thể tích có giá trị :

$$\delta m = \rho(x, t+\delta t)S(x, t+\delta t)dx - \rho(x,t)S(x,t)dx$$

Đại lượng này có thể được viết :

$$\delta m = \left[\frac{1}{S(x,t)} \frac{\partial(\rho(x,t)S(x,t))}{\partial t}\right] S(x,t) dx \delta t .$$

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_1 có giá trị : $D_{m1,\,\text{vào}} = \rho S(x,t)u(x,t)$.

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_2 có giá trị :

$$D_{m2,\,\text{vào}} = -\rho S(x+dx,t)\, u(x+dx,t)$$

Lưu lượng khối đi vào qua Σ_L có giá trị : $D_{mL,\,\text{vào}} = 0$.

Lưu lượng khối tổng cộng đi vào là :

$$D_{m,\,\text{vào}} = D_{m1,\,\text{vào}} + D_{m2,\,\text{vào}} + D_{mL,\,\text{vào}}$$

dó đó :

$$D_{m,\,\text{vào}} = \rho(x,t)\, S(x,t)\, u(x,t) - \rho(x+dx,t)\, S(x+dx,t)\, u(x+dx,t)$$

$$= -\frac{\partial(\rho(x,t)\, S(x,t)\, u(x,t))}{\partial x} dx .$$

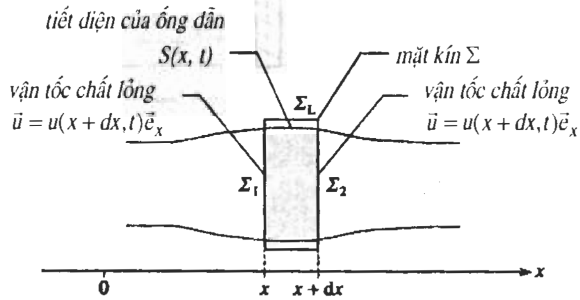
Biết rằng $\delta m = D_{m,\,\text{vào}}\delta t$ *, ta được :*

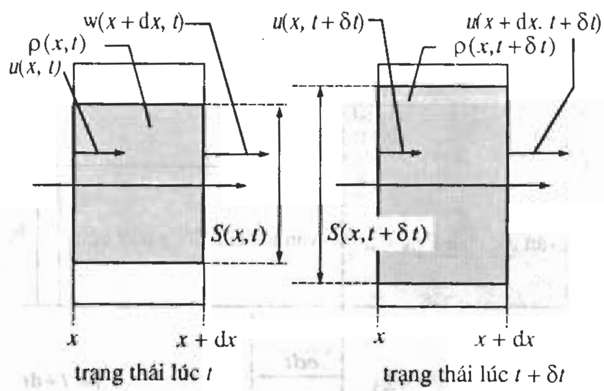
$$\frac{\partial(\rho(x,t)S(x,t))}{\partial t} dx\delta t + \frac{\partial(\rho(x,t)S(x,t)u(x,t))}{\partial x} dx\delta t = 0 .$$

do đó ta có :

$$\frac{\partial(\rho(x,t)S(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(x,t)S(x,t)u(x,t))}{\partial x} = 0 .$$

hay $S\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\dfrac{\partial S}{\partial t} + Su\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho u\dfrac{\partial S}{\partial x} + \rho S\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.





Nghiên cứu động học các chất lỏng. Mô tả định hình một vài loại dòng chảy

3

Mở đầu

Việc khảo sát trường các vận tốc của một chất lỏng (quan điểm Euler về chuyển động) cho phép rút ra các đặc trưng riêng cho dòng chảy của nó: sự giãn nở, tính xoáy nước (sự tồn tại có thể có các chỗ nước xoáy), sự biến dạng.

Các dòng chảy có thể được ghi theo danh mục tùy theo các đặc tính của chúng: dòng chảy dừng, dòng chảy không thể nén được, dòng chảy xoáy, dòng chảy thế...

Trong phần có tính chất mô tả hơn, ta sẽ trình bày chi tiết một số mô hình cổ điển về các dòng chảy mà ở đó ta sẽ lại tìm thấy các đặc trưng đã nêu trước đây.

Sự nghiên cứu đặc biệt các dòng chảy thế, xuất phát từ phương trình LAPLACE, là có tính chất phổ biến.

MỤC TIÊU

- Mô tả định hình một vài loại dòng chảy.
- Các dòng chảy dừng, thế, không thể nén được, xoáy, ...
- Xoáy nước, các khu nước xoáy.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Hình thức luận Euler.
- Phương trình bảo toàn khối lượng.

1 Các đặc trưng của trường các vận tốc của một chất lỏng

1.1. Mô tả cục bộ: sự giãn nở, tính xoáy nước

Sự vận động của một thể tích nguyên tố chất lỏng trong sự dịch chuyển của nó cho phép đặc trưng dòng chảy của chất lỏng.

Đối với các dòng chảy phẳng, có thể được biểu diễn dễ dàng hơn, thì ta sẽ quan sát sự vận động của một "diện tích" nguyên tố chất lỏng.

Hình 1 chứng minh định tính sự vận động của một thể tích nguyên tố đi vòng quanh một vật cản hình trụ.

Các ví dụ dưới đây sẽ cho phép rút ra một số kết quả cơ bản.

1.1.1. Các vận động cơ bản: sự giãn nở, sự quay, sự biến dạng

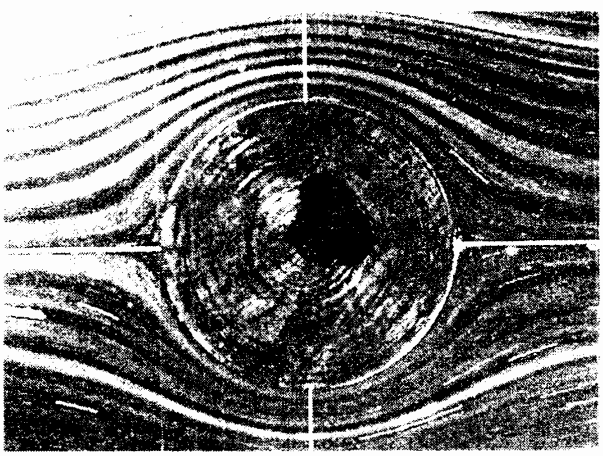
■ **Ví dụ 1: Sự giãn nở**

Ta hãy xét một trường vận tốc của một chất lỏng có dạng $\vec{v} = v_0(1+\frac{x}{L})\vec{e}_x$. Đây là một dòng chảy một chiều ổn định có thể mô phỏng sự giãn của một chất khí trong một ống phun (*h*.2a). Các quỹ đạo là những đường thẳng song song với $\vec{e}_x$.

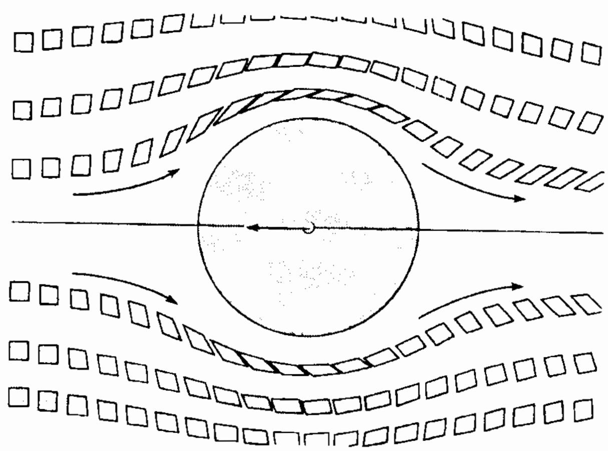
Một phần tử chất lỏng, đặt tại điểm $M(x, y)$ ở thời điểm t, sẽ có một diện tích dx dy.

Trong thời gian δt, vách thẳng đứng có hoành độ x dịch chuyển được đoạn đường $v_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\delta t$, trong khi vách có hoành độ $x+\mathrm{d}x$ lại dịch chuyển được $v_0\left(1+\frac{x+\mathrm{d}x}{L}\right)\delta t$. Phần tử chất lỏng có độ rộng dx ở thời điểm t, sẽ có độ rộng $\mathrm{d}x\left(1+\frac{v_0}{L}\delta t\right)$ ở thời điểm $t+\delta t$.

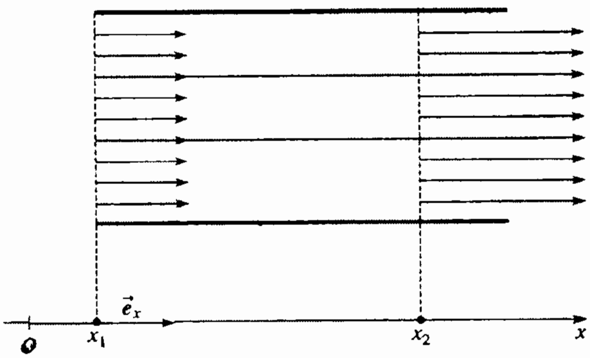
Vậy phần tử chất lỏng đã giãn nở theo hướng x (*h*.2b).



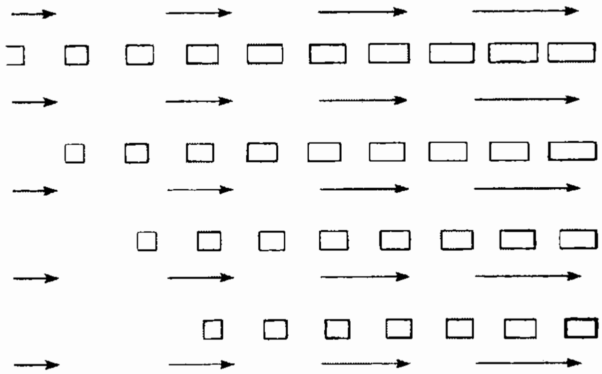
H.1a. *Dòng chảy ổn định độc lập với thời gian (dừng) xung quanh một hình trụ: đây là dòng nước chảy đối xứng (và thuận nghịch) từ trái qua phải. Có thể làm hiện rõ dòng chảy nhờ các tia nhỏ dầu lanh trong dầu vazolin.*



H.1b. *Sự mô phỏng số học dòng chảy này cho thấy rõ sự vận động của một thể tích nguyên tố.*



H.2a. *Sự mô phỏng một dòng chảy trong một ống phun.*



H.2b. *Việc làm hiện rõ sự giãn nở của một phần tử chất lỏng.*

Ở đây sự giãn nở là do sự phụ thuộc của vận tốc, cộng tuyến với trục (Ox), đối với cùng biến số x này: vận tốc biến đổi "theo hướng của nó". Nói khác đi là trong ví dụ này, có sự giãn nở của một phần tử chất lỏng vì $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} \neq 0$.

Ta sẽ trở lại điểm này trong phần tiếp theo của giáo trình.

■ **Ví dụ 2: Sự quay**

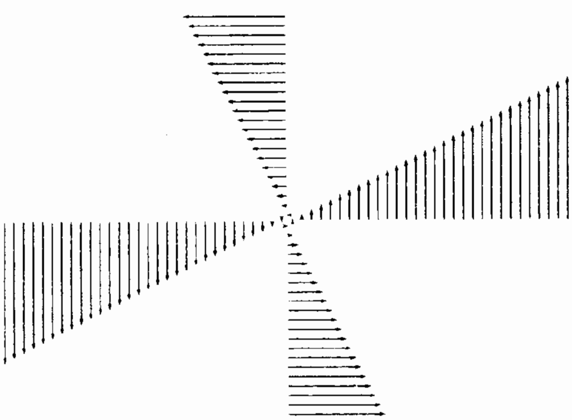
Bây giờ ta xét một trường vận tốc (*h*.3a) có dạng $\vec{v} = Ar\vec{e}_\theta$ trong tọa độ trụ.

Trường này tương ứng một sự mô hình hóa trường các vận tốc ở bên trong một cuộn xoáy.

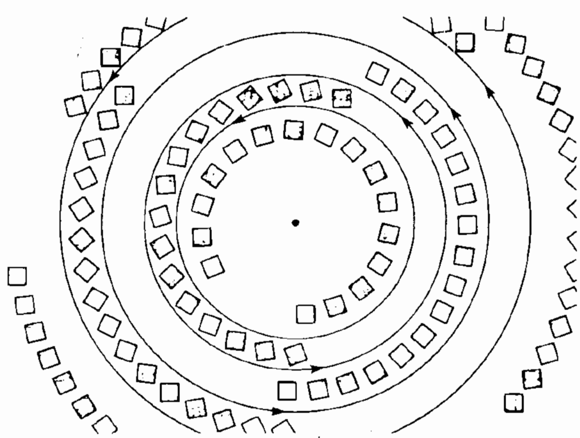
Ở bên trong cuộn xoáy, chúng ta tham dự vào một chuyển động quay của một phần tử nguyên tố chất lỏng (*h*.3b).

■ **Ví dụ 3: Sự biến dạng**

Ta trở lại dòng chảy trong một nhị diện vuông có dạng $\vec{v}(-kx, ky, 0)$ đã được nghiên cứu ở *chương* 1. Sự vận động của một phần tử chất lỏng, có diện tích ban đầu $dx\,dy$, dọc theo một quỹ đạo có phương trình $xy = x_0 y_0$ được biểu diễn trên *hình* 4.



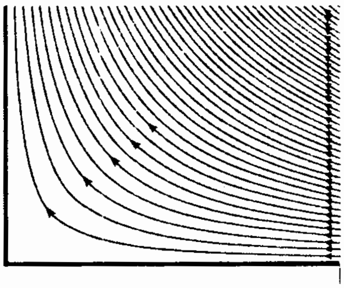
H.3a. *Sự làm thấy rõ trường các vận tốc của một dòng chảy trong mắt một cơn lốc (trung tâm cơn lốc).*



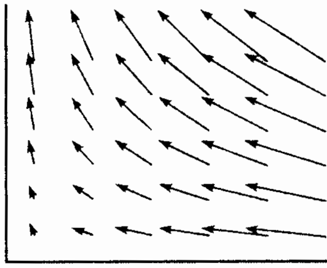
H.3b. *Sự thể hiện các biến đổi của một phần tử chất lỏng trong dòng chảy này. Phần tử "quay" mà không biến dạng.*

Ta nhận thấy có một sự biến dạng của phần tử này, mà không có sự biến đổi diện tích của phần tử, cũng như chuyển động quay của nó.

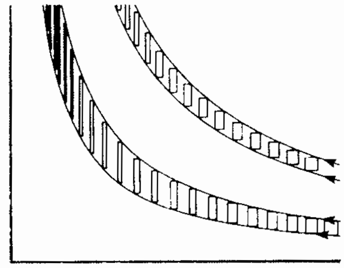
Từ nay, ta lưu ý rằng dòng chảy này tuân theo $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$.



H.4a. *Các đường dòng của dòng chảy hai chiều (nhị diện vuông).*



H.4b. *Trường các vận tốc của cùng một dòng chảy hai chiều (nhị diện vuông).*



H.4c. *Sự biến dạng của một phần tử trong dòng chảy hai chiều này (nhị diện vuông).*

Áp dụng 1

Nghiên cứu một sự biến dạng

Cho một dòng chảy dừng trong một nhị diện vuông mà biểu thức về vận tốc trong hình thức luận Euler có dạng $\vec{v}(-kx, ky, 0)$, đã được xem xét trong ví dụ về sự biến dạng. Hãy xác minh rằng phần tử chất lỏng được định nghĩa trước đấy vẫn giữ một diện tích không đổi bằng cách giới hạn ở các phép tính cấp một.

v_x chỉ phụ thuộc x và v_y chỉ phụ thuộc y, các vách của phần tử vẫn song song với các phương (Ox) và (Oy): không có chuyển động quay.

Vách thẳng đứng, ở hoành độ x, dịch chuyển được đoạn đường $-kx\delta t$ trong thời gian δt, trong khi vách thẳng đứng ở hoành độ $x + dx$ dịch chuyển được $-k(x + dx)\delta t$.

Độ rộng ban đầu dx của hình chữ nhật (*H*.5) trở thành:

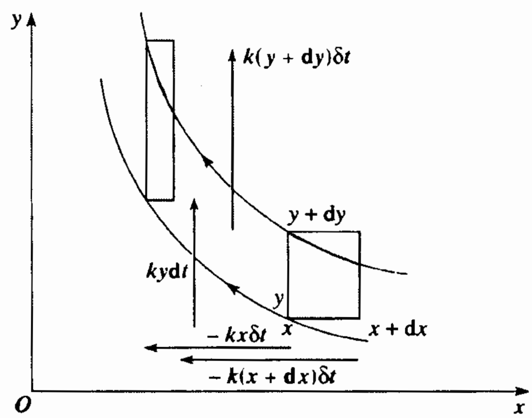
$$dx(1 - k\delta t).$$

Cũng thế, chiều cao trở thành $dy(1 + k\delta t)$.

Như vậy diện tích của phần tử chất lỏng ở thời điểm $t + \delta t$ sẽ là:

$$dS = dx(1 - k\delta t)\, dy\, (1 + k\delta t) \approx dxdy.$$

<u>Chú ý:</u> Ví dụ đã chọn chứng tỏ một sự biến dạng, có diện tích không đổi, của một phần tử chất lỏng mà các góc vẫn là không đổi. Trong các dòng chảy khác, có thể có thêm trong đó một biến dạng góc (có diện tích không đổi), ví như hình chữ nhật trở thành hình thoi chẳng hạn.



H.5. *Sự biến dạng của một phần tử chất lỏng trong một dòng chảy hai chiều (nhị diện vuông).*

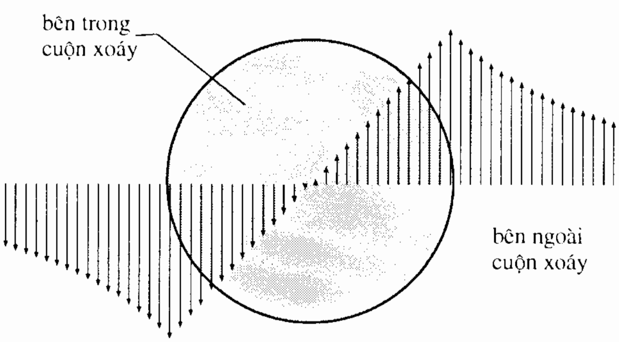
<u>Chú ý:</u> Cho một cuộn xoáy giới hạn bởi một hình trụ thẳng đứng bán kính a. Trường các vận tốc trong toạ độ trụ sẽ có dạng $\vec{v} = Ar\vec{e}_\theta$ đối với $r < a$, và $\vec{v} = A\frac{a^2}{r}\vec{e}_\theta$ đối với $r > a$.

Trên các hình 6, hai miền này được phân ranh giới bởi vòng tròn. Ở bên trong cuộn xoáy, ta chứng kiến sự quay của một phần tử nguyên tố chất lỏng (h. 6b), nhưng phần tử này bị biến dạng ngay khi ta ở bên ngoài cuộn xoáy. Hai phần tử ở trong ($r < a$) và ở ngoài ($r > a$) cuộn xoáy cho ta ấn tượng là chúng quay quanh mình chúng theo chiều ngược nhau.

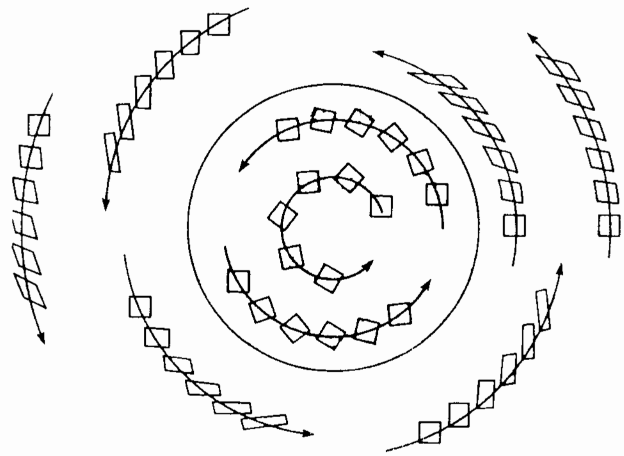
Đối với một dòng chảy bất kì, thì sự vận động của một thể tích nguyên tố chất lỏng tổ hợp ba dáng vẻ cục bộ được nhìn thấy riêng rẽ: sự giãn nở, sự quay và sự biến dạng.

Trên *hình* 7, ta thể hiện sự biến dạng của các phần tử khác nhau của một chất lỏng khi mô phỏng một dòng chảy xung quanh một hình cầu.

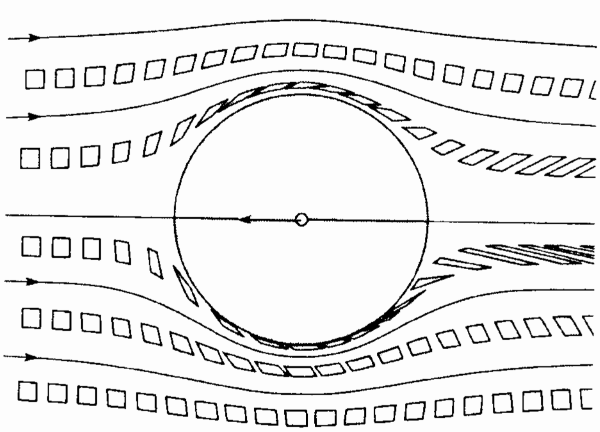
Trên *hình* 8, ta thể hiện sự biến dạng của các phần tử chất lỏng khác nhau khi mô phỏng một dòng chảy xung quanh một hình trụ đang quay.



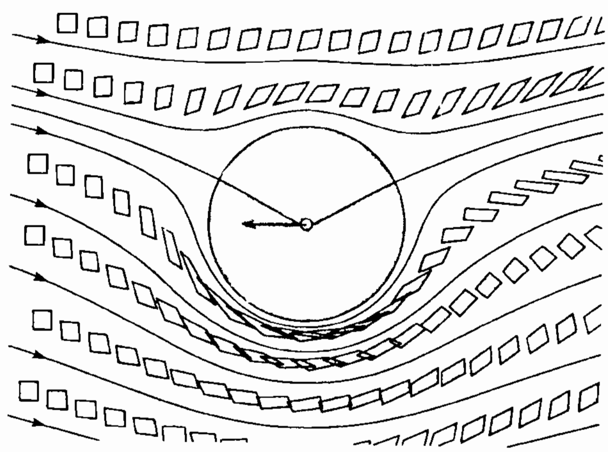
H.6a. *Trường các vận tốc của một dòng chảy ở trong và ngoài cuộn xoáy.*



H.6b. *Sự thể hiện các biến đổi của một phần tử chất lỏng khi có dòng chảy này.*



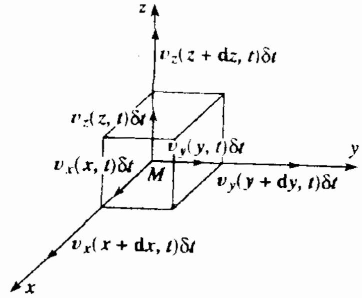
H.7. *Dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình cầu trong một mặt phẳng kinh tuyến: Sự thể hiện các biến dạng của các phần tử khác nhau.*



H.8. *Dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình trụ đang quay: Ta làm thấy rõ các biến dạng của các phần tử khác nhau.*

Trên cơ sở nhiều ví dụ đã nêu, ta thấy rằng sau khi "nhiễu loạn" đi qua, thì các phần tử chất lỏng đều biến đổi rất nhiều.

Sự phân tích phần đóng góp của mỗi dạng (tịnh tiến, giãn nở, quay, ...) không được rõ ràng. Tuy nhiên, có thể gắn các hiện tượng giãn nở và quay cục bộ với trường các vận tốc của chất lỏng.



H.9. *Sự giãn nở của một hình lập phương chất lỏng.*

1.1.2. Trường các vận tốc và sự giãn nở: vai trò của "div $\vec{v}$ "

Một dòng chảy ba chiều được giả thiết là mỗi thành phần vận tốc chỉ phụ thuộc vào toạ độ tương ứng $M(x, y, z)$:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,t)\vec{e}_x + v_y(y,t)\vec{e}_y + v_z(z,t)\vec{e}_z .$$

Trong thời gian δt, các vách của một phần tử thể tích dxdydz dịch chuyển trực giao với chính chúng (*h*.9)

Cạnh có chiều dài dx của hình lập phương trở thành:

$$\mathrm{d}x' = x + \mathrm{d}x + v_x(x+\mathrm{d}x,t)\delta t - \left[x + v_x(x, t)\delta t\right] = \mathrm{d}x\left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta t\right).$$

Tương tự ta có:

$$\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y\left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta t\right) \text{ và } \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z\left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z}\delta t\right).$$

Như vậy, thể tích nguyên tố $\Delta\tau$ đã biến thiên đi $\delta(\Delta\tau)$ sao cho:

$$\delta(\Delta\tau) = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' - \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \approx \Delta\tau\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta t = \mathrm{div}\vec{v}\,\Delta\tau\,\delta t ,$$

nghĩa là:

$$\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \mathrm{div}\vec{v}\,\delta t \text{ hay } \frac{1}{\delta t}\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \mathrm{div}\,\vec{v} .$$

Ta thừa nhận tính tổng quát của phép tính này gắn trường các vận tốc với hiện tượng giãn nở (*xem áp dụng* 2).

Áp dụng 2

Ý nghĩa vật lí của div $\vec{v}$

Chứng minh tính tổng quát của biểu thức:

$$\frac{1}{\delta t}\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

khi giới hạn ở cấp một các độ biến thiên của các cạnh $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ của một phần tử có thể tích $\Delta\tau$

Ở thời điểm t, ta có $\Delta\tau(t) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Ở thời điểm $t + \delta t$, ta có:

$$\Delta\tau' = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \Delta\tau(t + \delta t)$$
$$= (\mathrm{d}x + \delta(\mathrm{d}x))(\mathrm{d}y + \delta(\mathrm{d}y))(\mathrm{d}z + \delta(\mathrm{d}z))$$

$$\Delta\tau(t + \delta t) - \Delta\tau(t)$$
$$= \delta(\Delta\tau) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\delta(\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}y} + \frac{\delta(\mathrm{d}z)}{\mathrm{d}z}\right).$$

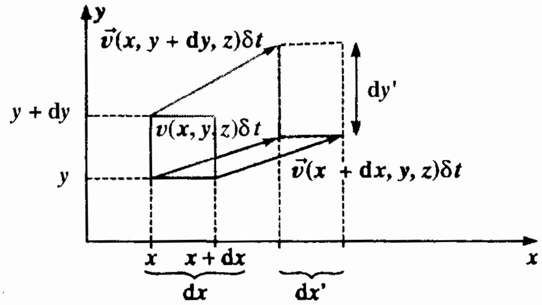
Cuối cùng: $\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x = \delta(\mathrm{d}x)$

$$= \left(v_x(x+\mathrm{d}x,y,z,t) - v_x(x,y,z,t)\right)\delta t$$
$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\delta t,$$

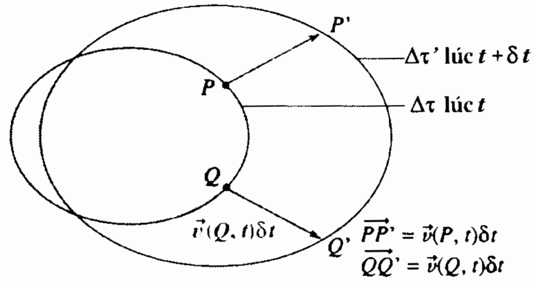
và tương tự (*h*.10a)

$$\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y = \delta(\mathrm{d}y) = \left(v_y(x,y+\mathrm{d}y,z,t) - v_y(x,y,z,t)\right)\delta t$$
$$= \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\delta t$$

Từ đó (*h*.10b): $\delta(\Delta\tau) = \Delta\tau \, \mathrm{div}\vec{v}\delta t$.



H.10a.



H.10b. *Độ biến thiên thể tích:*

$$\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \mathrm{div}\vec{v}\delta t$$

<u>Chú ý:</u> Mặt giới hạn phần tử chất lỏng có thể tích $\Delta\tau$ dịch chuyển với vận tốc của chất lỏng (thể tích chứa các hạt lỏng); như vậy không có bất kỳ một sự truyền vật chất nào đi qua mặt này: thành thử khối lượng Δm của phần tử thể tích $\Delta\tau$ này là không đổi. Nếu $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, thì trong quá trình dịch chuyển, thể tích $\Delta\tau$ của phần tử chất lỏng không biến đổi. Vì khối lượng Δm của nó là không đổi, nên khối lượng riêng của chất lỏng $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta\tau}$ cũng không đổi khi ta theo dõi phần tử thể tích này, nghĩa là $\dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$.

Nếu $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, thì ta có một dòng chảy không thể nén được: $\dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$. Như vậy, ta lại tìm được điều đã thấy ở chương 2 mà ta thu được, xuất phát từ phương trình khối lượng viết dưới dạng $\dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.

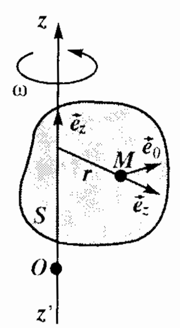
Về cục bộ, thì hệ số biến đổi tương đối của thể tích trong đơn vị thời gian bằng đive của trường các vận tốc: $\dfrac{1}{\delta t}\dfrac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau}\mathrm{div}\,\vec{v}$.

Trường vận tốc của một chất lỏng cho ta thông tin về sự giãn nở của nó nhờ trung gian đive của vận tốc.
Nếu $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, thì ta có một dòng chảy không thể nén được:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$$

1.1.3. Trường các vận tốc và sự quay: vai trò của "$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$"

Ta trở lại ví dụ về cuộn xoáy (*ví dụ* 3). Trường vận tốc đã nêu giống hệt trường vận tốc của một vật rắn quay xung quanh một trục cố định (Oz) (*h.* 11). Mọi điểm M gắn với vật rắn đều có một vận tốc dạng $\vec{v} = \omega r\vec{e}_\theta$, trong đó ω là vận tốc góc của chuyển động quay xung quanh trục (Oz) và r là khoảng cách từ điểm M đến trục (Oz). Ta hãy tính $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ liên quan đến trường các vận tốc của vật rắn này (ω không phụ thuộc vào các tọa độ không gian) ở mọi điểm.



H.11. *Vật rắn quay xung quanh một trục cố định :*
$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega r\vec{e}_\theta$

Ta biết rằng $\text{rot}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$ (xem phụ lục và giáo trình *H–Prépa. Điện từ học năm thứ hai*). Khi viết $\vec{v} = \omega\, r\vec{e}_\theta = \omega\, r^2\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right)$, thì ta được:

$$\text{rot}\,\vec{v} = \omega\, r^2\,\text{rot}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right) + \omega\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, r^2\right)\wedge\frac{\vec{e}_\theta}{r}$$

$$= \omega\,\overrightarrow{\text{grad}}\, r^2 \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r} = 2\omega\,\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = 2\omega\,\vec{e}_z = 2\vec{\omega}\,.$$

Như vậy rota của vận tốc tại một điểm của vật rắn cho ta thông tin về sự quay của điểm này trong chuyển động của nó xung quanh (zz').

Kết quả này sẽ được thừa nhận không chứng minh đối với mọi chất lỏng đang chuyển động bằng cách xác định rõ là, trái với trường hợp vật rắn đang quay, $\text{rot}\,\vec{v}$ có thể biến đổi từ điểm này sang điểm khác của chất lỏng (các yếu tố chứng minh sẽ được nghiên cứu trong bài tập 2). Tương tự chuyển động của một vật rắn, vectơ *xoáy* được xác định tại mọi điểm của chất lỏng bởi hệ thức $\text{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}$.

Thành thử, trong gần đúng bậc nhất đối với một chất lỏng không thể nén được, ta có thể viết $\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + \vec{\Omega}(M)\wedge\overrightarrow{MM'}$, với M và M' là hai điểm gần nhau.

Ở cục bộ, trường các vận tốc của một chất lỏng, có thể đồng dạng với trường vận tốc của một vật rắn có vectơ quay tức thời $\vec{\Omega}$. Sự quay đặc biệt này (sự xoáy) của chất lỏng tại một điểm M sẽ tồn tại nếu rota của trường các vận tốc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega}$ biểu diễn vectơ xoáy) khác không.

Ở cục bộ, trường các vận tốc của một chất lỏng cho ta thông tin về sự tồn tại các khu xoáy trong chất lỏng này nhờ sự trung gian của rota của vận tốc.

Chú ý:

Ta vừa định nghĩa vectơ xoáy dưới dạng: $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\text{rot}\,\vec{v}$. Đive của rota thì triệt tiêu, ta có $\text{div}\,\vec{\Omega} = 0$, nghĩa là $\vec{\Omega}$ biểu diễn một trường vectơ có thông lượng bảo toàn. Vectơ xoáy $\vec{\Omega}$ như vậy là một vectơ trục, cũng như từ trường $\vec{B}$ chẳng hạn. Các đường sức của vectơ $\vec{B}$ là các đường kín. Tình huống cũng như thế đối với các đường sức của vectơ xoáy. Đối với bài toán phẳng, thì các đường sức của vectơ $\vec{\Omega}$ đều là các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này.

▶ **Để tập luyện: bài tập 3, 4 và 5.**

1.2. Các đặc trưng của một dòng chảy

1.2.1. Các dòng chảy dừng

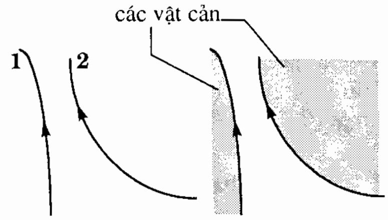
Ta nhắc lại một số định nghĩa và kết quả đã xét.

Một dòng chảy, mà đối với nó trường vận tốc Euler của chất lỏng độc lập với t, được gọi là dòng chảy dừng (độc lập với thời gian):

$$\vec{v} = \vec{v}(M) \text{ với } \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Ta nhắc lại rằng ở dòng chảy dừng, thì có sự đồng nhất của các quỹ đạo, các đường dòng và các đường phát xạ. Ở tiết **1.3** ta sẽ thấy rằng các đường dòng có thể cụ thể hóa các đường chu vi của vật cản (*h*.12 và *áp dụng* 4).

Trong một dòng chảy dừng, lưu lượng khối đi qua mọi tiết diện của một ống dòng là như nhau.



H.12. *Sự cụ thể hóa các đường dòng.*

1.2.2. Dòng chảy không thể nén được

Nếu tại mọi điểm của chất lỏng, thể tích của tất cả các phần tử chất lỏng được bảo toàn trong quá trình dòng chảy, thì chất lỏng này đang ở dòng chảy không thể nén được.

Theo tiết **1.1.3**, thì đive của trường các vận tốc cho ta thông tin về độ biến thiên thể tích của một phần tử chất lỏng được theo dõi trong sự dịch chuyển của nó. Nếu phần tử nào giữ một thể tích không đổi, thì đive triệt tiêu.

Dòng chảy không thể nén được là một dòng chảy mà đối với nó div $\vec{v}$ triệt tiêu ở khắp mọi nơi: $\operatorname{div}\vec{v}(M,t)=0$.

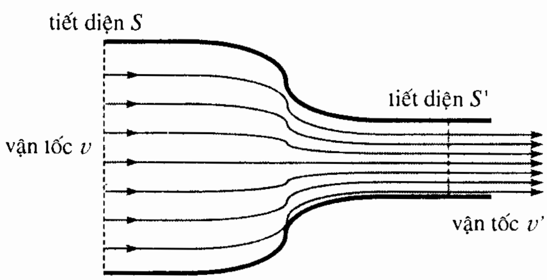
Ta nhắc lại rằng một trường vectơ có đive *đồng nhất* không, nghĩa là triệt tiêu tại mọi điểm của không gian, thì cũng có thông lượng bảo toàn. Điều này bao hàm ý là thông lượng của trường này bằng không qua *mọi* mặt kín ở trong lòng chất lỏng, hay còn ngụ ý là có sự bảo toàn thông lượng đi qua mọi tiết diện của một ống trường. Thế mà lưu lượng thể tích lại bằng thông lượng của trường các vận tốc. Từ đó ta rút ra một đặc trưng lý thú của một dòng chảy không thể nén được.

Trong một dòng chảy không thể nén được, lưu lượng *thể tích* được bảo toàn qua mọi tiết diện của một ống dòng.

Áp dụng 3

Ghềnh của một dòng sông

Giả sử có một con sông đang ở dòng chảy (không thể nén được) dừng, một chiều. Ở một chỗ trên sông gọi là ghềnh, lòng sông thắt lại; tiết diện của nó chuyển từ S sang S' (S'< S). Lưu lượng thể tích ở phía trên ghềnh là D_V (hình 13).



H.13. *Ghềnh sông.*

Hãy tính vận tốc của nước và lưu lượng D'_V tương ứng, ở ngang mức của ghềnh sông.

Dữ liệu:

$S = 100\text{m}^2$; $S' = 10\text{m}^2$; $D_V = 150\text{m}^3.\text{s}^{-1}$

Dòng chảy là một chiều, $D_V = Sv$. Vì dòng chảy là không thể nén được, nên:

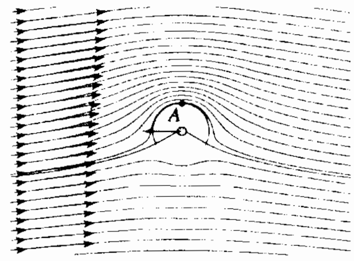
$$D'_V = D_V = S'v',$$

nghĩa là $v' = \dfrac{D'_V}{S'} = 15\ \text{m.s}^{-1} = 54\ \text{km.h}^{-1}$

Bản đồ dòng chảy của con sông (*h*.13) cho thấy rõ ở ngang mức của ghềnh sông, các đường dòng sít lại, điều này chỉ là một phương pháp khác biểu thị sự bảo toàn lưu lượng thể tích đi qua mọi tiết diện của một ống dòng.

Trong một dòng chảy không thể nén được (xem *áp dụng* 3), thì các đường dòng sít lại nhau ở những nơi có vận tốc lớn.

Hình 14 cũng minh họa tính chất này: vận tốc của chất lỏng càng lớn hơn ở lân cận điểm A, nơi mà các đường trường vận tốc sít lại nhau.



H.14. *Để có dòng chảy chất lỏng không thể nén được này xung quanh một hình trụ đang quay, thì các miền có vận tốc lớn phải định vị ở những chỗ mà các đường dòng sít lại nhau.*

1.2.3. Các dòng chảy xoáy hay không xoáy (rối hay không rối)

Một dòng chảy được gọi không xoáy nếu vectơ xoáy triệt tiêu ở khắp mọi nơi, nói cách khác, nếu trường các vận tốc của chất lỏng có rota bằng không ở khắp mọi nơi.

<u>*Chú ý:*</u>

Phát biểu trên không những giả thiết rằng rot $\vec{v}$ *triệt tiêu tại mọi điểm, mà còn giả thiết là không có điểm đặc biệt nào để vận tốc ở đó (và như vậy cả* rot $\vec{v}$ *) lại không được xác định. Điểm tinh tế này sẽ được trình bày rõ ràng khi nghiên cứu xoáy nước ở* §**2.2**.

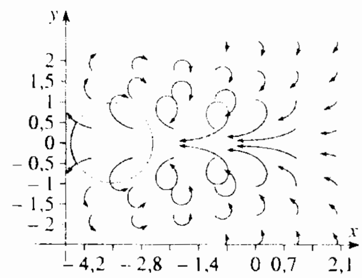
Ngược lại, trong một dòng chảy xoáy (dòng rối), tồn tại ít nhất là một điểm của chất lỏng mà tại đó rot $\vec{v}$ khác không.

Trong một dòng chảy không xoáy (không rối), trường các vận tốc của chất lỏng có lưu thông bảo toàn (lưu thông của vectơ vận tốc $\vec{v}$ dọc theo mọi đường cong kín đều bằng không): như vậy các đường dòng nhất thiết phải hở.

Trong một dòng chảy không xoáy, vectơ xoáy triệt tiêu tại mọi điểm của không gian, $\vec{v}$ có lưu thông bảo toàn và các đường dòng không thể khép kín.

Nếu, vectơ xoáy khác không ít nhất tại một điểm cho trước trong không gian, thì dòng chảy được gọi là xoáy.

▶ **Để tập luyện: bài tập 1 và 2.**



H.15. *Sự thể hiện rõ các quỹ đạo của các hạt chất lỏng khi có sự dịch chuyển của một hình trụ : "xa" hình trụ này, chất lỏng đứng im.*

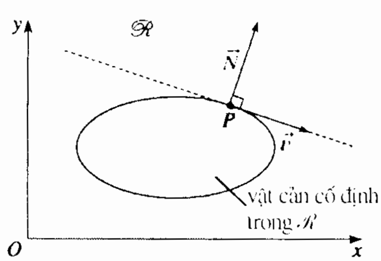
1.3. Dòng chảy và các điều kiện ở giới hạn

Cho đến nay, ta mới quan tâm đến dòng chảy của chất lỏng độc lập với các giới hạn của chúng. Tuy nhiên, các giới hạn này tồn tại: một dòng sông được giới hạn bởi đôi bờ, một chất lỏng trong đường ống bị ống dẫn ảnh hưởng lên dòng chảy. Thực tế mọi vật rắn đi ven bờ dòng chảy hay làm vật cản dòng chảy đều áp đặt các điều kiện lên vận tốc của chất lỏng ở gần nó.

1.3.1. Giới hạn ở vô cực

Trong chuyển động tịnh tiến của một hình trụ trong một chất lỏng, ta đã áp đặt một điều kiện đứng yên cho chất lỏng ở "xa" hình trụ (*hình* 15). Đây là một điều kiện ở giới hạn thuộc loại "giới hạn ở vô cực". Mô hình này sẽ được chấp nhận ở những khoảng cách rất lớn so với các khoảng cách đặc trưng của bài toán được xem xét.

Sóng lừng là một chuyển động của đại dương sinh ra bởi gió ở bề mặt đại dương. Đáy đại dương, "nằm yên", sẽ tương ứng với một độ sâu vô hạn nếu độ sâu này lớn so với các "chân sóng" ("các hốc lõm") tạo nên bởi sóng lừng.



H.16. *Trong một hệ quy chiếu ℛ, vận tốc của một chất lỏng nhất thiết phải tiếp tuyến với một vật cản cố định trong hệ quy chiếu này.*

1.3.2. Trường hợp một vật cản cố định

Trong hệ quy chiếu nghiên cứu, ở một điểm lân cận ngay sát một vật cản, thì chất lỏng không thể có thành phần pháp tuyến của vận tốc đối với một vật cản cố định (*hình* 16).

Vận tốc của chất lỏng biểu diễn vận tốc của một hạt: nếu thành phần pháp tuyến của vận tốc này khác không, thì điều đó có nghĩa là, hoặc hạt chất lỏng xuyên thâu vào vật cản, hoặc một hốc rỗng được tạo thành giữa các chất lỏng và vật cản, đây là điều không thể có.

Thành phần pháp tuyến của vận tốc của một chất lỏng đối với một vận cản cố định triệt tiêu.

Chú ý:

Không có bất kì một ứng lực nào lên thành phần tiếp tuyến với vận cản, lại được thiết lập ở đây. Đặc tính nhớt của các chất lỏng thực sẽ được nói đến trong chương 5.

Áp dụng 4

Sự thể hiện một đường dòng

Một dòng chảy hai chiều có các đường dòng được biểu diễn trên hình 12.

Chứng tỏ rằng trong một số điều kiện nào đó, có thể thay các đường dòng 1 và 2 bằng các vách thực, vừa khít với đường chu vi, mà không làm thay đổi hình dạng của dòng chảy.

Nếu dòng chảy là dòng dừng, thì các đường dòng vẫn như nhau ở mọi thời điểm.

Theo định nghĩa, thì vận tốc phải tiếp tuyến tại mọi điểm. Các điều kiện ở giới hạn được coi trọng bằng cách cụ thể hóa chúng và như vậy, dòng chảy nói trên sẽ không thay đổi.

▶ **Để tập luyện: bài 1 và 2.**

1.3.3. Trường hợp một vật cản chuyển động

Đôi khi ta gặp những tình huống trong đó vật cản chuyển động; trong các điều kiện đó, thì phải tự đặt mình trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_p$ của điểm P trên vật cản. Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_p$ này, chất lỏng không thể có thành phần pháp tuyến của vận tốc đối với vật cản đó, nghĩa là, trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, thì các vận tốc pháp tuyến với vật cản phải đồng nhất như nhau (h.17).

Thật vậy, ta kí hiệu $\vec{w}(P_{\text{cản}},t)_{/\mathcal{R}}$ là vận tốc của điểm P thuộc vật cản. Ta hãy đặt mình trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_p$, đang tịnh tiến với vận tốc $\vec{w}(P_{\text{cản}},t)_{/\mathcal{R}}$ đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, như vậy, ta được:

$$v(P_{\text{lỏng}},t)_{/\mathcal{R}} = v(P_{\text{lỏng}},t)_{/\mathcal{R}_P} + \vec{w}(P_{\text{cản}},t)_{/\mathcal{R}}.$$

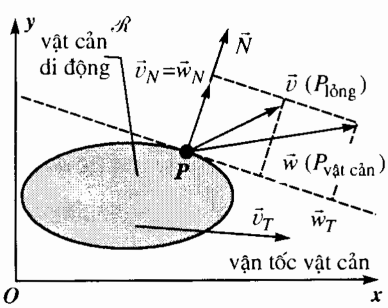
Gọi $\vec{N}$ là pháp tuyến với bề mặt vật cản; ta phải có (xem §**1.3.2**):

$$\vec{v}(P_{\text{lỏng}},t)_{/\mathcal{R}_P}.\vec{N} = 0.$$

Điều này cho phép ta viết:

$\vec{v}(P_{\text{lỏng}},t)_{/\mathcal{R}}.\vec{N} = \vec{w}(P_{\text{cản}},t)_{/\mathcal{R}}.\vec{N}$, nghĩa là $\vec{v}_N = \vec{w}_N$.

Ta hãy xem xét *áp dụng* 5 về trường hợp tổng quát của một dòng chảy chất lỏng xung quanh một vật cản di động và có thể biến dạng.



H.17. *Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, thành phần pháp tuyến của vận tốc một chất lỏng nhất thiết phải bằng thành phần pháp tuyến của vận tốc của điểm tương ứng trên vật cản.*

Áp dụng 5

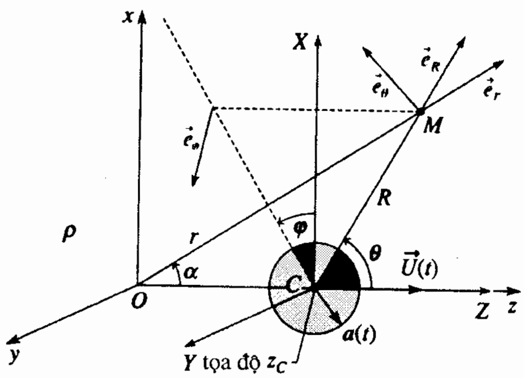
Dòng chảy xung quanh một vật cản linh động và biến dạng được

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ của phòng thí nghiệm, một chất lỏng đang chảy xung quanh một bề mặt không thấm, kín, linh động và có thể biến dạng (h.18). Trường các vận tốc Euler của chất lỏng này được cho bởi $\vec{v}(M,t)_{/\mathcal{R}}$, và bề mặt được xác định bởi một phương trình dạng $F(M, t) = 0$.

Người ta kí hiệu $\vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}$ là vận tốc của một điểm P trên bề mặt.

1. *Chứng minh rằng khi bề mặt không thấm, ta phải có:*

$$\vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = \vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F$$



H.18. *Sự thể hiện các hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}'$ với kí hiệu đã từng sử dụng.*

Từ đó suy ra rằng điều kiện để dòng chảy xung quanh vật cản này được viết trong $\mathcal{R}$ dưới dạng:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 0\,.$$

2. *Cho một vật cản hình cầu có bán kính $a(t)$ thay đổi, tâm C, tọa độ z_C và vận tốc $\vec{U}(t) = U(t)\vec{e}_z$. Xác định các biểu thức khác nhau của hàm $F(M, t)$ trong các hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}'$.*

3) Từ đó suy ra điều kiện mà vận tốc của chất lỏng ở lân cận vật cản linh động và có thể biến dạng này phải nghiệm đúng. Chứng minh rằng vận tốc $\vec{v}(P,t)$ được viết dưới dạng tổng quát như sau:

$$\vec{v}(P,t) = (\dot{a}(t) + \dot{z}_C(t)\cos\theta\,)\vec{e}_R + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi$$

với $\vec{e}_R$, $\vec{e}_\theta$ và $\vec{e}_\varphi$ là các vectơ đơn vị của hệ tọa độ cầu kết hợp với hệ quy chiếu $\mathcal{R}' = (C, X, Y, Z)$.

1. Xét một điểm P của mặt $F(P, t) = 0$. Pháp tuyến $\vec{N}$ với mặt đó ở điểm này, song song với građiên của hàm F: $\vec{N} = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,F$.

Ta đặt mình trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_P$, chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ gắn với điểm P của mặt đó, với vận tốc $\vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}$. Như vậy ta có:

$$\vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}_P} + \vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}\,.$$

Chất lỏng không thể xuyên thâu vào vật cản, nghĩa là:

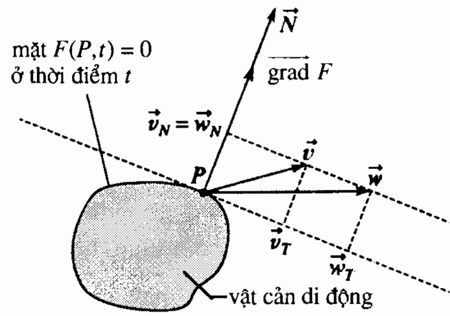
$$\vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}_P}.\vec{N} = 0\,;$$

điều này cho ta:

$$\vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\vec{N} = \vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\vec{N}\,,$$

và biết rằng $\vec{N} = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,F$ (h.19):

$$\vec{v}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = \vec{w}(P,t)_{/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F\,.$$



H.19. *Bề mặt có tính không thấm, do vậy, ta có:* $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = \vec{w}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F$.

Biết rằng $F(P, t) = 0$, ta có:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{w}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 0$$

vậy $\dfrac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 0\,.$

2. Cho bán kính hình cầu bằng $a(t)$, nghĩa là khi M ở P, thì ta có:

$$CP^2 - a(t)^2 = 0 \text{ vậy } R^2 - a(t)^2 = 0\,,$$

hay $r^2 + z_C^2 - 2z_C r\cos\alpha - a(t)^2 = 0$, vậy hàm F được xác định bởi:

- các biểu thức trong hệ $\mathcal{R}$:

$$F(P,t) = r^2 + z_C^2 - 2z_C r\cos\alpha - a(t)^2\,,$$

$$F(P,t) = x^2 + y^2 + (z - z_C)^2 - a(t)^2\,;$$

• các biểu thức trong hệ $\mathscr{R}'$:

$$F(P,t) = R^2 - a(t)^2,$$

$$F(P,t) = X^2 + Y^2 + Z^2 - a(t)^2.$$

3) Điều kiện được viết là: $\dfrac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 0$.

• Trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(\dot{z}_C(z - z_C) + a\dot{a}) = -2(\dot{z}_C a\cos\theta + a\dot{a})$$

$$= -2a(\dot{z}_C \cos\theta + \dot{a}).$$

• Gradiên của hàm F được viết rất đơn giản theo các vectơ đơn vị của hệ quy chiếu $\mathscr{R}'$, dưới dạng $\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 2R\vec{e}_R$ với $R = a$, nghĩa là:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 2a\vec{e}_R, \text{ do đó } \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,F = 2av_R.$$

Nhờ đó, ta được:

$$\vec{v}_R = (\dot{z}_C \cos\theta + \dot{a})\vec{e}_R$$

và như vậy, biểu thức tổng quát của vận tốc là:

$$\vec{v}(P,t) = (\dot{a}(t) + \dot{z}_C(t)\cos\theta)\vec{e}_R + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi.$$

Ta tiếp tục nghiên cứu động học các dòng chảy bằng các ví dụ đặc biệt làm hiện rõ sự vẽ bản đồ topo của trường các vận tốc chất lỏng.

2 Dòng chảy phẳng không thể nén được

Một *dòng chảy không thể nén* được xác định bởi phương trình vi phân $\text{div}\,\vec{v} = 0$. Ta biết rằng (*xem chương* 8) nếu $\text{div}\,\vec{v} = 0$, thì tồn tại một vectơ $\vec{A}$ sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

Ta hãy xét một dòng chảy phẳng không thể nén, nghĩa là trường các vận tốc có thể được viết trong hệ toạ độ Descartes:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} v_x(x,y,t) \\ v_y(x,y,t) \\ v_z = 0 \end{vmatrix}$$

Ta tìm một vectơ $\vec{A}$ dưới dạng $\vec{A}(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x,y,t) \end{vmatrix}$

Lúc đó, rot $\vec{A}$, và như vậy $\vec{v}$ có dạng:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\psi(x,y,t)\vec{e}_z\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\psi(x,y,t)\right] \wedge \vec{e}_z \quad (\text{vì } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_z = 0)$$

$$\text{hay } \vec{v}(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} +\dfrac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

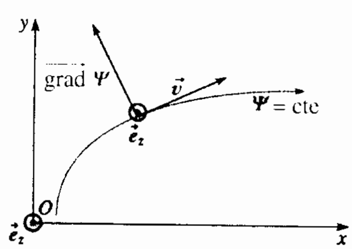
2.1. Hàm dòng ψ

Ta hãy xem xét biểu thức của $\vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left[\psi(x,y,t)\right] \wedge \vec{e}_z$. Vì $\overrightarrow{\text{grad}}\left[\psi(x,y,t)\right]$ vuông góc với đường $\psi = \text{cte}$, nên vectơ vận tốc tiếp tuyến với đường cong $\psi = \text{cte}$; do vậy $\psi = \text{cte}$ tương ứng với một đường dòng được thể hiện trên *hình* 20.

Khi có một dòng chảy phẳng không thể nén được, thì có thể xác định một hàm ψ gọi là "hàm dòng" sao cho:

$$\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\psi(x,y,t)\vec{e}_z\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi(x,y,t) \wedge \vec{e}_z}.$$

Các đường cong $\psi(x,y,t_0) = \text{cte}$ đồng nhất với các đường dòng ở thời điểm t_0.



H.20. *Vectơ vận tốc $\vec{v}$ tiếp tuyến với đường cong ψ = cte, vậy ψ = cte tương ứng với một đường dòng.*

2.2. Nghiên cứu lưu lượng thể tích

Ta hãy chứng minh rằng lưu lượng thể tích ở thời điểm t có thể được biểu thị theo các hàm dòng $\psi(x,y,t)$.

Ở thời điểm t, lưu lượng thể tích $\Phi_{A_v}^{B}(t)$ xuyên qua một mặt đi qua các điểm A và B và có chiều cao h được cho bởi $\Phi_{A_v}^{B}(t) = \int_A^B \vec{v}(x,y,t).\vec{N}h\mathrm{d}l$.

Bằng cách thay $\vec{v}(x,y,t)$ bằng biểu thức của nó và thực hiện một phép hoán vị vòng tròn trên các vectơ xuất hiện trong tích hỗn hợp, thì ta được:

$$\Phi_{A_v}^{B}(t) = h\int_A^B (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi(x,y,t) \wedge \vec{e}_z.\vec{N}\mathrm{d}l = h\int_A^B (\vec{e}_z \wedge \vec{N}\mathrm{d}l).\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi(x,y,t)$$

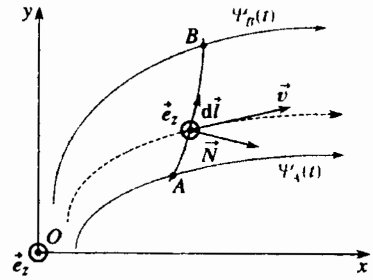
Trên *hình* 21, ta thấy rằng $\vec{e}_z \wedge \vec{N}\mathrm{d}l = \mathrm{d}\vec{l}$ nhờ đó, ta được :

$$\Phi_{A_v}^{B}(t) = h\int_A^B \mathrm{d}\vec{l}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi(x,y,t) = h[\psi_B(t) - \psi_A(t)].$$

Khi có một dòng chảy phẳng, không thể nén được, thì lưu lượng thể tích $\Phi_{A_v}^{B}(t)$, ở thời điểm t, xuyên qua một mặt đi qua các điểm A và B và có chiều cao h, được xác định bởi:

$$\Phi_{A_v}^{B}(t) = h[\psi_B(t) - \psi_A(t)]$$

▶ **Để tập luyện: bài tập 6 và 8.**



H.21. *ở thời điểm t, lưu lượng thể tích giữa các điểm A và B trên một đường cao h được cho bởi:*

$$\Phi_A^B(t) = \int_A^B \vec{v}(x,y,t).\vec{N}h\mathrm{d}l.$$

Hơn nữa, ta có:

$$\vec{e}_z \wedge \vec{N}\mathrm{d}l = \mathrm{d}\vec{l}.$$

3 Dòng chảy xoáy: gió xoáy (gió lốc)

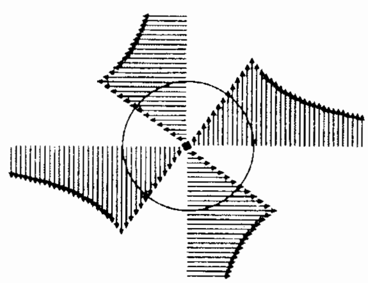
3.1. Trường các vận tốc - Sự đo vẽ topo

Gió xoáy là một hiện tượng khí tượng được định nghĩa như "một cơn gió mạnh và xoáy". Mô hình đơn giản hóa về gió xoáy mô tả nó như một dòng chảy chất lưu có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục $\vec{e}_z$. Trường các vận tốc kết hợp có dạng (trong tọa độ trụ):

- với $r < a$: $\vec{v}(r) = r\Omega\vec{e}_\theta$;
- với $r > a$: $\vec{v}(r) = \dfrac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta$.

Đây là một trường trực xuyên tâm mà môđun chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r với trục. Ở bên trong một hình trụ bán kính a cấu thành "mắt" cơn lốc, thì vận tốc tăng tuyến tính từ 0 đến giá trị cực đại của nó khi r biến đổi từ 0 đến a, rồi lại giảm cho đến tận vô cực mà tại đó chất lưu đứng im (*hình* 22). Nhớ rằng vận tốc liên tục ở $r = a$.

Trường này, khắp nơi có dạng $f(r)\vec{e}_\theta$ là trường có đivc triệt tiêu (*xem chương* 8): do vậy dòng chảy là không thể nén được.



H.22. *Sự thể hiện trường các vận tốc của một cơn lốc.*

Ta hãy tính $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ ở mọi điểm của gió xoáy:

• với $r < a$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(r\Omega\,\vec{e}_\theta) = \Omega(r\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}\,r \wedge \vec{e}_\theta) = 2\Omega\,\vec{e}_z \text{ (vì } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_z}{r}\text{) ;}$$

• với $r > a$: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta\right) = \Omega a^2\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$ (vì $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = 0$).

Sự tính toán này chứng tỏ sự tồn tại của một vectơ xoáy đều $2\Omega\vec{e}_z$ ở bên trong hình trụ bán kính a và bằng không ở bên ngoài: dòng chảy là xoáy, nhưng vùng xoáy bị giới hạn trong hình trụ bán kính a. Các đường dòng và các quỹ đạo trùng nhau: đây là các đường tròn đồng tâm trên trục $\vec{e}_z$.

Áp dụng 6

Sự gia tốc của một hạt chất lưu trong mô hình cơn gió xoáy.

Trong mô hình cơn gió xoáy, trường các vận tốc (trong tọa độ trụ) có dạng :

• *với $r < a$: $\vec{v}(r) = r\Omega\,\vec{e}_\theta$;*

• *với $r > a$: $\vec{v}(r) = \dfrac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta$.*

Hãy tính gia tốc của một hạt.

Chế độ là dừng, nên gia tốc $\dfrac{D\vec{v}}{Dt}$ rút gọn về $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}$. Ta sử dụng công thức :

$$\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\,.$$

• Với $r < a$:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\Omega\vec{e}_z \wedge r\,\Omega\,\vec{e}_\theta$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - 2r\Omega^2\vec{e}_r = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \overrightarrow{\text{grad}}\,v^2$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$= -r\Omega^2\vec{e}_r\,.$$

• Với $r > a$:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\Omega^2 a^4}{r^3}\vec{e}_r\,.$$

3.2. Lưu thông - Trường hợp giới hạn của xoáy nước, gió xoáy

Gió xoáy là một dòng chảy đối xứng trụ, có dạng $f(r)\vec{e}_\theta$, với sự tồn tại một vectơ xoáy $\vec{\Omega}$, là đều ở bên trong một hình trụ có trục (Oz) và bán kính a (*hình* 22) Tính chất $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ cho phép lại tìm thấy vectơ vận tốc ở mọi điểm.

Muốn thế, chỉ cần tính lưu thông của vectơ vận tốc dọc theo một đường dòng (*hình* 23) là đủ.

• Với $r < a$: $C = \oint_C \vec{v}.d\vec{l} = 2\pi r v = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.d\vec{S} = 2\Omega\pi r^2$ hay $\vec{v} = \Omega r\vec{e}_\theta$.

Ta hãy tính $\text{rot}\,\vec{v}$ ở mọi điểm của gió xoáy:

• với $r < a$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(r\Omega\,\vec{e}_\theta) = \Omega\,(r\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}\,r \wedge \vec{e}_\theta) = 2\Omega\,\vec{e}_z \text{ (vì } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_z}{r}\text{)} ;$$

• với $r > a$: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta\right) = \Omega a^2\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$ (vì $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = 0$).

Sự tính toán này chứng tỏ sự tồn tại của một vectơ xoáy đều $2\Omega\vec{e}_z$ ở bên trong hình trụ bán kính a và bằng không ở bên ngoài: dòng chảy là xoáy, nhưng vùng xoáy bị giới hạn trong hình trụ bán kính a. Các đường dòng và các quỹ đạo trùng nhau: đây là các đường tròn đồng tâm trên trục $\vec{e}_z$.

Áp dụng 6

Sự gia tốc của một hạt chất lưu trong mô hình cơn gió xoáy.

Trong mô hình cơn gió xoáy, trường các vận tốc (trong tọa độ trụ) có dạng :

• *với* $r < a$: $\vec{v}(r) = r\Omega\,\vec{e}_\theta$;

• *với* $r > a$: $\vec{v}(r) = \dfrac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta$.

Hãy tính gia tốc của một hạt.

Chế độ là dừng, nên gia tốc $\dfrac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t}$ rút gọn về $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}$. Ta sử dụng công thức :

$$\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v} .$$

• Với $r < a$:

$$\frac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\Omega\vec{e}_z \wedge r\Omega\,\vec{e}_\theta$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - 2r\Omega^2\vec{e}_r = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \overrightarrow{\text{grad}}\,v^2$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$= -r\Omega^2\vec{e}_r .$$

• Với $r > a$:

$$\frac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\Omega^2 a^4}{r^3}\vec{e}_r .$$

3.2. Lưu thông - Trường hợp giới hạn của xoáy nước, gió xoáy

Gió xoáy là một dòng chảy đối xứng trụ, có dạng $f(r)\vec{e}_\theta$, với sự tồn tại một vectơ xoáy $\vec{\Omega}$, là đều ở bên trong một hình trụ có trục (Oz) và bán kính a (*hình* 22) Tính chất $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ cho phép lại tìm thấy vectơ vận tốc ở mọi điểm.

Muốn thế, chỉ cần tính lưu thông của vectơ vận tốc dọc theo một đường dòng (*hình* 23) là đủ.

• Với $r < a$: $C = \displaystyle\oint_C \vec{v}.\text{d}\vec{l} = 2\pi r v = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}.\text{d}\vec{S} = 2\Omega\pi r^2$ hay $\vec{v} = \Omega\, r\vec{e}_\theta$.

• Với $r > a$: $C = \oint_C \vec{v}.\mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r v = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S} = 2\Omega\pi a^2$ hay :

$$\vec{v} = \frac{\Omega a^2}{r}\vec{e}_\theta .$$

Lưu thông dọc theo một đường dòng ở ngoài mắt gió xoáy là $C = 2\pi a^2\Omega$. Như vậy, đây là một hằng số có thể đặc trưng cho gió xoáy cũng như dữ liệu Ω. Trường hợp giới hạn đạt được bằng cách cho a tiến tới 0 trong khi vẫn giữ C không đổi sẽ xác định một *gió xoáy*.

Trường vận tốc của gió xoáy có dạng (*h*.24 a và b):

$$\vec{v}(r) = \frac{C}{2\pi r}\vec{e}_\theta \quad \text{với } r \neq 0.$$

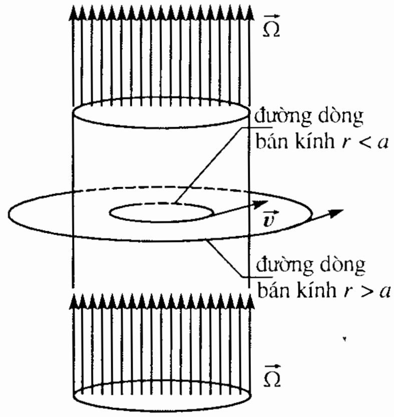
Trường vận tốc mới này có vẻ như không xoáy vì $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$.

Thực ra, người ta bỏ qua điểm đặc biệt $r = 0$, do mô hình giới hạn của gió xoáy. Khi đó không còn phải ngỡ ngàng về nghịch lí biểu kiến nữa:

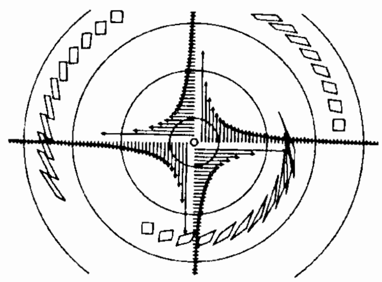
$$C = \oint_C \vec{v}.\mathrm{d}\vec{l} \neq 0 \quad \text{với } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0},$$

vì rằng lưu thông này phải cần tới một đường cong kín bao quanh điểm đặc biệt $r = 0$, mà tại đó v không còn được xác định nữa. Các đường dòng của gió xoáy thật sự kín và bao quanh trục (Oz), quỹ tích của các "điểm đặc biệt".

Cũng bài toán như trên còn có thể xuất hiện dưới dạng tinh tế hơn với một trường vận tốc cùng loại và trường này sẽ chỉ được xác định đối với khoảng cách $r > R$. Đó là trường hợp khi có một vật cản hình trụ bán kính R có mặt ở trong lòng chất lưu (*hình* 8 và 14): trường vận tốc là không xoáy $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}) = \vec{0}$, nhưng lưu thông của $\vec{v}$ lại khác không trên tất cả các đường cong bao quanh hình trụ.



H.23. *Lưu thông của vectơ vận tốc dọc theo một đường dòng hình tròn bán kính r, phụ thuộc vào cách chọn đường này (r <a hay r > a).*



H.24a. *Trường vận tốc của một gió xoáy với việc thể hiện sự biến dạng của một hạt chất lưu.*

3.3. Sự tương tự từ tĩnh

Trường vận tốc của gió xoáy gợi nhớ từ trường tạo ra bởi một hình trụ dài vô hạn bán kính a, trong đó có các dòng điện thể tích mật độ đều $\vec{j} = j\vec{e}_z$ chạy qua. Trường này thực tế có cấu hình:

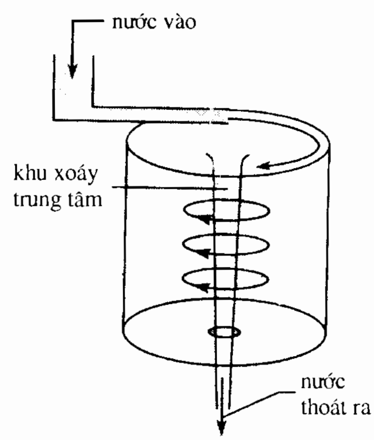
• với $r < a$: $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}\vec{e}_\theta$;

• với $r > a$: $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j\pi a^2}{2r}\vec{e}_\theta$.

Như vậy đáp ứng trường hợp giới hạn của cuộn xoáy là trường hợp một dây dẫn vô hạn chạy qua bởi cường độ dòng điện $I = j\pi a^2$, tạo ra từ trường $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

Sự tương ứng hình thức này không phải là ngẫu nhiên. Thật vậy, đối với một dòng chảy không thể nén được, thì trường vận tốc của chất lưu tại mọi điểm của không gian sẽ tuân theo các phương trình vi phân:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \text{ và } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega} .$$



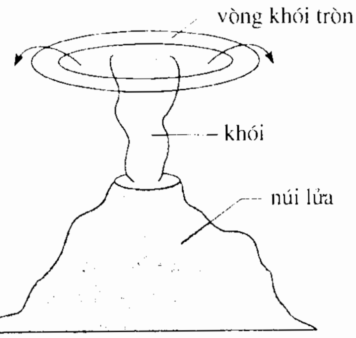
H.24b. *Sự thực hiện thực tiễn một cuộn xoáy. Ở chế độ ổn định, nước chảy vào tiếp tuyến với mặt trên và thoát ra qua một lỗ ở tâm mặt đáy của hình trụ.*

Một từ trường *không đổi* tuân theo cùng những phương trình như nhau:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{và} \quad \overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,.$$

Phương trình thứ nhất mô tả một tính chất nội tại của $\vec{B}$, cũng như $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ biểu diễn một tính chất nội tại của trường vận tốc của mọi dòng chảy không thể nén được.

Phương trình thứ hai liên kết trường $\vec{B}$ với nguồn của nó là dòng điện, còn $\overrightarrow{rot}\, \vec{v} = 2\vec{\Omega}$ cũng gắn $\vec{v}$ với nguồn của nó là vectơ xoáy $\vec{\Omega}$.



H.25. *Vòng khói tròn trên miệng núi lửa.*

Ta hãy tổng quát hóa kết quả này: nếu hai bài toán, một là từ tĩnh và một là dòng chảy không thể nén được, biểu thị cùng những tính đối xứng, cùng những điều kiện ở các giới hạn và cùng những phân bố "nguồn" như nhau, thì khi đó các nghiệm (nghĩa là biểu thức của trường $\vec{B}$ và của vận tốc $\vec{v}$) sẽ giống hệt nhau về mặt hình thức.

• **Trường vận tốc của một chất lưu đang trong dòng chảy không thể nén và xoáy, tuân theo các phương trình vi phân:**

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{v} = 2\vec{\Omega} \quad \textbf{và} \quad \mathbf{div}\, \vec{v} = 0\,.$$

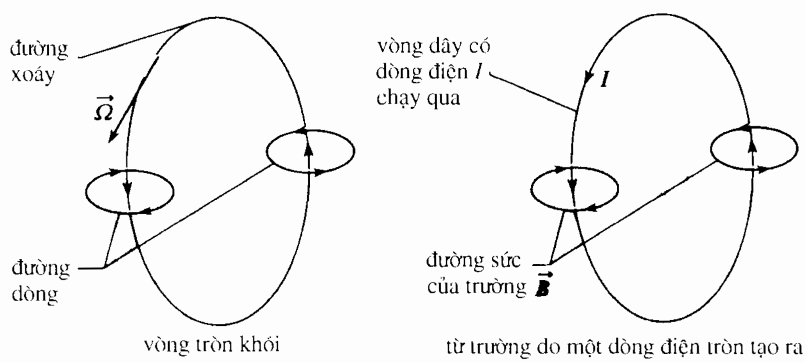
• **Trường từ tĩnh tuân theo:**

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \textbf{và} \quad \mathbf{div}\, \vec{B} = 0\,.$$

Sự tương tự từ tĩnh tìm thấy một sự minh họa lí thú trong "vòng tròn khói" như ở trên miệng núi lửa (*h*.25) : vòng khói này có thể được mô tả như một vòng xoáy lốc dạng sợi chỉ tương tự như một vòng dây tròn trong có dòng điện *i* chạy qua. Vòng xoáy lúc này được đặc trưng bởi lưu thông *C* của nó, đồng nhất đối với tất cả các đường cong kín bao quanh vòng xoáy một lần (*h*.26).

<u>*Chú ý:*</u>

Nhớ rằng vectơ xoáy là một vectơ trục được xác định bởi $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\, \vec{v}$, *vậy dive của nó triệt tiêu:* $\operatorname{div}\vec{\Omega} = 0$. *Các đường sức của trường vectơ* $\vec{\Omega}$ *là các đường cong kín. Tình hình cũng như thế đối với các đường sức của trường vectơ mật độ dòng thể tích* $\vec{j}$ *trong gần đúng các chế độ dừng:* $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

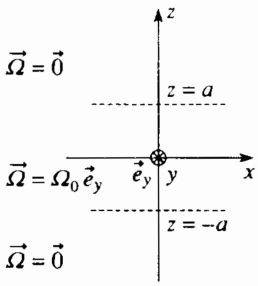


H.26. *Sự tương tự giữa một vòng tròn khói và từ trường do một dòng điện tròn tạo ra.*

Áp dụng 7

Dòng xoáy đều giữa hai mặt phẳng vô hạn

Hãy xác định trường các vận tốc của một chất lưu kết hợp với một phân bố dòng xoáy đều, hữu hạn giữa hai mặt phẳng vô hạn, song song cách nhau một khoảng 2a. Vectơ $\vec{\Omega}$ cũng song song với hai mặt phẳng (hình 27). Ta thừa nhận tính liên tục của vận tốc ở $|z| = a$.



H.27. *Dòng xoáy đều giữa hai mặt phẳng vô hạn: $\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{e}_y$ đối với $-a < z < a$ và bằng không ở chỗ khác*

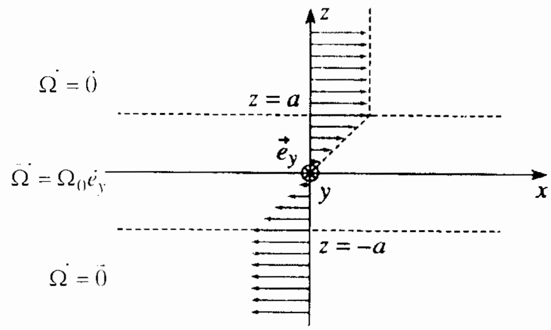
Bài toán hoàn toàn tương tự bài toán phải tính một trường $\vec{B}$ được tạo ra bởi một phân bố các dòng điện cùng loại. Bản đồ topo của $\vec{v}$ tại mọi điểm giống hệt bản đồ topo của $\vec{B}$ có dạng $\vec{B} = B(z)\vec{e}_x$ trong đó $B(z)$ là một hàm lẻ của z:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(v(z)\vec{e}_x) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v(z) \wedge \vec{e}_x = \frac{dv(z)}{dz}\vec{e}_y .$$

- Nếu $|z| < a$: $\dfrac{dv(z)}{dz}\vec{e}_y = 2\Omega_0 \vec{e}_y$, hay $v(z) = 2\Omega_0 z$.
- Nếu $|z| > a$: $\dfrac{dv(z)}{dz}\vec{e}_y = 0$, hay $v(z) = 2\Omega_0 a$

bởi sự liên tục của $v(z)$ tại $z = a$.

Điều này cho ta dáng đi của *hình* 28.



H.28. *Trường các vận tốc liên quan đến một dòng xoáy đều giữa hai mặt phẳng vô hạn.*

Ta hãy bàn luận về giả thiết "tính liên tục của vận tốc tại $|z| = a$".

Vectơ từ trường $\vec{B}$ chỉ chịu một sự gián đoạn, nếu về cục bộ tồn tại một mật độ dòng điện mặt $\vec{j}_s$ khác không ($\vec{B}_{t2} - \vec{B}_{t1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{12}$; *xem H–Prépa, điện từ học, năm thứ nhất*).

Thế mà, chỉ có mình mật độ dòng thể tích $\vec{j}_V$ vô hạn trên một bề dày nhỏ là có thể tạo ra mật độ dòng điện mặt $\vec{j}_s$ này.

Vậy, ngay khi một mật độ dòng thể tích là hữu hạn khắp mọi nơi, thì $\vec{B}$ bao giờ cũng liên tục.

Như vậy, sự tương tự từ nói trên cho phép ta viết rằng $\vec{v}$ là liên tục khắp mọi nơi, vì $\vec{\Omega}$ là hữu hạn khắp mọi nơi, đặc biệt ở $z = a$ và $z = -a$.

4 Dòng chảy không xoáy

4.1. Dòng chảy thế

Như ta đã biết, một dòng chảy không xoáy phải sao cho tại *mọi* điểm trong không gian đều thỏa mãn: $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$.

Lúc đó sẽ có một vô hướng ϕ kết hợp với $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$. Vô hướng này được gọi là thế của các vận tốc. Nó chỉ được xác định sai kém một hằng số cộng. Hơn nữa, nếu dòng chảy là không thể nén được, thì ta có $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, từ đó $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi) = \Delta\phi = 0$.

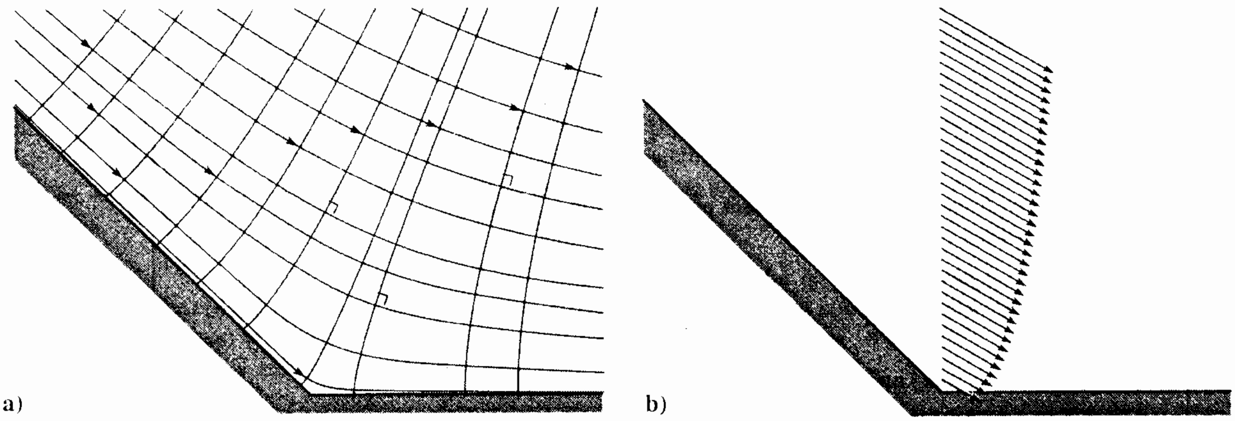
• **Một dòng chảy không xoáy, được gọi là dòng thế: tại mọi điểm của dòng chảy, thế của các vận tốc ϕ phải thỏa mãn $\vec{v} = \mathbf{grad}\phi$.**

• **Nếu dòng chảy là không thể nén được, thì ϕ tuân theo phương trình LAPLACE:**

$$\Delta\phi = 0 .$$

4.2. Tính chất của thế các vận tốc

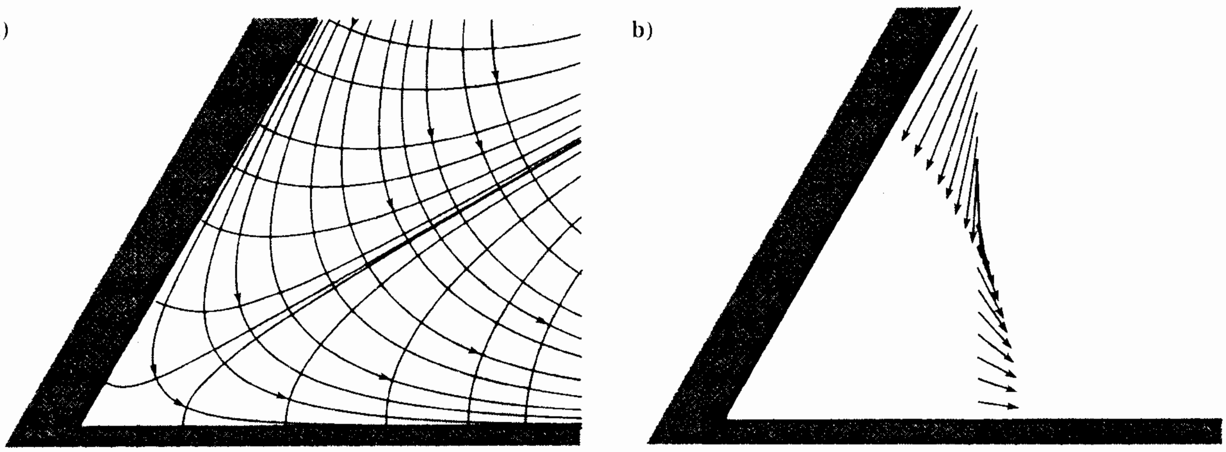
Hệ thức $\vec{v} = \mathbf{grad}\phi$ buộc rằng trường các vận tốc phải trực giao với các mặt ϕ = cte (trừ khi nếu ở cục bộ, vận tốc triệt tiêu) (*hình* 29 và 30).



a) b)

H.29. Dòng chảy thế trong một nhị diện góc $\frac{3\pi}{4}$. **a.** Các đường dòng và các đường ϕ = cte trực giao nhau. **b.** Các dáng đi của vận tốc.

a) b)



H.30. *Dòng chảy thế trong một nhị diện góc* $\frac{\pi}{4}$). **a.** *Các đường dòng và các đường* ϕ = cte *trực giao nhau.* **b.** *Các dáng đi của vận tốc.*

Các thành phần vận tốc biến đổi theo ϕ (trong trường hợp dòng chảy phẳng chẳng hạn):

• trong tọa độ Descartes: $\vec{v}(x,y,t) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial x}\vec{e}_x \\ \dfrac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial y}\vec{e}_y \end{array} \right.$;

• trong tọa độ cực: $\vec{v}(r,\theta,t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi(r,\theta,t)}{\partial r}\vec{e}_r \\ \dfrac{\partial\phi(r,\theta,t)}{r\partial\theta}\vec{e}_0 \end{vmatrix}$.

4.3. Sự tương tự tĩnh điện

Các định nghĩa trước đây gợi ra các quan niệm khác về tĩnh điện: trường tĩnh điện $\vec{E}$ là trường có $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$. Nó được kết hợp với một thế tĩnh điện V sao cho $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

Trong một miền không có điện tích, thì $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Trong miền này, điện thế cũng tuân theo phương trình LAPLACE $\Delta V = 0$.

Các đường sức của trường $\vec{E}$ đều vuông góc với các mặt đẳng thế.

Khi đó tồn tại một sự tương tự hình thức mới, lần này lại gắn trường các vận tốc của chất lưu với một trường tĩnh điện.

• Trường các vận tốc của một chất lưu đang ở dòng chảy thế (không xoáy và không thể nén được) có:

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$, do đó tồn tại một vô hướng ϕ sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

$\vec{v}$ trực giao với các mặt ϕ = cte.

$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, hay $\Delta\phi = 0$.

• Trường tĩnh điện trong một miền kh ông có điện tích :

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, do đó tồn tại một vô hướng V sao cho $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

$\vec{E}$ trực giao với các mặt V = cte.

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, hay $\Delta V = 0$.

Do vậy, hai bài toán được kết hợp, biểu thị cùng các đặc trưng hình học và cùng các điều kiện ở giới hạn, sẽ có cùng một lời giải hình thức. Ta sẽ minh hoạ kết quả này trên nhiều ví dụ khác nhau.

4.4. Ví dụ về một nguồn hay một giếng hai chiều

Bài toán về phép tính trường tĩnh điện $\vec{E}$ được tạo ra bởi một dây dẫn thẳng dài vô hạn, tích điện đều với mật độ điện dài λ là bài toán cổ điển.

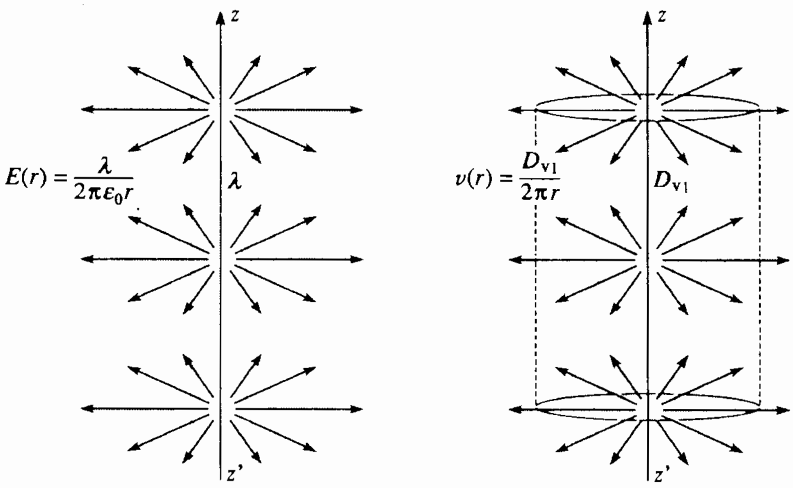
Tính đối xứng trụ của bài toán và các tính chất của mọi trường $\vec{E}$ (*xem H–prépa, Điện từ học, năm thứ nhất*) bao hàm một trường có dạng $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ (*h*.31).

Việc áp dụng định lí GAUSS cho một hình trụ bán kính r và chiều cao h nào đó dẫn đến (*h*.32):

$$2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}, \text{ nghĩa là } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Trường này được xác định trong toàn không gian, trừ chính dây dẫn: không gian này không có điện tích và $\vec{E}$ như vậy thỏa mãn đầy đủ các điều kiện ở §**4.3**: $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$.

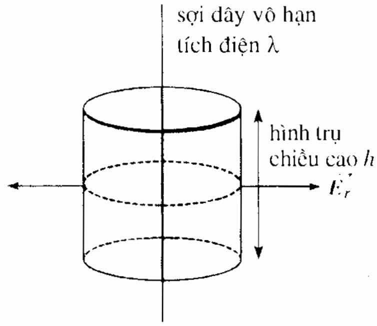
Dòng chảy thế tương tự động lực học các chất lưu phải có một trường vận tốc của chất lưu (*h*.33) dạng $\vec{v} = \dfrac{k}{r}\vec{e}_r$ với $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.



Trường $\vec{E}$ được tạo ra bởi một sợi dây vô hạn tích điện đều

Trường $\vec{v}$ được tạo ra bởi một nguồn vô hạn có lưu lượng dài đều.

H.31. *Sự tương tự tĩnh điện giữa một nguồn và trường tĩnh điện tạo ra bởi một sợi dây tích điện đều.*



H.32. *Việc áp dụng định lí* GAUSS *cho một hình trụ bán kính r và chiều cao h dẫn tới* $\vec{E}(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$.

Ta hãy đặc trưng cụ thể hơn dòng chảy thế nói trên. Vận tốc của chất lưu tiến tới không khi r tiến tới vô cực: chất lưu đứng im khi ở "xa vô cùng" đối với trục (Oz). Thông lượng của $\vec{v}$ được bảo toàn hoàn toàn qua mọi hình trụ chiều cao h và bán kính r: $\Phi = 2\pi r h v(r) = 2\pi h k$.

Thông lượng khác không này dường như mâu thuẫn với $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Lại một lần nữa, vận tốc không được xác định ở $r = 0$, và trục (Oz) cấu thành một tập hợp các điểm dị thường. Thật vậy, cũng giống như sợi dây tích điện là nguồn của trường tĩnh điện, trục (Oz) là khởi thủy của dòng chảy đang xét: Phải coi trục đó như đang phát ra hay đang thu nhận chất lưu. Thông lượng của $\vec{v}$ đi qua một hình trụ bán kính r nào đó và có độ cao h lúc đó sẽ tạo thành một đặc trưng của dòng chảy, cũng như là lưu thông của $\vec{v}$ trong hợp của xoáy nước. Thông lượng này biểu diễn một lưu lượng thể tích trên đơn vị dài của trục (Oz), được kí hiệu là D_{vl} chẳng hạn, và giữ vai trò tương tự vai trò của mật độ điện tích λ trong mô hình tĩnh điện:

$$\Phi = hD_{vl} = 2\pi h k \text{ nghĩa là } \vec{v} = \frac{D_{vl}}{2\pi r}\vec{e}_r .$$

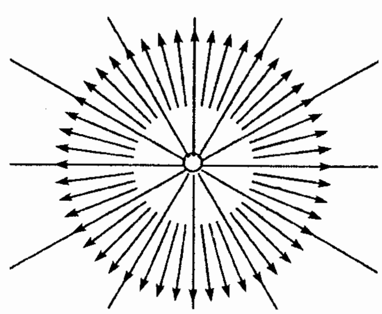
Bản đồ dòng chảy giống hệt nhau trong mọi mặt phẳng trực giao với trục (Oz): tùy theo D_{vl} là dương hay âm, trục này được coi là nguồn hay giếng hai chiều. Một ống lưới mịn được đục vô số lỗ nhỏ phân bố đều trên bề mặt, cho ta một hình ảnh đúng về nguồn được nghiên cứu.

Tương ứng với dòng chảy thế là một thế các vận tốc ϕ sao cho :

$$d\phi = \vec{v} \,.\, d\vec{r} \text{, hay } \phi = \frac{D_{vl}}{2\pi}\ln r + K .$$

Hằng số K phải được xác định một cách tùy ý bằng cách buộc gốc $\phi = 0$ ở một giá trị đặc biệt nào đó của r.

Trường các vận tốc của một nguồn hai chiều có lưu lượng dài D_{vl} là $\vec{v} = \dfrac{D_{vl}}{2\pi r}\vec{e}_r$. Trường này dẫn xuất từ thế $\phi = \dfrac{D_{vl}}{2\pi}\ln r + K$.



H.33. *Trường các vận tốc của một nguồn hai chiều.*

5 Cách dựng một dòng chảy bằng chồng chập

5.1. Nguyên lí chồng chập

Các mô hình đơn giản mà ta vừa mô tả cho phép xây dựng các dòng chảy phức tạp hơn bằng cách dùng phương pháp chồng chập theo một nguyên lí đã gợi ra trong điện từ học.

Tính tuyến tính của các phương trình vi phân chi phối một dòng chảy cho phép phân tích một bài toán đã cho thành một tổng các bài toán đơn giản tương ứng với các dòng chảy có vận tốc $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_i ...$

Dòng chảy đáp ứng bài toán tổng thể lúc đó sẽ được đặc trưng bởi:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_i + ...$$

Áp dụng 8

Sự chồng chập của một giếng hai chiều và một xoáy nước

Hãy xác định trường các vận tốc do sự chồng chập một giếng hai chiều (lưu lượng dài D_{vl}) và một xoáy nước (lưu thông C) có cùng trục.

Hãy biểu diễn các đường dòng.

• Đối với giếng: $\vec{v}_1 = -\dfrac{D_{vl}}{2\pi r}\vec{e}_r$.

• Đối với xoáy nước: $\vec{v}_2 = \dfrac{C}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

Do sự chồng chập, ta có:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \frac{1}{2\pi r}(-D_{vl}\vec{e}_r + C\vec{e}_\theta).$$

Các đường dòng được cho bởi:

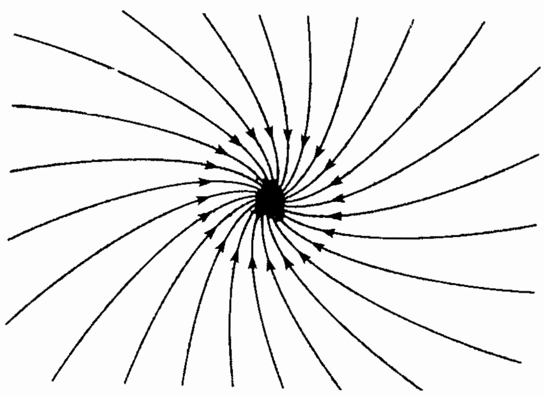
$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta} \text{ hay } \frac{dr}{r} = -\frac{D_{vl} d\theta}{C},$$

do đó $r = r_0 \exp\left(-\dfrac{D_{vl}\theta}{C}\right)$ đối với các đường xoắn ốc loga (*h*.34).

Chú ý:

• *Trường này nghiệm đúng* $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ *với r > 0. Nhưng lưu thông* $\mathscr{C}$ *của vectơ vận tốc* $\vec{v}$ *trên một vòng tròn bán kính r > 0 lại bằng C, khác không, vì tồn tại một nguồn xoáy nước ở r = 0 !*

• *Trường này nghiệm đúng* $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ *với r > 0. Nhưng thông lượng đi ra Φ của* $\vec{v}$ *qua một hình trụ chiều cao h và bán kính r > 0 lại bằng* hD_{vl}, *khác không, vì tồn tại một nguồn trường tại r = 0 !*

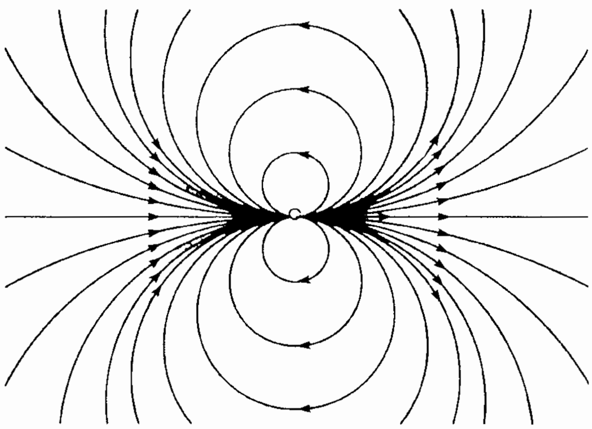


H.34. *Các đường dòng khi có sự chồng chập của một giếng hai chiều và một xoáy nước.*

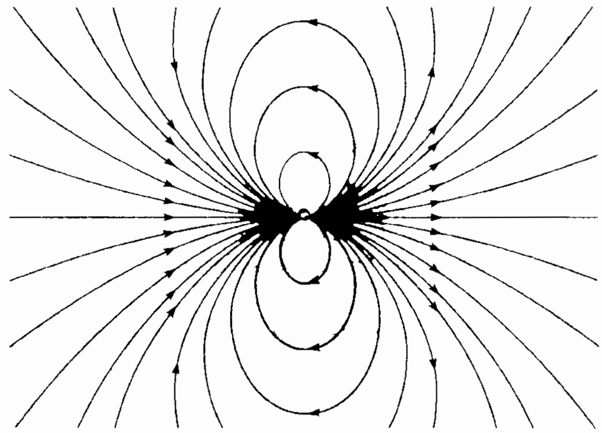
Bây giờ ta sẽ triển khai cùng phương pháp này trên một ví dụ dòng chảy xung quanh một vật cản.

5.2. Lưỡng cực thủy động lực

Ta hãy xem xét sự kết hợp một nguồn hai chiều (lưu lượng D_{vl}) và một giếng cũng hai chiều (lưu lượng $-D_{vl}$) ở gần nhau (như vậy hai lưu lượng đối nghịch nhau). *Hình* 35 cho ta thấy rõ sự mô phỏng của dòng chảy thu được. Ta sẽ biểu thị nó bằng giải tích.



H.35. *Trường các vận tốc liên quan đến dòng chảy của một lưỡng cực thủy động lực.*



H.36. *Các đường dòng của trường tĩnh điện được tạo ra bởi một lưỡng cực tĩnh điện (tập hợp hai điện tích điểm $(-q, +q)$).*

Ta có thể nêu lên các nhận xét gì về dòng chảy này?

• Các đường dòng là các vòng tròn (điều mà ta sẽ chứng minh chặt chẽ).

• Trường các vận tốc này rất giống trường tĩnh điện được tạo ra bởi một lưỡng cực tĩnh điện gồm hai điện tích đối xứng ($-q$ và $+q$) rất gần nhau so với khoảng cách quan sát (*h*.36), nhưng trong trường hợp này, các đường dòng không phải là các vòng tròn.

Lưỡng cực này được gọi là *lưỡng cực thủy động lực*. Nhờ sự tương tự tĩnh điện, ta thu được lưỡng cực này bằng cách chồng chập hai trường tạo ra bởi hai đường dài vô hạn được tích điện $-\lambda$ và $+\lambda$ trên đơn vị dài, rất gần nhau so với khoảng cách quan sát.

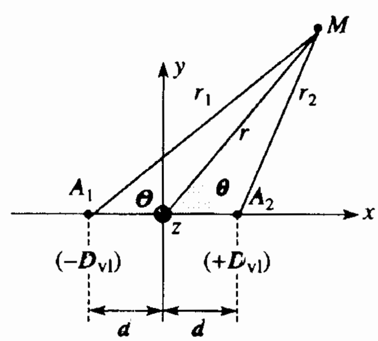
Ở $M(r, \theta)$, ta chồng chất trường $\vec{v}_1 = -\dfrac{D_{vl}}{2\pi r_1}\dfrac{\vec{r}_1}{r_1}$, có thế là :

$$\phi_1 = -\frac{D_{vl}}{2\pi}\ln r_1 + K_1,$$

của một giếng hai chiều trục (Oz), cắt mặt phẳng của *hình* 37 ở A_1 ($\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M}$), và trường $\vec{v}_2 = +\dfrac{D_{vl}}{2\pi r_2}\dfrac{\vec{r}_2}{r_2}$ có thế : $\phi_2 = \dfrac{D_{vl}}{2\pi}\ln r_2 + K_2$, của một nguồn hai chiều có cùng trục, cắt mặt phẳng của hình vẽ ở A_2 ($\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M}$) với $A_1A_2 = 2d << r_1$ và r_2 (vậy $d << r$) (*h*.37).

Dòng chảy do sự chồng chất của $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ sẽ có một thế ϕ sao cho :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{D_{vl}}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K'.$$



H.37. *Các kí hiệu được dùng để nghiên cứu lưỡng cực thủy động lực ($d << r$).*

Chọn gốc của thế này ở O (điểm giữa của A_1A_2), ta được :

$$\phi = \frac{D_{v1}}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Các đường ϕ = cte tương ứng với các điểm sao cho $\frac{r_2}{r_1} = \text{cte}$, nghĩa là tương ứng với các vòng tròn. Như vậy các đường trực giao cũng là những vòng tròn, như *hình* 38 đã chứng tỏ.

r_1 và r_2 được biểu thị theo các tọa độ r và θ của điểm M :

- $r_2^2 = r^2 + d^2 - 2d\,r\cos\theta$;
- $r_1^2 = r^2 + d^2 + 2d\,r\cos\theta$.

Khi thực hiện các khai triển giới hạn ở bậc 1 (số hạng thứ nhất khác không của khai triển giới hạn), ta được:

$$r_2^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta = r^2\left(1 - \frac{2d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}\right), \text{ hay } r_2 \approx r\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r}\right);$$

$$r_1^2 = r^2 + d^2 + 2dr\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{2d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}\right), \text{ hay } r_1 \approx r\left(1 + \frac{d\cos\theta}{r}\right);$$

vậy $\ln\frac{r_2}{r_1} \approx -\frac{2d\cos\theta}{r}$, do đó $\phi = -\frac{D_{v1}}{2\pi}\frac{2d\cos\theta}{r}$.

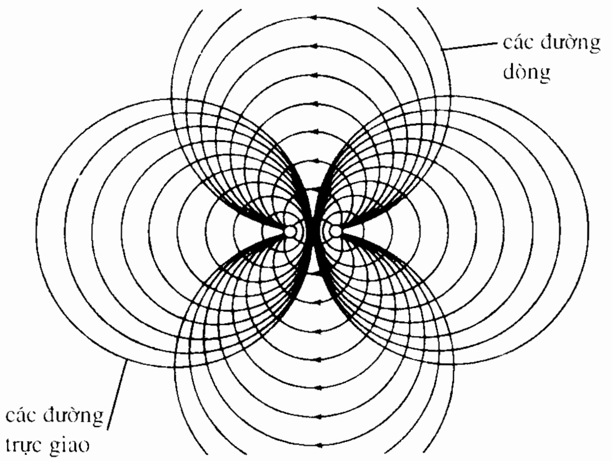
Ta có thể kết hợp với lưỡng cực thủy động lực hai chiều này một "mômen" :

$$\vec{p} = 2d\,D_{v1}\,\vec{e}_x .$$

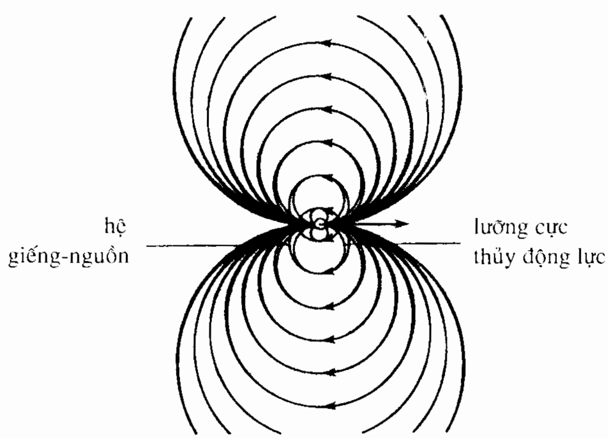
Tương ứng với thế ϕ là trường các vận tốc $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ có dạng:

$$\vec{v} = \frac{p}{2\pi r^2}(\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta).$$

Chú ý rằng các đường dòng của lưỡng cực thủy động lực rất gần với các đường dòng của hệ giếng-nguồn ngay khi r vào khoảng $r > 5d$ (*h*.39).



H.38. *Các đường dòng liên quan đến sự chồng chập của một giếng và một nguồn (lưu lượng bằng nhau về môđun) là những vòng tròn.*

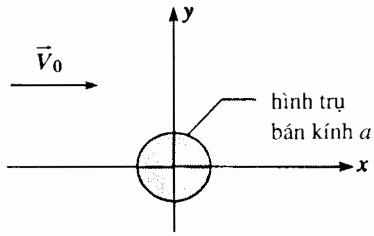


H.39. *Các đường dòng của lưỡng cực thủy động lực và các đường dòng của một hệ giếng – nguồn khác nhau rất ít.*

Một lưỡng cực thủy động lực được cấu tạo do sự chồng chập của một giếng ($-D_{vl}$) và một nguồn ($+D_{vl}$) hai chiều rất gần nhau (khoảng cách d) so với những khoảng cách quan sát r.

Thế của trường các vận tốc được xác định trong hệ tọa độ trụ theo :

$$\Phi = \frac{-D_{vl}d}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}.$$



H.40. *Trong một dòng chảy thoạt tiên là đều, vận tốc $\vec{V}_0 = v_0\vec{e}_x$ (vận tốc của chất lỏng ở xa vật cản), người ta nhúng vào một hình trụ thẳng, bán kính a, chiều dài vô hạn và trục trực giao với $\vec{V}_0$.*

5.3 Dòng chảy xung quanh một vật cản hình trụ

Trong một dòng chảy thoạt tiên là đều với vận tốc $\vec{V}_0 = v_0\vec{e}_x$, người ta nhúng một hình trụ thẳng, bán kính a, chiều dài vô hạn, có trục trực giao với $\vec{V}_0$ (*hình* 40). Vật cản này sẽ làm thay đổi trường các vận tốc của chất lỏng như thế nào? Nói chính xác hơn là ta phải tìm một dòng chảy mới có thể xảy ra khi có mặt vật cản này, nó đóng vai trò của một kiểu thế.

Thực ra, ta đã đưa vào một điều kiện bổ sung cho các giới hạn: chất lỏng không thể có vận tốc trực giao với hình trụ ở chỗ tiếp xúc với nó. Với cách chọn tham số trong tọa độ cực trên mặt phẳng hình vẽ (*h*.41), thì điều này được thể hiện như sau:

dù θ thế nào, thì ta vẫn có $v_r(r = a, \theta) = 0$ (chất lỏng không thể xuyên thấu vào vật cản).

Ở "vô cùng" xa vật cản này, dòng chảy phải rất đều, nghĩa là:

$$\lim_{r\to\infty} \vec{v} = v_0\vec{e}_x.$$

Điều kiện thứ hai này gợi ra "ý nghĩ" coi dòng chảy như là sự chồng chập của một dòng chảy đều nguyên thủy kí hiệu $\vec{v}_1 = v_0\vec{e}_x$ và một dòng chảy bổ sung $\vec{v}_2$ (mà ta sẽ lựa chọn thế); Sự chồng chất của hai dòng chảy bảo đảm các điều kiện ở giới hạn.

Dòng chảy $\vec{v}_2$ tìm thấy phải tiến tới O ở vô cực và nghiệm đúng cho dù θ có giá trị như thế nào :

$$v_r(a, \theta) = 0 = v_0\cos\theta + v_{2r}(a, \theta), \text{ nghĩa là } v_{2r}(a, \theta) = -v_0\cos\theta .$$

Trước đây, ta đã từng gặp trường của một lưỡng cực thủy động lực có dạng $\vec{v}_2 = \dfrac{p}{2\pi r^2}(\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$.

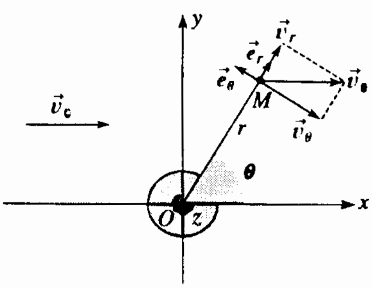
Kiểu dòng chảy này có thể biểu diễn dòng chảy $\vec{v}_2$ mà ta phải tìm với điều kiện là:

$$\frac{p}{2\pi a^2} = -v_0, \text{ do đó } p = -2\pi a^2 v_0.$$

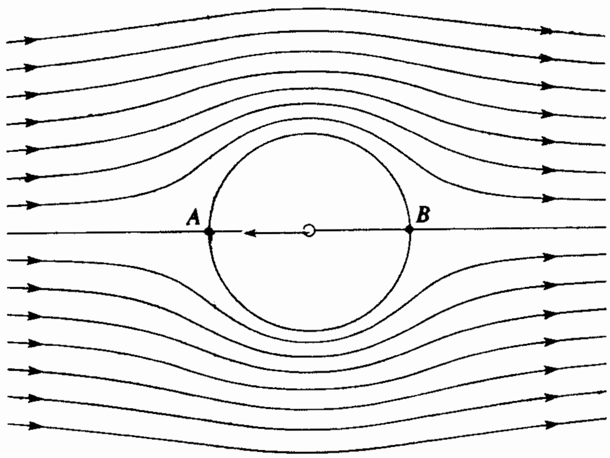
Như vậy, ta sẽ có được dòng chảy phải tìm xung quanh vật cản hình trụ bằng cách chồng chất trường $\vec{v}_2$ của một lưỡng cực thủy động lực có mômen $\vec{p} = -2\pi a^2\vec{v}_0$ lên trường $\vec{v}_1$ đều. Trường tổng hợp trong tọa độ cực, khi đó có dạng :

$$\vec{v} = v_0\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r - v_0\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_\theta .$$

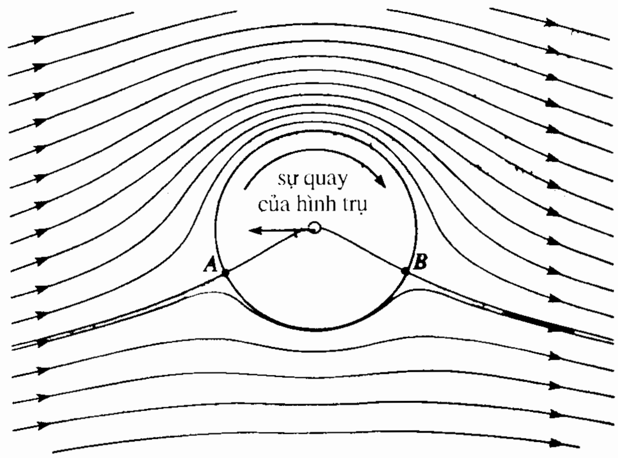
Dáng đi của các đường dòng được biểu diễn trên *hình* 42. *A* và *B* là các điểm có vận tốc triệt tiêu (hay các điểm dừng).



H.41. *Hệ tọa độ dùng để biểu diễn trường các vận tốc.*



H.42. *Dòng chảy thế xung quanh một hình trụ. Các điểm A và B là các điểm vận tốc triệt tiêu.*



H.43. *Dòng chảy của một chất lỏng xung quanh một hình trụ đang quay. Các điểm A và B là các điểm vận tốc triệt tiêu.*

Cuối cùng, ta có thể chồng chất một cuộn xoáy $\vec{v}_3 = \frac{C}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ lên trường này.

Lúc đó, trường trở thành:

$$\vec{v} = v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left[-v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{C}{2\pi r}\right]\vec{e}_\theta .$$

Nó biểu diễn dòng chảy xung quanh một hình trụ đang quay. Hình trụ này có khuynh hướng kéo chất lỏng đi theo (*h*.43). Điều này tương ứng với các bản vẽ sơ đồ trên các *hình* 8 và 14, trong đó ta đã chỉ rõ vị trí của lưỡng cực.

▶ **Để luyện tập : bài tập 7**

Áp dụng 9

Tính chất của một trường vận tốc

Giả sử có trường vận tốc như trên:

$$\vec{v} = v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left[-v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{C}{2\pi r}\right]\vec{e}_\theta$$

1) *Tính* $\mathrm{div}\,\vec{v}$ *và* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ *đối với* $r > 0$.

2) *Cho một hình trụ chiều cao h, bán kính a và đáy là một đường cong* $\mathscr{C}$ *nào đó bao quanh hình trụ này.*

• *tìm thông lượng ra của vectơ vận tốc đi qua hình trụ này?*

• *Tìm trị số lưu thông của vectơ vận tốc trên đường cong* $\mathscr{C}$*?*

1) Vận tốc $\vec{v}$ có thể được biểu thị dưới dạng:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 ,$$

với :

$$\vec{v}_1 = v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r - v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_\theta ,$$

$$\text{và } \vec{v}_2 = \frac{C}{2\pi r}\vec{e}_\theta .$$

• Ta biết rằng $\vec{v}_1$ là một trường có "bản chất tĩnh điện", do vậy $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}_1 = \vec{0}$.

Các nguồn của trường này được đặt ở $r = 0$, vậy ta cũng có $\mathrm{div}\,\vec{v}_1 = 0$ đối với $r > 0$.

• Ta biết rằng $\vec{v}_2$ là một trường có "bản chất từ tĩnh", do vậy $\mathrm{div}\,\vec{v}_2 = 0$. Các nguồn của trường này đều ở tại $r = 0$, vậy ta cũng có đối với $r > 0$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}_2 = \vec{0} .$$

Thành thử đối với $r > 0$ ta có :

$\text{rot}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ và $\text{div}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \text{div}\,\vec{v} = 0$.

2) Bao giờ ta cũng sử dụng cùng một cách phân tích.

• Thông lượng ra của $\vec{v}$ đi qua hình trụ bằng không, vì lưu lượng của một lưỡng cực thủy động lực bằng không.

• Lưu thông của $\vec{v}$ trên đường cong $\mathscr{C}$ thì bằng C. Như vậy lưu thông khác không. Điều này là do sự kiện có mặt của một cuộn xoáy: điểm kì dị tại $r = 0$.

Chú ý:

- Thông lượng ra của vectơ vận tốc triệt tiêu: có khả năng tìm được các trường vận tốc sao cho thông lượng này phải khác không, mặc dù $\text{div}\,\vec{v} = 0$.

- Lưu thông của vectơ vận tốc là khác không đối với $r > 0$ (tồn tại một điểm kì dị ở $r = 0$, do vậy lưu thông không triệt tiêu), cho dù trong miền đang xét, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$.

6 Phương trình LAPLACE trong vật lí

6.1. Một số bài toán kết hợp với phương trình LAPLACE

Các *dòng chảy thế* đưa vào một trường vectơ, trường các vận tốc $\vec{v}$ của chất lỏng, và một trường vô hướng, thế các vận tốc ϕ sao cho:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi \quad \text{và} \quad \Delta\phi = 0\,.$$

Sự mô hình hóa này thực tế là chung cho nhiều bài toán vật lí: vả chăng ta cũng đã gợi ra một sự tương tự tĩnh điện với trường vectơ $\vec{E}$ và trường vô hướng V trong một miền không có điện tích:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \quad \text{và} \quad \Delta V = 0\,.$$

Nhưng kiểu phương trình này lại cũng được tìm thấy trong các bài toán sau đây:

• sự khuếch tán hạt:
- trường vô hướng: mật độ hạt n;
- trường vectơ kết hợp: $\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$ với D là hệ số khuếch tán;
- ở chế độ dừng: $\Delta n = 0$;

• sự khuếch tán nhiệt:
- trường vô hướng: nhiệt độ T;
- trường vectơ kết hợp $\vec{j}_Q = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$ với k là hệ số dẫn nhiệt;
- ở chế độ dừng: $\Delta T = 0$;

• Định luật OHM trong một dây dẫn:
- trường vô hướng: điện thế V;
- trường vectơ kết hợp $\vec{j} = -\gamma\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ với γ là độ dẫn điện ;
- ở chế độ dừng: $\Delta V = 0$.

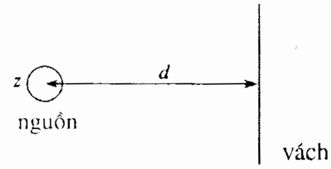
Thực ra, trong tất cả các bài toán này, một hàm vô hướng g tuân theo phương trình LAPLACE $\Delta g = 0$, và một hàm vectơ $\vec{j}$ gọi là dòng được kết hợp với g bằng hệ thức:

$$\vec{j} = \Lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\ g\,,$$

trong đó Λ là một hằng số đặc trưng của từng bài toán. Hình học và các điều kiện ở giới hạn áp đặt cho một bài toán riêng kéo theo tính duy nhất của nghiệm của phương trình $\Delta g = 0$.

Bởi vậy, hai bài toán được kết hợp với cùng những đại lượng như nhau hay với những đại lượng tương tự theo nghĩa đã gợi ý như trên, và biểu hiện cùng một cấu hình, thì đều có các nghiệm đồng nhất hay tương tự. Vả chăng, sự tương tự này đã được dùng nhiều trong các §**3.3** và **3.4.**

Ví dụ sau đây, chung cho tất cả các bài toán đã được nêu rõ ở trên, chứng minh lợi ích của cách giải liên kết.



H.44. *Nguồn hai chiều trước mặt một vách vô hạn song song với trục của nguồn.*

6.2. Ví dụ chung

Bài toán ở đây bao gồm một "nguồn" và một điều kiện rất đặc biệt ở các giới hạn:

- nguồn là hai chiều, vô hạn và trùng với một trục (Oz) ;
- giới hạn thứ nhất là một mặt phẳng vô hạn song song với trục của nguồn và cách nguồn một khoảng d ;
- "giới hạn" thứ hai là vô cực mà tại đó môi trường được coi là ở "trạng thái nghỉ" (*hình* 44) .

Cụ thể hơn nữa, bài toán sẽ được lập thành bởi:

- trong vật lí chất lưu:

- một nguồn hai chiều có lưu lượng thể tích D_{vl} ;
- môi trường sẽ là một chất lưu lí tưởng có khối lượng riêng ρ, giả thiết đang ở dòng chảy thế;
- mặt phẳng sẽ là một vách cố định tạo thành một vật cản dòng chảy ;

- trong khuếch tán hạt :

- một nguồn hạt phát xạ một mật độ hạt n_l trong đơn vị thời gian và trên đơn vị dài của nguồn ;
- môi trường sẽ được đặc trưng bởi hằng số khuếch tán D ;
- mặt phẳng sẽ là một vách không thấm các hạt bị khuếch tán ;

- trong khuếch tán nhiệt :

- một nguồn nhiệt có công suất dài $\mathscr{P}_l$;
- môi trường sẽ được đặc trưng bởi hệ số dẫn nhiệt k của nó;
- mặt phẳng sẽ là một vách đoạn nhiệt lí tưởng;

- trong động điện:

- một nguồn dòng được nâng lên điện thế V và "phát ra" một dòng vectơ $\vec{j}$ xuyên tâm, đều và có cường độ dài I_l ;
- môi trường sẽ là một dây dẫn thuần trở có độ dẫn điện γ;
- mặt phẳng sẽ là một vách cách điện lí tưởng.

Với mỗi bài toán có thể kết hợp một hàm vô hướng g tuân theo phương trình LAPLACE $\Delta g = 0$, và một hàm vectơ được gọi là dòng sao cho:

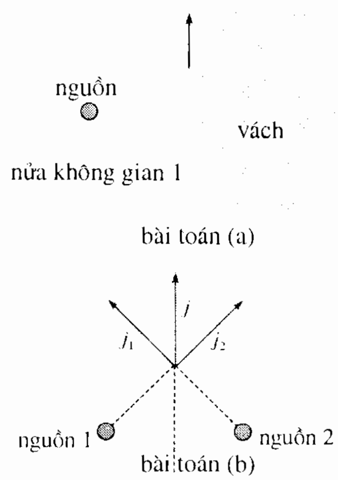
$$\vec{j} = \Lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g$$

- Trong toàn không gian trừ nguồn, g tuân theo $\Delta g = 0$.
- Tồn tại một nguồn dòng hai chiều có lưu lượng dài D_l.
- Mặt phẳng giới hạn áp đặt tại mọi điểm của nó một vectơ dòng tiếp tuyến.
- Vả lại, dòng còn phải triệt tiêu ở vô cùng.

Khi kể đến các điều kiện ở giới hạn, thì tồn tại một nghiệm duy nhất đồng nhất cho tất cả các bài toán này.

Nghiệm duy nhất này cũng có thể nhận được xuất phát từ một bài toán tương đương về hình thức, nghĩa là bài toán tôn trọng cũng những điều kiện như nhau ở các giới hạn.

Tuy nhiên, ta hãy xem xét bài toán (b) là sự chồng chất của cùng một nguồn hai chiều và một nguồn thứ hai giống hệt, đối xứng đối với nguồn thứ nhất qua một mặt phẳng trùng với vách (trong bài toán thứ hai, vách này không còn nữa) (*h*.45).



H.45. *Tính tương đương giữa các bài toán* (a) *và* (b) *trong nửa không gian* 1.

Trong bài toán (b), ta thu được vectơ dòng bằng cách chồng chập các dòng $\vec{j}_1$ và $\vec{j}_2$ kết hợp với từng nguồn. Ở ngang mức mặt phẳng đối xứng, dòng tổng cộng tiếp tuyến với mặt phẳng, điều này coi trọng điều kiện áp đặt lên vách trong bài toán (a).

Như vậy, trong nửa không gian ở phía nguồn, các bài toán (a) và (b) có cùng nghiệm như nhau. Các đường dòng $\vec{j}$ và đại lượng g kết hợp với bài toán (a) là do sự chồng chất cùng những đại lượng như nhau kết hợp với hai nguồn đồng nhất đối xứng đối với vách:

$$\vec{j} = \frac{D_1}{2\pi}\left(\frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1} + \frac{\vec{e}_{r_2}}{r_2}\right);$$

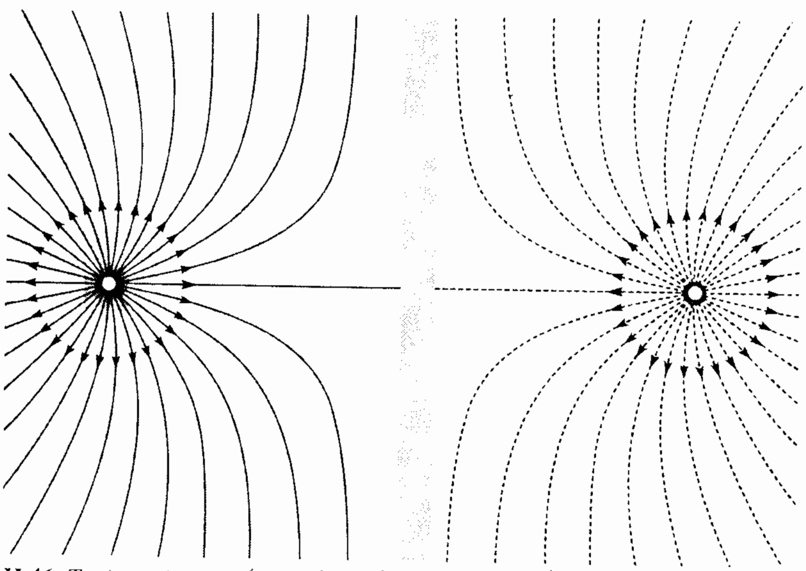
$$g = \frac{D_1}{2\pi\Lambda}\ln r_1 r_2 + \text{cte}.$$

Cụ thể, trong trường hợp của dòng chảy chất lưu:

$$\vec{v} = \frac{D_{v1}}{2\pi}\left(\frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1} + \frac{\vec{e}_{r_2}}{r_2}\right);$$

$$\Phi = \frac{D_{v1}}{2\pi}\ln r_1 r_2 + \text{cte}.$$

Bản đồ dòng chảy được biểu diễn *trên hình* 46.



H.46. *Trường các vận tốc của dòng chảy của một nguồn đối diện một mặt phẳng.*

ĐIỀU CẦN PHẢI NHỚ

■ TRƯỜNG VẬN TỐC CỦA MỘT CHẤT LƯU

• Đối với một dòng chảy bất kì, sự biến đổi của một hệ nguyên tố chất lưu tổ hợp ba khía cạnh cục bộ: giãn nở, quay và biến dạng.

• *Giãn nở*

Ở cục bộ, hệ số biến thiên thể tích tương đối trong đơn vị thời gian bằng đive của trường các vận tốc: $\frac{1}{\delta t}\frac{\delta(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \text{div}\,\vec{v}$. Trường các vận tốc của một chất lưu cho ta biết về độ giãn nở của nó nhờ đive vận tốc của chất lưu.

Nếu $\text{div}\,\vec{v} = 0$, thì ta có một dòng chảy không thể nén được : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

• *Quay*

Ở cục bộ, trường các vận tốc của một chất lưu có thể đồng dạng với trường các vận tốc của một vật rắn có vectơ quay tức thời $\vec{\Omega}$. Sự quay đặc biệt này (sự xoáy) của chất lưu tại một điểm M sẽ tồn tại nếu rota của trường vận tốc : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega}$ biểu diễn vectơ xoáy) khác không.

Ở cục bộ, trường vận tốc của một chất lưu cho ta biết về sự tồn tại các khu xoáy trong chất lưu này nhờ rota của nó.

• *Các đặc trưng của một dòng chảy*

Một dòng chảy mà đối với nó trường vận tốc Euler độc lập với thời gian t, được gọi là dòng chảy dừng (độc lập với thời gian):

$$\vec{v} = \vec{v}(M) \text{ với } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Trong một dòng chảy dừng, lưu lượng khối là như nhau qua mọi tiết diện của một ống dòng.

Một dòng chảy không thể nén được là một dòng chảy mà đối với nó $\text{div}\,\vec{v}$ triệt tiêu ở khắp mọi nơi: $\text{div}\,\vec{v}(M,t) = 0$.

Trong một dòng chảy không thể nén được, lưu lượng thể tích được bảo toàn qua mọi tiết diện của một ống dòng.

Trong một dòng chảy không xoáy, vectơ xoáy triệt tiêu tại mọi điểm không gian, $\vec{v}$ có lưu thông bảo toàn và các đường dòng không thể được khép kín. Nếu vectơ xoáy khác không tại ít nhất là một điểm đã cho trong không gian, thì dòng chảy gọi là dòng xoáy.

• Thành phần pháp tuyến của vận tốc một chất lưu đối với một vật cản cố định thì bằng không.

■ DÒNG CHẢY PHẲNG KHÔNG THỂ NÉN ĐƯỢC

• Khi có một dòng chảy phẳng không thể nén được, thì có thể xác định một hàm ψ "hàm dòng", sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\psi(x,y,t)\vec{e}_z\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\psi(x,y,t) \wedge \vec{e}_z$.

Các đường cong $\psi(x,y,t_0) = \text{cte}$ đồng nhất với các đường dòng ở thời điểm t_0.

• Khi có một dòng chảy phẳng không thể nén được, thì lưu lượng thể tích $\Phi_{A_v}^{B}(t)$, ở thời điểm t, đi qua một mặt chứa các điểm A, B và độ cao h, được xác định bởi:

$$\Phi_{A_v}^{B}(t) = h\left[\psi_B(t) - \psi_A(t)\right].$$

■ DÒNG CHẢY KHÔNG XOÁY

- Một dòng chảy không xoáy và không thể nén gọi là dòng chảy thế: tại mọi điểm của dòng chảy, thế vận tốc ϕ thoả mãn hệ thức $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$.

- Nếu dòng chảy là không thể nén, thì ϕ tuân theo phương trình gọi là phương trình LAPLACE:

$$\Delta\phi = 0.$$

■ SỰ TƯƠNG TỰ TĨNH ĐIỆN

• Trường các vận tốc của một chất lưu ở dòng chảy thế (không xoáy và không thể nén được) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}\text{, do đó, tồn tại } \phi \text{ sao cho } \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi.$$

$$\text{div}\,\vec{v} = 0\text{, nghĩa là } \Delta\phi = 0.$$

• Trường tĩnh điện trong một miền không có điện tích :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}\text{, do đó, tồn tại } V \text{ sao cho } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.$$

$$\text{div}\,\vec{E} = 0\text{, nghĩa là } \Delta V = 0$$

■ SỰ TƯƠNG TỰ TỪ TĨNH

• Trường các vận tốc của một chất lưu ở dòng chảy không thể nén được và xoáy:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega} \text{ và div}\,\vec{v} = 0.$$

• Trường từ tĩnh:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} \text{ và div}\,\vec{B} = 0.$$

■ NGUỒN VÀ GIẾNG HAI CHIỀU

Trường vận tốc của một nguồn hai chiều có lưu lượng dài D_{vl} thì bằng:

$$\vec{v} = \frac{D_{vl}}{2\pi r}\vec{e}_r.$$

Trường này xuất phát từ một thế $\phi = \dfrac{D_{vl}}{2\pi}\ln r + K$.

■ LƯỠNG CỰC THỦY ĐỘNG LỰC

Một lưỡng cực thủy động lực được cấu thành bởi sự chồng chập của một giếng $(-D_{vl})$ và một nguồn $(+D_{vl})$ hai chiều rất gần nhau (ở khoảng cách d) so với các khoảng cách quan sát r.

Thế của trường các vận tốc được xác định trong hệ tọa độ trụ bởi:

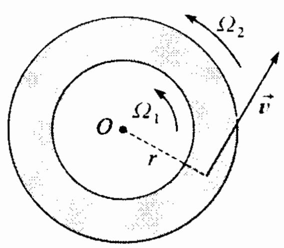
$$\Phi = -\frac{D_{vl}d}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}.$$

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Dòng chảy giữa hai hình trụ đang quay

Dòng chảy giữa hai hình trụ trục (Oz), đang quay được xác định bởi trường Euler các vận tốc (trong tọa độ trụ) như sau:



$$\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_\theta$$

Trường các vận tốc này có tương ứng với :

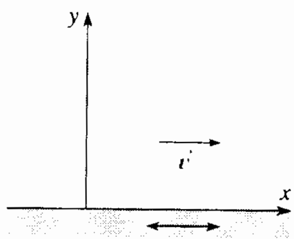
- một dòng chảy dừng không ?
- một dòng chảy không thể nén được không ?
- một dòng chảy với các vùng xoáy không ?

Hãy kiểm tra xem liệu các điều kiện ở giới hạn trên hai hình trụ có đúng không?

Có tồn tại một thế các vận tốc không?

2 Dòng chảy ở bên trên một mặt phẳng dao động

Dòng chảy giữa một mặt phẳng dao động ($y = 0$) và vô cực (y vô hạn) được xác định bởi trường Euler các vận tốc dưới đây (trong tọa độ Descartes):



$$\vec{v} = ae^{-ky}\cos(\omega t - ky)\vec{e}_x .$$

Trường các vận tốc này có tương ứng với:

- một dòng chảy dừng không ?
- một dòng chảy không thể nén?
- một dòng chảy với những vùng xoáy?

Kiểm tra xem liệu các điều kiện ở các giới hạn có đúng không?

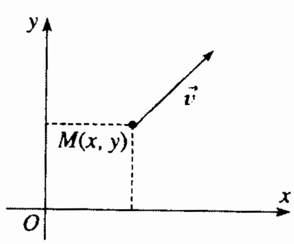
Có tồn tại một thế các vận tốc không?

3 Dòng chảy hai chiều: $\vec{v}(kx, ky, 0)$

Trường Euler các vận tốc của một dòng chảy hai chiều được xác định bởi:

$$\vec{v}(kx, ky, 0)$$

trong tọa độ Descartes.



1. Hãy tìm các đặc trưng cho dòng chảy. Có tồn tại một thế các vận tốc không ?

Đối với dòng chảy này, hãy xác định:

a. Phương trình các đường dòng.

b. Phương trình các quỹ đạo. Bình giải.

2. Tính gia tốc của một hạt chất lỏng.

3. Hãy biểu diễn sự biến đổi của một "hình vuông" chất lỏng cạnh a giữa các thời điểm t và $t + dt$. Bình giải.

4 Dòng chảy hai chiều: $\vec{v}(ky, kx, 0)$

Trường Euler các vận tốc của một dòng chảy hai chiều được xác định (trong hệ tọa độ Descartes) bởi:

$$\vec{v}(ky, kx, 0) .$$

1. Hãy nêu các đặc trưng cho dòng chảy. Có tồn tại một thế các vận tốc không?

Đối với dòng chảy này, hãy xác định:

a. Phương trình các đường dòng.

b. Phương trình các quỹ đạo. Bình giải.

2. Tính gia tốc của một hạt chất lỏng.

3. Biểu diễn sự biến đổi của một "hình vuông" chất lỏng cạnh a giữa các thời điểm t và $t + dt$. Bình giải.

5 Dòng chảy hai chiều: $\vec{v}(-ky, kx, 0)$

Trường Euler các vận tốc của một dòng chảy hai chiều được xác định (trong tọa độ Descartes) bởi:

$$\vec{v}(-ky, kx, 0) .$$

1. Hãy nêu các đặc trưng cho dòng chảy. Có tồn tại một thế các vận tốc không ? Đối với dòng chảy này, hãy xác định:

a. Phương trình các đường dòng.

b. Phương trình các quỹ đạo. Bình giải.

2. Tính gia tốc của một hạt chất lỏng.

3. Biểu diễn sự biến đổi của một "hình vuông" chất lỏng cạnh a giữa các thời điểm t và $t + dt$. Bình giải.

6 Hàm dòng của một dòng chảy phẳng không thể nén được

1. Chứng minh rằng đối với mọi dòng chảy phẳng không thể nén, được xác định trong hệ tọa độ Descartes bởi: $\vec{v}(v_x, v_y)$, thì đều có thể kết hợp một hàm vô hướng ψ (hàm dòng) sao cho:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \text{ và } -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y .$$

2. Chứng minh rằng lúc đó $\vec{v}\,\overrightarrow{\text{grad}}(\psi) = 0$ và từ đó suy ra rằng các đường cong của phương trình ψ = cte đồng nhất với các đường dòng.

3. Áp dụng kết quả này cho các dòng chảy được xác định bởi các trường vận tốc sau:

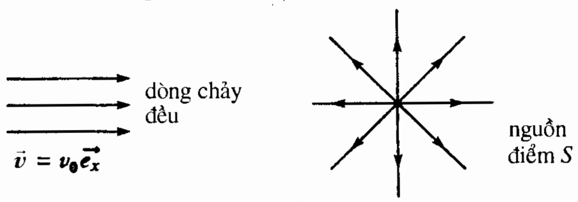
a. $\vec{v}(ky, kx)$;

b. $\vec{v}(-ky, kx)$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

7 ★Vật rắn Rankine

1) Một nguồn điểm ba chiều đặt tại O, điểm gốc của hệ tọa độ cầu, phát ra đẳng hướng một chất lỏng không thể nén được theo mọi chiều trong không gian, với lưu lượng thể tích D_V không đổi.



a. Xác định trường vận tốc $\vec{v}_1$ kết hợp với dòng chảy này.

b. Dòng chảy này có phải là dừng?

c. Có tồn tại một thế φ_1 của các vận tốc không ?

d. Dòng chảy có không thể nén được không ? Tìm phương trình các đường dòng?

2) Người ta chồng chất lên dòng chảy trước, một dòng chảy đều có dạng $\vec{v}_2 = v_0\vec{e}_x$.

a. Xác định trường vận tốc tổng hợp $\vec{v}$.

b. Trường các vận tốc này có phải là trường vận tốc của một dòng chảy không thể nén được ở bên ngoài không ?

c. Có tồn tại một thế φ ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$) của các vận tốc không ?

d. Thiết lập phương trình tổng quát của các đường dòng.

e. Chứng tỏ rằng tồn tại một điểm dừng (điểm có vận tốc triệt tiêu). Xác định phương trình các đường dòng đi qua điểm đó.

f. Chứng tỏ rằng ta thu được cùng một dòng chảy bằng cách đưa vào trong một dòng chảy đều một vật rắn tròn xoay, được xây dựng xuất phát từ các đường dòng được xác định trong câu hỏi trên: vật rắn này được gọi là vật rắn RANKINE.

8 ★Dòng chảy đối xứng trục

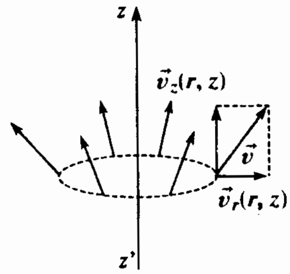
Một dòng chảy dừng không thể nén được có một sự đối xứng tròn xoay xung quanh một trục (zz'). Trong tọa độ trụ, trường Euler các vận tốc của nó có dạng:

$$\vec{v} = (v_r(r,z),\ 0,\ v_z(r,z)).$$

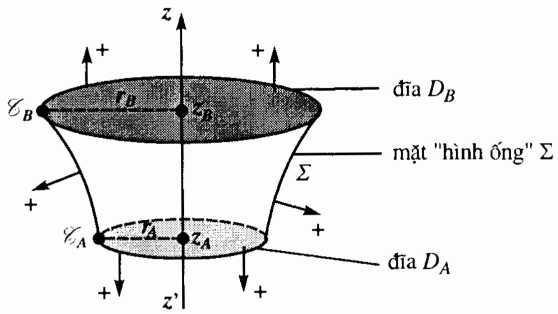
1. Chứng tỏ rằng có thể kết hợp với trường đó, một trường vectơ:

$$\vec{A} = \Psi(r,z)\frac{\vec{e}_\theta}{r}$$

sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.



2. Hai vòng tròn $\mathscr{C}_A$ và $\mathscr{C}_B$, bán kính r_A và r_B có tâm ở trên trục (zz') tại các điểm có độ cao z_A và z_B, giới hạn giữa chúng một mặt "hình ống" tròn xoáy Σ (mặt hở).



Chứng rỏ rằng lưu lượng thể tích của chất lỏng qua mặt Σ được biểu thị đơn giản theo hàm số ψ được định nghĩa ở trên.

LỜI GIẢI

1 *Dòng chảy* $\vec{v} = \left(Ar + \dfrac{B}{r}\right)\vec{e}_\theta$ *đặc trưng:*

• *một dòng chảy dừng vì trường các vận tốc* $\vec{v}(\vec{r},t)$, *không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian;*

• *một dòng chảy không thể nén, vì vận tốc có dạng* $\vec{v}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_\theta$ *và do vậy có đive triệt tiêu (xem chương 8);*

• *một dòng chảy xoáy có vectơ xoáy* $\vec{\Omega}$ *sao cho:*

khi biết rằng $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$ *(xem chương 8), thì ta viết dưới dạng:*

$$\vec{v}(r) = (Ar^2 + B)\frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

Khi áp dụng công thức: $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{A}$, *ta được :*

$$2\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\left[(Ar^2+B)\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right] = (Ar^2+B)\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}(Ar^2+B) \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r}$$

$$= 2Ar\,\vec{e}_r \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r} = 2A\vec{e}_z, \text{ hay } \vec{\Omega} = A\vec{e}_z.$$

Ta nhận xét thấy đúng là ta có div $(\overrightarrow{\Omega}) = 0$.

Dòng chảy này coi trọng các điều kiện ở các giới hạn: vận tốc đúng là tiếp tuyến với hai hình trụ. Vì $\overrightarrow{\Omega}$ *khác không, nên không tồn tại thế các vận tốc.*

2 *Dòng chảy* $\vec{v} = a e^{-ky} \cos(\omega t - ky)\vec{e}_x$ *đặc trưng:*

- *một dòng chảy không dừng, vì trường các vận tốc* $\vec{v}(r, t)$ *phụ thuộc rõ ràng vào thời gian;*
- *một dòng chảy không thể nén, vì div* $(\vec{v}) = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \vec{0}$;
- *một dòng chảy xoáy, có vectơ xoáy* $\overrightarrow{\Omega}$ *(phụ thuộc thời gian), sao cho:*

$$2\overrightarrow{\Omega} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{e}_z = k a e^{-ky}\left[\cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky)\right]\vec{e}_x .$$

Ta nhận xét thấy đúng là div $(\overrightarrow{\Omega}) = 0$. *Vả lại dòng chảy này coi trọng các điều kiện ở các giới hạn:*

- *vận tốc tiếp tuyến với mặt phẳng dao động ở* $y = 0$;
- *vận tốc tiến tới 0 khi y tiến tới vô cực.*

Vì $\overrightarrow{\Omega}$ *khác không, nên không tồn tại thế của các vận tốc.*

3 1) *Dòng chảy là dừng, vì trường các vận tốc không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian.*

Dòng chảy là có thể nén được, vì div $\vec{v} = 2k$ *khác không.*

Dòng chảy là không xoáy, vì $2\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Vì $\overrightarrow{\Omega}$ *triệt tiêu, nên tồn tại một thế* ϕ *của các vận tốc sao cho* $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = kx \quad \text{và} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = ky \quad \text{nghĩa là: } \phi = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \mathrm{cte}.$$

a) *Ta thu được các đường dòng bằng cách tích phân phương trình vi phân* $\dfrac{dx}{kx} = \dfrac{dy}{ky}$, *do đó* $x = Ay$. *Đó là các đường thẳng "xuyên tâm" đi qua điểm* $(x = 0; y = 0)$.

b) *Ta thu được các quỹ đạo* $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t))$ *bằng cách tích phân các phương trình sau:*

$$\frac{dX}{dt} = kX \quad \text{và} \quad \frac{dY}{dt} = kY .$$

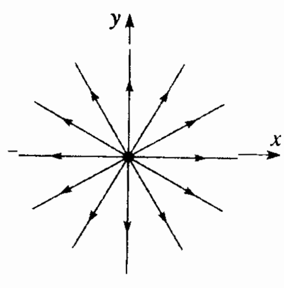
Quỹ đạo của một hạt bắt đầu từ điểm $M_0(X_0, Y_0)$ *lúc* $t = 0$ *như vậy là:*

$$X(t) = X_0 e^{kt} \quad \text{và} \quad Y(t) = Y_0 e^{kt} .$$

Nếu khử t giữa hai biểu thức trên, ta được:

$$X(t) = \frac{X_0}{Y_0} Y(t),$$

nghĩa là ta lại tìm thấy một đường thẳng xuyên tâm đi qua các điểm $(0, 0)$ *và* $M_0(X_0 Y_0)$. *Ở chế độ dừng, các quỹ đạo và các đường dòng đồng nhất với nhau.*



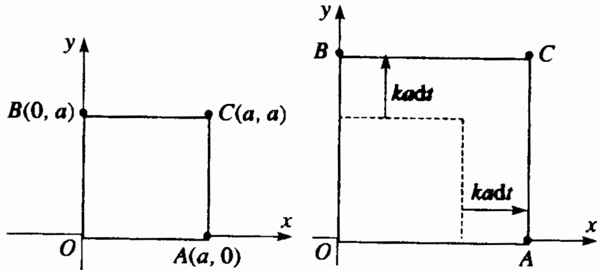
2) *Có thể thu được gia tốc của hạt chất lỏng:*

- *hoặc bằng cách lấy đạo hàm cấp hai đối với thời gian của quỹ đạo của một hạt:*

$$a_x = \frac{d^2 X}{dt^2} = k^2 X_0 e^{kt} = k^2 X(t) \;;\; a_y = \frac{d^2 Y}{dt^2} = k^2 Y_0 e^{kt} = k^2 Y(t)$$

- *hoặc áp dụng:* $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \left(kx\dfrac{\partial}{\partial x} + ky\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}$, *cũng dẫn đến* $\vec{a} = (k^2 x, k^2 y)$.

3) *Trong hệ quy chiếu gắn với đỉnh O (0, 0) của hình vuông, ta phải tìm vị trí các điểm A (a, 0), B (0, a) và C (a, a) ở thời điểm* $t + \mathrm{d}t$.



Trong thời gian $\mathrm{d}t$, *A đã dịch chuyển một đoạn* $k\,a\,\mathrm{d}t$ *trên trục (Ox), còn B dịch chuyển một đoạn* $k\,a\,\mathrm{d}t$ *trên trục (Oy) và C dịch chuyển đồng thời trên cả hai trục. Hình vuông ban đầu vẫn là hình vuông ở thời điểm t + dt.*

Diện tích cũ là a^2 *trở thành* $a^2(1 + k\,\mathrm{d}t)^2$: *như vậy, có sự giãn nở mà không biến dạng.*

4 1) *Dòng chảy là dừng.*

Dòng chảy là không thể nén được, vì div $\vec{v} = 0$.

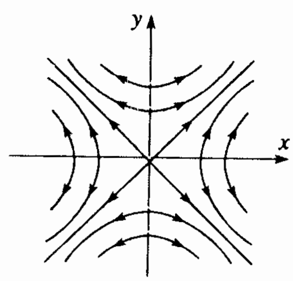
Dòng chảy là không xoáy, vì $2\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Vì không có các vùng xoáy, nên tồn tại một thế ϕ *của các vận tốc sao cho:* $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$, *do đó* $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = ky$ *và* $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = kx$ *nghĩa là:*

$\phi = kxy + \mathrm{cte}$.

a) *Ta thu được các đường dòng bằng cách tích phân phương trình vi phân* $\dfrac{\mathrm{d}x}{ky} = \dfrac{\mathrm{d}y}{kx}$, *do đó:*

$x^2 - y^2 = A$: *đây là các đường hypebon.*



b) *Ta thu được các quỹ đạo bằng tích phân các phương trình:*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = kY(t) \quad \text{và} \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = kX(t),$$

do đó $\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = k^2 X$ *nghĩa là:* $X(t) = ae^{kt} + be^{-kt}$ *và* $Y(t) = ae^{kt} - be^{-kt}$.

Biết rằng lúc t = 0, $X(t) = X_0$ *và* $Y(t) = Y_0$, *ta có :* $X_0 = a + b$; $Y_0 = a - b$, *điều này cho ta:*

$$X(t) = \frac{X_0 + Y_0}{2}e^{kt} + \frac{X_0 - Y_0}{2}e^{-kt} \quad \text{và} \quad Y(t) = \frac{X_0 + Y_0}{2}e^{kt} - \frac{X_0 - Y_0}{2}e^{-kt} .$$

Khi khử thời gian giữa các phương trình này, ta được:

$$x^2 - y^2 = X_0^2 - Y_0^2 = \text{cte} .$$

Ở chế độ dừng, các quỹ đạo và các đường dòng là đồng nhất

2) *Ta có thể thu được gia tốc toàn phần:*

- *hoặc bằng lấy đạo hàm cấp hai đối với thời gian của quỹ đạo một hạt:*

$$a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = k^2(ae^{kt} + be^{-kt}) = k^2X \text{ và } a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = k^2Y ;$$

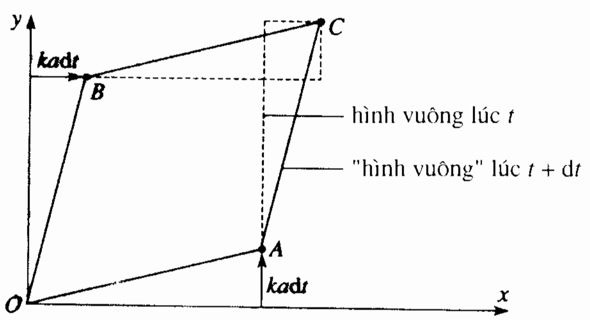
- *hoặc bằng áp dụng biểu thức:* $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \left(ky\frac{\partial}{\partial x} + kx\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}$,

cũng dẫn đến $\vec{a}(k^2x, k^2y)$.

3) *Trong hệ quy chiếu gắn với đỉnh O của hình vuông, ta phải tìm vị trí các điểm A(a, 0), B(0, a) và C(a, a) ở thời điểm t + dt.*

Trong thời gian dt, *điểm A di chuyển được k a* dt *trên trục (Oy), điểm B di chuyển được kadt trên trục (Ox) và C dịch chuyển đồng thời trên cả hai trục. Hình vuông ban đầu trở thành hình thoi ở thời điểm t + dt : vậy có sự biến dạng trong dòng chảy.*

Diện tích trước kia bằng a^2 đã không thay đổi: dòng chảy là không thể nén được.



5 1) *Dòng chảy là dừng, vì vận tốc không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian.*

Dòng chảy là không thể nén được, vì div $\vec{v} = 0$.

Dòng chảy là xoáy, vì $2\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}) = 2k\vec{e}_z$, *nghĩa là* $\vec{\Omega} = k\vec{e}_z$. *Vậy không thể xác định được một thế các vận tốc.*

a) *Ta thu được các đường dòng bằng cách tích phân phương trình vi phân:*

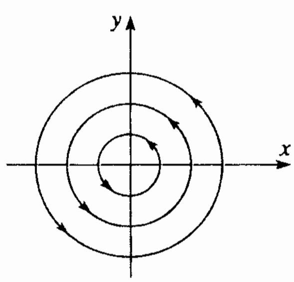
$-\frac{dx}{ky} = \frac{dy}{kx}$, *do đó* $x^2 + y^2 = A$: *đó là những vòng tròn đồng tâm ở O.*

b) *Ta thu được các quỹ đạo bằng tích phân các phương trình*

$\frac{dX}{dt} = -kY(t)$ và $\frac{dY}{dt} = kX(t)$,

do đó : $\frac{d^2X}{dt^2} = -k^2X(t)$,

nghĩa là : $X(t) = a\cos(kt) + b\sin(kt)$ và $Y(t) = a\sin(kt) - b\cos(kt)$. *Biết rằng khi* $t = 0$, *thì* $X(t) = X_0$ *và* $Y(t) = Y_0$, *ta có* $X_0 = a$ *và* $Y_0 = -b$, *điều này cho ta:*



$$X(t) = X_0\cos(kt) - Y_0\sin(kt) \text{ và } Y(t) = X_0\sin(kt) + Y_0\cos(kt)$$

Khử t giữa các phương trình, ta được:

$$X^2 + Y^2 = X_0^2 + Y_0^2 = \text{cte} .$$

Ở chế độ dừng, các quỹ đạo và các đường dòng đồng nhất với nhau.

2) *Có thể tính được gia tốc hạt chất lỏng:*

- *hoặc bằng cách lấy đạo hàm cấp hai đối với thời gian của quỹ đạo một hạt:*

$$a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = -k^2X(t) \text{ và } a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = -k^2Y(t) ;$$

- *hoặc bằng áp dụng biểu thức :* $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \left(-ky\frac{\partial}{\partial x} + kx\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}$,

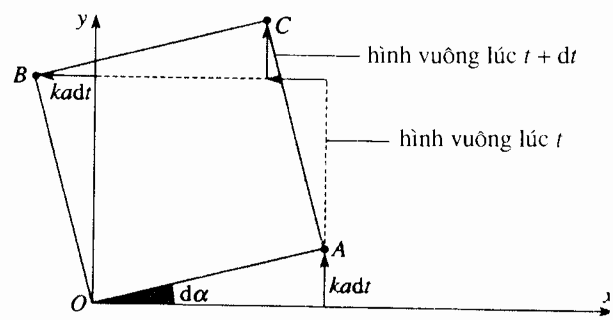
cũng dẫn đến $\vec{a}(-k^2x, -k^2y)$.

3) *Trong hệ quy chiếu gắn với đỉnh O của hình vuông, ta phải tìm vị trí các điểm A(a, 0), B(0, a) và C (a, a) ở thời điểm t + dt.*

Trong thời gian dt, *điểm A di chuyển được kadt trên trục (Oy), điểm B đi được −k a* dt *trên trục (Ox) và C đồng thời trên cả hai trục. Hình vuông ban đầu vẫn là một hình vuông ở thời điểm t + dt.*

Diện tích của nó không thay đổi (tính không thể nén được), nhưng hình vuông đã quay một góc dα = k dt xung quanh trục (Oz).

Ta nhận thấy rằng trường các vận tốc của dòng chảy này đồng nhất với trường các vận tốc của một vật rắn đang quay với vận tốc góc $\vec{\Omega}$ *xung quanh điểm O.*



6 1) *Lời giải, thực ra là sự chứng minh đảo. Nếu chất lưu là không thể nén được, thì lúc đó* div $\vec{v} = 0$. *Như vậy sẽ tồn tại một trường vectơ* $\vec{A}$ *sao cho* $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$. *Dòng chảy là phẳng, nên ta có thể chọn* $\vec{A} = \psi(x, y)\vec{e}_z$, *do đó:*

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ và } v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Đảo lại:

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{\partial \psi}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial x} = \vec{0} .$$

Vậy ta có một dòng chảy không thể nén được.

2) $\vec{v}\,.\overrightarrow{\text{grad}}\psi = v_x\frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_xv_y + v_yv_x = 0.$

Các đường cong ψ = cte *trực giao với* $\overrightarrow{\text{grad}}\psi$, *do vậy cộng tuyến với* $\vec{v}$: *đây đúng là các đường dòng.*

3) a) *Trường các vận tốc* $\vec{v}(ky, kx)$ *là một trường có đive bằng không: như vậy, có thể xác định một hàm dòng* ψ: $\psi(x,y) = k(y^2 - x^2)$. *Ta lại tìm thấy đúng các phương trình của các đường dòng nhìn thấy trong bài tập 4.*

b) *Trường các vận tốc* $\vec{v}(-ky, kx)$ *là một trường có đive triệt tiêu: như vậy, có thể xác định được hàm dòng* ψ: $\psi(x,y) = k(y^2 + x^2)$. *Ta lại tìm thấy đúng các phương trình của các đường dòng nhìn thấy trong bài tập 5.*

7 1) a) *Sự tương tự với điện trường của một điện tích điểm là trực tiếp.*

Tính đối xứng cầu buộc một trường các vận tốc phải có dạng $\vec{v}_1 = v(r)\vec{u}_r$. *Do áp dụng "định lý Gauss" của vật lý chất lỏng, ta có:*

$$4\pi r^2 v(r) = D_v \text{, nghĩa là } \vec{v}_1 = \frac{D_v}{4\pi r^2}\vec{e}_r .$$

b) *Dòng chảy này là dừng, vì trường các vận tốc không phụ thuộc rõ ràng vào thời gian.*

c) *Rota của trường này triệt tiêu (đây là trường có bản chất tĩnh điện), do vậy, tồn tại một thế* φ *sao cho* $\vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1$ *với* $\varphi_1 = -\frac{D_v}{4\pi r}$.

d) *Trường vận tốc này là trường của một dòng chảy không thể nén được (trừ ở* $r = 0$*):* $\text{div}\left(\frac{K}{r^2}\vec{e}_r\right) = 0$ *nếu* $r > 0$*: khi* $r = 0$*, đại lượng này là vô hạn (nguồn của trường). Các đường dòng là những đường thẳng đi qua gốc O (*θ = cte *và* ϕ = cte*).*

2) a) *Trong tọa độ cầu trục (Ox), bài toán, bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Ox), không phụ thuộc* ϕ.

$$\vec{v} = v_0\vec{e}_x + \frac{D_v}{4\pi r^2}\vec{e}_r = \left(\frac{D_v}{4\pi r^2} + v_0\cos\theta\right)\vec{e}_r - v_0\sin\theta\,\vec{e}_\theta .$$

b) *Một trường đều có đive triệt tiêu, thì trường các vận tốc này hiển nhiên cũng có đive triệt tiêu, trừ ở* $r = 0$.

c) *Tồn tại một thế các vận tốc. Thế* φ_2 *của trường đều, có thể có dạng* $\varphi_2 = v_0 x$, *nhờ đó ta có* $\varphi = -\frac{D_v}{4\pi r} + v_0 x$.

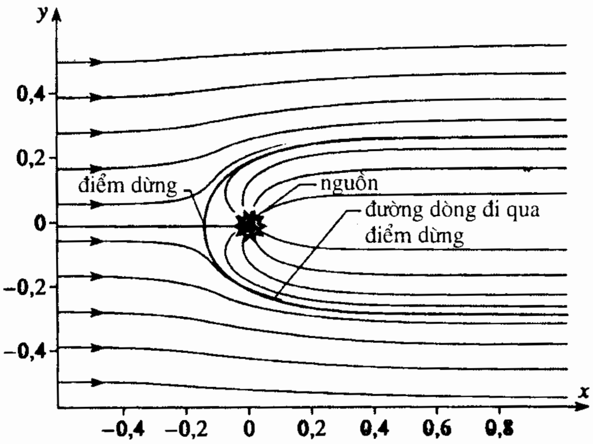
d) *Vậy các đường dòng ở trong một mặt phẳng kinh tuyến* ϕ = cte. *Trong mặt phẳng này, phương trình các đường dòng là nghiệm của phương trình vi phân :* $\dfrac{dr}{\dfrac{D_v}{4\pi r^2} + v_0\cos\theta} = \dfrac{r\,d\theta}{-v_0\sin\theta}$, *mà ta có thể viết :*

$$\frac{D_v}{4\pi r}d\theta + v_0 r\cos\theta\,d\theta + v_0\sin\theta\,dr = 0.$$

Nhân đại lượng này với $r\sin\theta$, *ta được :*

$\frac{D_v}{4\pi}\sin\theta\,d\theta + v_0 r^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta + v_0\sin^2\theta\, r\,dr = 0$, *nghĩa là* $d[f(r,\theta)] = 0$,

(vậy $f(r,\theta) = C$*) với* $f(r,\theta) = -\frac{D_v}{4\pi}\cos\theta + \frac{v_0 r^2\sin^2\theta}{2} = C$, *phương trình tổng quát của các đường dòng được biểu diễn trên sơ đồ dưới đây.*



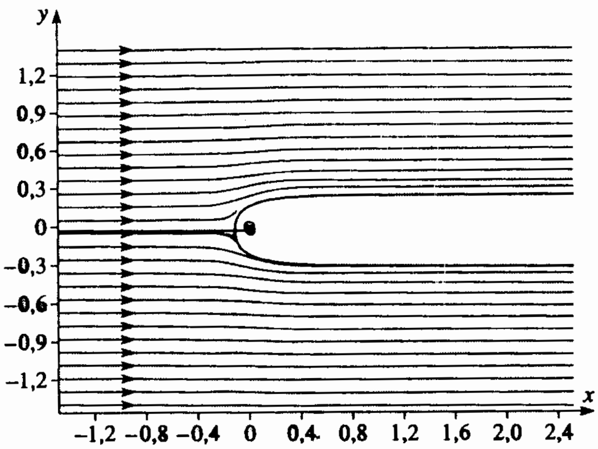
e) *Ta biết* $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + \frac{D_v}{4\pi r^2}\vec{e}_r = \left(\frac{D_v}{4\pi r^2} + v_0\cos\theta\right)\vec{e}_r - v_0\sin\theta\,\vec{e}_\theta$.

Vậy $v = 0$ *buộc* $\theta = \pi$ *và* $r_0 = \sqrt{\frac{D_v}{4\pi v_0}}$.

Trong mặt phẳng của hình vẽ, đường dòng đi qua điểm dừng này có phương trình :

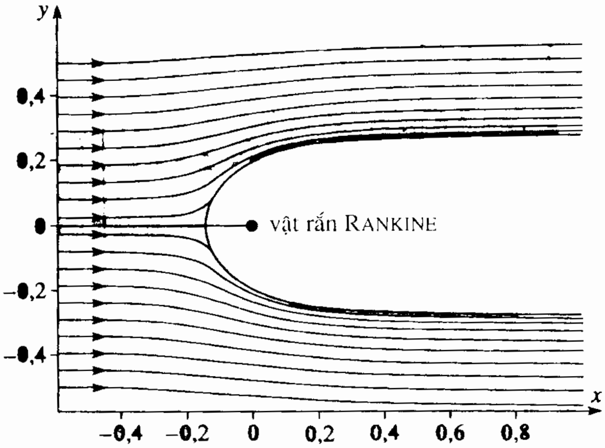
$$r^2 = \frac{D_v}{2\pi v_0}\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

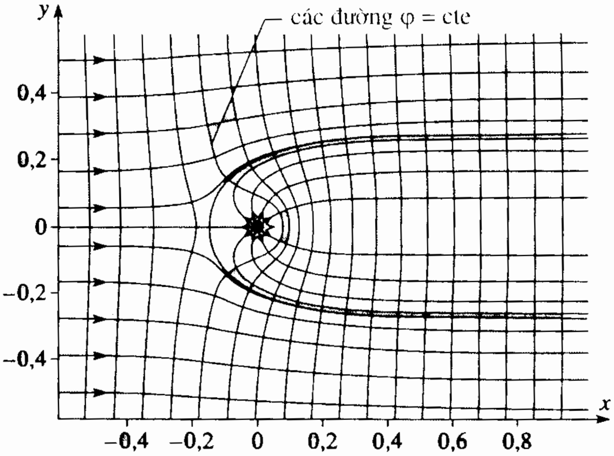
Ta nhận thấy nếu r trở nên vô hạn, thì θ *tiến tới 0 (hay* π*). Ở xa nguồn, các đường dòng là các đường thẳng .*



f) *Câu hỏi này là một áp dụng trực tiếp của sự cụ thể hóa các đường dòng trong dòng chảy dừng.*

Tất cả các đường dòng nhận được xuất phát từ sự quay xung quanh trục (Ox) của đường dòng đi qua điểm dừng, đều có thể được cụ thể hóa : ta có một vật cản mà một chất lỏng chảy quanh, theo các đường dòng đồng nhất với các đường của dòng chảy thu được trước đây bằng sự chồng chất.





8 1) *Dòng chảy là không thể nén được* ($\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$)*, trường các vận tốc này phát sinh từ một thế vectơ* $\vec{A}$ *sao cho* $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$*, vì* $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$.

Người ta chứng minh rằng vectơ $\vec{A}$ *được nêu lên thích hợp với:*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\psi(r,z)}{r}\vec{e}_0\right) = \psi(r,z)\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{e}_0}{r}\right) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi(r,z) \wedge \frac{\vec{e}_0}{r}.$$

Số hạng thứ nhất bằng không (xem chương 8) và số hạng thứ hai có giá trị:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\psi(r,z)}{r}\vec{e}_0\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_z - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_r.$$

Sự đồng nhất của $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ *và của* $\vec{v}$ *cho ta:*

$$v_r(r,z) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad \text{và} \quad v_z(r,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

2) *Lưu lượng thể tích đi qua mặt* Σ *dựa lên hai vòng tròn* $\mathscr{C}_A$ *và* $\mathscr{C}_B$ *được xác định bởi:*

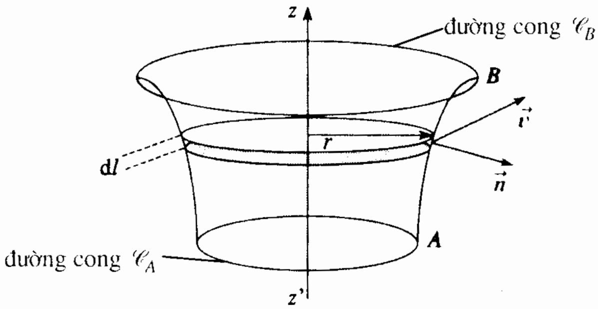
$$D_v = \int_A^B 2\pi\, r\, \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}l.$$

Biết rằng $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi(r,z) \wedge \frac{\vec{e}_0}{r}$*, ta được:*

$$D_v = \int_A^B 2\pi r\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi(r,z) \wedge \frac{\vec{e}_0}{r}\right).\vec{n}\,\mathrm{d}l = \int_A^B 2\pi\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi(r,z)(\vec{e}_0 \wedge \vec{n})\mathrm{d}l$$

$$= 2\pi\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi(r,z)\mathrm{d}\vec{l} = 2\pi(\psi_B - \psi_A),$$

từ đó có kết quả đơn giản : $D_v = 2\pi(\psi_B - \psi_A)$.



Chú ý:

Có thể tính lưu lượng bằng cách dùng mặt kín tạo nên bởi Σ *và hai đĩa* D_A *và* D_B.

Thật vậy, thông lượng qua mặt kín này bằng không (dòng chảy không thể nén được) và kể đến những thay đổi về sự định hướng, khi ta chuyển từ mặt đĩa D_A *hở sang mặt đĩa* D_A *kết hợp với mặt kín, thì lưu lượng phải tìm sẽ có dạng:*

$$D_v = \iint_{D_B} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S} - \iint_{D_A} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{D_B} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\psi\vec{e}_0}{r}\right).\mathrm{d}\vec{S} - \iint_{D_A} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\psi\vec{e}_0}{r}\right).\mathrm{d}\vec{S}$$

hay còn nữa :

$$D_v = \oint_{\mathscr{C}_B} \frac{\psi}{r}\vec{e}_0\,.\mathrm{d}\vec{l} - \oint_{\mathscr{C}_A} \frac{\psi}{r}\vec{e}_0\,.\mathrm{d}\vec{l}$$

với : $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l\,\vec{e}_0$*, nghĩa là :*

$$D_v = \psi_B 2\pi - \psi_A 2\pi = 2\pi(\psi_B - \psi_A).$$

ĐỘNG LỰC HỌC VI PHÂN CÁC CHẤT LƯU LÍ TƯỞNG

4

Mở đầu

Sự nghiên cứu động học một chất lỏng đang trong dòng chảy, cung cấp các công cụ cần thiết để mô tả chuyển động của các hạt chất lỏng, độc lập với các lực tác dụng lên nó. Sự nghiên cứu động lực học lại cho phép liên kết các ứng suất hoạt động trong lòng chất lỏng với chuyển động của nó.

Từ quan điểm Lagrange về chuyển động của một hạt chất lỏng, ta suy ra một phương trình vi phân gắn các lực trên đơn vị thể tích với các trường Euler về áp suất và vận tốc của chất lỏng : đó là phương trình EULER.

Trong một số trường hợp đơn giản, sự lấy tích phân phương trình này dẫn đến một phương trình bảo toàn có thể mang các dạng khác nhau : các hệ thức BERNOULLI, áp dụng cho nhiều hệ quả thực tế.

MỤC TIÊU

- Phương trình EULER.
- Các hệ thức BERNOULLI.
- Công thức TORRICELLI.
- Hiệu ứng VENTURI.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Hình thức luận Euler.
- Trường vận tốc Euler của một dòng chảy.
- Phép lấy đạo hàm toàn phần.
- Đại cương về sóng.

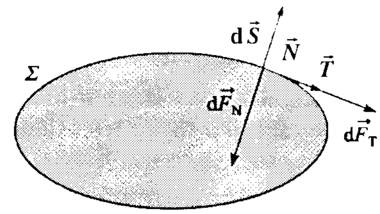
1 Các ứng suất trong chất lưu

1.1. Lực bề mặt

1.1.1. Sự mô hình hóa các lực bề mặt

Ta hãy giới hạn *trong lòng* một chất lỏng một mặt kín ảo Σ. Dù chất lỏng có đồng chất hay không, thì các hạt chất lỏng ở bên ngoài Σ vẫn tác dụng các lực lên các hạt ở bên trong, các lực tác dụng ở tầm ngắn và do vậy chỉ ở gần kề mặt Σ. Ta hãy quan tâm đến các tương tác này.

Cho một phần tử diện tích dS của Σ : *lực tổng hợp* $\mathrm{d}\vec{F}$ *của các lực tác dụng bởi các hạt ngoài lên các hạt trong*, thường có một thành phần pháp tuyến $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{N}}$ và một thành phần tiếp tuyến $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{T}}$. Lực nguyên tố này được viết : $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{N}} + \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{T}}$ (*h*.1).



H.1. *Các ứng suất bề mặt ở trong lòng một chất lưu* $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{N}\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}\vec{F}_N = -P\vec{N}\mathrm{d}S$ *và* $\mathrm{d}\vec{F}_T = k\,\mathrm{d}S\vec{T}$ *(với* $\vec{T} \perp \vec{N}$ *).*

1.1.2. Thành phần pháp tuyến

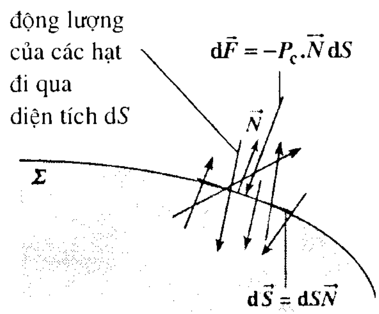
Thành phần pháp tuyến được gọi là áp lực. Nó tỉ lệ với phần tử diện tích đang xét và hướng từ bên ngoài Σ vào trong Σ.

Áp lực nguyên tố là $\mathrm{d}\vec{F} = -P(M, t)\vec{N}\,\mathrm{d}S$.

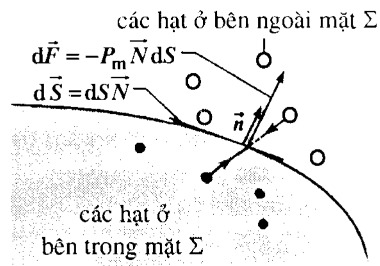
Vô hướng $P(M, t)$ chỉ áp suất của chất lỏng tại điểm M.

Nhớ lại (*xem H–Prépa, nhiệt động học, năm thứ nhất*) rằng áp suất này là do sự đóng góp của hai số hạng P_{c} và P_{m} (với $P = P_{\mathrm{c}} + P_{\mathrm{m}}$) :

- P_{c} ($P_{\mathrm{c}} > 0$) là một số hạng động học do sự truyền động lượng qua mặt dS (h.2a) :
- P_{m}($P_{\mathrm{m}} < 0$) là số hạng phân tử do tương tác giữa các hạt ở hai phía mặt dS (*hình* 2b).



H.2a. *Lưu lượng* $\delta\vec{p}_{\mathrm{N}}$ *của động lượng, do các hạt đi qua diện tích* dS *trong khoảng thời gian* δt*, thì bằng* $\delta\vec{p}_{\mathrm{N}} = \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}S\delta t$ *với* $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{N}} = -P_{\mathrm{c}}\mathrm{d}S\vec{N}$.



H.2b. *Tập hợp các tương tác nguyên tố giữa các hạt bên trong và bên ngoài diện tích* dS *được mô tả bởi* $\mathrm{d}\vec{F} = -P_{\mathrm{m}}\mathrm{d}S\vec{N}$ $(P_{\mathrm{m}} < 0)$.

1.1.3. Thành phần tiếp tuyến

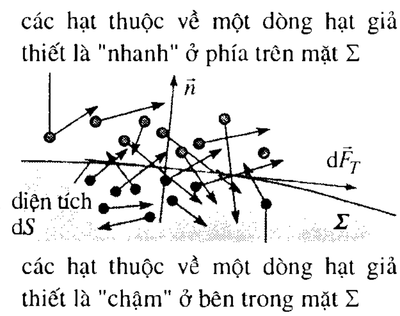
Thành phần tiếp tuyến được gọi là *lực nhớt* (hay lực trượt). Như tên gọi, lực này là đặc tính của các chất lỏng thực nhớt, mà ta sẽ nghiên cứu chi tiết ở *chương* 5.

Thành phần này không tồn tại trong mô hình chất lưu lí tưởng.

Để khảo sát tập hợp các ứng suất tồn tại trong một chất lưu, ta hãy xác định rõ nguồn gốc của nó. Một sự nghiên cứu đầy đủ hơn sẽ được đề cập đến trong *chương* 5.

Giả sử ở thang trung mô, vận tốc của chất lưu tiếp tuyến với Σ, chất lưu phía ngoài chảy nhanh hơn chất lưu phía trong. Các hạt ngoài "nhanh" (trong khi các hạt trong "chậm") đi qua diện tích dS (*hình* 3) chịu trách nhiệm làm tăng động lượng của các hạt ở phía trong mặt Σ. Sự truyền động lượng này có thể được mô hình hóa bởi tác dụng của một lực tiếp tuyến với mặt dS sao cho :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{T_{\mathrm{ext}\to\mathrm{int}}} = \eta(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v \,.\, \vec{n})\mathrm{d}S\vec{T} \qquad \text{nếu } \vec{v} = v\vec{T}\,.$$



H.3. *Các hạt ở ngoài "nhanh" (cũng như các hạt ở trong "chậm") đi qua diện tích dS chịu trách nhiệm về sự khuếch tán động lượng có thể được mô hình hóa bằng tác dụng của một lực tiếp tuyến với mặt* dS *sao cho :*

$$\mathrm{d}\vec{F}_{T_{\mathrm{ext}\to\mathrm{int}}} = \eta(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v \,.\, \vec{n})\mathrm{d}S\vec{T} \quad \textit{nếu } \vec{v} = v\vec{T}\,.$$

Các dòng chất lưu "nhanh" có khuynh hướng làm tăng tốc các dòng "chậm" và ngược lại.

Trong giả thuyết về chất lỏng lí tưởng, ta bỏ qua các lực nhớt : các lực bề mặt tiếp tuyến triệt tiêu.

1.1.4. Mở đầu : lực căng bề mặt

Các lực căng bề mặt ở ngoài chương trình này : tuy nhiên một số khái niệm đơn sơ cho phép giải thích rất đơn giản một vài phép tính gần đúng mà ta thường dùng trong cơ học chất lỏng.

Ở mặt "ngoài" của một chất lỏng (hay đúng hơn là ở mặt phân cách giữa hai chất lỏng khác nhau), thì tồn tại các lực bề mặt khác : mọi điều xảy ra dường như có một màng đàn hồi cụ thể hóa bề mặt chất lỏng.

Để thể hiện các hiệu ứng của sức căng bề mặt, ta hãy thực hiện thí nghiệm sau đây (*hình* 4) : một màng nước xà phòng bám trên một khung chữ nhật nằm ngang, mà một trong các cạnh di động được. Cạnh di động này có khuynh hướng dịch chuyển sao cho bề mặt giảm tới cực tiểu. Các lực căng bề mặt tác động theo cách làm giảm mặt ngoài của chất lỏng. Thành thử trong tình trạng không trọng lượng, một giọt chất lỏng sẽ có dạng hình cầu (*hình* 5).

Lực $d\vec{F}$ này, tác dụng lên một phần tử chiều dài dL, được xác định bởi công thức $d\vec{F} = A\, dL.\vec{N}$. Lực $d\vec{F}$ vuông góc với dL và A biểu diễn hệ số sức căng bề mặt đặc trưng của hai chất lỏng tiếp xúc nhau (*hình* 4).

Thí nghiệm nhỏ này chứng tỏ rằng phải tiêu tốn năng lượng để làm tăng bề mặt của một chất lỏng (hay bề mặt của mặt phân cách giữa hai chất lỏng). Công mà ta phải cung cấp để làm mặt S này tăng thêm dS (lúc đó thao tác viên tác động lên lực $-\vec{F}$) được xác định theo công thức $\delta W = A dS$.

Năng lượng này gắn với các tương tác giữa các hạt. Thật vậy, nếu ta muốn làm tăng bề mặt của một chất lỏng, thì cần phải đưa các hạt chất lỏng lên trên bề mặt đó. Ở trong lòng chất lỏng, tổng hợp các lực tương tác thực hiện trên một hạt thì bằng không. Ở gần bề mặt, lực tổng hợp đó khác không; hạt có khuynh hướng bị hút bởi chất lỏng (*hình* 6). Muốn đưa hạt đó lên bề mặt thì phải tiêu tốn năng lượng; năng lượng này tỉ lệ với số hạt được đưa lên bề mặt chất lỏng, sẽ tỉ lệ với diện tích.

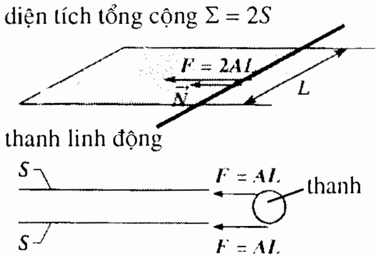
Như vậy, tồn tại một năng lượng liên kết với loại mặt tiếp xúc này (*xem H–Prépa. Nhiệt động học năm thứ hai, PC và PSI, chương* 2 *bài tập* 5).

Lực căng bề mặt này cũng chịu trách nhiệm về hiệu số áp suất ở hai phía của mặt phân cách giữa hai chất lỏng riêng biệt hay giữa chất lỏng đang xét với bên ngoài. Hiệu áp suất này là hàm số của bán kính cong của mặt ngoài chất lỏng. Thành thử trong trường hợp một hình cầu bán kính R, hiệu áp suất này được xác định bởi công thức LAPLACE (*hình* 7) ở mặt phân cách giữa hai chất lỏng khác nhau :

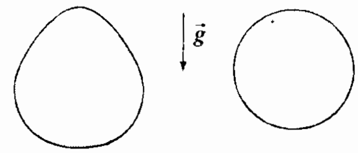
$$P_{ext} - P_{int} = -\frac{2A}{R}.$$

Không thể bỏ qua sức căng bề mặt đối với các hệ kích thước nhỏ như các ống mao dẫn hay các giọt nhỏ.

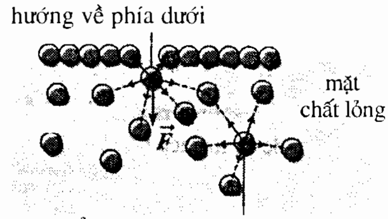
Ta luôn luôn sẽ bỏ qua các lực căng bề mặt và năng lượng liên kết với chúng. Như vậy, áp suất sẽ luôn luôn là một hàm liên tục của các tọa độ không gian.



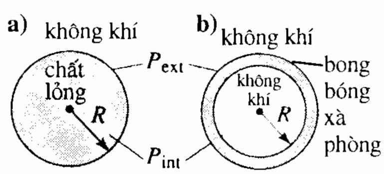
H.4. *Các lực căng bề mặt tác động theo cách làm giảm diện tích 2S của chất lưu.*



H.5. *Giọt nước trong trường trọng lực của Trái Đất và ở tình trạng không trọng lượng.*



H.6. *Ở lân cận bề mặt, lực tổng hợp của các lực tác dụng lên một hạt hướng về phía dưới : như vậy phải tiêu tốn năng lượng để đưa nó về bề mặt này.*



H.7. *Ở ngay sát bề mặt, áp suất bên trong được xác định bởi công thức* LAPLACE.

a) Lỏng - không khí : $P_{int} = P_{ext} + 2\frac{A}{R}$.

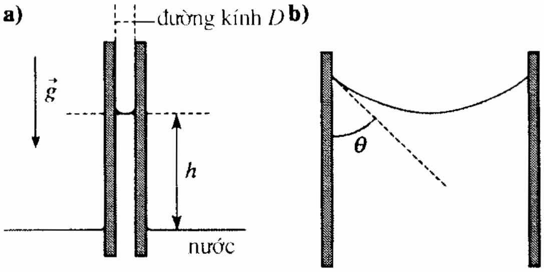
b) *Bóng xà phòng :* $P_{int} = P_{ext} + 4\frac{A}{R}$

(vì tồn tại hai mặt phân cách).

Áp dụng 1

Đường kính tới hạn của một ống (độ dài mao dẫn)

Có một ống rỗng, đường kính trong D, ở phía trên một chất lỏng có khối lượng riêng ρ, trong trường trọng lực g. Hệ số sức căng bề mặt kí hiệu là A. Nếu đường kính ống "nhỏ", thì chất lỏng dâng lên trong ống (hình 8a).



H.8a. *Chất lỏng dâng lên trong một ống đường kính D nhỏ so với D_c.* **b.** *θ là góc nối bề mặt của chất lỏng với thành ống.*

1. *Bắt đầu từ một đường kính D_c nào đó (đường kính tới hạn) hãy thử đánh giá xem liệu có thể bỏ qua ảnh hưởng của sức căng bề mặt, nếu giả thiết rằng đại lượng này chỉ biến đổi theo A, ρ và g. Tính D_c đối với nước.*

Dữ liệu :

$\rho = 10^3$ kg.m^{-3}; $A = 75.10^{-3}$ kg.s^{-2}; $g = 10$ m.s^{-2}.

2) *Hãy ước tính chiều cao h của chất lỏng biết rằng chiều cao này tỉ lệ nghịch với đường kính ống. Tính h nếu D = 1mm.*

1) Ta dùng sự phân tích thứ nguyên :

$[A] = [F].L^{-1} = M.T^{-2}$; $[\rho] = M.L^{-3}$; $[g] = L.T^{-2}$;

(khi tìm D_c dưới dạng $D_c = kA^{\alpha}\rho^{\beta}g^{\gamma}$, k là một hệ số không thứ nguyên, mà ta thừa nhận vào cỡ đơn vị).

Ta sẽ thu được một biểu thức phải luôn luôn đồng nhất :

$$L = (M^{\alpha}T^{-2\alpha})(M^{\beta}L^{-3\beta})(L^{\gamma}T^{-2\gamma})$$
$$= M^{\alpha+\beta}L^{-3\beta+\gamma}T^{-2\alpha-2\gamma}$$

nhờ đó suy ra : $\alpha = -\beta$; $\alpha = -\gamma$ và $1 = \gamma - 3\beta$.

Nghiệm duy nhất là : $\alpha = -\beta = -\gamma = \frac{1}{2}$, nghĩa là có thể xác định được đường kính tới hạn bằng công thức $D_c = \sqrt{\frac{A}{\rho g}}$ (đại lượng này được gọi là độ dài mao dẫn).

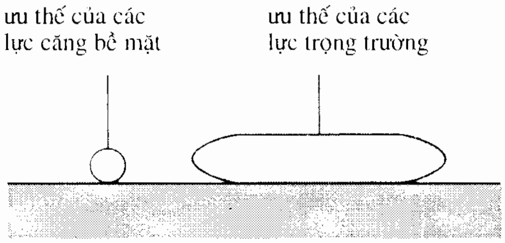
Đối với nước :

$$D_c = \sqrt{\frac{75.10^{-3}}{10^3.10}} = \sqrt{7{,}5.10^{-6}} \approx 3 \text{ mm}.$$

Đối với nước, nếu đường kính ống lớn hơn 3mm rất nhiều, thì có thể bỏ qua các tương tác bề mặt.

Chú ý :

Đối với thủy ngân, ta tìm được $D_c = 2$ mm. Nếu các giọt thủy ngân có đường kính nhỏ, thì chúng sẽ có dạng hình cầu (ưu thế của các lực căng bề mặt), nếu không chúng sẽ có dạng dẹt (ưu thế của các lực trọng trường) (hình 9).



H.9. *Giọt thủy ngân trên mặt đất nằm ngang.*

2) Đặt hD = cte. Do tính đồng nhất, ta viết $hD = D_c^2$, nghĩa là $h = \frac{D_c^2}{D}$; nhờ đó, ta được h = 3mm. Một lập luận chặt chẽ sẽ đưa ta đến $h = 4\cos\theta\,\frac{D_c^2}{D}$ (định luật JURIN) với $\cos\theta < 1$ (*hình* 8b).

Như vậy, ta nhận được một cấp độ lớn rất tốt nhờ một lập luận đơn giản.

Cách lập luận dựa trên sự phân tích thứ nguyên này sẽ được phát triển trong *chương* 6 §**10**.

1.2. Lực trên đơn vị thể tích - Lực trên đơn vị khối lượng

Một phần tử chất lỏng thể tích dτ cũng chịu tác dụng của các lực (trên đơn vị) thể tích : các lực trọng trường chẳng hạn. Các tác động này được cảm nhận bởi tất cả các hạt của chất lỏng. Chúng tỉ lệ với số hạt, do vậy tỉ lệ với thể tích nguyên tố dτ đang xét. Ta biểu diễn chúng dưới dạng :

$$\mathrm{d}\vec{f} = \vec{f}_V \,\mathrm{d}\tau \,.$$

Đó là các *lực thể tích*. Thành thử, đối với trường trọng lực $\vec{g}$ ta có thể kết hợp mật độ thể tích của các lực :

$$\vec{f}_V = \rho\,\vec{g}\,.$$

Các lực (trên đơn vị) thể tích này tỉ lệ với số hạt, do vậy cũng tỉ lệ với khối lượng dm của phần tử chất lỏng. Thành thử ta đưa vào cách biểu diễn khối lượng các lực này dưới dạng :

$$\mathrm{d}\vec{f} = \vec{f}_m \mathrm{d}m = \vec{f}_m \rho\,\mathrm{d}\tau \,,$$

từ đó có sự tương đương :

$$\vec{f}_V = \rho\,\vec{f}_m\,.$$

Ví dụ các lực trọng trường được kết hợp với $\vec{f}_m = \vec{g}$.

Một phần tử chất lỏng thể tích dτ và khối lượng d*m* chịu tác dụng của các lực biểu diễn theo khối lượng hay thể tích dưới dạng biểu thức :

$$\mathrm{d}\vec{f} = \vec{f}_m \mathrm{d}m = \vec{f}_V\,\mathrm{d}\tau \quad \text{với} \quad \vec{f}_V = \rho\,\vec{f}_m\,.$$

Đối với các trọng lực, thì : $\vec{f}_V = \rho\vec{g}$ **với** $\vec{f}_m = \vec{g}$ **.**

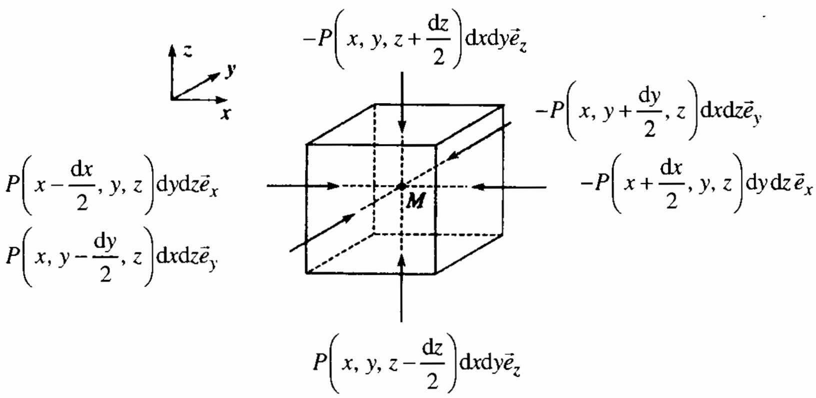
1.3. Đương lượng thể tích - Đương lượng khối lượng

1.3.1. Trường hợp các áp lực

Ta đã thấy (*xem H–Prépa, nhiệt động học năm thứ nhất, chương* 3) rằng các áp lực có một đương lượng thể tích. Ta nhắc lại sự chứng minh và biểu thức của nó.

Ta hãy tính tổng hợp lực $\mathrm{d}\vec{F}$ của các áp lực tác dụng lên hình hộp nguyên tố chất lỏng mà thể tích dτ = d*x*d*y*d*z* được trình bày trên *hình* 10. Thành phần của lực này hướng theo trục (*Ox*) là :

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) - \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,P\left(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$



◀ **H.10.** *Hình hộp nguyên tố chất lỏng. Điểm M ở tâm của thể tích nguyên tố* d*x*d*y*d*z*.

Khi xét các lực nguyên tố tác dụng lên sáu mặt, ta thấy rằng :

$$d\vec{F} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\,\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\,\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z}dxdydz\,\vec{e}_z\,.$$

Lực này đồng nhất với lực mà thể tích $d\tau$ sẽ chịu nếu nó chịu tác dụng của một lực thể tích $\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$, vì :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,d\tau = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}(\rho\,d\tau) = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}dm.$$

Đương lượng này có thể được dùng để tính tổng hợp lực hay momen của các áp lực áp đặt vào một phần tử được chất lỏng bao quanh.

Các đương lượng thể tích và đương lượng khối lượng của các áp lực mà khởi điểm là áp lực diện tích, được biểu thị dưới dạng :

- **Đương lượng thể tích :** $\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ **;**
- **Đương lượng khối lượng :** $\vec{f}_m = -\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}$.

Các đương lượng thể tích và khối lượng không thể dùng được để tính công của các áp lực.

Nếu khối lượng riêng chỉ phụ thuộc áp suất P : $\rho = \rho(P)$, thì chất lỏng gọi là *hướng áp* (hay khuynh áp). Lúc đó, ta chứng minh rằng $\vec{f}_m$ là gradiên của một hàm số.

Đặt $\varphi(P) = \displaystyle\int_{P_0}^{P}\frac{du}{\rho(u)}$, thì tích phân này đúng là một hàm số của P, phụ thuộc vào tham số không đổi P_0 và $\dfrac{d\varphi}{dP} = \dfrac{1}{\rho(P)}$.

Theo quy tắc lấy đạo hàm các hàm số kép, ta có : $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \dfrac{d\varphi}{dP}\overrightarrow{\text{grad}}\,P$.

Thật vậy, đối với từng thành phần ta có :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Như vậy, ta đã chứng minh rằng :

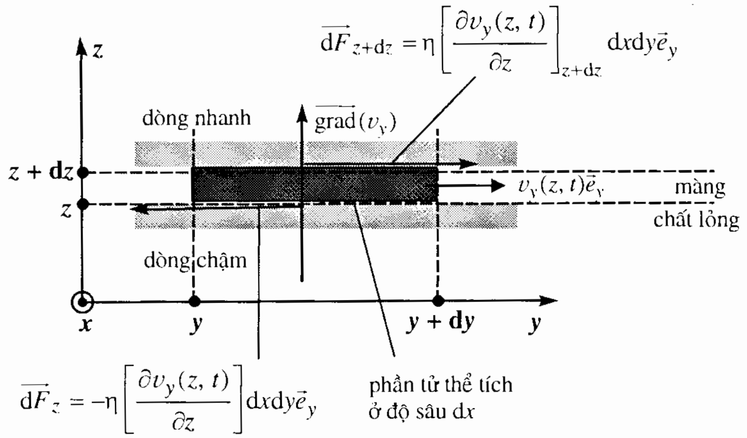
$$\vec{f}_m = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[\int_{P_0}^{P}\frac{du}{\rho(u)}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}[\varphi(P)].$$

1.3.2. Trường hợp các lực nhớt

Ta lập luận y hệt như trên, và chỉ quan tâm đến phần tử thể tích $d\tau = dxdydz$ chịu tác dụng của các lực nhớt khi trường vận tốc trong hình thức luận Euler có dạng (*hình* 11).

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_y(z, t)\vec{e}_y\,.$$

Lực nhớt tồn tại trên mặt tiếp xúc diện tích dS có dạng : $\left|d\vec{F}\right| = \eta\left|\overrightarrow{\text{grad}}(v_y)\right|dS$ với η là hệ số nhớt, hằng số riêng của chất lỏng.



H.11. *Sự thể hiện các lực tác động lên phần tử thể tích chịu tác dụng của các lực nhớt.*

Vậy tổng hợp lực của các lực tác dụng lên phần tử thể tích dτ bằng :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{z+dz} + d\vec{F}_z = \eta\left(\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial z}\right)_{z+dz} dxdy\vec{e}_y - \eta\left(\frac{\partial v_y(z,t)}{\partial z}\right)_z dxdy\vec{e}_y \text{, nghĩa là :}$$

$$d\vec{F} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_y(z,t)}{\partial z^2}\right)_z dxdydz\vec{e}_y = \eta\left(\frac{\partial^2 v_y(z,t)}{\partial z^2}\right)_z d\tau\, \vec{e}_y .$$

Công thức này có thể được khái quát hóa dưới dạng : $\overrightarrow{dF} = \eta\Delta\vec{v}d\tau$, nó cho ta các đương lượng thể tích và khối lượng :

• Đương lượng thể tích : $\vec{f}_v = \eta\Delta\vec{v}$;

• Đương lượng khối lượng : $\vec{f}_m = \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$.

Các đương lượng thể tích và khối lượng của các lực nhớt, mà khởi điểm là các lực diện tích, được biểu thị dưới dạng :

• Đương lượng thể tích : $\vec{f}_v = \eta\Delta\vec{v}$;

• Đương lượng khối lượng : $\vec{f}_m = \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$.

Trong chương này, ta sẽ bỏ qua các lực nhớt (giả thiết về chất lỏng lí tưởng) : các điều kiện về hiệu lực của phép tính gần đúng này sẽ được trình bày trong *chương* 6, nhờ việc dùng một số không thứ nguyên, là số REYNOLDS Re.

2 Phương trình EULER - Áp dụng

Trước hết ta hãy chú ý tới một chất lỏng lí tưởng không nhớt.

2.1. Biểu thức

Hệ thức cơ bản của động lực học áp dụng cho một hạt chất lỏng khối lượng dm, mà ta theo dõi chuyển động, chịu tác dụng của tổng hợp các ngoại lực d$\vec{F}$, có dạng :

$$dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} ,$$

trong đó $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ biểu diễn gia tốc của hạt (gia tốc toàn phần).

Hợp lực $d\vec{F}$ của tất cả các ngoại lực tác dụng lên phần tử khối lượng dm này được viết :

$$d\vec{F} = \vec{f}_{v,totale} d\tau = \vec{f}_{m,totale} dm .$$

Nhờ đó, ta được :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{m,totale}$$

hay khi tách biệt rõ các biểu thức khác nhau của đạo hàm toàn phần, ta còn được :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{f}_{m,totale}$$

(bằng cách đưa vào vectơ xoáy $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$).

Khi phân biệt các lực trên đơn vị khối lượng và các đương lượng trên đơn vị khối lượng chỉ do duy nhất các áp lực, thì lực $\vec{f}_{m,totale}$ này được viết dưới dạng :

$$\vec{f}_{m,totale} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} .$$

Khi đó, ta được : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{f}_m - \dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}$.

Phương trình này được gọi là phương trình EULER.

Phương trình EULER được viết $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{m,totale}$.

Ta nhận được các biểu thức khác nhau của phương trình Euler đối với một chất lỏng lí tưởng :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\mathbf{grad}})\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\mathbf{grad}}P}{\rho} ;$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left[\overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\right] = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\mathbf{grad}}P}{\rho} ;$$

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\overrightarrow{\mathbf{grad}})\vec{v} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\mathbf{grad}}P .$$

Áp dụng 2

Trường áp suất trong một xoáy nước RANKINE

Một chất lỏng đồng chất, khối lượng riêng ρ đều, ở bên trên là khí quyển có áp suất đều P_0, chịu tác dụng của trường trọng lực $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Dòng chảy của chất lỏng (tương tự dòng chảy của cuộn lốc) là dừng và đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz). Trường vận tốc của nó, trong tọa độ trụ, có dạng :

- *với $r < a$: $\vec{v} = r\omega\,\vec{u}_\theta$*
- *với $r > a$: $\vec{v} = \dfrac{a^2\omega}{r}\vec{u}_\theta$ (ω không đổi)*

Gốc của trục (Oz) được chọn trên mặt thoáng của chất lỏng, ở rất xa trục tròn xoay.

Xác định trường áp suất P(r, z) ở trong lòng chất lỏng và từ đó suy ra hình dạng của mặt thoáng.

Phương trình EULER, ở chế độ dừng, được viết ở đây là :

$$\left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right]=-g\vec{u}_z-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}.$$

Phải phân biệt hai trường hợp :

$$r<a:\ \vec{\Omega}=\omega\vec{u}_z \text{ và } r>a:\vec{\Omega}=\vec{0}.$$

Khi chiếu trên $\vec{u}_r$ và $\vec{u}_z$, phương trình EULER cho :

• $r<a$: chiếu trên $\vec{u}_r$, ta được :

$$\rho r\omega^2-2\rho r\omega^2=-\frac{\partial P}{\partial r};$$

chiếu trên $\vec{u}_z$: $0=-\rho g-\dfrac{\partial P}{\partial z}$;

• $r>a$: chiếu trên $\vec{u}_r$: $-\rho\dfrac{a^4\omega^2}{r^3}=-\dfrac{\partial P}{\partial r}$;

chiếu trên $\vec{u}_z$: $0=-\rho g-\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

(Ta nhận thấy rằng các hạt chất lỏng đang chuyển động tròn đều, gia tốc của chúng $\dfrac{D\vec{v}}{Dt}$ đúng bằng $-\dfrac{v^2(r)}{r}\vec{e}_r$).

Từ đó, kể đến điều kiện $P(\infty,0)=P_0$ và tính liên tục của áp suất P ở $r = a$, thì ta có :

• $r<a$: $P(r,z)=P_0-\rho gz+\rho\dfrac{\omega^2}{2}(r^2-2a^2)$;

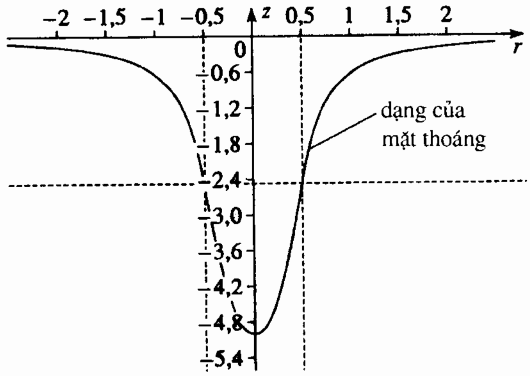
• $r>a$: $P(r,z)=P_0-\rho gz-\rho\omega^2\dfrac{a^4}{2r^2}$.

Phương trình của mặt thoáng là : $P(r,z)=P_0$, nghĩa là :

• $r<a$: $z=\dfrac{\omega^2}{2g}(r^2-2a^2)$;

• $r>a$: $z=-\dfrac{\omega^2a^4}{2gr^2}$

Trong mặt phẳng $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)$, vết của mặt này có dạng được chỉ rõ trên *hình 12* $(a=0,5;\ \dfrac{\omega^2}{2g}=1)$.



H.12. *Dạng mặt thoáng của xoáy nước Rankine.*

Trước khi nghiên cứu một số ví dụ áp dụng phương trình EULER, ta hãy xem xét một cách tổng quát các điều kiện giải một bài toán động lực học các chất lưu.

2.2. Tìm kiếm một hệ đầy đủ các phương trình

Từ quan điểm của chính chất lưu, thì các đại lượng cục bộ thoạt đầu chưa biết là vận tốc $\vec{v}(M,t)$, áp suất $P(M, t)$ và khối lượng riêng ρ (M, t) tại mọi điểm của chất lưu, nghĩa là năm ẩn số vô hướng. Phương trình Euler, là phương trình vectơ, cung cấp ba phương trình vô hướng và hệ thức vi phân bảo toàn khối lượng là một phương trình vô hướng : như vậy còn "thiếu" một phương trình để có thể giải được bài toán.

Ta có thể thêm một phương trình bằng cách đưa vào một phương trình trạng thái của chất lưu. Tuy nhiên, phương trình này, thường thuộc loại nhiệt động, lại đưa vào một đại lượng mới, thoạt đầu cũng là chưa biết, đó là trường nhiệt độ $T(M, t)$. Như vậy cần phải đưa vào một phương trình bổ sung, là phương trình về động thái của chất lưu trong quá trình của dòng chảy (phương trình cũng thường có bản chất nhiệt động).

• Nếu chất lưu là không thể nén được, thì lúc đó ρ = cte là đã biết.

• Trong trường hợp các dòng chảy có thể nén được, thì các động thái thuộc loại đẳng nhiệt hay đẳng entropi chẳng hạn đều có thể được xem xét.

Trong hai trường hợp này, biểu thức các hệ số nén χ_T hay χ_S sẽ cung cấp một phương trình bổ sung gắn P với ρ theo kiểu :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \text{ và } \chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S .$$

<u>*Chú ý :*</u>

Trong hai trường hợp kể trên, cũng như trong rất nhiều dòng chảy, động thái của chất lưu sẽ chỉ đưa vào duy nhất một hệ thức liên kết P với ρ : ta nhắc lại rằng các dòng chảy như thế được gọi là khuynh áp.

Khi giải các phương trình vi phân về dòng chảy, thì việc tìm các nghiệm phải kể đến các điều kiện ở giới hạn đã được nêu ra, vừa đối với vận tốc, vừa đối với áp suất.

2.3. Sóng âm trong chất lưu

Giả sử có một chất lưu lí tưởng có thể nén được mà tại đó, ở trạng thái nghỉ, áp suất P_0 và khối lượng riêng ρ_0 là không đổi và đều. Các chuyển động nhỏ của chất lưu tại mọi điểm M và ở thời điểm t đều được kết hợp với vận tốc $\vec{v}(M,t)$, áp suất $P(M, t)$ và khối lượng riêng $\rho\,(M, t)$. Để đơn giản hóa, ta giả thiết bài toán là một chiều và phụ thuộc vào biến số không gian duy nhất x (*hình* 13).

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t), \quad \rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t) \text{ và } \vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$$

Vậy các chuyển động của chất lưu là chuyển động theo chiều dọc. Theo giả thiết về các chuyển động nhỏ, thì các đại lượng $\frac{p(x,t)}{P_0}$, $\frac{\mu(x,t)}{\rho_0}$ và $\frac{v(x,t)}{c}$

(c biểu diễn vận tốc lan truyền của một nhiễu loạn, và như vậy là vận tốc âm) đều là các vô cùng nhỏ bậc nhất. Để định hình các ý tưởng, người ta cho biết áp suất dư p do một sóng âm rất mạnh sinh ra vào cỡ vài pascal, nghĩa là khoảng $\frac{1}{100.000}$ áp suất nghỉ P_0 ! như vậy tất cả mọi phép tính đều được tuyến tính hóa đến cấp một.

Khi bỏ qua các lực trọng trường, thì sự tuyến tính hóa phương trình EULER :

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P ,$$

cho ta $\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$; số hạng $(\vec{v}\,.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$, cấp hai, có thể bỏ qua được.

Ta hãy tuyến tính hóa phương trình bảo toàn khối lượng :

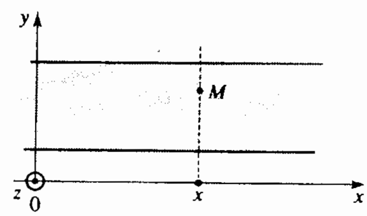
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \text{ cho } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

<u>*Chú ý :*</u>

Trong phương trình cuối cùng này, ta đã bỏ qua $\frac{\partial \mu}{\partial x}v$ *, là số hạng "cấp hai" so với* $\frac{\partial \mu}{\partial t}$*. Một sự bàn luận sâu hơn về phép tính gần đúng này sẽ được đề cập trong giáo trình về "sóng" (xem H–Prépa, sóng, năm thứ hai, chương 4). Ở đây, đơn giản chỉ cần nhớ rằng phép tính gần đúng này hoàn toàn hợp pháp.*

Cả hai phương trình này đều không đủ để giải bài toán. Giả thuyết nhiệt động học của một quá trình biến đổi đẳng entropi và việc sử dụng hệ số χ_S tương ứng, cho thêm phương trình :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\mu}{p} .$$



H.13. *Ống âm thanh có tiết diện không đổi. Tại điểm M lúc t, ta có :*
$P(M,t) = P_0 + p(x,t)$;
$\rho(M,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$
$\vec{v}(M,t) = v(x,t)\vec{e}_x$

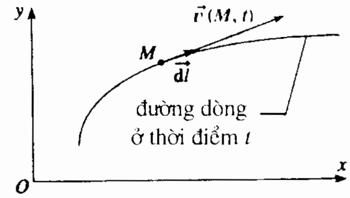
Lúc đó, sự bảo toàn khối lượng cho $\rho_0 \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, nghĩa là, sau khi lấy đạo hàm đối với t và mang sang phương trình EULER:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 .$$

Ta sẽ nhận được cùng phương trình đối với v. Trong bài toán này, áp suất dư p và vận tốc v tuân theo phương trình D'ALEMBERT:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \text{ với } c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}} .$$

Như vậy, dòng chảy nghiên cứu có cấu trúc của sóng phẳng. Một nhiễu loạn áp suất lan truyền với vận tốc bằng c. Sự nghiên cứu chi tiết các bài toán kết hợp với các sóng âm thanh được trình bày trong giáo trình "sóng" (*xem H– Prépa, sóng, năm thứ hai*).



H.14. *Phần tử chiều dài $\vec{dl}$ (ở M) được chọn song song với vận tốc $\vec{v}(M,t)$ tại điểm đó, nghĩa là được mang bởi đường dòng đi qua M ở thời điểm t.*

▶ **Để tập luyện: bài tập 3.**

2.4. Sự lấy tích phân phương trình EULER dọc theo một đường dòng

Phương trình EULER thường được dùng bằng cách tích phân nó dọc theo một đường dòng. Muốn làm thế, ta dùng dạng thứ hai của phương trình bằng cách nhân vô hướng cả hai vế với phần tử $d\vec{l}$ của một đường dòng ($d\vec{l} \,//\, \vec{v}$) (*h*.14):

$$\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} . d\vec{l} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) . d\vec{l} + 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) . d\vec{l} = \left(\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho}\right) . d\vec{l} .$$

Số hạng thứ ba triệt tiêu vì $d\vec{l}$ cộng tuyến với $\vec{v}$, do đó ta được:

$$\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} . d\vec{l} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) . d\vec{l} = \left(\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho}\right) . d\vec{l} .$$

Rất nhiều khi, các lực (trên đơn vị) khối lượng $\vec{f}_m$ lại phát sinh từ một thế năng e_{P_m} (bản thân nó cũng là thế năng khối lượng) sao cho:

$$\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}\, e_{P_m}$$

Đối với các lực trọng trường ví như $\vec{f}_m = \vec{g}$. Trong trường hợp của một trường trọng lực đều, và với việc chọn một trục thẳng đứng đi lên (Oz), mà gốc cũng là gốc của các thế năng:

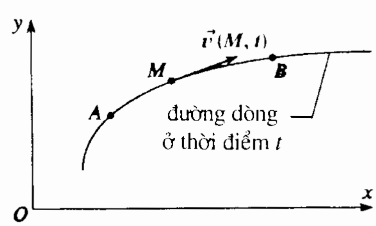
$$\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz) \text{ và } e_{P_m} = gz .$$

Tập hợp hai gradiên lại, phương trình trở thành:

$$\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} . d\vec{l} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{P_m}\right) . d\vec{l} + \left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho}\right) . d\vec{l} = 0 ,$$

rồi, bằng phép lấy tích phân ở thời điểm t giữa hai điểm A và B của một đường dòng (*h*.15) :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} . d\vec{l} + \left[e_{P_m}(M,t) + \frac{v^2(M,t)}{2} \right]_A^B + \int_A^B \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P(M,t)}{\rho(M,t)} . d\vec{l} = 0$$



H.15. *Đường dòng giữa hai điểm A và B.*

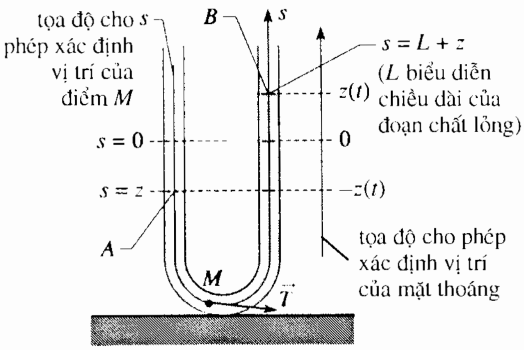
Áp dụng 3

Các dao động của một chất lỏng trong một ống chữ U

Một chất lỏng không thể nén, có khối lượng riêng ρ, được đựng trong hai nhánh của một ống chữ U tiết diện S. "Chiều dài" tổng cộng của chất lỏng trong ống ký hiệu là L. Khi cân bằng, hai mặt thoáng của chất lỏng trong hai nhánh ống ở cùng một độ cao được chọn làm gốc của một trục (Oz) thẳng đứng hướng lên.

Hãy xác định chu kỳ các dao động của chất lỏng trong ống.

Ta ký hiệu z là độ cao của mặt thoáng chất lỏng trong nhánh phải của ống (*h*.16).



H.14. *Ở thời điểm t, vận tốc của một điểm M của chất lỏng được xác định trong hình thức luận* EULER *bởi biểu thức sau:*

$$\vec v(M,t) = \dot z(t)\vec T\,.$$

Để làm tọa độ Euler của một điểm M, ta chọn hoành độ cong s của điểm này (*h*.16). Chất lỏng là không thể nén, nên tại mọi điểm M vận tốc có dạng:

$$\vec v(M,t) = \dot z(t)\vec T\,.$$

Tích phân của phương trình EULER được viết:

$$\int_A^B \frac{\partial \vec v(M,t)}{\partial t}\cdot d\vec l + \left[e_{p_m}(M,t) + \frac{v^2(M,t)}{2}\right]_A^B + \int_A^B \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M,t)}{\rho(M,t)}\cdot d\vec l = 0.$$

Ta xem xét các số hạng khác nhau, khi lấy tích phân theo một đường dòng giữa hai mặt thoáng ở A và B:

- $\dfrac{\partial \vec v}{\partial t}\cdot d\vec l = \ddot z\vec T\cdot ds\vec T = \ddot z\,ds$, nhờ đó ta được:

$$\int_A^B \frac{\partial \vec v(M,t)}{\partial t}\cdot d\vec l = \ddot z L, \text{ vì } \int_A^B ds = L;$$

- $\left[e_{p_m}(M,t)\right]_A^B = (gz)_A^B = 2gz;$

- $\left[\dfrac{v^2(M,t)}{2}\right]_A^B = 0\,;$

- $\displaystyle\int_A^B \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}\cdot d\vec l = \frac{1}{\rho}\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,P\cdot d\vec l$

$$= \frac{1}{\rho}\left(P_B - P_A\right) = 0.$$

Ta thu được phương trình sau: $\ddot z L + 2gz = 0$, do đó ta có một chuyển động dao động hình sin với chu kỳ T bằng: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2g}}$.

<u>*Chú ý:*</u>

Ta có thể kết hợp với vận tốc $\vec v(M,t) = \dot z(t)\vec T$ *một thế* $\varphi(M,t) = \dot z(t)s$, *sao cho* $\vec v = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ *; nhờ đó, ta có thể viết:*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial t}\right)\cdot d\vec l + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{p_m}\right)\cdot d\vec l + \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}\cdot d\vec l = 0.$$

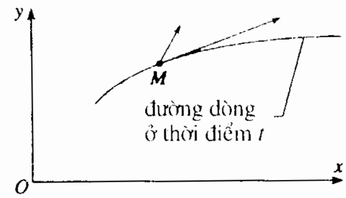
hay:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial t} + \frac{v^2(M,t)}{2} + gz + \frac{P(M,t)}{\rho}\right)\cdot d\vec l = 0\,,$$

từ đó: $\dfrac{\partial\varphi(M,t)}{\partial t} + \dfrac{v^2(M,t)}{2} + gz + \dfrac{P(M,t)}{\rho}$ *không đổi trên một đường dòng ở thời điểm t, vậy là* $\ddot z s + \dfrac{\dot z^2}{r} + gz + \dfrac{P(M,t)}{\rho} = C(t)$ *trên một đường dòng. Điều này biểu thị một trường hợp riêng của các hệ thức* BERNOULLI.

3 Các hệ thức BERNOULLI

Lấy trung bình theo một vài giả thiết, ta thử tìm xem liệu có tồn tại hay không một đại lượng được bảo toàn trong toàn bộ hoặc trong một phần chất lỏng ?



H.17. *Phần tử chiều dài* $d\vec{l}$ *(ở M) được chọn tùy ý.*

3.1. Sự tồn tại của một thế năng kết hợp với các lực thể tích

Lấy một phần tử chiều dài $d\vec{l}$ *nào đó* (*h*.17). Khi nhân vô hướng với $d\vec{l}$ các số hạng của phương trình EULER, thì ta nhận được phương trình đã thấy trước đây:

$$\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}.d\vec{l} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right).d\vec{l} + 2(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}).d\vec{l} = \left(\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\rho}\right).d\vec{l}\,.$$

Nếu ta cho rằng $\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}(e_{p_m})$ (e_{p_m} bao giờ cũng biểu diễn một thế năng khối lượng kết hợp với các lực khác với các áp lực), thì ta có:

$$\left[\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{p_m}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\rho}\right].d\vec{l} = 0\,.$$

3.2. Chất lỏng đồng chất không thể nén hay dòng chảy hướng áp (khuynh áp)

Đối với một dòng chảy chất lỏng đồng chất không thể nén, ρ là một hằng số đặc trưng của chất lỏng, nhờ đó ta có:

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right).$$

Kết quả này có thể được suy rộng cho một dòng chảy hướng áp, mà đối với nó $\rho = g(P)$. Trong trường hợp này, tồn tại một hàm số $\varphi(P)$ sao cho (xem §**1.3.1**):

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(P)\,.$$

Lúc đó, biểu thức trên biến đổi như sau:

- đối với chất lỏng không thể nén được:

$$\left[\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right].d\vec{l} = 0\,;$$

- đối với chất lỏng hướng áp:

$$\left[\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + f(P)\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right].d\vec{l} = 0\,.$$

3.3. Giả thiết bổ sung

Ta thêm vào một trong ba giả thiết sau đây.

3.3.1. Dòng chảy dừng

Nếu dòng chảy là dừng, thì số hạng $\dfrac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}$ sẽ biến mất khỏi phương trình EULER.

Tích phân phương trình này giữa hai điểm bất kỳ A và B trên một đường dòng sẽ cho ($d\vec{l}\,//\,\vec{v}$):

• đối với chất lỏng không thể nén được: $\left[\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right]_A^B = 0$;

• đối với chất lỏng hướng áp: $\left[\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right]_A^B = 0$.

Như vậy có sự bảo toàn đại lượng $\left\{\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right\}$ dọc theo một đường dòng. Biểu thức này có thể thay đổi từ một đường dòng này sang một đường dòng khác.

3.3.2. Dòng chảy không xoáy

Nếu dòng chảy là không xoáy, thì số hạng $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ mất đi, và như thế không còn cần thiết phải lấy tích phân dọc theo một đường dòng nữa, mà chỉ cần lấy tích phân giữa hai điểm bất kỳ thôi. Vì $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ và do đó: $\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial t}\right)$ (các biến số không gian và thời gian đều là các biến số độc lập). Như vậy, biểu thức biến đổi thành:

$\left[\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right] = \text{cte}$ ở thời điểm t trong toàn chất lỏng.

3.3.3. Dòng chảy không xoáy và dừng của một chất lỏng không thể nén được

Nếu hai tính chất trên được nghiệm đúng đồng thời, thì ta được:

$\left[\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right] = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng dù ở bất kỳ thời điểm t nào.

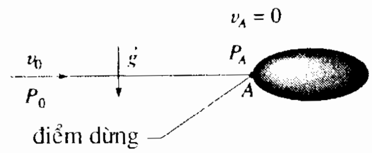
3.4. Bảng tổng hợp

Tất cả các kết quả trên có thể được tóm tắt trong bảng dưới đây (*h*.18).

Các dạng khác nhau của phương trình BERNOULLI	**dòng chảy hướng áp** $\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(P)$	**Dòng chảy đồng chất không thể nén được** $\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right)$
Dòng chảy dừng	$\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P) = \text{cte}$ dọc theo một đường dòng	$\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$ dọc theo một đường dòng
dòng chảy không xoáy ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$)	$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right] = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng	$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}\right] = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng
dòng chảy không xoáy và dừng	$\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P) = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng	$\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng

H.18. *Các dạng khác nhau của phương trình BERNOULLI.*

Dạng đơn giản nhất của hệ thức BERNOULLI chắc hẳn sẽ được nhận với các giả thiết mạnh mẽ nhất: dòng chảy đồng chất, không thể nén được, dừng và không xoáy (nó tương ứng với ô trắng ở bảng trên)



H.19. *Điểm dừng trên một vật rắn.*

■ Phương trình BERNOULLI chẳng qua là một phương trình bảo toàn năng lượng. Trong trường hợp một dòng chảy dừng, đồng chất, không thể nén được, thì biểu thức:

$$\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \frac{P}{\rho}$$

biểu diễn cơ năng trên đơn vị khối lượng kết hợp với một hạt chất lưu:

- $\frac{v^2}{2}$ là động năng trên đơn vị khối lượng;
- e_{p_m} là thế năng trên đơn vị khối lượng của các lực khác với các áp lực;
- $\frac{P}{\rho}$ biểu diễn năng lượng kết hợp với các áp lực.

Trong trường hợp một dòng chảy hướng áp, thì hệ thức:

$$\rho = g(P)$$

được kết hợp với một động thái nhiệt động của chất lưu.

Lúc đó phương trình BERNOULLI biểu diễn một dạng vi phân của nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học đối với một chất lưu đang chảy (*xem bài tập* 1).

■ Đối với một dòng chảy dừng, đồng chất không thể nén được, thì phương trình BERNOULLI còn được viết:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + e_{p_m} = \text{cte}\,.$$

Số hạng $\frac{\rho v^2}{2}$ (đồng nhất ở một áp suất) được gọi là áp suất động lực học

và tổng $\frac{\rho v^2}{2} + P$ là *áp suất tổng cộng hay áp suất tù hãm.*

Ví dụ về một dòng chảy đều nằm ngang đến đập vào một vật cản cho phép hiểu rõ ý nghĩa của các số hạng này (*h*.19).

Ta viết sự bảo toàn của:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + e_{p_m}$$

trên đường dòng nằm ngang đi tới điểm A trên vật cản, giữa vô cực và A :

- ở vô cực, dòng chảy là đều, có áp suất P_0 và vận tốc v_0 ;
- ở A, vận tốc nhất thiết triệt tiêu và áp suất được ký hiệu là P_A.

Đường dòng là nằm ngang, và khi xét chỉ các lực trọng trường, thì e_{p_m} là đồng nhất tại mọi điểm của đường dòng:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = P_A\,.$$

từ đó có các tên áp suất tổng cộng hay áp suất tù hãm ở A (điểm dừng).

Áp dụng 4

Dòng chảy dừng xoáy

Có một dòng chảy dừng của chất lỏng không thể nén được, khối lượng riêng ρ, mà trường vận tốc được xác định trong tọa độ trụ bởi hệ thức:

$$\vec{v}(M,t) = \Omega r \vec{e}_\theta \text{ với } \vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z \text{ không đổi.}$$

Chất lỏng này chỉ chịu tác dụng của các áp lực (người ta bỏ qua các lực trọng trường).

1) *$\vec{\Omega}$ biểu diễn gì ?*

2) *Tính áp suất P(M). Người ta giả sử rằng $P(r_0)$ là đã biết.*

3) *Chứng minh rằng $\left\{\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right\}$ là một hằng số trên một đường dòng, nhưng phụ thuộc vào đường dòng đã chọn. Hãy xác định $\varphi(P)$.*

1) $\vec{\Omega}$ biểu diễn véc tơ xoáy. Thật vậy:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\Omega r \vec{e}_\theta) = \overrightarrow{\text{rot}}\left[\Omega r^2\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right)\right]$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}(\Omega r^2) \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r} = 2\vec{\Omega},$$

vì $\overrightarrow{\text{rot}}\left[\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right] = \vec{0}$ (*xem chương* 8).

2) Nguyên lý cơ bản của động lực học áp dụng cho một hạt chất lỏng khối lượng dm cho ta:

$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)\frac{\mathrm{d}m}{\rho},$$

hay $\frac{1}{2}\rho\,\Omega^2 r = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, do đó :

$$P(r) = P(r_0) + \frac{\rho\,\Omega^2(r^2 - r_0^2)}{4}.$$

3) Chất lỏng không thể nén được, $\varphi(P) = \frac{P}{\varphi}$.

Các đường dòng là các vòng tròn trục (Oz) và bán kính r. Vì không có ngoại lực nào khác ngoài các áp lực, nên điều đó cho ta $e_{p_m} = 0$.

Như vậy đại lượng $\left\{\frac{v^2}{2} + e_{p_m} + \varphi(P)\right\}$ được viết:

$$\left\{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right\} = \left\{\frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{\Omega^2 r^2}{4} - \frac{P(r_0)}{\rho} + \frac{\Omega^2 r_0^2}{4}\right\},$$

là hằng số chỉ phụ thuộc r, nghĩa là không đổi trên một đường dòng. Hằng số này phụ thuộc đường dòng, vì ta ở bên trong một dòng xoáy $(\vec{\Omega} \neq 0)$.

4 Các áp dụng của hệ thức BERNOULLI

4.1. Dòng chảy ổn định và chậm của một chất lỏng có thể nén được

Trong gần đúng bậc nhất, liệu ta có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI dưới dạng đơn giản nhất của nó cho một chất lưu có thể nén được như không khí được không ?

Giả sử là **trong các điều kiện của thí nghiệm**, tồn tại một hệ thức giữa P và ρ. Nó được thể hiện bởi sự tồn tại của một hệ số nén:

$$\chi = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}.$$

Thường xảy ra dòng chảy gần đúng là đẳng entropi, và $\chi \approx \chi_s$.

Giả sử rằng có thể bỏ qua các độ biến thiên của ρ trong một dòng chảy ổn định mà ở đó vận tốc biến đổi giữa 0 và v_{max}. Theo hệ thức BERNOULLI, thì áp suất sẽ biến thiên giữa P_{min} và P_{max} với $P_{max} = P_{min} + \Delta P = P_{min} + \rho\frac{v_{max}^2}{2}$.

Một độ biến thiên áp suất như thế sẽ tương thích với giả thiết, nếu như độ biến thiên của ρ gắn với độ biến thiên áp suất lại nhỏ về giá trị tương đối, nghĩa là nếu:

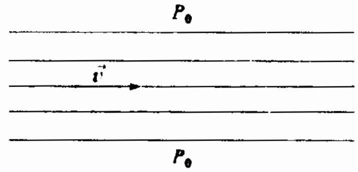
$$\Delta\rho \approx \chi\, \rho\, \Delta P \ll \rho \text{ hay } v_{max}^2 \ll 2\frac{1}{\chi\rho}.$$

Theo kết quả của §**2.3.** thì điều kiện này tương đương với $v_{max} \ll c_{âm}$.

Như vậy có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI đơn giản nhất:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + e_{p_m} \approx \text{cte}$$

cho một chất lưu có thể nén được, trong chừng mực mà vận tốc của dòng chảy vẫn còn rất nhỏ so với vận tốc truyền âm trong chất lưu này, trong cùng các điều kiện của thí nghiệm.



H.20. *Tia đồng tốc ở không khí tự do.*

4.2. Tia đồng tốc ở không khí tự do

Xét dòng chảy dừng của một chất lưu không thể nén được dưới dạng:

- một tia tự do, nghĩa là không có bất kỳ một tiếp xúc nào với một bề mặt cứng hay một chất lưu nào khác;
- vận tốc $\vec{v} = v\vec{e}_x$, không đổi.

Tia này được gọi là tia đồng tốc (*h*.20).

Giả thiết các lực duy nhất tham gia vào là các áp lực: hệ thức BERNOULLI được viết trong toàn tia là:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}.$$

Vận tốc là như nhau tại mọi điểm của tia, áp suất cũng như thế. Trên các bờ tia, chỗ tiếp xúc với khí quyển, áp suất có giá trị P_0 (ta bỏ qua sức căng bề mặt). Vậy, đó là áp suất tại mọi điểm của tia.

Trong một tia đồng tốc ở không khí tự do, áp suất là đều và bằng áp suất tồn tại trong môi trường "ngoài".

Ta thừa nhận kết quả này đối với mọi tia ở không khí tự do.

Chú ý:

Kết quả này cũng có thể được kiểm chứng bằng cách dùng trực tiếp phương trình EULER.

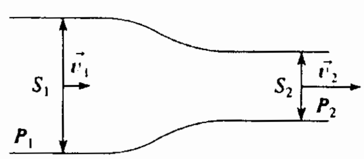
4.3. Hiệu ứng Venturi

4.3.1. Nguyên lý cơ bản của hiệu ứng Venturi

Một dòng chảy dừng đồng chất không thể nén được, chỉ chịu tác dụng của các áp lực, được giới hạn bởi một ống dẫn có tiết diện thay đổi (*h*.21). Ngoài ra, bài toán còn được giả thiết là một chiều: tất cả các đại lượng có một giá trị đều trên một tiết diện thẳng của ống dẫn.

Sự bảo toàn lưu lượng thể tích giữa các tiết diện có diện tích S_1 và S_2 buộc phải có:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$



H.21. *Hiệu ứng Venturi* $P_1 > P_2$.

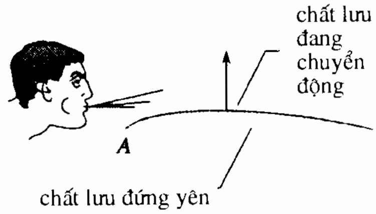
Việc áp dụng hệ thức BERNOULLI giữa hai điểm của các tiết diện này lúc đó, kéo theo:

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}.$$

Nếu $S_1 > S_2$ thì $v_1 < v_2$ và $P_1 > P_2$. Hiện tượng này được biết dưới tên gọi là hiệu ứng VENTURI.

Các miền có tiết diện nhỏ, do vậy có vận tốc lớn, cũng là các miền có áp suất thấp.

Chú ý rằng hiệu ứng VENTURI này được kiểm nghiệm rất đúng đối với các chất lưu có thể nén được như không khí: phép tính gần đúng này có hiệu lực chừng nào mà vận tốc của chất lưu còn rất nhỏ so với vận tốc truyền âm trong chất lưu đang xét.



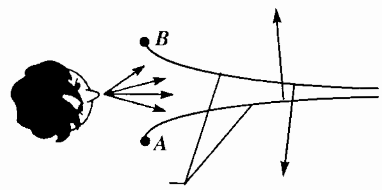
H.22. *Khi thổi, tờ giấy (giữ cố định ở A) tự nâng lên (nó có dạng mặt trên của một cánh máy bay, nghĩa là lưng cánh máy bay).*

4.3.2. Các áp dụng hay các hệ quả thực tế

4.3.2.1. Thí nghiệm với các tờ giấy

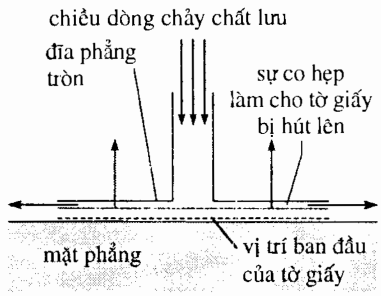
Khi thổi phía trên một tờ giấy giữ nằm ngang, thì tờ giấy tự nâng lên. Thực vậy, vận tốc của chất lưu khác không ở phía trên tờ giấy sẽ sinh ra một áp suất nhỏ hơn áp suất bên dưới tờ giấy, mà ở đây chất lưu lại đứng yên (*h*.22).

Một thí nghiệm y hệt gồm hai tờ giấy giữ thẳng đứng, hơi xa nhau một chút: khi thổi vào khoảng giữa, ta thấy hai tờ giấy có khuynh hướng hút nhau với cùng các lý do như đã nói ở trên (*h*.23).



H.23. *Khi thổi vào giữa hai tờ giấy giữ cố định ở các điểm A và B, thì hai tờ giấy dường như hút nhau.*

Cũng có thể hút một tờ giấy bằng cách thổi ở bên trên (*h*.24).



H.24. *Tờ giấy tự nâng lên.*

4.3.2.2. Hiệu ứng mặt đất

Ta lại tìm thấy một dạng của hiệu ứng VENTURI trong "hiệu ứng mặt đất" : dòng chảy của một chất lưu ví như không khí dưới một tấm nghiêng (hay các tờ giấy nhìn thấy ở trên) có khuynh hướng áp tấm đó sát đất. Hiệu ứng đó được dùng để làm tăng khả năng bám đường của xe đua ô tô (*h*. 25).

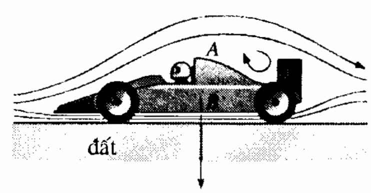
<u>*Chú ý:*</u>

Để phân tích đơn giản hiện tượng này, phải đặt mình trong các điều kiện của một dòng chảy ổn định, do vậy phải ở trong hệ quy chiếu của xe ô tô.

4.3.2.3. Sự hút một quả bóng bàn

Thí nghiệm quả bóng bàn bị hút về miền tiết diện nhỏ (về phía đỉnh phễu), là một sự minh họa khác đầy ấn tượng của hiệu ứng VENTURI (*h*.26).

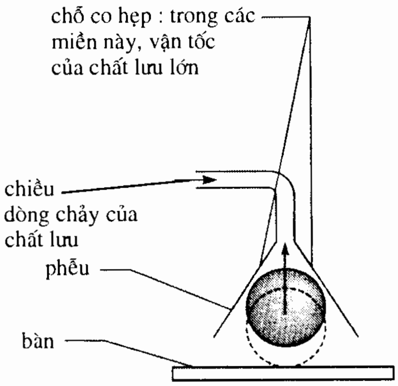
Vì những lý do y hệt như trên, mà ta cũng có khả năng giữ một quả bóng bàn "bay lơ lửng lên khỏi mặt bàn" (*h*.27).



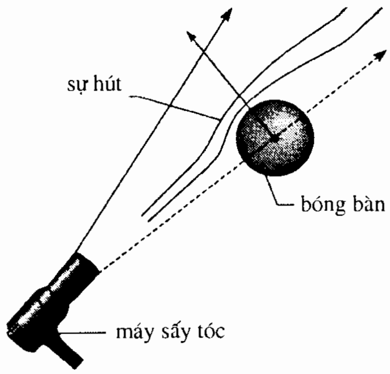
H.25. *Hiệu ứng mặt đất đối với một xe ô tô đua:* $P_A > P_B$.

4.3.2.4. Nguyên lý bơm hút (chân không) bằng nước

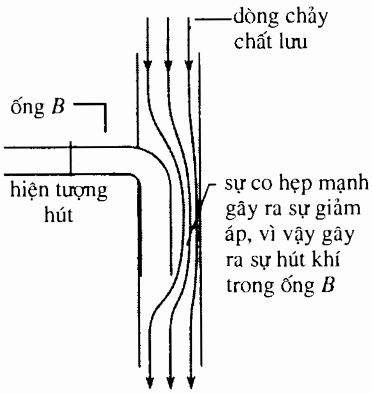
Một sự giảm áp được quan sát thấy ở chỗ co hẹp của một ống dẫn: hiệu ứng này có nhiều áp dụng. Ví dụ bơm hút chân không bằng nước có một chỗ thắt trong ống dẫn nước nối với một bình mà người ta cần rút chân không (*h*.28).



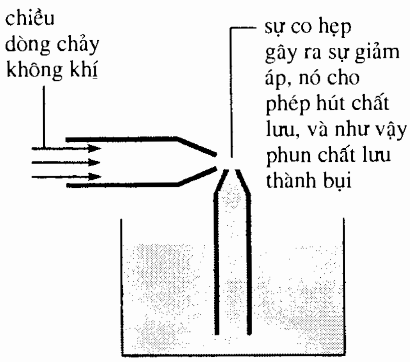
H.26. *Thí nghiệm quả bóng bàn: quả bóng lúc đầu ở trên mặt bàn bị hút lên.*



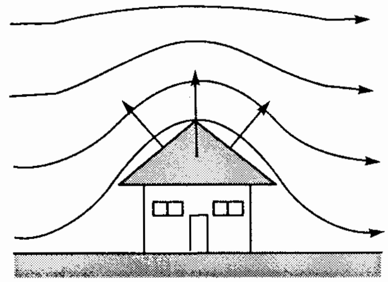
H.27. *Hình dạng các đường dòng ở lân cận quả bóng bàn cho phép giải thích tại sao quả bóng này có thể vẫn ở cân bằng, ngay cả khi thông lượng không khí không phải là thẳng đứng (có thể duy trì sự cân bằng này ở một góc từ 20° đến 30°).*



H.28. *Nguyên lý của một bơm hút (chân không) bằng nước.*



H.29. *Nguyên lý hoạt động của một bình phun, hay một súng phun sơn.*



H.30. *Các đường dòng ở gần sát mái nhà "sít" nhau hơn. Áp suất trên mái nhỏ hơn áp suất trong nhà.*

4.3.2.5. Nguyên lý các bình phun

Nguyên lý các bình phun hay một số các súng phun sơn bao giờ cũng dựa lên cùng một sơ đồ như trên (*h*.29).

Dưới tác dụng của một cơn bão, mái của một ngôi nhà có thể tự tốc lên vì cùng những nguyên nhân như trên (*h*.30).

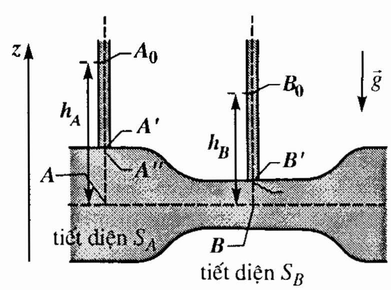
4.3.3. Đo lưu lượng bằng ống Venturi

Ống VENTURI (*h*.31) là một áp dụng khác cho phép đo các lưu lượng. Ở đây ta đứng trong trường hợp một dòng chảy dừng đồng chất không thể nén được.

• Ống có một chỗ co hẹp ở mức điểm B và nếu ta giả thiết vận tốc là đều trên các tiết diện S_A và S_B, thì lúc đó $v_B = \dfrac{S_A}{S_B} v_A > v_A$. Trên đường dòng đi từ A đến B, thì hệ thức BERNOULLI ở chế độ dừng đối với một chất lưu không thể nén được có dạng:

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}.$$

do đó : $P_A - P_B = \rho \dfrac{v_A^2}{2}\left[\left(\dfrac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1\right]$.



H.31. *Nguyên lý của ống* VENTURI.

• Các ống bên đều hở với không khí tự do. Các ống này chỉ làm nhiễu loạn rất ít dòng chảy (nếu các tiết diện của chúng là nhỏ so với tiết diện của dòng chảy (nhưng không được quá nhỏ, *xem áp dụng* 1), và nếu chúng được đặt "xa" chỗ co hẹp), thì trong các ống đó chất lỏng ở trạng thái nằm yên, do vậy ta có (*h*.31 và 32).

$P_A' - P_{A0} = P_{A'} - P_0 = \rho g(z_{A0} - z_{A'})$ và $P_B' - P_{B0} = P_{B'} - P_0 = \rho g(z_{B0} - z_{B'})$.

• Dòng chảy là dòng một hướng trên các tiết diện S_A và S_B. Rota của $\vec{v}$ ở đấy bằng không, và như vậy, theo hệ thức BERNOULLI đối với một chất lưu không thể nén được ở chế độ dừng thì:

$$P_A - P_{A''} = \rho g(z_{A''} - z_A) \text{ và } P_B - P_{B''} = \rho g(z_{B''} - z_B).$$

• Tồn tại giữa A' và A'' (và giữa B' và B'') một miền nhỏ chảy rối: như vậy, hệ thức BERNOULLI không thể áp dụng được giữa hai điểm này. Tuy nhiên, ta có thể giả thiết rằng A' và A'' rất gần nhau, và, vì áp suất là liên tục, nên:

$$z_{A'} \approx z_{A''};\ P_{A'} \approx P_{A''};\ z_{B'} \approx z_{B''};\ P_{B'} \approx P_{B''}.$$

Với phép tính gần đúng tốt nhất, ta có:

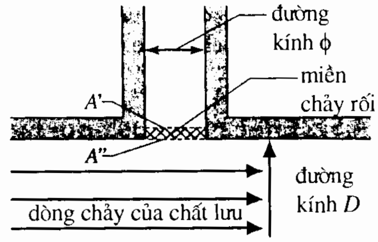
$$P_A = P_0 + \rho g h_A,\ P_B = P_0 + \rho g h_B \text{ và } P_A - P_B = \rho g(h_A - h_B).$$

Đồng nhất hai biểu thức của $P_A - P_B$, ta được:

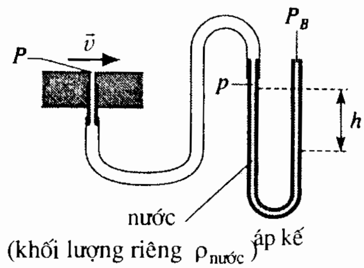
$$v_A = \sqrt{\frac{2g(h_A - h_B)}{\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1}}.$$

Thí nghiệm này minh chứng cho một phép đo khả dĩ về lưu lượng thể tích D_v của chất lưu:

$$D_v = S_A v_A = S_A\sqrt{\frac{2g(h_A - h_B)}{\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1}}.$$



H.32. *Nếu tiết diện ống (đường kính ϕ) nhỏ so với tiết diện của dòng chảy (đường kính D), thì miền chảy rối sẽ có kích thước giảm nhỏ đi, và ta có* $P_{A'} = P_{A''}$.



H.33. *Áp suất là liên tục ở ngang mức lỗ hở, và* $P = P_B - \rho_{\text{nước}} gh$.

4.4. Nguyên lý của một phép đo áp suất

4.4.1. Đo áp suất cục bộ

Việc đo áp suất cục bộ được thực hiện với một áp kế đơn giản bằng cách dùng một áp suất chuẩn làm mốc (*h*.33). Ta biết rằng, nếu các kích thước của một lỗ là nhỏ (nhưng không nhỏ quá!), thì ta có sự liên tục của áp suất ở ngang mức lỗ hở, do vậy việc đo áp suất là có thể đạt được.

4.4.2. Đo áp suất tại một điểm dừng

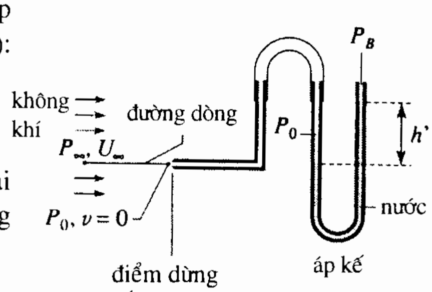
Muốn đo áp suất tại một điểm dừng, nghĩa là áp suất tổng cộng hay áp suất tù hãm (*xem* §**3.4**), thì dùng một ống PITOT là thuận tiện nhất (*h*.34): miệng ống đo "hướng thẳng vào tia".

4.4.3. Đo vận tốc trong một dòng chảy không thể nén được

Ta biết rằng (áp suất tổng cộng) P_0 và p (áp suất cục bộ mà ở đó tồn tại một vận tốc v) liên hệ với nhau theo hệ thức sau đây (đối với một dòng chảy không xoáy, không thể nén được, dừng, và ở z không đổi):

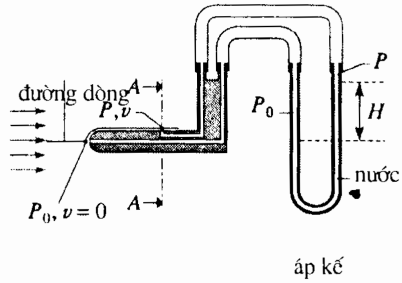
$$P_0 = p + \rho\frac{v^2}{2}.$$

Biết ρ và độ lệch $P_0 - p$, lúc đó ta có thể đo v.



H.34. *Ống* PITOT *: áp suất là liên tục ở ngang mức lỗ hở (v = 0), và* $P_0 = P_B + \rho_{\text{nước}} gh'$.

Muốn thế, ta có thể dùng một kiểu ống PITOT là ống PRANDTL (*h*.35). Ta nhắc lại rằng các phép đo khác nhau này đều khả dĩ trong không khí chừng nào mà ta vẫn có $v < c$ (*xem* §**4.1**).



H.35. *Ống* PRANDTL.

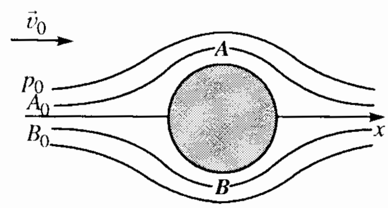
$$P_0 - p = \rho_{\text{nước}} g H = \rho_{\text{không khí}} \frac{v^2}{2}.$$

4.5. Hiệu ứng MAGNUS: lực nâng

Một lần nữa, ta lại đứng trong trường hợp một dòng chảy dừng, đồng chất, không thể nén được và không xoáy: như vậy, hệ thức BERNOULLI được áp dụng trên toàn chất lưu, và đặc biệt trên một đường dòng.

Dòng chảy, giả thiết là đều ở vô cực, bị nhiễu loạn bởi một vật cản hai chiều. Cách đặt tên gọi này không nhất thiết phải hàm ý rằng vật cản là phẳng, nhưng có nghĩa là ta có thể quy về sự nghiên cứu trong mặt phẳng. Ví dụ, đó sẽ là trường hợp của một hình trụ đặt trong một dòng chảy mà các đường dòng đều nằm trong các mặt phẳng trực giao với trục của hình trụ, sao cho bài toán là đồng nhất trong từng mặt phẳng ấy.

Dòng chảy xung quanh một hình trụ đáy tròn đã được nghiên cứu trong *chương* 3. §**3.4**. Sự đối xứng của hình vẽ (*h*.36) ngụ ý sự bằng nhau của các vận tốc và các áp suất ở các điểm A và B: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}$ và $P_A = P_B$.



H.36. *Dòng chảy xung quanh một hình trụ đứng yên.*

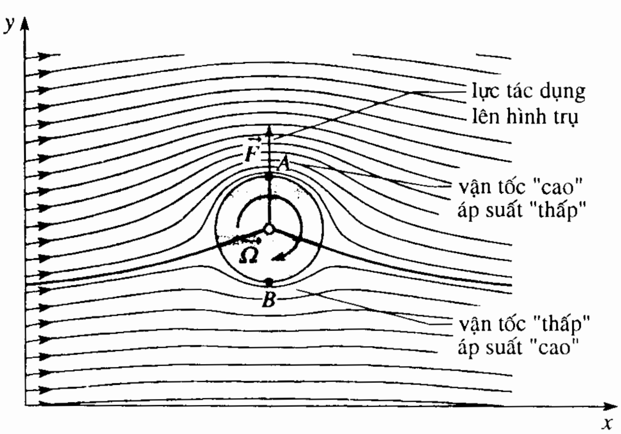
Hình trụ lúc này đang quay với vectơ quay $\vec{\Omega}$ xung quanh trục của nó. Tính chất thực (nghĩa là tính nhớt) của chất lưu làm nó quay theo ở chỗ tiếp xúc với hình trụ. Ta tiến hành bằng cách chồng chập: dòng chảy tổng hợp là tổng của dòng chảy trước và một dòng chảy loại cuộn xoáy do sự quay của hình trụ (*h*.37); bản đồ mới của dòng chảy sẽ được nghiên cứu trong bài tập 8.

Kết quả là tại A và B, các vận tốc lúc này là:

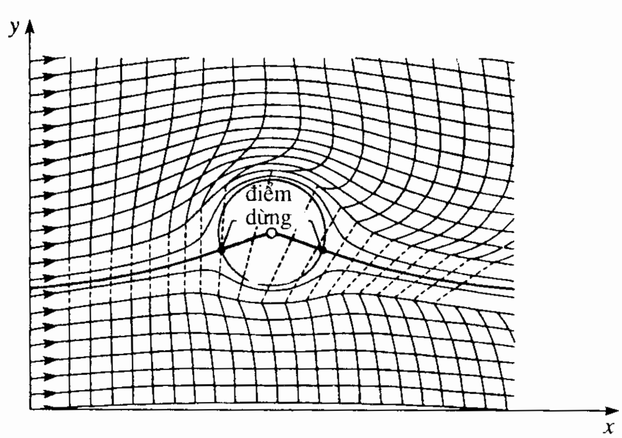
$$\vec{v}'_A = \vec{v} + \Delta v \vec{u}_x \quad \text{và} \quad \vec{v}'_B = \vec{v} - \Delta v \vec{u}_x.$$

Hệ thức BERNOULLI có thể được viết trên các đường dòng đi từ A_0 đến A và B_0 đến B. A_0 và B_0, ở rất xa vật cản, được đặc trưng bởi cùng các giá trị vận tốc và áp suất: $v_A > v_B$ lúc đó kéo theo $P_A < P_B$.

Sự khác nhau về áp suất này làm sinh ra một lực thẳng đứng (do vậy, vuông góc với dòng chảy lúc không có vật cản), ở đây hướng đi lên theo chiều quay giả thiết ban đầu: hiện tượng này được gọi là *hiệu ứng* MAGNUS (*xem bài tập* 8). Hiệu ứng MAGNUS cũng tác động lên một vật cản giả thiết là linh động trong một chất lưu nằm yên ở xa vật cản (chỉ cần đứng trong hệ quy chiếu gắn với vật cản là đủ để lại tìm thấy trường hợp trên): lúc đó, vật cản chịu một lực trực giao với phương dịch chuyển chính của nó (*h*.37 và 38).

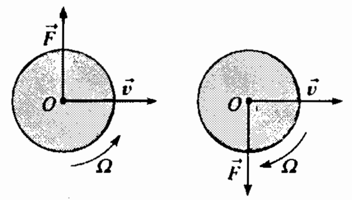


H.37. *Sự thể hiện hiệu ứng Magnus khi hình trụ đang quay.*



H.38. *Việc thể hiện sự biến đổi của các đường chất lưu: vận tốc nhanh nhất ở phía trên hình trụ.*

Lúc đó, hiệu ứng này giải thích các quỹ đạo bị uốn cong của các quả bóng mà người ta đập lên chúng bằng cách truyền cho chúng một chuyển động quay như: các quả bóng bị "đá xoáy" trong bóng đá, các quả bóng bị "líp" hay "cắt' (theo chiều quay) trong quần vợt. Để phân tích định tính *hình* 39, thì phải nhớ rằng hệ thức BERNOULLI đơn giản nhất chỉ có thể được áp dụng nếu dòng chảy ổn định. Điều đó giả thiết rằng hệ quy chiếu nghiên cứu được gắn với tâm quả bóng, và rằng vận tốc ở vô cực là $\vec{v}_0 = -\vec{v}$.

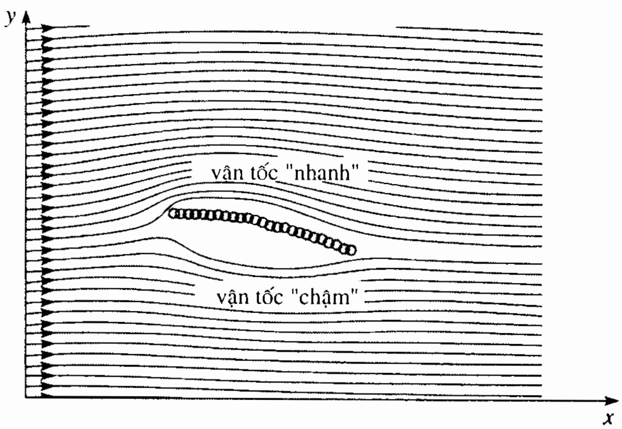


H.39. *Sự thể hiện hiệu ứng* MAGNUS *trên một quả bóng đang quay.*

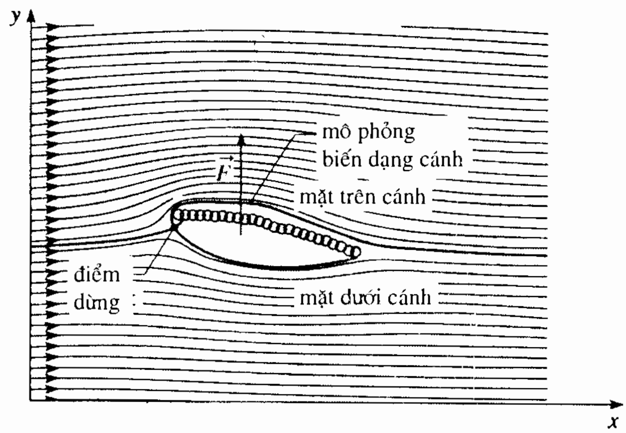
4.6. Dòng chảy xung quanh một cánh máy bay

Cánh máy bay biểu thị một ví dụ khác đặc biệt quan trọng, trong đó một lực tác dụng lên một vật cản đặt trong một dòng chảy: lực này được gọi là "lực nâng" tác dụng hướng lên cao (từ "mặt dưới cánh" hướng lên "mặt trên cánh") và bảo đảm sự nâng máy bay lên trong không khí (*h*.40). Chúng ta sẽ nghiên cứu lực này trong khuôn khổ của *chương* 6. Nhớ rằng sự tồn tại của một lực nâng tuỳ thuộc vào sự tồn tại của một lưu thông chất lưu khác không xung quanh vật cản (như trường hợp đối với hình trụ đang quay...).

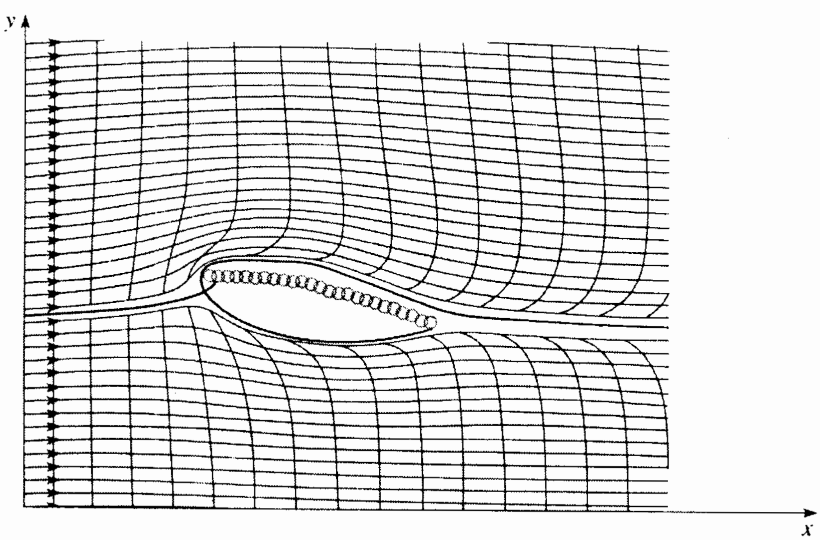
Ta thu được các *hình* 40, 41 và 42 (phần mềm FLUIDES - JEULIN) bằng cách chồng chất lên một dòng chảy đều, các nguồn và giếng được phân bố càng đều càng tốt trên "bộ khung" của cánh máy bay (*h*.43). Các vòng tròn màu sắc khác nhau cụ thể hóa các nguồn, giếng và dòng xoáy.



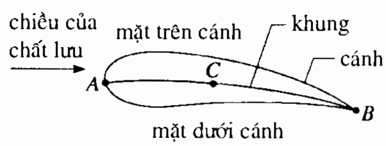
H.40. *Mô phỏng dòng chảy xung quanh một cánh máy bay.*



H.41. *Sự thể hiện hình dạng cánh với cách mô phỏng này.*



◀ **H.42.** *Biên dạng cánh máy bay: cách thể hiện sự biến đổi của các đường chất lưu.*

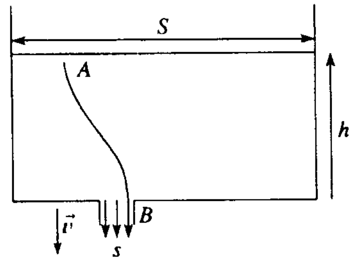


H.43. *Ta nhận được sự mô phỏng bằng cách phân bố các nguồn từ A đến C và các giếng từ C đến B. Một dòng xoáy, áp đặt ở lân cận điểm A, là cần thiết để tạo ra một lực nâng.*

4.7. Sự tháo cạn một bể chứa: công thức TORRICELLI

Một bể chứa có một lỗ hở, nhờ đó một chất lỏng không thể nén được có thể chảy qua: ta hãy tìm cách xác định vận tốc phun v của chất lưu ở ngang mức lỗ hở này.

Dòng chảy nghiên cứu không tuyệt đối dừng, nhưng nếu tiết diện s của lỗ nhỏ so với mặt thoáng S (*h*.44) thì gia tốc cục bộ rất nhỏ so với gia tốc đối lưu và hệ thức BERNOULLI về các dòng chảy dừng sẽ được áp dụng (*xem bài tập* 10).



H.44. *Sự tháo cạn một bể chứa (giả thiết: S >> s). Dòng chảy có thể được coi như dừng (độc lập với thời gian).*

Áp suất của tia tự do ở B bằng áp suất khí quyển (*xem* § 4.2). Sự áp dụng hệ thức BERNOULLI giữa A và B, là các điểm của cùng một đường dòng, trực tiếp cho ta:

$$gh_A + \frac{v_A^2}{2} = gh_B + \frac{v^2}{2}.$$

Sự bảo toàn lưu lượng thể tích hàm ý là $Sv_A = sv$. Giả thiết $S >> s$ như vậy sẽ kéo theo $v_A \ll v$, do đó, với $h = h_A - h_B$ thì $v^2 = 2gh$.

Công thức TORRICELLI được viết:

$$\boldsymbol{v^2 = 2gh}$$

Nó tương ứng với vận tốc phun của một chất lưu ở ngang mức lỗ hở mà bên trên là chất lưu có chiều cao *h*.

4.8. Sóng hấp dẫn ở mặt phân cách giữa hai chất lưu (mô hình sóng lừng)

Một chất lưu lý tưởng không thể nén được (ví dụ đại dương), có khối lượng riêng ρ, tiếp xúc với khí quyển theo mặt phẳng $z = 0$ khi nó ở trạng thái nằm yên. Hơn nữa, chất lưu này trải rộng đến vô cực về các giá trị z âm (đại dương sâu "vô hạn") (*h*.45).

4.8.1. Các giả thiết

Ta hãy nghiên cứu chuyển động của nó (dưới tác dụng của gió chẳng hạn) với các giả thiết đơn giản hóa sau đây:

• Chuyển động của các hạt là phẳng. Tại một điểm $M(x, z)$ của chất lưu, vận tốc là:

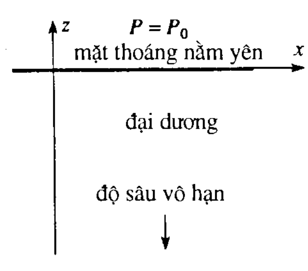
$\vec{v}(M,t) = u(x,z,t)\vec{u}_x + w(x,z,t)\vec{u}_z$.

• Ta hãy quan tâm đến các chuyển động nhỏ, và biên độ các sóng là "yếu": ta sẽ chỉ giữ lại các số hạng cấp một của v.

• Dòng chảy chất lưu là dòng chảy thế: $\vec{v}(M,t) = \overrightarrow{grad}\,\phi(M,t)$.

• Thế được tìm dưới dạng $\phi = f(z)g(x - ct)$: như vậy, đây là vấn đề của một sóng lan truyền với vận tốc c theo phương x với biên độ phụ thuộc z ($v << c$).

• Ở mặt thoáng của chất lưu, tiếp xúc với khí quyển, thì áp suất là đều và bằng P_0.



H.45. *Đại dương có độ sâu "vô hạn".*

Ta tìm cách xác định dạng của các hàm f và g, giá trị của c, các quỹ đạo của các hạt chất lưu và hình dạng của mặt thoáng...

4.8.2. Nghiên cứu thế các vận tốc

Dòng chảy là dòng thế, $\Delta\phi = 0$, nghĩa là $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$. Với dạng giả thiết của ϕ, thì:

$$f(z)g''(x-ct) + f''(z)\,g(x-ct) = 0$$

hay
$$\frac{f''(z)}{f(z)} = -\frac{g''(x-ct)}{g(x-ct)} = A,$$

trong đó A là một hằng số $f''(z) - Af(z) = 0$ và hàm $f(z)$ có dạng e^{kz}, một hàm mũ thực hay phức.

Chất lưu phải nằm yên khi ở xa mặt thoáng, nghĩa là khi z tiến tới $-\infty$. Điều này buộc hàm mũ phải là thực, nghĩa là có $A = +k^2$ và như vậy:

$$f(z) = f_0 e^{kz}, \quad k \text{ là thực.}$$

Từ đó ta suy ra $g''(x-ct) + k^2 g(x-ct) = 0$, do đó $g(x-ct) = g_0 cos(kx - \omega t)$, khi đặt $\omega = kc$: đây là một sóng hình sin tiến dần với xung động ω và bước sóng $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Thế ϕ có dạng:

$$\phi(x,z,t) = \phi_0 e^{kz}\cos(kx - \omega t).$$

Chú ý rằng $\phi'(x,z,t) = \phi(x,z,t) + C(t)$ cho cùng một trường các vận tốc.

4.8.3. Tìm một bất biến

Dòng chảy là không xoáy, không ổn định, và chất lưu là không thể nén được. Hệ thức BERNOULLI được áp dụng dưới dạng:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = B(t),$$

là đại lượng biến đổi theo thời gian và độc lập với các tọa độ không gian, nghĩa là đều trong toàn chất lưu.

Ta quan tâm đến hiện tượng lan truyền theo x. Đại lượng:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}$$

do vậy không thể phụ thuộc thời gian, trong khi là đều đối với x.

Từ đó ta suy ra:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = B.$$

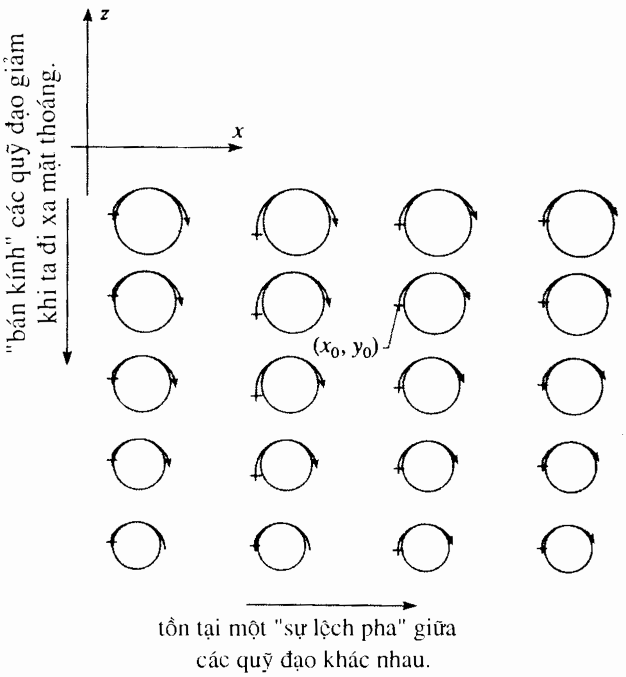
4.8.4. Tìm kiếm quỹ đạo các hạt chất lưu

Vận tốc của một hạt chất lưu được xác định bởi các thành phần:

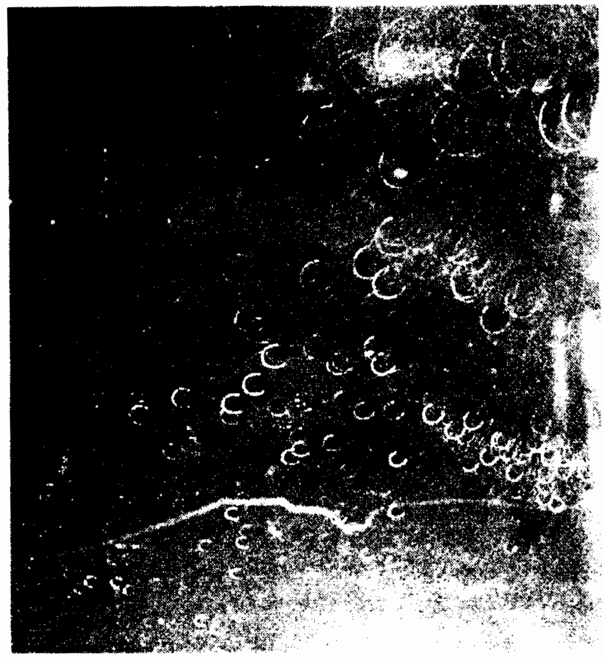
$$u(x,z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -k\phi_0 e^{kz}\sin(kx - \omega t) \text{ và } w(x,z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} = k\phi_0 e^{kz}\cos(kx - \omega t).$$

Ta sẽ thu được các quỹ đạo $X(t)$ và $Z(t)$ của các hạt chất lưu (biết vị trí X_0 và Z_0 của chúng ở thời điểm $t = 0$) bằng cách lấy tích phân các phương trình vi phân:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -k\phi_0 e^{kZ(t)}\sin(kX(t) - \omega t) \text{ và } \frac{dZ(t)}{dt} = +k\phi_0 e^{kZ(t)}\cos(kX(t) - \omega t).$$



H.46a. *Các quỹ đạo gần như là các vòng tròn* $\left(\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{150} \ll 1\right)$.



H.46b. *Ảnh chụp cho thấy rõ các quỹ đạo của các hạt khác nhau của một chất lưu chịu tác dụng của các sóng hấp dẫn.*

Thật khó giải chính xác các phương trình vi phân này. Sự mô phỏng số học các nghiệm của hệ phương trình này chứng tỏ rằng nếu biên độ a của "các dao động" là nhỏ so với bước sóng λ (hay $ka \ll 1$), và duy nhất chỉ trong trường hợp này, các quỹ đạo gần như là các vòng tròn (*h*.46).

Ta trở lại phép tính gần đúng cấp 1 về v. Biên độ các quỹ đạo là nhỏ: e^{kZ} và kX biến thiên ít, ta coi chúng lần lượt là e^{kZ_0} và kX_0. Lúc đó các phương trình vi phân trở thành (dạng đơn giản hơn nhiều để giải) :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -k\phi_0 e^{kZ_0} \sin(kX_0 - \omega t) \text{ và } \frac{dZ(t)}{dt} = +k\phi_0 e^{kZ_0} \cos(kX_0 - \omega t).$$

Như vậy, các quỹ đạo của các hạt chất lưu là:

$$X(t) = X_0 - \frac{k}{\omega}\phi_0 e^{kZ_0}(\cos(kX_0 - \omega t) - \cos kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 - \frac{k}{\omega}\phi_0 e^{kZ_0}(\sin(kX_0 - \omega t) - \sin kX_0).$$

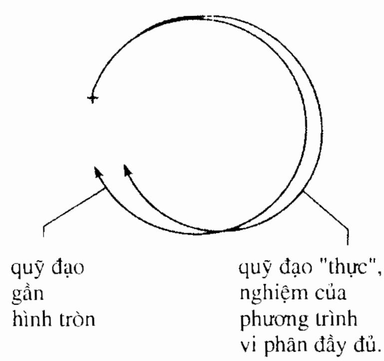
Ta xác minh đúng là ở $t = 0$, thì $X(t) = X_0$ và $Z(t) = Z_0$. Đặt $R = \frac{k}{\omega}\phi_0 e^{kZ_0}$.

Các quỹ đạo là các vòng tròn có phương trình:

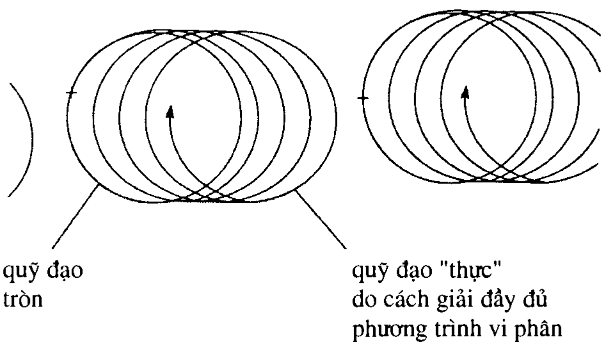
$$\left[X - \left(X_0 + R\cos kX_0\right)\right]^2 + \left[Z - \left(Z_0 + R\sin kX_0\right)\right]^2 = R^2.$$

Ta có thể so sánh dựa trên *hình* 47 độ sai lệch giữa nghiệm tìm thấy và nghiệm đầy đủ của phương trình vi phân. Trên *hình* 48, ta sẽ thấy độ sai lệch sau vài chu kỳ.

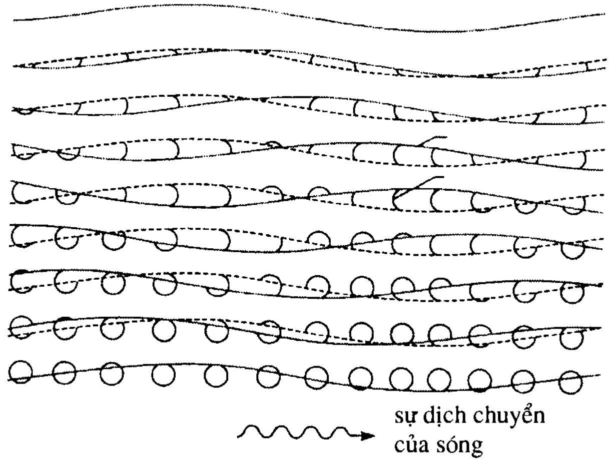
Thành thử các hạt của mặt thoáng vẽ các vòng tròn bán kính $R = \frac{k}{\omega}\phi_0$.



H.47. *Sai lệch giữa nghiệm gần đúng và nghiệm "thực" sau thời gian* $t = 0{,}9$ T.



H.48. *Độ sai lệch giữa nghiệm gần đúng và nghiệm "thực" sau một số chu kỳ.*



H.49. *Ta thực sự có một sóng lan truyền ở bề mặt của chất lưu.*

Bán kính các quỹ đạo giảm theo độ sâu. Thành thử, nếu bước sóng là 20 m, thì đối với các "chân sóng" cỡ 2 m ở bề mặt (điều này tương ứng với một bán kính 1m), các quỹ đạo có bán kính cỡ 3,9 cm và 0,43 cm ở các độ sâu tương ứng bằng 3m và 10m: ở độ sâu sau cùng này, sóng lừng hầu như khó nhận thấy.

4.3.5. Nghiên cứu mặt thoáng

Đối với mọi điểm của mặt thoáng, ta đều có $|z| \ll \lambda$, nghĩa là $k|z| = \dfrac{2\pi|z|}{\lambda} \ll 1$, vậy $e^{kz} = 1$.

Trong các điều kiện đó, ta có thể viết:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\text{bề mặt}} = \omega\phi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Hơn nữa, ta còn biết rằng tại một điểm của mặt thoáng, ta phải chứng minh được (khi bỏ qua các số hạng cấp 2):

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g z_{\text{bề mặt}} + \frac{P_0}{\rho} = B,$$

nghĩa là $\omega\phi_0 \sin(kx - \omega t) + g z_{\text{bề mặt}} + \dfrac{P_0}{\rho} = B$, độc lập với x.

Như vậy, ta phải viết:

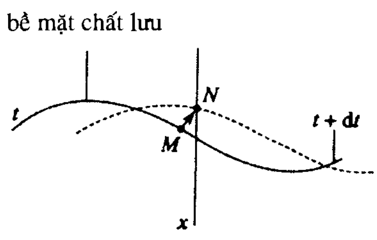
$$z_{\text{bề mặt}} = -\frac{\omega}{g}\phi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Dáng đi của bề mặt này (với sự thể hiện các quỹ đạo) được biểu diễn trên hình 49 ở những thời điểm kế tiếp, cách đều nhau. Ta thấy rõ là có một sóng bề mặt (hình sin) đang lan truyền.

4.8.6. Nghiên cứu vận tốc sóng

Ta cho rằng đại lượng B này giữ nguyên cùng một giá trị đối với hai vị trí của một hạt chất lưu thuộc bề mặt trên, ở hai thời điểm gần nhau: M ở thời điểm t và N ở thời điểm $t + \delta t$ (*h*.50).

Như vậy, ta buộc phải đặt $\overrightarrow{MN} = \mathrm{d}\overrightarrow{M} = \vec{v}(M,t)\delta t$.



H.50. *M và N đều thuộc một quỹ đạo chất lưu trên bề mặt của nó.*

• Ta giới hạn ở cấp 1 và bỏ qua số hạng có v^2.

• M ở thời điểm t và N ở thời điểm $t + \delta t$ biểu diễn các điểm của mặt thoáng chất lưu. Vì ta bỏ qua các lực căng bề mặt, nên áp suất ở đó bằng áp suất khí quyển P_0. Như vậy ta được:

$$B = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{M,t} + gz_M + \frac{P_o}{\rho} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{N,t+\delta t} + gz_N + \frac{P_0}{\rho}.$$

• M và N là hai vị trí gần nhau của cùng một hạt chất lỏng, vậy:

$$z_N = z_M + w(M,t)\delta t = z_M + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{M,t}\delta t,$$

do đó:

$$\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{N,t+\delta t} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{M,t}\right] + g\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{M,t}\delta t = 0,$$

số hạng giữa các móc biểu thị vi phân của hàm $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$, nghĩa là:

$$\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{M,t}\delta t + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).d\vec{M}\right] + g\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{M,t}\delta t = 0 \quad \text{với } d\vec{M} = \vec{v}(M,t)\delta t.$$

Số hạng $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).\vec{v}(M,t)$, là cấp hai, nên có thể bị loại, và:

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{M,t} + g\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{M,t} = 0.$$

Hệ thức này (gần đúng) được xác minh tại mọi điểm của bề mặt, vậy là cả ở $z = 0$, nghĩa là: $-\omega^2\phi(x,0,t) + kg\phi(x,0,t) = 0$ do đó $\omega^2 = kg$, vậy $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

Ta thu được các sóng trọng lực mô tả hiện tượng sóng lừng (ta sẽ trở lại hệ thức tán sắc này trong *chương* 6). Bước sóng λ biểu diễn chu kỳ không gian của các sóng lừng theo phương (Ox).

Ta nhận thấy rằng đối với các sóng lừng mà khoảng cách giữa hai đỉnh kế tiếp (bước sóng) bằng 80m, thì vận tốc c vào khoảng 11 m.s^{-1}; với $\lambda = 20\text{m}$, thì vận tốc đó giảm đi một nửa, nghĩa là c = 5,5 m.s^{-1}.

Biểu thức vận tốc này cho phép ta viết:

$$z_{\text{bề mặt}} = -\frac{\omega}{g}\phi_0\sin(kx - \omega t) = -\frac{k}{\omega}\phi_0\sin(kx - \omega t).$$

<u>*Chú ý:*</u>

$z_{\text{bề mặt}}$ ở đây là một biến Lagrange, sao cho:

$$\frac{\partial z_{\text{bề mặt}}}{\partial t} \approx \omega(x,0,t), \; hay \; \frac{\omega^2}{g}\phi_0\cos(kx - \omega t) = k\phi_0\cos(kx - \omega t).$$

điều này là đúng, vì $\omega^2 = gk$.

ĐIỀU CẦN PHẢI NHỚ

■ GIẢ THIẾT VỀ CHẤT LƯU LÝ TƯỞNG

• Lực bề mặt

Theo giả thiết về chất lưu lý tưởng, ta bỏ qua các lực nhớt: các lực bề mặt tiếp tuyến triệt tiêu.

Bao giờ ta cũng bỏ qua các lực căng bề mặt và năng lượng liên kết với chúng. Như vậy, áp suất bao giờ cũng là một hàm liên tục của các toạ độ không gian.

• Một phần tử chất lưu thể tích $d\tau$, khối lượng dm chịu tác dụng của các lực biểu diễn khối lượng hay thể tích theo biểu thức:

$$d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_v d\tau \text{ với } \vec{f}_v = \rho \vec{f}_m .$$

Đối với các lực trọng trường, thì: $\vec{f}_v = \rho\vec{g}$ với $\vec{f}_m = \vec{g}$.

• Đương lượng thể tích và đương lượng khối lượng

Các đương lượng thể tích và khối lượng của các áp suất, có khởi điểm bề mặt, được biểu thị dưới dạng:

• đương lượng thể tích: $\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$;

• đương lượng khối lượng: $\vec{f}_m = -\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho}$.

Các đương lượng thể tích và đương lượng khối lượng đều không thể dùng được để tính công của các áp suất.

Các đương lượng thể tích và đương lượng khối lượng của các lực nhớt, có khởi điểm bề mặt, được biểu thị dưới dạng:

• đương lượng thể tích: $\vec{f}_v = \eta\Delta\vec{v}$;

• đương lượng khối lượng: $\vec{f}_m = \dfrac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$.

■ PHƯƠNG TRÌNH EULER

Phương trình EULER được viết $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{\text{m, totale}}$.

Các biểu thức khác nhau của phương trình EULER đối với một chất lỏng lý tưởng là:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho} ;$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right] = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, P}{\rho} ;$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}}\, P .$$

■ CÁC HỆ THỨC BERNOULLI

Ta nhận được dạng đơn giản nhất của hệ thức BERNOULLI: $\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$ trong toàn chất lỏng với các giả thiết mạnh nhất: dòng chảy phải rất đồng nhất, không thể nén được, dừng và không xoáy.

Các dạng khác nhau của phương trình BERNOULLI	dòng chảy hướng áp $\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi(P)$	Dòng chảy đồng nhất không thể nén được $\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right)$
Dòng chảy dừng	$\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \varphi(P) = \text{cte}$ dọc theo một đường dòng	$\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$ dọc theo một đường dòng
dòng chảy không xoáy ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$)	$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \varphi(P)\right] = \text{cte}$ trong toàn chất lưu	$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \frac{P}{\rho}\right] = \text{cte}$ trong toàn chất lưu
dòng chảy không xoáy và dừng	$\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \varphi(P) = \text{cte}$ trong toàn chất lưu	$\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \frac{P}{\rho} = \text{cte}$ trong toàn chất lưu

• Như vậy có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI đơn giản nhất:

$$\rho\frac{v^2}{2} + P + e_{Pm} \approx \text{cte}$$

cho một chất lưu có thể nén được, trong chừng mực mà vận tốc dòng chảy vẫn còn rất nhỏ so với vận tốc lan truyền âm thanh trong chất lưu này, trong cùng những điều kiện của thí nghiệm.

• Trong một tia đồng tốc ở không khí tự do, thì áp suất đều, bằng áp suất tồn tại trong môi trường "ngoài". Ta thừa nhận kết quả này với mọi tia ở không khí tự do.

■ HIỆU ỨNG VENTURI

Các miền tiết diện nhỏ, như vậy có vận tốc lớn, cũng là những miền có áp suất thấp.

■ CÔNG THỨC TORRICELLI

Công thức TORRICELLI có dạng:

$$v^2 = 2gh$$

Nó tương ứng với vận tốc phun của một chất lưu ở ngang mức một lỗ hở phía trên có chất lưu chiều cao h.

$\mathcal{B}$ài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Trường áp suất trong dòng chảy một hướng

Trong một dòng chảy một hướng nằm ngang, vận tốc có dạng $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$. Các lực thể tích duy nhất được xét là các lực trọng trường (trục (Oy) là trục thẳng đứng đi lên).

Chứng minh rằng trường áp suất, cắt ngang dòng chảy nằm ngang, tuân theo các định luật tĩnh học các chất lưu.

2 ★Hệ thức BERNOULLI và nguyên lí thứ nhất của nhiệt động học

Một chất lưu được coi như một khí lí tưởng đang ở dòng chảy dừng, không xoáy và đẳng entropi.

1) Chứng minh rằng dòng chảy là hướng áp.

2) Từ đó suy ra rằng phương trình BERNOULLI có dạng: $\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + h = \text{cte}$, trong đó h là entanpi (trên đơn vị) khối lượng của chất lưu.

3) Chứng tỏ rằng hệ thức này thực sự được xác minh đối với một chất lưu bất kì đang ở dòng chảy đẳng entropi và dừng.

3 Vận tốc truyền âm trong không khí

Không khí được coi như một khí lí tưởng, có tỷ số γ, khối lượng phân tử M, nhiệt độ ở trạng thái nghỉ T_0 và áp suất ở trạng thái nghỉ P_0. Bằng cách sử dụng các giả thiết cổ điển kết hợp với việc nghiên cứu các sóng âm, hãy biểu thị vận tốc truyền âm trong không khí biến đổi theo các dữ liệu trên.

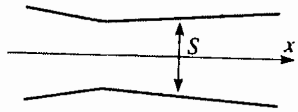
Dữ liệu: $\gamma = 1{,}4$; $T_0 = 298\text{K}$; $M = 29.10^{-3}\text{kg}$; $P_0 = 10^5\ \text{Pa}$.

So sánh nó với vận tốc truyền âm trong nước mà đối với nó $\chi_s = 5.10^{-10}\ \text{Pa}^{-1}$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

4 ★Định lí HUGONIOT

Một chất khí lí tưởng đang ở dòng chảy một chiều ổn định trong một ống dẫn có một trục tròn xoay, tiết diện S biến đổi được.



Tương ứng với độ biến thiên nguyên tố dS của tiết diện thì có các độ biến thiên dP của áp suất P, dρ của khối lượng riêng ρ, dv của vận tốc v, dh của entanpi (trên đơn vị) khối lượng h và dT của nhiệt độ T của chất khí.

1) Biểu thị hệ thức giữa dS, dρ và dv.

2) Dòng chảy được giả thiết là đẳng entropi, hãy xác định hệ thức liên kết dP, dρ và vận tốc c của âm thanh trong chất khí. Liên kết dh, dP, và ρ với nhau.

3) Trong ống dẫn, chất khí không thực hiện bất kì một sự trao đổi năng lượng nào với bên ngoài. Từ đó suy ra hệ thức gắn dh và dv.

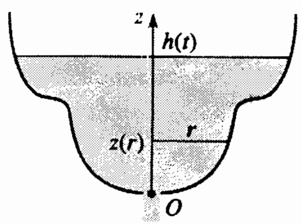
4) Từ các kết quả trên, suy ra một hệ thức trực tiếp giữa dS và dv có sự tham gia của vận tốc truyền c: hệ thức này cấu thành định lí HUGONIOT.

5) Chất khí giãn nở trong ống dẫn, vận tốc vào trong ống dẫn của chất khí là nhỏ so với vận tốc truyền sóng c. Chứng minh rằng tiết diện của ống dẫn thoạt tiên phải giảm (ống hội tụ). Thực ra, tiết diện này đi qua một cực tiểu (ống hội tụ - phân kì), còn được gọi là cổ thắt. Bình luận về giá trị của vận tốc sau cổ thắt.

5 Thời gian tháo cạn một bể chứa

1) Tính thời gian tháo cạn T của một bể chứa có dạng hình trụ, chiều cao H và bán kính R, hoàn toàn chứa đầy một chất lưu lí tưởng chảy qua một lỗ hở tròn bán kính r ở đáy hình trụ.

Dữ liệu: $R = 10\text{cm}$, $r = 0{,}5$ cm, $H = 50\text{cm}$.



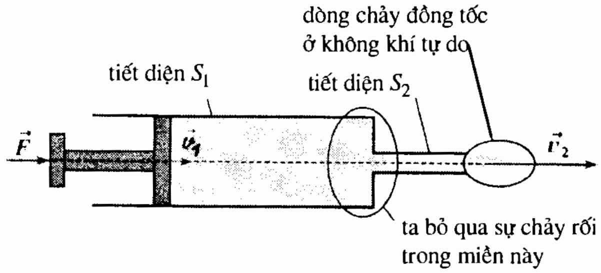
2) Bể chứa không còn là hình trụ nữa, nhưng luôn luôn có một trục tròn xoay thẳng đứng. Vậy phương trình $z = f(r)$ của một đường sinh phải như thế nào để chiều cao của chất lưu còn lại trong bể chứa phải tỷ lệ với thời gian trôi chảy ?

Tìm áp dụng của một hệ như thế ?

6 Lực tác dụng lên một ống tiêm

Một ống tiêm gồm một vật có tiết diện không đổi S_1 và một kim mà đầu mút có tiết diện $S_2 (S_2 \ll S_1)$.

Ống tiêm này đựng một chất lỏng có khối lượng riêng ρ được phun ra bằng cách tỳ lên một pittông di động không ma sát. Tìm lực mà một thao tác viên phải tác dụng lên pittông để bảo đảm phun ra một lưu lượng thể tích D_v ?



7 ★★Sự biến đổi của một bong bóng rỗng

Trong một chất lưu đồng nhất không thể nén được ở trạng thái nghỉ, xuất hiện một bong bóng rỗng hình cầu, bán kính ban đầu a_0. Ta bỏ qua các lực trọng trường và thừa nhận tính liên tục của áp suất ở mặt phân cách trống rỗng - chất lưu (do vậy ta bỏ qua các lực căng bề mặt). Chất lưu được giả thiết là nằm yên ở vô cực, ở áp suất đều P_0.

Hãy xác định khoảng thời gian T để sau đó bong bóng biến mất.

Dữ liệu:

$$a_0 = 5\ \text{mm}, \rho = 10^3\ \text{kg.m}^{-3}\quad \text{và}\quad I = \int_0^1 \frac{x^3}{1-x^3}dx \approx 1{,}29.$$

8 ★Hiệu ứng MAGNUS

1) Một dòng chảy ổn định, không thể nén được, đều, được đặc trưng bởi vận tốc $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, ở xa một hình trụ bất động, trục (Oz) và bán kính a.

Nhắc lại biểu thức của trường các vận tốc xung quanh hình trụ này (*xem chương* 2).

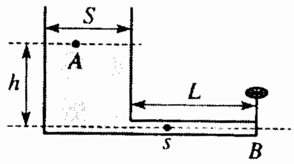
2) Bây giờ hình trụ đang quay xung quanh trục cố định của nó. Sự quay này gây ra ở phía ngoài hình trụ một trường vận tốc bổ sung có dạng $\vec{v} = \dfrac{\omega a^2}{r}\vec{e}_\theta$.

a) Hãy biểu diễn, đối với các giá trị khác nhau của ω, bản đồ các đường dòng của chất lưu, bằng cách xác định các điểm dừng hay các điểm vận tốc triệt tiêu.

b) Xác định áp suất $P(a, \theta)$ ở mọi điểm của hình trụ và từ đó suy ra lực tác dụng bởi chất lưu lên hình trụ trên đơn vị dài của nó.

c) Tính lưu thông Γ của trường các vận tốc của chất lưu dọc theo một đường cong kín bất kì bao quanh hình trụ và biểu thị lực nói trên theo Γ.

9 Sự tháo cạn ở chế độ không dừng



Để hiểu rõ hiệu lực của phép tính gần đúng về một chế độ dừng khi nghiên cứu sự tháo cạn một bể chứa, người ta đưa ra mô hình không dừng sau đây.

Lỗ hở bể chứa được nối với một kênh nằm ngang chiều dài L, tiết diện không đổi s (rất nhỏ so với tiết diện S của bể chứa) trong đó vận tốc chất lưu có dạng $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$. Ở thời điểm t = 0, van được mở tại B cho phép chất lưu chảy đi. Sự khởi động vận tốc của chất lưu được nghiên cứu với các giả thiết sau:

- độ cao h trong bể chứa biến đổi rất ít trong pha quá độ này ($s << S$) ;
- gia tốc cục bộ của chất lưu chỉ lớn ở trong kênh và một miền nhỏ của bể chứa ở gần lỗ hở.

1) Chứng minh rằng $\vec{v}$ chỉ phụ thuộc t trong kênh.

2) Xác định phương trình vi phân mà $v(t)$ tuân theo.

3) Hãy tích phân phương trình này bằng cách đưa ra một vận tốc giới hạn v_1.

4) Đánh giá thời gian mà sau đó v chỉ sai lệch v_1 cỡ 5%. *Dữ liệu:* h = 2m và L = 1m.

5) Dưới ánh sáng của các kết quả này, hãy bình giải tính hiệu lực của công thức TORRICELLI.

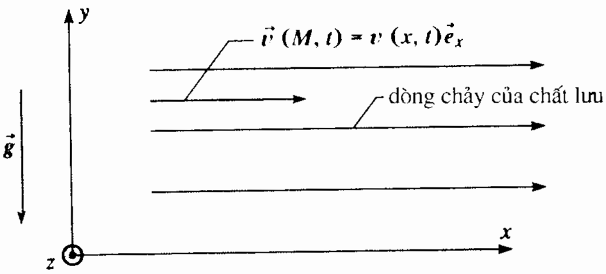
LỜI GIẢI

1 *Phương trình EULER được viết:* $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t}\vec{u}_x + \rho v\dfrac{\partial v}{\partial x}\vec{u}_x = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P$.

Vế thứ nhất có hình chiếu triệt tiêu trên các trục (Oy) và (Oz) trực giao với các đường dòng. Khi chiếu trên các trục này, phương trình EULER quy về:

- *chiếu trên (Oy):* $0 = -\rho g - \dfrac{\partial P}{\partial y}$;
- *chiếu trên (Oz):* $0 = \dfrac{\partial P}{\partial z}$.

Như vậy, ta nhận được các định luật thuỷ tĩnh học trong một mặt phẳng thẳng đứng, vuông góc với các đường dòng.



2 1) *Phương trình về sự biến đổi của chất khí được xác định bởi định luật* LAPLACE $PV^{\gamma} = \text{cte}$ *(biến đổi đẳng entropi, nghĩa là đoạn nhiệt và thuận nghịch, của một khí lí tưởng), hay dưới dạng khối lượng* $Pu^{\gamma} = \text{cte}$, *trong đó u là thể tích riêng (thể tích trên đơn vị khối lượng) của chất lưu. Vả lại* $u = \dfrac{1}{\rho}$ *và định luật trở thành:*

$$P\rho^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma} \text{ nhờ đó ta được: } \rho = \rho_0\left(\frac{P_0}{P}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Ta lại tìm thấy các tính chất của một dòng chảy hướng áp: ρ *chỉ phụ thuộc P (hay ngược lại).*

2) *Người ta tìm f(P) dưới dạng* $\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}(f(P))$.

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \frac{P_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}P^{-\frac{1}{\gamma}}\overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{P_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{\text{grad}}\left(P^{-\frac{1}{\gamma}+1}\right).$$

Mặt khác định luật LAPLACE *cũng được viết:* $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte} = P_0^{1-\gamma}T_0^{\gamma}$,

do đó: $P^{1-\frac{1}{\gamma}} = P_0^{1-\frac{1}{\gamma}}\dfrac{T}{T_0}$. *Lúc đó suy ra* $\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \dfrac{P_0}{T_0\rho_0}\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{\text{grad}}\,T$.

Khi sử dụng định luật các chất khí lí tưởng (KLT) dưới dạng khối lượng : $P_0 = \rho_0 rT_0$, *trong đó r là hằng số khối lượng của các KLT, và chú ý rằng* $c_p = \dfrac{r\gamma}{\gamma-1}$ *thì ta được:*

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\rho} = c_p\overrightarrow{\text{grad}}\,T.$$

Biết rằng đối với một khí lí tưởng $h = c_p(T - T_0) + h_0$, *ta được:*

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}(c_pT) = \overrightarrow{\text{grad}}(h).$$

Phương trình Bernoulli có đúng dạng $\dfrac{v^2}{2} + e_{Pm} + h = \text{cte}$.

3) *Đối với một chất lưu bất kì, ta có thể viết theo các đại lượng thuộc đơn vị khối lượng (sự đồng nhất nhiệt động đối với một chất lưu bất kì):*

$$\mathrm{d}h = u\,\mathrm{d}P + T\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}P}{\rho} + T\,\mathrm{d}s.$$

Đối với một dòng chảy đẳng entropi $\mathrm{d}s = 0$.

Ta hãy xem xét một dòng chảy dừng: giả sử cho một phân tử chiều dài bất kì, ta có:

$$\mathrm{d}h = \overrightarrow{\text{grad}}\,h.\,\mathrm{d}\vec{l} \text{ và } \mathrm{d}P = \overrightarrow{\text{grad}}\,P.\,\mathrm{d}\vec{l},$$

do đó $\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}.\mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{\mathrm{d}P}{\rho} = \mathrm{d}h = \overrightarrow{\text{grad}}h.\,\mathrm{d}\vec{l}$. *Biểu thức này vẫn có hiệu lực cho dù* $\mathrm{d}\vec{l}$ *thế nào, vậy nên ta có:*

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}\,h.$$

Đối với một dòng chảy dừng, đẳng entropi của một chất lưu bất kì, ta có:

$$\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + h = \text{cte}.$$

3 *Ta trở lại công thức* $c = \sqrt{\dfrac{1}{\rho_0\chi_s}}$ *với* $\chi_s = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s$. *Nhưng, đối với một khí lí tưởng, thì sự biến đổi đẳng entropi được thể hiện bởi* $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$ *(phương trình* LAPLACE*) mà vi phân loga cho ta:*

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} - \gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0 \text{ hay } \chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma P_0}.$$

Như vậy, ta có biểu thức vận tốc âm thanh: $c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT_0}{M}} \approx 346\,\text{m.s}^{-1}$.

Với nước $c = 1400\,\text{m.s}^{-1}$, *nghĩa là một trị số lớn gấp bốn lần trong không khí.*

4 1) *Sự bảo toàn lưu lượng khối ở chế độ ổn định cho ta:*

$$\rho Sv = \text{cte}, \text{ từ đó } \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}S}{S} + \frac{\mathrm{d}v}{v} = 0 \quad (1).$$

2) *Theo giáo trình* $c = \sqrt{\dfrac{1}{\rho_0\chi_s}}$ *với* $\chi_s = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s$, *do đó* $c^2 = \left(\dfrac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s$, *nhờ đó, ta còn có thể viết đối với sự biến đổi này:* $\mathrm{d}P = c^2\mathrm{d}\rho$.

- $\mathrm{d}h = \dfrac{\mathrm{d}P}{\rho} + T\,\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}P}{\rho} = c^2\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$ (2).

3) *Theo nguyên lí thứ nhất (xem bài tập 2):*

$$\mathrm{d}h + \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \mathrm{d}h + v\,\mathrm{d}v = 0 \ (3) \ \textit{(nghĩa là } h + \frac{v^2}{2} = \text{cte}\textit{).}$$

4) *Các hệ thức (2) và (3) cho phép viết* $c^2\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -v\,\mathrm{d}v$, *do đó (khi dùng hệ thức (1)), ta được định lí* HUGONIOT:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} + \frac{\mathrm{d}v}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0.$$

5) *Ở đầu ống dẫn,* $v < c$, *và* v *tăng khi S giảm: ống dẫn thoạt tiên là hội tụ. Sau đó, ta phải xem xét hai trường hợp:*

• *S đi qua một cực tiểu (cổ thắt của ống dẫn), v luôn luôn nhỏ hơn c và v đi qua một cực đại: dòng chảy bao giờ cũng dưới vận tốc âm thanh;*

• *nếu $v = c$ ở cổ thắt, thì còn có thể có $\mathrm{d}v = 0$ (trường hợp trên), nhưng cũng có $\mathrm{d}v > 0$: lúc đó, vận tốc tiếp tục tăng trong phần phân kì của ống dẫn: dòng chảy trở thành siêu âm.*

5 1) *Người ta bỏ qua miền chảy rối: do vậy dòng chảy giữa các điểm A và B biểu diễn một dòng chảy dừng (nếu $v \ll R$), không rối của chất lưu không thể nén được. Công thức BERNOULLI cho:*

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\rho}.$$

Ở B, ta có một dòng chảy đồng tốc ở không khí tự do (nghĩa là không có ứng lực bên ngoài), do vậy $P_B = P_{\text{extérieur}} = P_A$.

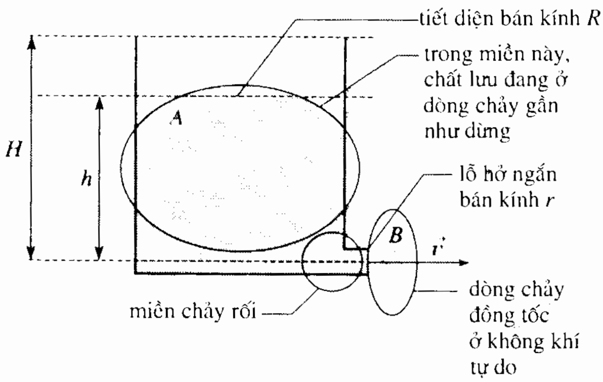
Sự bảo toàn lưu lượng thể tích (chất lưu không thể nén được) giữa mặt thoáng mà tại đó vận tốc là V, và đáy của bể chứa, cho phương trình $R^2V = r^2v$: hơn nữa $z_A - z_B = h$.

Như vậy, ta được $v = \sqrt{2gh\left(1-\dfrac{r^4}{R^4}\right)}$, công thức này tương ứng với công thức TORRICELLI ($v = \sqrt{2gh}$) trong trường hợp mà $R \gg r$.

Cuối cùng $V = -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ (h giảm khi t tăng). Từ đó :

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh} \text{ hay } -\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t\text{, do đó } \int_0^H \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\,T.$$

vậy $T = \dfrac{R^2}{r^2}\sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 128\,\text{s}$.



2) *Nếu h(t) tỷ lệ với thời gian trôi chảy, thì $V = -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \text{cte} = K$. Khi viết sự bảo toàn lưu lượng thể tích giữa đáy và mặt thoáng, vòng tròn bán kính R thay đổi được, thì ta có:*

$$R^2K = r^2\sqrt{2gh}\text{, do đó } h = \frac{K^2}{2gr^4}R^4 = AR^4.$$

Đây cũng là phương trình tổng quát của đường sinh của bể chứa: $z = Ar^2$.

Một thang thẳng đứng có thể được chia độ tuyến tính theo thời gian thành thử có thể đo được dễ dàng (đồng hồ nước)

6 *Ở chế độ ổn định, với một chất lưu không thể nén được, thì có sự bảo toàn lưu lượng thể tích: $S_1v_1 = S_2v_2 = D$.*

Hệ thức BERNOULLI được viết giữa một điểm của pittông và một điểm của tiết diện ở lối ra (bài toán được giả thiết là một chiều, và các lực trọng trường là không đáng kể) cho ta:

$$P + \rho\frac{v_1^2}{2} = P_0 + \rho\frac{v_2^2}{2}$$

trong đó P là áp suất ở ngang mức pít tông và P_0 là áp suất khí quyển (tia đồng tốc ở lối ra ống tiêm), do đó:

$$F = (P - P_0)S_1 = \frac{\rho S_1 v_1^2}{2}\left(\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1\right)\text{, hay } F = \frac{\rho D_v^2}{2S_1}\left(\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1\right).$$

Chú ý:

Lực mà ta vừa tính ở trên, biểu diễn lực tác dụng lên pít tông, biết rằng thân của ống tiêm được giữ cố định.

7 *Bài toán có tính đối xứng cầu. Bong bóng rỗng sắp vỡ ra biến mất và vận tốc của chất lưu được kí hiệu:*

$$\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_r$$

Do tính liên tục, $v(r,t)_{r=a(t)} = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ và $v(r,t)_{r\to\infty}$ tiến tới 0.

Dòng chảy là không thể nén được, nên sự bảo toàn lưu lượng thể tích bắt buộc thông lượng của $\vec{v}$, đi qua một mặt cầu bán kính r, phải là một hằng số ở thời điểm t cho trước. Cho $\vec{v}(r,t) = \dfrac{f(t)}{r^2}\vec{e}_r$ (xem chương 2).

Biết rằng tại $r = a$, $v = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, nhờ đó ta có $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dfrac{f(t)}{a^2}$ hay $f(t) = a^2\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, từ đó:

$$\vec{v}(r,t) = \frac{a^2(t)}{r^2}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r.$$

Ta có thể dùng phương trình EULER được tích phân trên một đường dòng (xuyên tâm) đi từ bán kính bong bóng đến vô cực, với $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r$. Tính chất không thể nén được kéo theo:

$$\int_A^B \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{\rho}\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,P\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \left[\frac{P}{\rho}\right]_A^B,$$

do đó :

$$\int_{r=a}^{\infty}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right]_a^{\infty} = 0.$$

Thế nhưng $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{\partial v(r,t)}{\partial t}\mathrm{d}r = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}r$, *từ đó :*

$$\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{P_0}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0\text{, hay } a\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{P_0}{\rho} + \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0.$$

Phương trình sẽ giải được khi thay biến số $y(a)=\left(\frac{da}{dt}\right)^2$ và lúc đó có dạng:

$$a\frac{dy}{da}+\frac{2P_0}{\rho}+3y=0 .$$

Phương trình này có các biến số tách ra được. Nếu kể đến các điều kiện ban đầu ($a=a_0$, $v(a,0)=0$), thì khi tích phân phương trình đó ta được:

$$\left(y+\frac{2P_0}{3\rho}\right)a^3=a_0^3\frac{2P_0}{3\rho} .$$

Khi trở lại $y(a)=\left(\frac{da}{dt}\right)^2$ và chú ý rằng $\frac{da}{dt}<0$, thì ta được:

$$\frac{da}{dt}=-\left(\frac{2P_0}{3\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^3-1\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Cuối cùng, sau phép tích phân mới, ta được:

$$T=a_0\left(\frac{3\rho}{2P_0}\right)^{\frac{1}{2}}I=0{,}9\text{ ms} .$$

<u>Chú ý:</u>

Vận tốc $\vec{v}(r,t)=\frac{a^2(t)}{r^2}\frac{da(t)}{dt}\vec{e}_r$ xuất phát từ một thế ϕ : $\phi(r,t)=-\frac{a^2(t)}{r}\frac{da(t)}{dt}$.

Hệ thức BERNOULLI trong trường hợp một dòng chảy không thể nén được, không xoáy, phụ thuộc thời gian có dạng:

$\frac{\partial\phi(r,t)}{\partial t}+\frac{v^2(r,t)}{2}+\frac{P(r,t)}{\rho}=\text{cte}$ ở thời điểm t đã cho: nhờ đó khi khai triển $-\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{da}{dt}\right)+\frac{v^2(r,t)}{2}+\frac{P(r,t)}{\rho}=\text{cte}$ và do vậy:

$$-\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{da}{dt}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{P(a,t)}{\rho}=\frac{P_0}{\rho}$$

là hệ thức đồng nhất với hệ thức trước đây.

8 1) Trường các vận tốc được thiết lập ở chương 2, biểu diễn dòng chảy của chất lưu xung quanh hình trụ khi nó không quay, được xác định bởi:

$$\vec{v}_1=v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r-v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_\theta .$$

2) a) Người ta có thể chồng chất lên đó một trường các vận tốc, gây ra bởi chuyển động quay của hình trụ, dưới dạng:

$$\vec{v}_2=\frac{\omega a^2}{r}\vec{e}_\theta .$$

Trường này rất coi trọng điều kiện về tính không thể nén được của chất lưu (vì $\operatorname{div}\frac{\vec{e}_\theta}{r}=0$), và các điều kiện ở giới hạn: $v_\infty=0$ và $v_r(a)=0$ (vận tốc xuyên tâm của chất lưu triệt tiêu trên hình trụ).

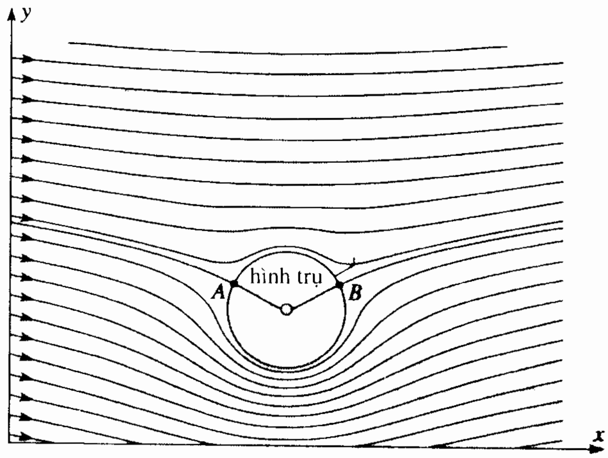
Ta thu được trường tổng hợp:

$$\vec{v}=v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\omega a^2}{r}-v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\right)\vec{e}_\theta .$$

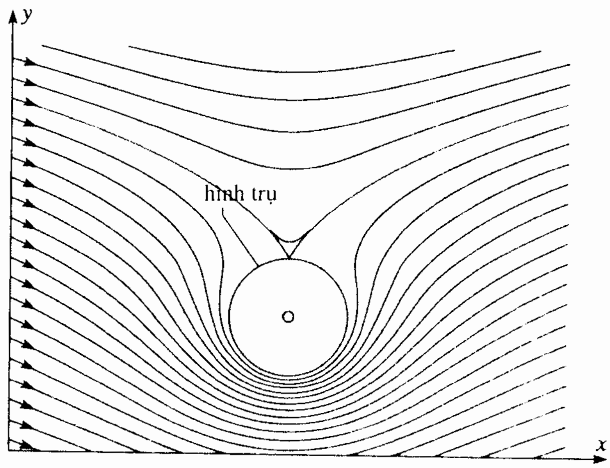
Các điểm dừng cần tìm phải sao cho $\vec{v}=0$, từ đó:

$r=a$ và $\omega a-2v_0\sin\theta=0$, suy ra $\sin\theta=\frac{\omega a}{2v_0}$ nếu $\omega<\frac{2v_0}{a}$.

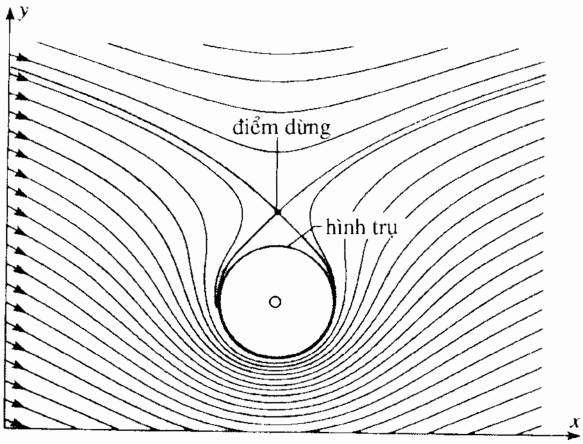
Lúc đó tồn tại hai điểm dừng A và B trên hình trụ, đối xứng với trục (Oy) (xem sơ đồ).



Tương ứng với trường hợp đặc biệt $\omega=\frac{2v_0}{a}$, thì có một điểm dừng trên hình trụ ở $\theta=\frac{\pi}{2}$ (xem sơ đồ).



Nếu $\omega=\frac{2v_0}{a}$, thì lúc đó tồn tại một điểm có vận tốc triệt tiêu ở bên ngoài hình trụ (xem sơ đồ).



b) *Việc ứng dụng hệ thức* BERNOULLI *giữa một điểm ở rất xa hình trụ* $P = P_0$, $\upsilon = \upsilon_0$ *và một điểm ở trên bề mặt hình trụ* $(P(a,\theta), \upsilon(a,\theta))$ *cho ta*

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{\upsilon_0^2}{2} = \frac{P(a,\theta)}{\rho} + \frac{(\omega a - 2\upsilon_0 \sin\theta)^2}{2},$$

từ đó $P(a,\theta) = P_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - (\omega a - 2\upsilon_0 \sin\theta)^2)$.

Phân bố áp suất này sinh ra trên hình trụ các áp lực mà lực tổng hợp hướng theo trục (Oy), về phía các y giảm.

Ta tính được nó xuất phát từ lực nguyên tố:

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\vec{n}\,\mathrm{d}S\text{, do đó } \mathrm{d}F_y = -P\,\mathrm{d}S\sin\theta$$

với $\mathrm{d}S = h\,a\,\mathrm{d}\theta$ *đối với một đoạn hình trụ chiều dài h bất kì.*

Các số hạng đồng đều của P không đóng góp gì vào lực tổng hợp đó, vậy còn lại.

$$F_y = -\int_0^{2\pi} 2\rho\,\upsilon_0(\omega\,a\sin\theta - \upsilon_0\sin^2\theta)\sin\theta\;h\,a\,\mathrm{d}\theta = -2\pi\,\omega\,a^2\rho\,\upsilon_0 h,$$

$$\text{hay } \frac{F_y}{h} = -2\pi\,\omega\,a^2\rho\,\upsilon_0.$$

Như vậy, ta được một lực tỷ lệ với ω.

c) *Chỉ mình trường* $\vec{\upsilon}_2$ *(trường các xoáy nước) biểu hiện một lưu thông khác không, còn trường* $\vec{\upsilon}_1$ *là không xoáy theo cấu trúc. Lưu thông* Γ *của vectơ* $\vec{\upsilon}$ *trên một vòng tròn bán kính* $R > a$ *thì bằng:*

$$\Gamma = \int_{\substack{\text{vòng tròn}\\ \text{bán kính } R}} \vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\substack{\text{vòng tròn}\\ \text{bán kính } R}} \vec{\upsilon}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi}\frac{\omega a^2}{R}R\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\,\omega\,a^2$$

(với $\mathrm{d}\vec{l} = R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$*)*

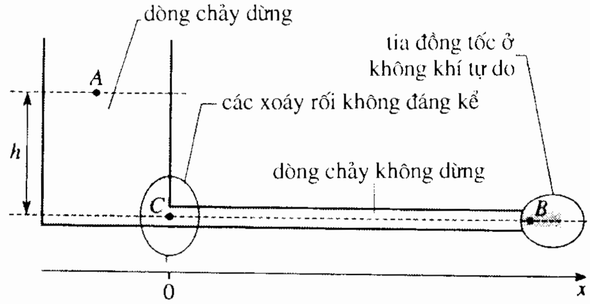
Do đó $\frac{F}{h} = -\Gamma\rho\,\upsilon_0$. *Sự tồn tại của một lực trực giao với dòng chảy (lực nâng) có liên quan trực tiếp với sự tồn tại của một lưu thông khác không của trường các vận tốc của chất lưu xung quanh vật cản.*

9 1) *Chất lưu không thể nén được nên* $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0$ *quy gọn về* $\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = 0$.

Vận tốc chất lưu là đều trong kênh; đó cũng là vận tốc phun của chất lưu tại B, kí hiệu là $\upsilon(t)$.

2) *Phương trình* EULER *được tích phân trên một đường dòng đi từ một điểm A của mặt thoáng bể chứa đến điểm B:*

$$\int_A^B \frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \frac{P_B}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{\upsilon(t)^2}{2} - \frac{\upsilon_A^2}{2} - gh = 0.$$



Vả lại $P_B = P_A = P_0$. *Với các giả thiết của đề bài, thì* v_A *là không đáng kể đối với v(t):* $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}$ *chỉ khác không duy nhất trên phần CB, điều này cho phép viết:*

$$\int_A^B \frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_C^B \frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^L \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = L\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}.$$

do đó $L\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{\upsilon(t)^2}{2} - gh = 0$.

Ta thực sự nhận được một nghiệm riêng của phương trình này bằng cách cho $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 0$ *và* $\upsilon_1^2 = 2gh$ *: công thức* TORRICELLI.

Khi đưa υ_1 *vào phương trình vi phân, thì ta được:*

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon_1^2 - \upsilon^2} = \frac{\mathrm{d}t}{2L}.$$

3) *Sau khi lấy tích phân và kể đến điều kiện* $\upsilon(0) = 0$, *ta được:*

$$\upsilon(t) = \upsilon_1 \operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right) \text{ với } \tau = \frac{2L}{\upsilon_1}.$$

4) *Thời gian t tìm thấy phải sao cho* $\operatorname{th}\left(\frac{t}{\tau}\right) = 0{,}95$, *nghĩa là* $t \approx 0{,}74\tau \approx 0{,}12$ s.

5) *Pha quá độ để khởi động dòng chảy chất lưu, mà trong thời gian đó vận tốc phun khác với giá trị tiệm cận đã cho bởi công thức* TORRICELLI, *thì ở đây đủ nhỏ để công thức này có thể áp dụng được tại mọi thời điểm ngay khi mà* $t \gg \tau$.

ĐỘ NHỚT CỦA MỘT CHẤT LƯU

5

Mở đầu

Cho đến nay, ta mới giới hạn ở trường hợp các chất lưu lý tưởng, chỉ chịu tác dụng duy nhất của các áp lực. Mô hình này chỉ có thể mô tả một cách thỏa đáng một vài loại dòng chảy rất đặc biệt. Thật vậy, không có sự khác nhau giữa dầu và nước, trong khi hai chất lỏng này lại không chảy theo cách thức như nhau trong một ống có tiết diện nhỏ.

Trong chương 4, ta đã xét rất nhanh khái niệm chất lưu nhớt. Ta nhớ lại một cách đơn giản là, khi có một chất lưu nhớt đang chảy tầng, thì các dòng chất lưu nhanh có khuynh hướng tăng tốc các dòng chậm, và ngược lại, các dòng chậm có khuynh hướng làm chậm các dòng nhanh. Như vậy, có một sự khuếch tán động lượng trong các chất lưu này.

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu khái niệm độ nhớt (cũng gắn với các hiệu ứng "trượt" trong một chất lưu), cùng với mọi hệ quả của nó.

Điều đó cho phép ta hiểu sâu sắc hơn về các dòng chảy của các chất lưu thực, được nghiên cứu trong chương 6.

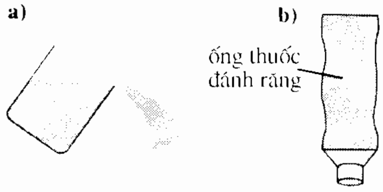
MỤC TIÊU

- Mở đầu định tính về độ nhớt.
- Mở đầu định lượng về độ nhớt trong một số trường hợp cơ bản.
- Sự đánh giá cấp độ lớn của các đại lượng đặc trưng.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học các chất lưu.
- Động lực học các chất lưu lý tưởng.

Chúng ta biết rằng các sản phẩm như nước sốt mayone, bơ, thuốc đánh răng nhão và các loại sơn là các chất lưu mà động thái của chúng lúc chảy (nếu có!) khác với động thái của các sản phẩm như nước, dầu, mật, glixêrin (*h*.1). Chúng ta sẽ "phân loại" các chất lưu khác nhau này trong *chương* 6 §**9**, tuy nhiên, ta cũng nói rõ là, trong chương này ta chỉ nghiên cứu các chất lưu (gọi là chất Newton) như là nước, dầu, mật và glixêrin.



H.1. *Dầu và thuốc đánh răng nhão là hai chất lưu "khác nhau".* **a.** *Dầu (hay nước) chảy ra khỏi cốc.* **b.** *Mặc dù lộn ngược, (bột nhão) thuốc đánh răng vẫn không trút ra khỏi ống.*

1 Thí nghiệm với một chất lưu thực

1.1. Thí nghiệm

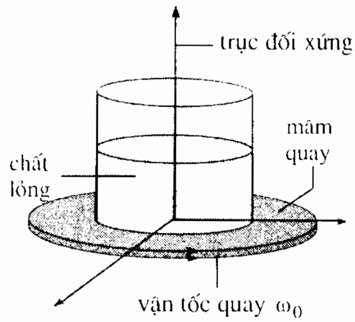
Một bình hình trụ, chứa đầy nước và lúc đầu đứng yên, được khởi động quay xung quanh trục của nó (*h*.2). Muốn nghiên cứu sự khởi động của chất lưu, ta có thể thả nổi các hạt nhỏ lên chất lỏng và quan sát chuyển động của chúng. Lúc đó ta nhận thấy các kết quả như sau (*h*.3).

• Do tính đối xứng của hệ ta thấy, chuyển động của các hạt (do vậy của các phần tử tương ứng của chất lỏng) là chuyển động tròn.

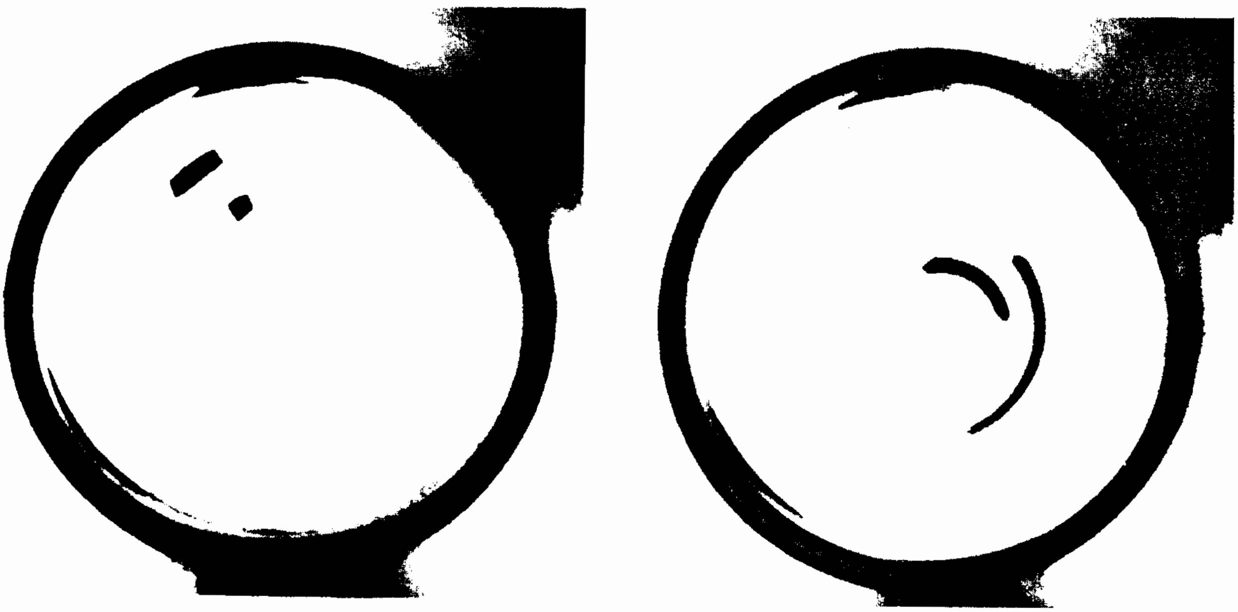
• Ở ngoại biên, vận tốc nhanh chóng trở nên gần với vận tốc của thành bình, mặc dù trong miền trung tâm, chất lỏng chỉ bắt đầu chuyển động dần dần.

• Chuyển động *lan truyền* từ ngoại biên về trung tâm. Khi đạt tới trạng thái dừng, sau vài phút, thì hệ chất lỏng quay đều, và mọi phần tử của nó đều là đứng yên đối với bình chứa.

• Nếu chuyển động quay của bình ngừng đột ngột, thì chất lỏng sẽ trở lại dần dần về một trạng thái dừng có vận tốc triệt tiêu. Các hạt ở ngoại biên bị hãm trước tiên, và sự thay đổi chuyển động lan truyền từ ngoại biên về trung tâm.



H.2. *Hệ một chất lỏng đang quay.*



H.3. *Đo vận tốc. Bình chứa có đường kính d* = 9,5 cm *và chiều cao h* = 14 cm. *Vận tốc quay của nó là* ω_0 = 45 vòng.phút^{-1}. *Hai bức ảnh được chụp lần lượt lúc* 30 *giây và* 150 *giây sau khi bắt đầu quay. Thời gian lộ sáng là* $\frac{1}{2}$*s*. *Một chi tiết gắn với bình chứa vẽ một cung tròn có độ mở* 135°.

Chú ý:

- *Nếu bình chứa không được định tâm hoàn hảo, hay nếu mâm quay không có một chuyển động hoàn toàn phẳng, thì chuyển động thực sự sẽ không tròn.*
- *Hơn nữa, các hạt nổi còn phải ở cách quãng: nếu hai hạt quá gần nhau, thì các lực do sức căng bề mặt sẽ làm thay đổi quỹ đạo của chúng.*

1.2. Nội lực của tính nhớt

Phương trình EULER, thể hiện hệ thức cơ bản của động lực học đối với một chất lưu lý tưởng, liệu có được nghiệm đúng trong thí nghiệm này ?

Tính đối xứng của chuyển động quay buộc phải có trong tọa độ trụ:

$$\vec{v} = v(r, z, t)\vec{e}_\theta \text{ và } P = P(r, z, t).$$

Nếu phương trình EULER được nghiệm đúng, thì ta sẽ có:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g}\,.$$

Bằng phép chiếu, phương trình này cho:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \qquad -\rho\frac{v^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}; \qquad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\,.$$

Phương trình thứ nhất, dĩ nhiên, là không tương thích với thí nghiệm. Vì lý do không có các lực trực xuyên tâm, nên chất lưu lý tưởng vẫn đứng yên đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

Các phần tử của chất lưu chỉ chịu tác dụng thẳng đứng của trọng lực, và các nội lực. Vì theo tính đối xứng, thì gradiên áp suất là xuyên tâm, nên gia tốc trực xuyên tâm chỉ có thể được giải thích bởi các nội lực khác, khác biệt với các áp lực, mà cho đến nay ta đã không kể đến, và ta gọi là các *lực nhớt*.

Các lực này càng lớn hơn khi chất lưu có tính nhớt (theo nghĩa thường dùng). Nếu bình đang quay lại chứa đầy dầu, thì chế độ ổn định sẽ được đạt tới nhanh hơn nhiều.

1.3. Tính liên tục của vận tốc

Trong thí nghiệm nêu trên (*xem* §**1.1**), các phần tử chất lưu ở gần thành bình quay gần như tức thời với cùng vận tốc như của thành bình và trong chế độ quá độ, vận tốc quay thay đổi liên tục từ ngoại biên về trung tâm. Thông thường, tất cả các thí nghiệm đều chứng tỏ rằng:

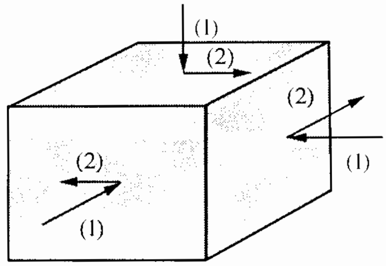
- vận tốc dòng chảy của một chất lưu thực bao giờ cũng là một hàm liên tục của thời gian và các toạ độ không gian;
- các phần tử chất lưu tiếp xúc với một vật rắn đều có một vận tốc tương đối triệt tiêu đối với vật rắn đó ở mọi thời điểm.

Chú ý:

Mẫu chất lưu lý tưởng không cấm tính bất liên tục không gian của vận tốc. Hai màng mỏng (hay hai dòng) của một chất lưu lý tưởng có thể trượt trên nhau với các vận tốc khác nhau.

1.4. Độ nhớt và sự tiêu tán năng lượng

Nếu, trong thí nghiệm đã mô tả, chất lưu là lý tưởng, thì nó vẫn tiếp tục quay vô hạn sau khi mâm quay dừng và động năng của nó vẫn không đổi. Thông thường, một chất lưu nhớt đang chảy, trái ngược với một chất lưu lý tưởng, sẽ tiêu tán cơ năng chừng nào mà vận tốc tương đối của các phần tử của nó không triệt tiêu.



H.4. *Các áp lực* (1) *và ứng suất trượt* (2).

2 Lực nhớt (hay ứng suất trượt) trong chất lưu thực

2.1. Ứng suất trượt và áp suất

Trong mô hình chất lưu lý tưởng, ta đã quy lực tiếp xúc giữa hai phần tử chất lưu về một lực duy nhất là áp lực, vuông góc với mặt phân cách của chúng. Các quan sát trên các chất lưu thực chỉ có thể được giải thích bằng một thành phần tiếp tuyến của lực tiếp xúc, gọi là *ứng lực trượt* (*h*.4).

Mặt khác, tất cả các thí nghiệm đều chứng tỏ rằng phương trình tĩnh học các chất lưu $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{f}_{\text{vol}}$, chỉ liên quan đến áp suất, được áp dụng như nhau đối với các chất lưu nhớt và không nhớt. Các nội lực của sự trượt, thực ra, chống lại sự biến dạng của các phần tử chất lưu, và triệt tiêu khi các phần tử này không còn biến dạng nữa theo thời gian.

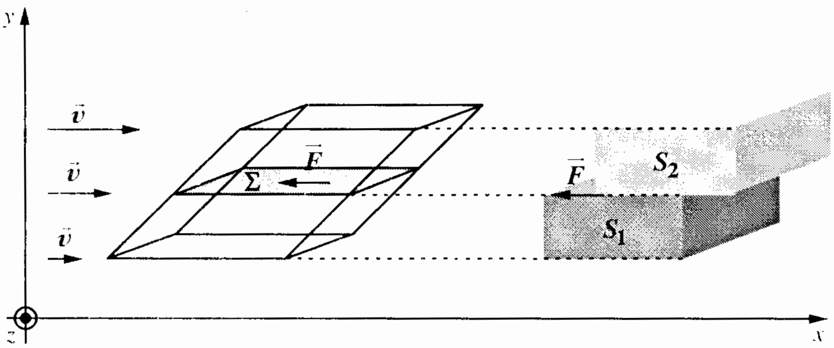
Các lực này, ngược với các vận tốc tương đối của các phần tử chất lưu, có công suất toàn phần âm, điều này tương ứng đúng với sự *tiêu tán* cơ năng.

2.2. Trường vận tốc một hướng có dạng: $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$

Ta hãy nghiên cứu trường hợp đơn giản, trong đó các mặt phẳng song song với (Ox, Oz) trượt lên nhau. Trường hợp này, *thoạt nhìn* có vẻ không thực tế, nhưng lại có thể là một sự gần đúng tốt của một dòng chảy tầng thực, nếu các kích thước theo (Ox) và (Oz) đều rất lớn so với bề dày theo (Oy).

Vì $\text{div}(\vec{v}) = 0$, nên dòng chảy này có thể là dòng chảy của một chất lưu không thể nén được.

Ta hãy xét hai phần tử chất lưu, S_1 và S_2, phân cách bởi mặt Σ, có diện tích S và vuông góc với (Oy) (*h*. 5).



H.5. *v ở đây là một hàm tăng dần của y. Ứng lực trượt $\vec{F}$ thực hiện bởi S_1 lên S_2, chống lại sự biến dạng của hệ được cấu thành bởi S_1 và S_2, hay, nói cách khác, ngăn cản S_2 trượt trên S_1.*

Lực trượt, được thực hiện qua Σ, bởi S_1 lên S_2, tiếp tuyến với Σ. Lực đó phải chống lại sự trượt của S_2 đối với S_1. Như vậy nó phải:

- tỷ lệ với S (diện tích của Σ);
- có chiều ngược với $\vec{e}_x$ nếu $v(y, t)$ là một hàm tăng dần của y.

Nếu lực trượt là một hàm tuyến tính của đạo hàm $\frac{\partial v}{\partial y}$, thì chất lưu được gọi là chất lưu Newton (ta sẽ định nghĩa chính xác hơn khái niệm này trong *chương* 6§9). Mô hình này rất thỏa đáng đối với đa số các chất lưu, và chúng ta sẽ cho nó một sự chứng minh vi mô sơ lược đối với các chất khí.

Đối với một dòng chảy một hướng, như là $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, thì lực bề mặt tiếp tuyến $\vec{F}$, gọi là *lực trượt*, hay *lực nhớt*, tác động qua một mặt diện tích S pháp tuyến với $\vec{e}_y$, sẽ được mang bởi $\vec{e}_x$.
Chuẩn của lực này bằng:

$$F = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S.$$

Lực $\vec{F}$ này có khuynh hướng làm chậm lại các dòng nhanh và tăng tốc các dòng chậm.
Hệ số η, gọi là *hệ số nhớt* của chất lưu có thể, với tính gần đúng cao, được coi như một hằng số đặc trưng của chất lưu ở một nhiệt độ cho trước.
Đơn vị của hệ số nhớt trong hệ đơn vị quốc tế (SI) là Pa.*s*.

Trên *hình* 6, ta đã đưa ra cỡ độ lớn của hệ số nhớt η đối với các chất lưu khác nhau.

Chú ý:

- *Rota của vận tốc ở đây khác không. Ta nhắc lại rằng tính chất xoáy của dòng chảy không gắn với độ cong của các đường dòng, nhưng lại gắn với sự vận động của các phần tử chất lưu.*
- *Định luật này là một trong nhiều định luật gần đúng tuyến tính nối liền nguyên nhân (đạo hàm khác không của vận tốc) và kết quả (lực trượt). Định luật OHM $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ($\vec{j}$: mật độ dòng thể tích và $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V$: điện trường) là một ví dụ khác.*
- *Các lực nhớt có khuynh hướng, trong trường hợp này, làm đồng đều vận tốc: hãm lại các phần nhanh hơn và tăng tốc các phần chậm hơn.*
- *Hệ số nhớt có thể thay đổi mạnh theo nhiệt độ.*

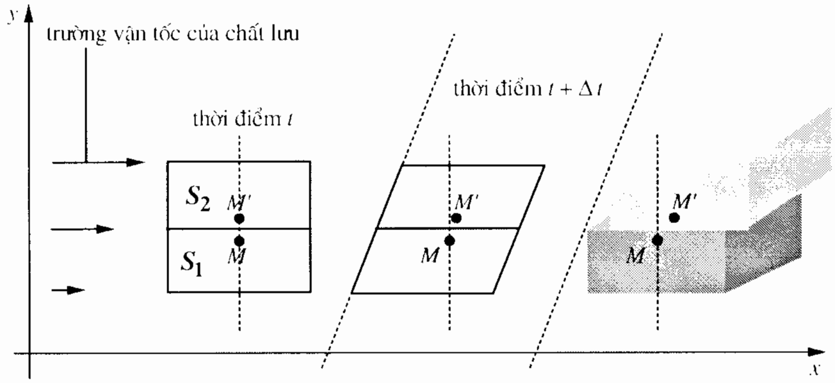
Ta hãy khảo sát ý nghĩa vật lý của số hạng "$\frac{\partial v}{\partial y}$".

Trong tình huống đã mô tả (dòng chảy một hướng $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$), thì đại lượng "$\frac{\partial v}{\partial y}$" biểu diễn độ biến thiên của *vận tốc tương đối* giữa hai lớp chất lưu *phẳng* và kề nhau (*h*.7a).

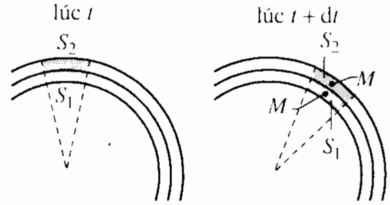
Trên *hình* 7b, các vận tốc của các phần tử chất lưu khác nhau được xác định bởi $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$. Vì $\vec{\omega}$ là một vectơ không đổi, nên không có chuyển động tương đối của S_2 đối với S_1: như vậy, không có các lực nhớt, mặc dù $\frac{\partial v}{\partial r} \neq 0$! Trường hợp này sẽ được xem xét trong *áp dụng* 1, bằng cách đưa vào vận tốc trượt tương đối.

chất lưu	hệ số nhớt
không khí	10^{6} ($1,7.10^{-5}$ trong các điều kiện bình thường)
nước	10^{-3}
dầu	1
glixêrin	1
mỡ	10^{3}

H.6. *Cỡ độ lớn của một số hệ số nhớt* η (ra Pa.s).



H.7a. *M và M' không cùng trên một pháp tuyến với mặt phân cách giữa* S_1 *và* S_2. *Có sự trượt của* S_2 *trên* S_1 *; vậy tồn tại các lực nhớt, vì vận tốc tương đối của* S_2 *đối với* S_1 *khác không.*

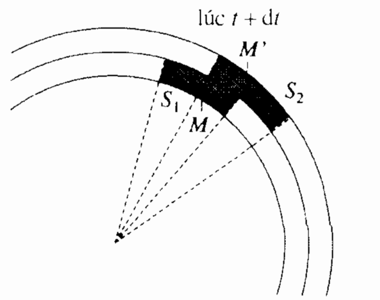


H.7b. *Trong quá trình quay mà* $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ *, thì M và M' vẫn ở trên cùng một pháp tuyến với mặt phân cách giữa* S_1 *và* S_2. *Không có sự trượt của* S_2 *đối với* S_1 *: không tồn tại các lực nhớt, mặc dù* $\vec{v}(M) \neq \vec{v}(M')$.

Tóm lại, công thức "đơn giản" cho ta lực dưới dạng $dF = \eta \dfrac{\partial v}{\partial y} dS$ chỉ có hiệu lực đối với dòng chảy một hướng, nghĩa là dòng chảy phẳng.

2.3. Đương lượng thể tích của lực trượt

Ta biết rằng áp lực (trên đơn vị) *diện tích* thì tương đương với một lực thể tích bằng $-\mathrm{grad}\, P$. Ta hãy tìm một đương lượng như thế đối với lực trượt hay lực nhớt.



H.7c. *Có sự trượt của* S_2 *đối với* S_1, *vậy có sự dịch chuyển tương đối của* S_2 *đối với* S_1 *: nên tồn tại các lực nhớt.*

2.3.1. Trường vận tốc: $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$

Xét một hình hộp nguyên tố có thể tích: $d\tau = S dy$ (*H*.8). Hình hộp chịu tác dụng của hai lực trượt qua các mặt diện tích S của nó:

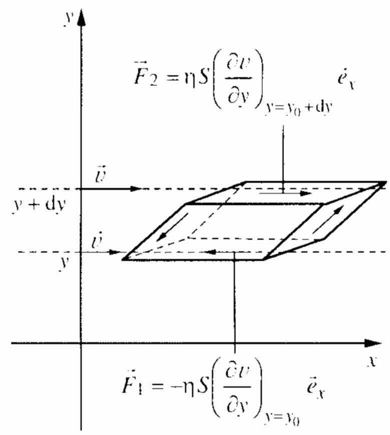
$$\vec{F_1} = -\eta S \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=y_0} \vec{e}_x \text{ và } \vec{F_2} = \eta S \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=y_0+dy} \vec{e}_x .$$

Các lực trượt trên các mặt pháp tuyến với $\vec{e}_z$ triệt tiêu (không có trượt hay cắt). Dòng chảy bất biến đối với sự tịnh tiến song song với (Ox), các lực (cắt) trượt tác dụng lên S, qua hai mặt nói trên, trái ngược nhau.

Vậy tổng hợp các lực trượt là:

$$\vec{F}_{\text{cis}} = -\eta S \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=y_0} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=y_0+dy}\right] \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} S\, dy\, \vec{e}_x ,$$

điều này tương ứng với một lực thể tích $\vec{f}_{\text{cis}_{\text{vol}}} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$.



H.8. $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$. *Các lực trượt trên một thể tích nguyên tố trong trường hợp dòng chảy một hướng.*

2.3.2. Trường hợp một dòng chảy không thể nén được: sự suy rộng

Trong trường hợp đặc biệt này, dòng chảy là không thể nén được, vì $\mathrm{div}\, \vec{v} = 0$. Hơn nữa, ta có $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x = \Delta \vec{v}$ (laplaxiên vectơ của $\vec{v}$). Ta thừa nhận sự suy rộng sau đây.

Trong một chất lưu không thể nén được, các lực trượt đều tương đương với một lực thể tích mà biểu thức có dạng $\vec{f}_{\text{cis}_{\text{vol}}} = \eta \Delta \vec{v}$.

Áp dụng 1

Trường vận tốc $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_\theta$.

Người ta muốn xác định các lực trượt bằng cách tiến hành tương tự như với dòng chảy phẳng đã nghiên cứu trước đây.

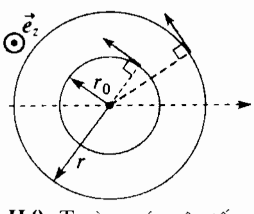
Dòng chảy của chất lưu (giả thiết là chất lưu Newton và có độ nhớt η) có thể được mô tả như một tập hợp các hình trụ lồng vào nhau, quay với các vận tốc khác nhau (h.9). Với mỗi giá trị của r, ta có thể xác định một vận tốc góc quay $\omega(r,t) = \dfrac{v(r,t)}{r}$ (người ta dùng các tọa độ trụ).

1) *Tìm dạng của hàm số $\omega(r,t)$ khi các nội lực của sự trượt triệt tiêu ?*

2) *Tìm vận tốc tương đối:*

$$\vec{v}_{\text{rel}} = v_{\text{rel}}\vec{e}_\theta$$

của một điểm của hình trụ bán kính r đối với hình trụ bán kính r_0 ?



H.9. Trường các vận tốc : $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_\theta$.

3) *Tương tự như với trường hợp của dòng chảy phẳng, hãy biểu thị lực trượt tác dụng bởi chất lưu trong lên chất lưu ngoài, qua một mặt nguyên tố diện tích dS pháp tuyến với $\vec{e}_r$, biến đổi theo đạo hàm $\dfrac{\partial v_{\text{rel}}}{\partial r}$, rồi biến đổi theo $\dfrac{\partial \omega}{\partial r}$, và cuối cùng xuất phát từ hàm số $v(r,t)$.*

4) *Xác định đương lượng thể tích của mômen đối với trục (Oz) của các lực trượt (lực cắt). Chứng minh rằng biểu thức này tương thích với lực trượt thể tích bằng $\vec{f}_{\text{cis}_{\text{vol}}} = \eta\Delta\vec{v}$.*

1) Các lực trượt phải triệt tiêu khi tất cả các hình trụ đều quay như một vật rắn duy nhất, nghĩa là nếu ω đều.

2) Theo hệ thức cộng các vận tốc:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_e$$

thì vận tốc (kéo) theo $\vec{v}_e$, tại một điểm của hình trụ bán kính r, bằng vận tốc của một điểm ở cùng một vị trí, cố định đối với hình trụ bán kính r_0:

$$\vec{v}_e = \omega(r_0)\, r\,\vec{e}_\theta .$$

Từ đó suy ra $\vec{v}_{\text{rel}} = (\omega(r) - \omega(r_0))r\,\vec{e}_\theta = v_{\text{rel}}\vec{e}_\theta$.

3) Ta lấy hai hình trụ kề nhau bán kính r và $r + \mathrm{d}r$, vận tốc tương đối nguyên tố lúc đó là:

$$\mathrm{d}\vec{v}_{\text{rel}} = [(\omega(r+\mathrm{d}r) - \omega(r))]r\,\vec{e}_\theta = \left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)_r \mathrm{d}r\, r\,\vec{e}_\theta ,$$

hay $\dfrac{\partial v_{\text{rel}}}{\partial r} = r\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right)_r = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right)$.

Ta lưu ý rằng biểu thức này rất khác với $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, có hiệu lực duy nhất chỉ đối với các dòng chảy một hướng.

Lực trượt, tỷ lệ với dS và với $\dfrac{\partial v_{\text{rel}}}{\partial r}$, có dạng:

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\eta\frac{\partial v_{\text{rel}}}{\partial r}\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}S = -\eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}S = -\eta r\frac{\partial\left(\dfrac{v}{r}\right)}{\partial r}\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}S .$$

<u>*Chú ý:*</u>

- *Ta lại tìm được đúng lực $\mathrm{d}\vec{F} = -\eta\dfrac{\partial v}{\partial r}\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}S$ khi r tiến tới vô cực.*
- *Đối với một phần tử bề mặt không vuông góc với $\vec{e}_r$, thì biểu thức của lực trượt phức tạp hơn rất nhiều.*

4) Xét một thể tích nguyên tố có các kích thước dr, r dθ và dz (h.10).

Chỉ mình các lực trượt, tác dụng qua hai mặt pháp tuyến với $\vec{e}_r$, là có một mô men khác không đối với trục (Oz).

- Qua mặt trong bán kính r, ta có:

$$\mathrm{d}\vec{F}_1 = -\eta r\left(\frac{\partial\left(\dfrac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)_{r=r} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\theta = -\eta\left(r^2\frac{\partial\left(\dfrac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)_{r=r}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\theta .$$

hay một mô men:

$$d\mathcal{M}_{1(Oz)} = -\eta\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)_{r=r} d\theta\, dz\,.$$

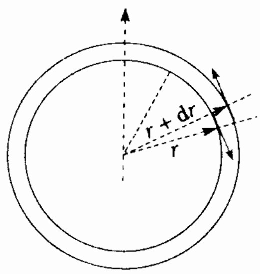
• Qua mặt ngoài bán kính $r + dr$, ta có:

$$d\mathcal{M}_{1(Oz)} = \eta\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)_{r=r_0+dr} d\theta\, dz\,.$$

Tổng cộng ta được:

$$d\mathcal{M}_{(Oz)} = +\eta\frac{\partial\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r} dr\, d\theta\, dz$$

$$= \eta\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r} r\, dr\, d\theta\, dz\,.$$



◀ **H.10.** Các lực trượt.

Như vậy, ta được một mômen trượt thể tích:

$$\mathcal{M}_{\text{cis}_{\text{vol}}} = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r}\,.$$

Giả sử các lực trượt tương đương với lực thể tích $\vec{f}_{\text{cis}} = \eta\,\Delta\vec{v}$.

Mômen áp đặt vào thể tích nguyên tố là:

$$d\mathcal{M}_{(Oz)} = (r\vec{e}_r \wedge \Delta\vec{v})\,.\,\vec{e}_z r\, dr\, d\theta\, dz\,.$$

Đối với dòng chảy này, $\text{div}(\vec{v}) = 0$ và như vậy (*xem chương* 8, các hệ thức liên quan đến các toán tử vectơ) :

$$\Delta\vec{v} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{v})) = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)}{\partial r}\vec{e}_\theta\,.$$

Khi thay $\Delta\vec{v}$ bằng biểu thức này, ta được:

$$d\mathcal{M}_{(Oz)} = r^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)}{\partial r} dr\, d\theta\, dz\,.$$

Sau đó, ta dễ dàng kiểm tra thấy:

$$\frac{\partial\left(r^3\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r} = r^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)}{\partial r}\,.$$

Như vậy cả hai biểu thức của mômen đều đồng nhất.

2.4. Phương trình vi phân của động lực học đối với một chất lưu không thể nén được

Ta sẽ nhận được phương trình này bằng cách thêm vào phương trình EULER lực trượt thể tích.

Trong trường hợp đơn giản của một dòng chảy có dạng $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, ta có thể kiểm tra thấy $(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0}$ (đạo hàm đối lưu của vận tốc triệt tiêu); gia tốc toàn phần lúc đó trùng với $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ và phương trình vi phân có dạng:

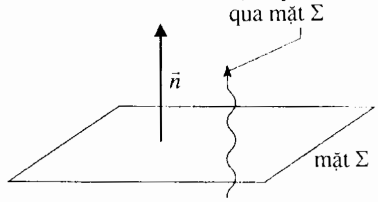
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}\vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_{\text{vol}} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\vec{e}_x\,.$$

Phương trình vi phân của động lực học, hay phương trình NAVIER - STOKES đối với các chất lưu không thể nén được là:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{vol} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v} .$$

Trong trường hợp đơn giản của một dòng chảy một hướng có dạng $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$ thì phương trình vi phân trở thành:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t}\vec{e}_x = \vec{f}_{vol} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\vec{e}_x .$$



H.11. *Đại lượng dG xuyên qua mặt Σ theo $\vec{n}$ trong thời gian dt được biểu thị theo lưu lượng D_G bởi :*

$$dG_{\text{qua}\,\Sigma} = D_G dt .$$

Từ nay trở đi, ta sẽ giả thiết là không có lực thể tích nào khác ngoài trọng lực. Nếu Z biểu diễn độ cao, thì ta có thể đặt:

$$\hat{P} = P + \rho g Z$$

($\hat{P}$ đôi khi được gọi là áp suất vận động hay áp suất hiệu dụng), và:

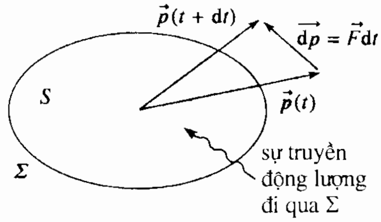
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \hat{P} + \eta \Delta \vec{v} .$$

<u>*Chú ý:*</u>

• *Trong trường hợp tổng quát của một chất lưu nhớt có thể nén được, thì còn phải đưa vào các số hạng khác. Thực ra, tính gần đúng của chất lưu không thể nén được thường là đủ khi vận tốc của dòng chảy rất nhỏ so với vận tốc âm.*

• *Ta sẽ không đề cập đến cách giải phương trình NAVIER – STOKES ngoài trường hợp đơn giản của dòng chảy một hướng.*

▶ **Để tập luyện: bài tập 2.**



H.12. *Động lượng $d\vec{p}$ đi qua mặt kín Σ trong thời gian dt được biểu thị theo $D_p = \vec{F}$ bởi :*

$$d\vec{p} = \vec{F}dt .$$

3 Độ nhớt và sự truyền động lượng

3.1. Lưu lượng động lượng

Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa về lưu lượng.

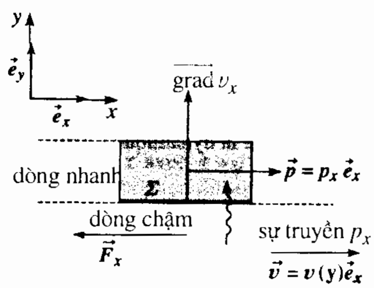
Giả sử G là một đại lượng quảng tính nào đó (như số hạt, năng lượng, khối lượng, v.v...). Lưu lượng D_G của G (còn gọi là thông lượng của G), đi qua một mặt có định hướng Σ, thì bằng số lượng G đi qua Σ trong đơn vị thời gian (*h*.11) :

$$D_G = \frac{dG_{\text{đi qua}\,\Sigma}}{dt} .$$

Đối với một hệ S có động lượng $\vec{p}$ chịu tác dụng của một lực $\vec{F}$, thì ta có phương trình $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Lực $\vec{F}$ biểu diễn động lượng *được vận chuyển* trong đơn vị thời gian từ ngoài về phía S.

Một lực bề mặt có thể được giải thích như một lưu lượng động lượng đi xuyên qua mặt này(*h*.12).

Thành thử, trong dòng chảy $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$ thì lực trượt tác dụng bởi S_1 lên S_2 (*h*.5) thì bằng lưu lượng D_{p_x} của thành phần p_x của động lượng được chuyển vận qua Σ (*h*.13).



H.13. *Động lượng dp_x đi qua mặt Σ trong thời gian dt được biểu thị theo F_x bởi :*

$$dp_x = F_x dt .$$

Một dòng nhanh bị làm chậm lại bởi một dòng chậm, p_x giảm và do vậy $F_x < 0$.

3.2. Khuếch tán động lượng

Chúng ta đã chứng tỏ rằng độ nhớt có tác dụng, trong một dòng chảy một hướng, tăng tốc các phần tử chậm và làm chậm các phần tử nhanh. Như vậy, đây là vấn đề của một sự *vận chuyển nội tại* động lượng, biểu thị các đặc trưng của *hiện tượng khuếch tán.*

Sự vận chuyển này là bất thuận nghịch và nó được thực hiện theo chiều hướng đồng đều hóa vận tốc. Do vậy, qua các khía cạnh đó, ta có thể so sánh sự vận chuyển nội tại này với sự truyền nhiệt, hay với hiện tượng khuếch tán các hạt.

Mật độ động lượng thể tích bằng $\rho\vec{v}$.

Lúc đó, ta có thể viết, với ρ là một hằng số, lực trượt dưới dạng (*h*.13) :

$$D_{p_x} = F_{\text{cis}} = -\frac{\eta}{\rho} S \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} .$$

Nếu ta đặt $\vec{e}_y = \vec{n}$ (vectơ đơn vị pháp tuyến với mặt Σ diện tích *S*), thì phương trình này trở thành:

$$D_{p_x} = -\frac{\eta}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho v_x).\vec{n}S .$$

Hệ số $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ gọi là *độ nhớt động lực.*

Ta sẽ lại tìm thấy một phương trình dạng này trong tất cả các hiện tượng khuếch tán (*h*.14).

• Định luật FICK (*xem H–Prépa. Nhiệt động học, năm thứ nhất*) biểu thị sự khuếch tán hạt mà nồng độ là không đồng nhất. Nếu n^* biểu diễn mật độ hạt, thì lưu lượng hạt, đi qua một mặt diện tích *S* với vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{n}$, được xác định bởi:

$$D_{\text{hạt}} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}(n^*).\vec{n}S .$$

• Định luật FOURIER (*xem H–prépa, nhiệt động học, năm thứ hai, chương* 1) mô tả các sự truyền nhiệt bằng sự dẫn nhiệt. Nếu *T* là nhiệt độ, thì lưu lượng năng lượng (hay thông lượng nhiệt Φ), được truyền qua một mặt bằng sự dẫn nhiệt, được xác định bởi:

$$\Phi = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}(T)\,.\,\vec{n}S .$$

Nếu, đối với mọi phần tử của chất lưu, các lực khác, ngoài các lực trượt, cân bằng nhau, thì mật độ động lượng thể tích chỉ còn có thể biến đổi bằng khuếch tán. Do (§**3.1**) ta đã thấy rằng, nếu hơn nữa, dòng chảy lại có dạng:

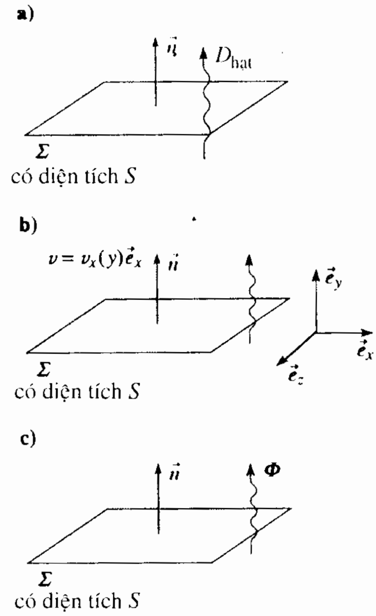
$$\vec{v} = v\,(y,t)\vec{e}_x ,$$

thì phương trình động lực học được viết:

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t} ,$$

hay $\nu \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ bằng cách đưa vào độ nhớt động lực ν.

Phương trình đạo hàm riêng này là đặc trưng của các hiện tượng khuếch tán. Nói chung không tồn tại nghiệm giải tích đơn giản, mà chỉ có cách giải bằng phương pháp số (*xem H–prépa, nhiệt động học, năm thứ hai, chương* 1) là cho phép tìm được nghiệm cho mỗi trường hợp riêng biệt.



H.14. *Các hiện tượng khuếch tán khác nhau.*

a. *Khuếch tán hạt.*

b. *Khuếch tán động lượng.*

c. *Khuếch tán nhiệt độ.*

Áp dụng 2

Khuếch tán mômen động

Ta trở lại thí nghiệm **§1.1** *và thử xử lý về mặt định lượng.*

Ta hãy xem xét một dòng chảy hình trụ dạng $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_\theta$ *trong một chất lưu không thể nén được có khối lượng riêng* ρ *và độ nhớt* η.

Ta đặt $v(r,t) = \omega(r,t)r$ *và ký hiệu L là mômen động đối với trục (Oz), của chất lưu ở bên trong hình trụ bán kính r.*

1) *Xác định* $D_L(r)$, *là lưu lượng ra của L xuyên qua hình trụ bán kính r.*

2) *Viết phương trình đạo hàm riêng nghiệm đúng bởi* $\omega(r)$.

3) *Một bể chứa hình trụ bán kính a và chiều cao h chứa chất lưu thoạt đầu nằm yên; h rất lớn so với a, điều này cho phép giả thiết dòng chảy có dạng* $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_\theta$.

Ở thời điểm ban đầu, đột nhiên bể chứa quay với vận tốc góc Ω.

a) *Xác định vận tốc chất lưu (trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm) khi đạt tới chế độ ổn định.*

b) *Tính cỡ độ lớn của thời gian thiết lập chế độ ổn định đối với một bể đầy nước* ($\frac{\eta}{\rho} = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}) *và bán kính a = 4,7 cm. So sánh với thí nghiệm mô tả ở đầu chương.*

1) Chất lưu chứa trong hình trụ bán kính r chịu chất lưu phía ngoài tác dụng lên một lực trượt mà mômen đối với trục (Oz) là (*xem áp dụng* 1):

$$\mathcal{M} = 2\pi\, h\eta\, r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}.$$

$L(r, t)$ là mômen động đối với trục (Oz) của chất lưu chứa trong hình trụ bán kính r, nên ta viết được $\frac{\partial L}{\partial t} = \mathcal{M}$.

Hình trụ bán kính r chỉ nhận được mômen động do các lực trượt bề mặt gây ra, vậy $\frac{\partial L}{\partial t}$ biểu diễn một lưu lượng *đi vào* của mômen động.

Mômen động được trao đổi qua bề mặt hình trụ, $\mathcal{M}$ bằng lưu lượng *vào* của mômen động, nên có một lưu lượng ra:

$$D_L = -2\pi\, h\eta\, r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}.$$

2) Ta áp dụng định lý mômen động cho chất lưu nằm giữa các hình trụ bán kính r và r + dr. Mômen động của nó là:

$$\mathrm{d}L = \rho\, 2\pi\, r h\, \mathrm{d}r\, r\, v(r,t) = \rho\, 2\pi\, r^3 h\, \mathrm{d}r\, \omega(r,t).$$

Độ biến thiên dL bằng hiệu số của mômen động đi vào hình trụ bán kính r và mômen động đi ra khỏi hình trụ bán kính r + dr, nghĩa là ta có đẳng thức:

$$2\pi r^3 h\, \mathrm{d}r\, \rho \frac{\partial\omega}{\partial t} = 2\pi\, h\eta \frac{\partial\left(r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}\right)}{\partial r}\mathrm{d}r,$$

hay $\frac{\eta}{\rho}\frac{1}{r^3}\frac{\partial\left(r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}\right)}{\partial r} = \frac{\partial\omega}{\partial t}$.

3) a) Ở chế độ ổn định thì $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) = 0$,

nghĩa là: $\frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{C}{r^3}$ nó chấp nhận các nghiệm:

$$\omega = A + \frac{B}{r^2} \quad \text{với } B = -\frac{C}{2}.$$

Các điều kiện ở giới hạn là $\omega(a) = \Omega$.

$\omega(0)$ không thể là vô hạn, điều đó hàm ý $B = 0$ và do vậy $A = \Omega$. Ở chế độ ổn định, ta lại tìm thấy đúng là chất lưu nằm yên trong hệ quy chiếu của bể chứa.

b) Để xác định thời gian đặc trưng cho chế độ quá độ, ta thực hiện sự thay đổi biến số:

$$\omega = f\Omega;\; r = \xi\alpha \text{ và } t = u\tau \text{ với } \tau = a^2\frac{\rho}{\eta}.$$

Phương trình trở thành $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + \frac{3}{\xi}\frac{\partial f}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Đối với một phương trình đạo hàm riêng như thế, mà các hệ số đều gần đơn vị, thì thời gian đặc trưng (với biến số u) để thiết lập chế độ ổn định vào cỡ 1.

Như vậy τ = 2200 s biểu diễn hằng số thời gian của hệ.

Ta thu được các đường cong trên *hình* 15 bằng tích phân số.

Trên đồ thị nhận được (*h*.15), ta quan sát thấy sau một thời gian cỡ 0,1τ, thì vận tốc bằng 65% giá trị cuối của nó ở $r = 0{,}5a$ và bằng 45% ở $r = 0{,}1a$. Nếu ta lại lấy ảnh chụp thứ hai của hình 3, thì ta đo được gần đúng, đối với khoảng thời gian cỡ 0,07τ.

$$\omega = 0{,}65\omega_0\Omega \quad \text{đối với } r = 0{,}25a,$$

$$\text{và } \omega = 0{,}8\omega_0\Omega \quad \text{đối với } r = 0{,}45a.$$

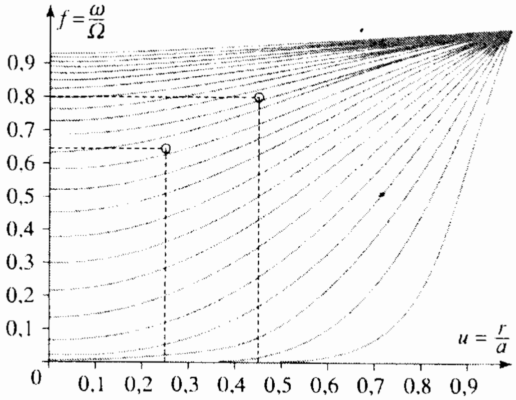
Các kết quả này phù hợp định tính với các kết quả tính toán. Về định lượng, thì cần phải thỏa mãn một giới hạn sai số cỡ 50%, về thời gian nhiều bao nhiêu thì về chiều dài cũng nhiêu bấy nhiêu, để làm trùng hợp hai kết quả trên.

Về điều đó có nhiều lý do:

• độ sâu không phải là vô hạn và chất lưu bị lôi cuốn bởi độ sâu ;

• sự biến dạng của mặt phân cách nước/không khí sử dụng các lực bề mặt mà ta đã không để ý tới;

• bể chứa không được hoàn toàn định tâm. Ta nhận thấy trên phần còn lại của ảnh có hai vòng tròn không hoàn toàn đồng tâm.



H.15. *Tích phân số của phương trình:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

Các kết quả thực nghiệm được minh họa bằng các đường chấm chấm.

3.3. Mô hình vi mô đơn giản đối với các chất khí

Mô hình này được đơn giản hoá rất nhiều, và ta sẽ tìm lại được đúng một lực tỷ lệ với S và với $\frac{\partial v}{\partial y}$, nhưng từ đó, đừng trông chờ đạt giá trị độ nhớt chính xác hơn một cấp.

3.3.1. Mô tả mô hình

• Chất khí được giả thiết ở cân bằng nhiệt động: áp suất P và nhiệt độ T là đồng đều, n là mật độ phân tử hay số phân tử trên đơn vị thể tích, và m là khối lượng một phân tử.

• Trường vận tốc trung bình có dạng $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ (vận tốc của một hạt chất lưu, hay vận tốc trung mô).

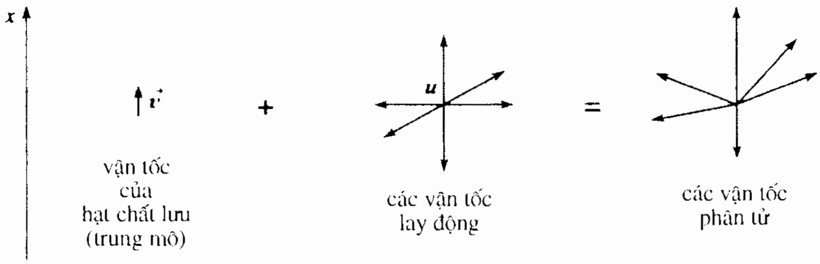
• Để đơn giản hóa, ta giả thiết rằng vận tốc lay động $\vec{u}$ có cùng độ dài u *đối với mọi phân tử*, và phương của nó chỉ có thể song song với các trục. Sự lay động này được phân bố đồng đều theo sáu phương có thể có, vận tốc toàn phần của các phân tử là:

• $v(y)\vec{e}_x + u\vec{e}_x$ đối với 1/6 số phân tử

• $v(y)\vec{e}_x - u\vec{e}_x$ đối với 1/6 số phân tử

• $v(y)\vec{e}_x + u\vec{e}_y$ đối với 1/6 số phân tử, v.v... (*h*.16)

• Nếu l là quãng đường tự do trung bình, thì ta giả thiết là các phân tử đi qua mặt Σ hoành độ y với vận tốc mà chúng có ở $y - l$ (hay ở $y + l$ tùy theo chiều vận chuyển).



H.16. *Các vận tốc của các phân tử.*

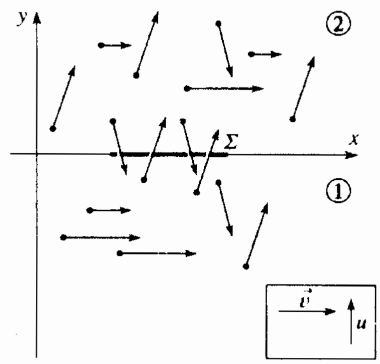
Hai phần chất lưu bị giới hạn bởi mặt Σ, trao đổi các phân tử mà vận tốc hơi khác nhau. Sự trao đổi này tương ứng toàn bộ với một sự vận chuyển động lượng.

3.3.2. Lưu lượng phân tử

Giả sử $D_{N_{1\to 2}}$ là lưu lượng phân tử từ miền ① sang miền ②, nghĩa là số phân tử đi qua Σ trong đơn vị thời gian, theo chiều các y tăng. Các N phân tử đi qua Σ trong thời gian τ đều nằm trong một hình trụ có đáy S và chiều cao $u\tau$, và một trên sáu phân tử có phương đúng cách (*h*.17):

$$N = \frac{1}{6} n S u \tau \quad \text{và} \quad D_{N_{1\to 2}} = \frac{1}{6} n S u \,.$$

Chất lưu ở cân bằng nhiệt động, n và u đều đồng nhất, và $D_{N_{1\to 2}} = D_{N_{2\to 1}}$.



H.17a. *Lưu lượng phân tử $D_{N_{1\to 2}}$ đi qua mặt Σ tương ứng với các hạt mà vận tốc $\vec{u}$ song song với y và cùng chiều.*

3.3.3. Lưu lượng động lượng

Các phân tử được chuyển dời từ miền ① sang miền ② có động lượng mà thành phần $p_{x_1} = m v(y - l)$.

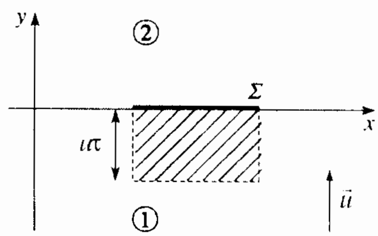
Đối với các phân tử đi theo chiều ngược lại, thì $p_{x_2} = m v(y + l)$.

Lưu lượng động lượng tổng hợp của hai chuyển dời theo chiều ngược nhau đó thì bằng lực trượt:

$$D_{p_x} = F_{\text{cis}} = D_{N_{1\to 2}}(p_{x_1} - p_{x_2}) = \frac{1}{6} m n S u \big(v(y - l) - v(y + l)\big).$$

Vận tốc v của các hạt chất lưu thay đổi rất ít trên khoảng cách cỡ quãng đường tự do trung bình l, nên ta thực hiện một sự khai triển cấp 1, và ta được:

$$F_{\text{cis}} = -\frac{1}{3} n m u l \frac{dv}{dy} S \,.$$



H.17b. *Các N phân tử đi qua Σ từ miền 1 sang miền 2 trong thời gian τ đều ở trong thể tích gạch gạch có đáy S và chiều cao uτ.*

3.3.4. Độ nhớt của một chất khí

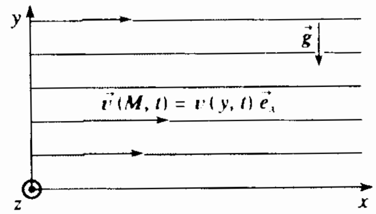
Như vậy mô hình đơn giản này cho ta giá trị η :

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l \,.$$

- Quãng đường tự do trung bình vào cỡ $\frac{l}{n\sigma}$, trong đó σ biểu diễn tiết diện va chạm hiệu dụng (*xem H–Prépa, Nhiệt động học, năm thứ nhất*).

• Nếu ta đồng nhất u với vận tốc toàn phương trung bình $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, thì ta được một biểu thức của η: $\eta \approx \frac{1}{N_A\sigma}\sqrt{\frac{RMT}{3}}$, N_A là số AVOGADRO.

Đối với không khí, nếu ta coi mỗi phân tử như một quả cầu bán kính a gần bằng $3{,}5.10^{-10}$ m, thì σ được viết $\sigma = \pi a^2$. Trong trường hợp này ở 20^oC, ta tìm thấy $\eta = 10^{-5}$ Pa.s (poiseuille), giá trị gần bằng giá trị thực nghiệm ($1{,}8.10^{-5}$ Pa.s.).



H.18. *Dòng chảy của một chất lưu nhớt không thể nén được, do vậy các đường dòng song song với (Ox).*

4 Áp dụng cho vài dòng chảy một hướng và các chất lỏng

4.1. Trường các vận tốc $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$

4.1.1. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp đơn giản này (*h*.18), hệ thức cơ bản của động lực học được thể hiện bởi phương trình vi phân ($P = P(x, y, z, t)$):

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}\vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P - \rho g\vec{e}_y + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\vec{e}_x .$$

Giả sử chất lưu này là không thể nén được. Bằng phép chiếu, ta được:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x};\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad \text{và} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 .$$

Từ đó, ta suy ra $P = -\rho g y + p(x,t)$, với p chỉ phụ thuộc vào x và t. Phép chiếu thứ nhất cho phép ta đặt:

$$F(x,t) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{và} \quad G(y,t) = \rho\frac{\partial v}{\partial t} - \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Vì $F(x, t) = G(y, t)$ đối với mọi giá trị của x, y và t, F và G là đồng nhất và chỉ phụ thuộc thời gian:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = C(t) \text{ với } P(x,y,t) = -\rho g y + p(x,t).$$

Ta sẽ quan tâm đến hai trường hợp đặc biệt độc lập với thời gian $C(t) = 0$ và $C(t) = C_0$.

4.1.2. Trường hợp đặc biệt $C(t) = 0$

Hằng số C bằng không, khi p có cùng một giá trị đối với hai hoành độ khác nhau, nghĩa là $p(x, t) = p(t)$. Trong những điều kiện này, $v(y, t)$ là nghiệm của phương trình khuếch tán một chiều: $\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ nghĩa là:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ (phương trình khuếch tán).}$$

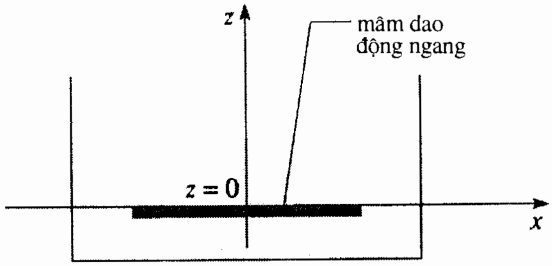
Phương trình này đã được gặp khi nghiên cứu các hiện tượng khuếch tán hạt (*xem H–Prépa, nhiệt động học, năm thứ nhất, chương* 4) và khuếch tán nhiệt (*xem H–Prépa, Nhiệt động học, năm thứ hai, chương* 1).

Dòng chảy này có thể tương ứng với dòng chảy COUETTE giữa hai mặt phẳng vô hạn có các vận tốc khác nhau.

Áp dụng 3

Dao động cưỡng bức

Người ta xem xét, trong một bể chứa đầy một chất lỏng có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η, một mâm dao động có diện tích S và độ cao z = 0. Mâm này dao động ngang, với một vận tốc $\vec{v}_0(t) = v_{0m}\cos(\omega t)\vec{e}_x$ (h.19).



H.19. *Mâm dao động nằm ngang trong một chất lưu nhớt.*

Mâm khá rộng để có thể bỏ qua các hiện tượng xảy ra ở rìa mâm, và ta có thể thừa nhận rằng ở chế độ ổn định, chất lỏng bên trên mâm dao động với vận tốc:

$$\vec{v}(z,t) = v_m(z)\cos[\omega t + \varphi(z)]\vec{e}_x .$$

Người ta cũng giả thiết rằng mực trên của chất lỏng ở "khá xa" mâm và áp suất độc lập với x.

1) *Xác định v (z, t).*

2) *Xác định chiều sâu xuyên thấu của các dao động, và nói rõ giả thiết cuối cùng này.*

1) Áp suất độc lập với x, $v(z, t)$ là nghiệm của phương trình khuếch tán:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} .$$

Ta hãy biểu thị $v(z, t)$ bằng ảnh phức của nó:

$$v(z,t) = \mathcal{R}e(\underline{v}) \text{ với } \underline{v} = v_m \exp[j(\omega t + \varphi(z))]$$

Phương trình khuếch tán trở thành:

$$\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial z^2} = j\alpha^2 \underline{v} \text{ với } \alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}} .$$

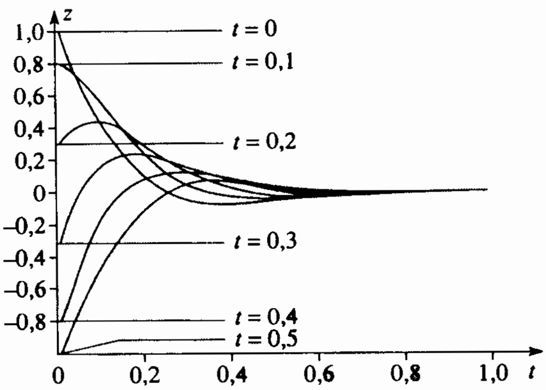
Phương trình vi phân cấp hai này có nghiệm tổng quát:

$$\underline{v} = \left[A\exp\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\alpha z\right) + B\exp\left(-\frac{1+j}{\sqrt{2}}\alpha z\right)\right]\exp(j\omega t) .$$

Môi trường được giả thiết là vô hạn về phía các z dương, các điều kiện ở giới hạn bắt buộc $A = 0$ và $B = v_0$. Khi chuyển qua ký hiệu thực, thì ta được:

$$v(z,t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\alpha z}{\sqrt{2}}\right).$$

Các đường cong trên *hình* 20 biểu diễn vận tốc của chất lưu theo độ sâu z, đối với các giá trị khác nhau của ωt.



H.20. $y = \exp\left(-2\pi\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(2\pi\frac{v_0 t - z}{z_0}\right)$ *với* $z_0 = 1$ *và* $v_0 = 1$.

2) Biên độ các dao động giảm theo hàm mũ với chiều sâu xuyên thấu:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} .$$

Thật là hợp lý khi coi môi trường là vô hạn nếu chiều dày chất lưu, ở bên trên mâm, lớn hơn nhiều so với δ. Đối với một dao động 50 Hz trong nước, thì δ vào cỡ 0,1 mm.

Chú ý:

Chúng ta sẽ gặp những tình huống giống hệt nhau về mặt hình thức khi nghiên cứu sự khuếch tán của một biến thiên nhiệt độ trong một loại đất đồng nhất, hay sự xuyên thấu của một trường điện từ dao động trong một dây dẫn thuần trở. Phương trình khuếch tán được áp dụng cho các hệ trong nhiều lĩnh vực vật lý.

4.1.3. Trường hợp đặc biệt C(t) = C_0 (khác không)

Trong trường hợp đặc biệt quan trọng của chế độ ổn định không phụ thuộc thời gian, thì ta được:

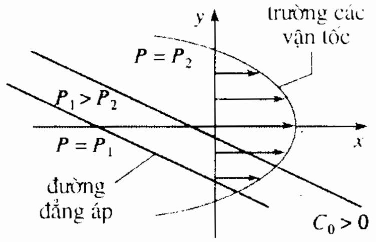
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -C_0 .$$

Các nghiệm là: $P(x, y) = -\rho g y - C_0 x + P_0$

và $v(y) = -C_0 \dfrac{y^2}{\eta} + By + v_0$.

Chú ý rằng các đường đẳng áp là các mặt phẳng nghiêng (*h*.21).

Dòng chảy này có thể tương ứng với dòng chảy POISEUILLE giữa hai mặt phẳng song song (*xem* §**4.3**) có vận tốc đồng nhất.



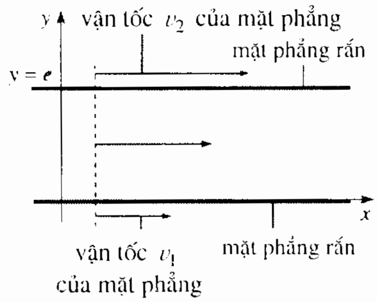
H.21. *Đối với dòng chảy này, các đường đẳng áp là các mặt phẳng nghiêng.*

▶ **Để tập luyện: bài tập 2 và 4.**

4.2. Dòng chảy Couette phẳng

4.2.1. Mô tả

Dòng chảy COUETTE phẳng là dòng chảy của một chất lưu giới hạn bởi hai mặt phẳng song song rắn, và có các vận tốc không đổi, nhưng khác nhau (*h*.22). Trường hợp chặt chẽ của các mặt phẳng vô hạn hiển nhiên là có tính chất lý thuyết, nhưng các dòng chảy thực có thể gần đúng như thế. Đặc biệt, dòng chảy giữa hai hình trụ đồng trục và có các vận tốc quay khác nhau có thể được biểu diễn cục bộ bởi một dòng chảy phẳng, nếu các bán kính của các hình trụ đều rất gần nhau. Sự nghiên cứu dòng chảy Couette hình trụ được đưa ra trong *bài tập* 8.



H.22. *Dòng chảy COUETTE giữa hai mặt phẳng song song "vô hạn".*

Chúng ta giả dụ, bằng giả thuyết, rằng:

- vận tốc tại mọi điểm đều có dạng $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$;
- mặt phẳng dưới, độ cao $y = 0$, có vận tốc không đổi v_1 ;
- mặt phẳng trên, độ cao $y = e$, có vận tốc không đổi v_2 ;
- áp suất P (hay, phổ biến hơn $\hat{P} = P + \rho g y$) không phụ thuộc vào x (và tùy tình hình không phụ thuộc vào t).

Theo các giả thiết, $v(y, t)$ nghiệm đúng phương trình khuếch tán một chiều:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} .$$

4.2.2. Chế độ ổn định

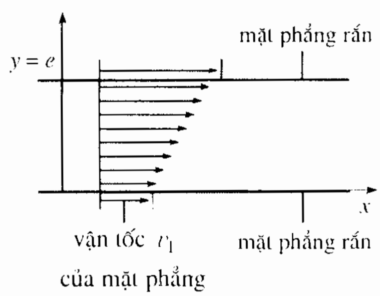
Trước hết ta hãy nghiên cứu sự phân bố các vận tốc ở chế độ ổn định (không có sự phụ thuộc rõ ràng vào thời gian).

Phương trình trên trở thành:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ ; như vậy } v \text{ là một hàm afin của } y.$$

Các vận tốc của chất lưu ở $y = 0$ và $y = e$ được áp đặt bởi các vận tốc của các mặt phẳng (vì rằng một chất lưu nhớt "dính" vào thành, và ở đấy không thể có sự gián đoạn của vận tốc giữa chất lưu và mặt phẳng), nên ta được (*h*.23):

$$v = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{e} z .$$



H.23. *Trường các vận tốc ở chế độ ổn định.*

4.3.3. Chế độ quá độ

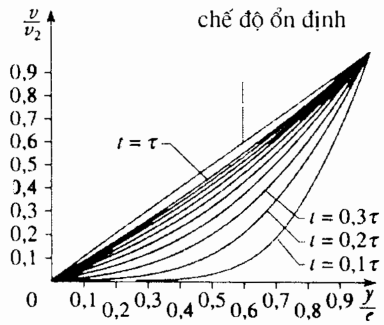
Ta hãy giới hạn ở một trường hợp đặc biệt:

- $v_1 = 0$
- chất lưu thoạt đầu nằm yên;
- mặt phẳng ở trên đột nhiên có vận tốc v_2 ở thời điểm $t = 0$.

Đặt $v = u v_2$ và $z = \zeta e$. Phương trình khuếch tán trở thành:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \text{ với } \tau = \frac{\rho e^2}{\eta}.$$

Hằng số τ, đồng nhất với thời gian, là khoảng thời gian đặc trưng để thiết lập chế độ ổn định. *Hình* 24 chỉ rõ sự phân bố các vận tốc (thu được bằng phép giải số) đối với các giá trị khác nhau của t.

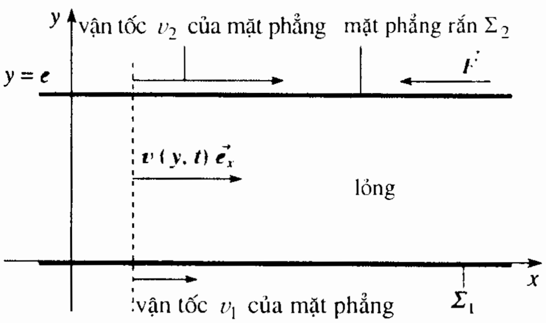


H.24. *Sự biến đổi của vận tốc rút gọn* $\left(\frac{v}{v_2}\right)$ *theo chiều dài rút gọn* $\left(\frac{y}{e}\right)$ *ở các thời điểm khác nhau:* 0,1 τ ; 0,2 τ ; 0,3 τ ; ... ; 0,9 τ ; τ.

Áp dụng 4

Nghiên cứu một cơ cấu truyền động

Một mặt phẳng Σ_1, *diện tích S được kéo bởi một động cơ, đang chuyển động tịnh tiến với vận tốc không đổi* $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$. *Một mặt phẳng song song* Σ_2 *kéo một cơ cấu tác dụng một lực cản không đổi* $\vec{F} = -F\vec{e}_x$. *Không gian giữa hai mặt phẳng chứa đầy một chất lưu không thể nén được có độ nhớt* η *và khối lượng riêng* ρ. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng là e (h.25). Các chiều bên rất lớn so với e, và ta thừa nhận rằng hệ này có thể được mô hình hoá bằng một dòng chảy* COUETTE *phẳng.*



H.25. *Dòng chảy* COUETTE *phẳng.*

1) *Xác định, ở chế độ ổn định, vận tốc* v_2 *của* Σ_2.

2) $\mathcal{P}_1$ *biểu diễn công suất do* Σ_1 *cung cấp cho chất lưu, và* $\mathcal{P}_2$ *là công suất do chất lưu cung cấp cho* Σ_2, *hãy định nghĩa và tính hiệu suất năng lượng* ε *của cơ cấu truyền động.*

3) *Áp dụng số:*

Dữ liệu:

$\frac{\eta}{\rho} = 1{,}3.10^{-4}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$; $\rho = 0{,}9.10^3$ kg.m^{-3} (dầu) ;

$v_1 = 10$ m.s^{-1}; $F = 0{,}47$ N; $S = 100$ cm^2 *và hằng số thời gian của chế độ quá độ là* $\tau = 0{,}1$ s.

Xác định lực F để hiệu suất năng lượng bằng 90%.

Thiết bị này liệu có thể, về nguyên lý, phục vụ cho việc xây dựng một khớp ly hợp thủy lực được không ?

1) Ở chế độ ổn định, lực trượt bề mặt là đều và bằng $\frac{F}{S}$. Hơn nữa, vì vận tốc là một hàm afin của y, nên ta có:

$$\frac{F}{S} = \eta\frac{\partial v}{\partial y} = \eta\frac{v_1 - v_2}{e}, \text{ vậy } v_2 = v_1 - \frac{eF}{\eta S}.$$

Chuyển động của Σ_2 chỉ khả dĩ nếu $v_2 > 0$ (lực F là lực cản), nghĩa là nếu:

$$F < F_{max} \text{ với } F_{max} = \frac{\eta S}{e}v_1.$$

2) Lực vận động áp đặt vào mặt phẳng ở trên thì bằng lực trượt, và chính nó cũng bằng F. Tỷ số các công suất do vậy bằng tỷ số các vận tốc, nghĩa là:

$$\varepsilon = \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{eF}{\eta S v_1}.$$

3) Hằng số thời gian τ của chế độ quá độ $\left(\tau = \rho \dfrac{e^2}{\eta}\right)$ cho phép tính e:

$e = 3{,}6$ mm và tiếp theo $F_{max} = 3{,}33$ N.

Nhờ đó, ta được $\varepsilon = 86\%$ và do vậy $v_2 = 0{,}86 v_1$.

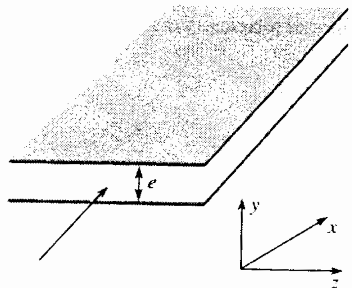
Một khớp ly hợp được dùng để làm tắt các"chuyển động trục trặc", ví như một sự biến đổi đột ngột của v_1, điều này hàm ý là hằng số thời gian của chế độ quá độ $\tau = \rho \dfrac{e^2}{\eta}$ phải đủ lớn. Ta nhận thấy rằng một giá trị lớn của τ (vậy là một giá trị nhỏ của η hay một giá trị lớn của e) kéo theo một hiệu suất nhỏ, mà hằng số thời gian ở đây là rất nhỏ.

4.3. Dòng chảy POISEUILLE

Dòng chảy POISEUILLE là một dòng chảy tầng ổn định trong một miền giới hạn bởi một vách hình trụ, tiết diện bất kỳ, đứng yên.

• Nếu tiết diện hình trụ là một hình chữ nhật rất dài, thì ta có thể bỏ qua các hiệu ứng bờ và giả thiết rằng dòng chảy tồn tại giữa hai mặt phẳng vô hạn: đó là dòng chảy Poiseuille phẳng.

• Nếu tiết diện của hình trụ là tròn, thì dòng chảy POISEUILLE là hình trụ.



H.26. *Dòng chảy POISEUILLE giữa hai mặt phẳng song song cố định, vô hạn.*

4.3.1. Dòng chảy Poiseuille giữa hai mặt phẳng song song

Dòng chảy này ở giữa hai mặt phẳng song song ở tung độ cố định và có dạng $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ (*h*.26). Các cơ cấu bên ngoài áp đặt giữa các tiết diện $x = 0$ và $x = l$ một độ sụt "áp suất vận động" (ta nhớ lại $\hat{P} = P + \rho g Z$, Z là độ cao): $\Delta\hat{P} = \hat{P}_{(x=0)} - \hat{P}_{(x=l)}$.

Ta hãy xác định cấu trúc của trường các vận tốc của chất lưu cũng như hệ thức giữa lưu lượng và độ sụt áp suất.

Theo các hệ thức tổng quát được thiết lập ở trên, thì $\hat{P}$ là một hàm afin của x, và ở chế độ ổn định:

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\Delta\hat{P}}{l},$$

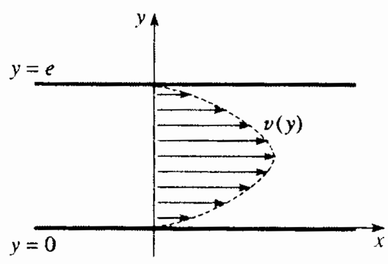
$v(y)$ là một đa thức bậc hai triệt tiêu ở 0 và ở e (*h*.27) :

$$v = \frac{\Delta\hat{P}}{2\eta l}(ey - y^2).$$

Đối với chiều rộng L, theo phương (Oz), thì lưu lượng khối của chất lưu là:

$$D = \rho L \int_0^e v(y)\mathrm{d}y \text{ hay } D = \frac{\rho L e^3}{12\eta l}\Delta\hat{P},$$

lưu lượng này tương ứng một lưu lượng thể tích $D_{vol} = \dfrac{Le^3}{12\eta l}\Delta\hat{P}$.

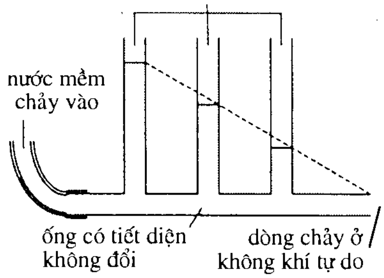


H.27. *Phân bố parabon của vận tốc trong một dòng chảy POISEUILLE phẳng.*

Ta thừa nhận rằng sự tỷ lệ giữa lưu lượng và độ sụt áp suất có thể được suy rộng cho mọi ống dẫn hình trụ. Nhớ rằng hệ thức này tất nhiên đòi hỏi một **chế độ tầng ổn định**, nghĩa là một chế độ mà ở đó các lớp mỏng chất lưu trượt lên nhau song song với trục. Ta sẽ thấy ở *chương* 6 là, nếu lưu lượng trở nên quá lớn, thì nghiệm này không còn ổn định nữa, và dòng chảy trở thành *rối*.

Ở chế độ chảy tầng ổn định, thì lưu lượng khối của một chất lỏng nhớt, trong một ống dẫn tiết diện không đổi, tỷ lệ với *độ chênh áp*, nghĩa là tỷ lệ với hiệu số của lượng $\hat{P} = P + \rho g Z$ giữa các tiết diện ở lối vào và lối ra của nó (trong đó P là áp suất và Z là độ cao).

Điều này có thể được minh họa như sau: khi một dòng chảy chậm trong một ống nằm ngang có tiết diện không đổi, được trang bị thêm các "bộ đo áp suất" (*h*.28), thì ta quan sát thấy các mức cực đại trong các ống thẳng đứng khác nhau đều sắp thẳng hàng.



H.28. *Các mức cực đại trong các ống thẳng đứng khác nhau đều sắp thẳng hàng.*

4.3.2. Dòng chảy POISEUILLE trong một hình trụ tiết diện tròn

JEAN-LOUIS-MARIE POISEUILLE, một thầy thuốc, đã nghiên cứu thực nghiệm sự lưu thông của các chất lỏng trong các ống hình trụ. Ông đã phát biểu vào năm 1844 định luật dưới đây mang tên ông:

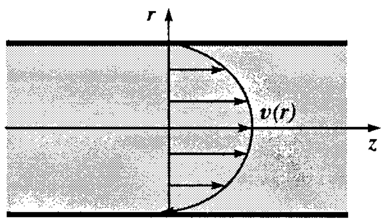
Ở chế độ dòng chảy tầng ổn định, thì lưu lượng khối của một chất lưu trong một ống dẫn hình trụ có tiết diện tròn và độ chênh áp liên hệ với nhau theo hệ thức:

$$D = \frac{\pi \rho a^4}{8\eta l}\Delta\hat{P} \text{ hay còn là } D_{\text{vol}} = \frac{\pi a^4}{8\eta l},$$

trong đó ρ là khối lượng riêng, η là độ nhớt, a là bán kính và l là chiều dài.

Để chứng minh định luật POISEUILLE, ta có thể *xem bài tập* 8.

Trường vận tốc của dòng chảy này vẫn còn có dạng parabon (*h*.29).



H.29. *Phân bố parabon của vận tốc trong một dòng chảy POISEUILLE. Hệ có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz).*

Muốn làm chảy một chất dầu (η ở lân cận 1Pa.s) trong một ống đường kính 1cm, chiều dài 1m, với lưu lượng thể tích 0,1 lít trong một giây, thì phải tác dụng ở phía trên một áp suất dư gần 4 bar.

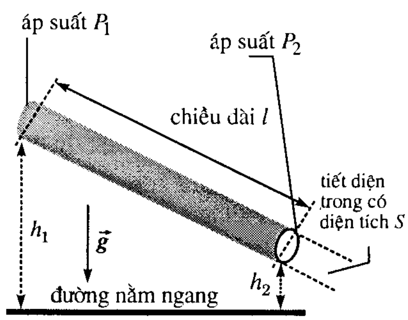
Với cùng một lưu lượng trong cùng một ống dẫn thì đối với nước, độ chênh áp sẽ khoảng 1000 lần nhỏ hơn.

■ **Sự thể hiện bằng thực nghiệm**

Đối với một chất lỏng ở dòng chảy tầng trong một ống chiều dài l và tiết diện S, thì lưu lượng thể tích (và do vậy lưu lượng khối) tỷ lệ với lượng $\frac{S^2}{l}$ cho một $\Delta\hat{P}$ áp đặt trước (*h*.30) :

$$D_{\text{vol}} = k\frac{S^2}{l}\Delta\hat{P}.$$

Định luật này có thể được kiểm tra bằng thực nghiệm như sau (*h*.31).



H.30. *Lưu lượng thể tích của chất lỏng đang ở dòng chảy tầng trong ống tiết diện S và chiều dài l này có dạng:*

$$D_{\text{vol}} = k\frac{S^2}{l}\Delta\hat{P},$$

với $\Delta\hat{P} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 = P_1 - P_2 + \rho g(h_1 - h_2)$.

Ta lấy hai ống tiết diện giống nhau (cỡ vài mm^2), nhưng chiều dài (vài chục cm) cái nọ lớn gấp đôi cái kia, ví dụ:

- ống 1: tiết diện S, chiều dài l_1;
- ống 2: tiết diện S, chiều dài l_2 với $l_2 = 2l_1$.

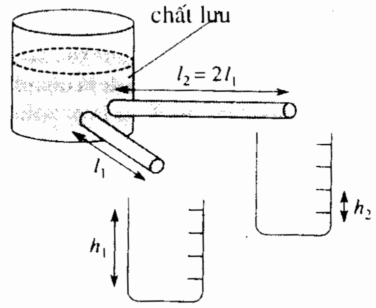
Khi đặt hai ống ở cùng độ cao, ngang đáy một bể chứa, thì hai ống này đều chịu tác dụng của cùng một áp suất vận động $\Delta\hat{P}$: nếu các ống đều nằm ngang, thì áp suất vận động này bằng $\rho g H$.

Các lưu lượng thể tích tỷ lệ nghịch với chiều dài các ống, vậy ta phải có:

$$D_{\text{vol2}} = 0,5D_{\text{vol1}}, \text{ nghĩa là } h_2 = \frac{h_1}{2}.$$

Ta thực hiện một thao tác bằng tay theo cách thức sau :

Lấy hai ống chiều dài 15 cm và 30 cm (các bán kính a của hai ống đều bằng nhau và bằng a = 1,2 mm : dữ liệu của nhà thiết kế). Áp suất vận động đặt lên dòng chảy, tương đương với 20 cm nước : tỷ số đo được ở gần giá trị 0,66 hơn là gần giá trị 0,5 !
Ta nghĩ gì về số đo này ?



H.31. Đối với hai dòng chảy POISEUILLE này, nếu $l_2 = 2l_1$ thì lúc đó $h_2 = \frac{h_1}{2}$.

■ Ta định rõ một số cấp độ lớn

Các lưu lượng thể tích ở lân cận $D_{vol} = \frac{\pi a^4 \rho g H}{8\eta l}$. Nhờ đó, ta được :

- $D_{vol1} \approx 6{,}8.10^{-7}\ m^3.s^{-1} \approx 40\ cm^3.ph^{-1};\ D_1 \approx 6{,}8.10^{-4}\ kg.s^{-1}$;
- $D_{vol2} \approx 3{,}4.10^{-7}\ m^3.s^{-1} \approx 20\ cm^3.ph^{-1};\ D_2 \approx 3{,}4.10^{-4}\ kg.s^{-1}$.

Dòng chảy có rất nhiều cơ may là dòng chảy tầng.

■ Dòng chảy POISEUILLE không đạt được tức thời.

Tồn tại một chiều dài quá độ L_c mà trên đó dòng chảy tiến đến trở thành một dòng chảy POISEUILLE (*h*.32) : chiều dài này vào cỡ $L_c = \frac{2a\text{Re}}{30}$, với $\text{Re} = \frac{\rho 2 a v}{\eta}$, và a là bán kính ống (Re là số REYNOLDS sẽ được xét ở *chương* 6).

Nhờ đó, ta được $L_c = \frac{4a^2\rho v}{30\eta} = \frac{4}{30\pi}\frac{D}{\eta}$. D bằng với lưu lượng khối.

Như vậy ta được $L_{c_1} = 2{,}8$ cm và $L_{c_2} = 1{,}4$ cm.

Các nhiễu loạn này tham dự vào số đo, nhưng không giải thích được sự chênh lệch lớn giữa số đo và kết quả mong đợi.

■ Các bán kính ống có thích hợp không ?

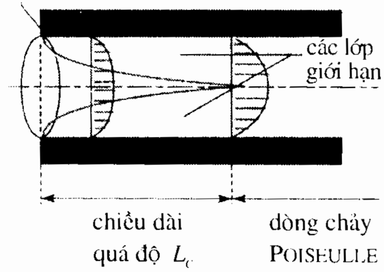
Giả sử rằng sai lệch lớn là do hai bán kính không đồng nhất. Ta ký hiệu các bán kính này là a_1 và a_2, và đánh giá tỷ số $\alpha = \frac{a_2}{a_1}$.

Các lưu lượng được quan sát lúc đó là $\frac{D_{vol2}}{D_{vol1}} = 0{,}66 = \alpha^4\frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha^4}{0{,}5}$; điều này dẫn đến $\alpha^4 = 1{,}32$, hay α = 1,07 ! Chỉ cần có một sai lệch tương đối cỡ 7% giữa các bán kính là đủ để thu được các số đo này.

Bán kính bằng 1,2 mm (chứ không phải là 1,20 mm !) và như vậy bán kính được biết với độ chính xác tương đối là 4%. Vậy tỷ số bằng 1 sai kém 8% ! Ta vẫn ở trong phạm vi sai số.

Sự không chính xác khi định cỡ các bán kính của hai ống đã giải thích được sự chênh lệch lớn giữa số đo và kết quả mong đợi.

Điều này cũng lý giải vì sao mà việc thể hiện mối quan hệ tồn tại giữa lưu lượng và bán kính các ống lại là vấn đề tinh tế.



H.32. *Ở đầu ống, tồn tại một chiều dài quá độ mà trên đó dòng chảy tiến đến trở thành một dòng chảy POISEUILLE.*

▶ **Để tập luyện : Bài tập 3, 5 và 8.**

Chú ý : Định luật này biểu thị các tính đồng dạng với định luật OHM. Lưu lượng (khối lượng hay điện tích), đối với một "vật dẫn" cho trước, thì tỷ lệ *tùy theo trường hợp, với điện áp hay với áp suất dư. Tuy nhiên, sự tương tự không hoàn toàn đầy đủ vì "độ dẫn thủy lực" không tỷ lệ với tiết diện như độ dẫn điện.*

▶ **Để tập luyện : bài tập 9.**

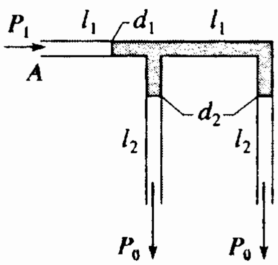
■ So sánh các dòng chảy POISEUILLE và COUETTE

Trong dòng chảy COUETTE, áp suất (vận động) $\hat{P}$ là đều dọc theo một đường dòng, và dòng chảy là do sự dịch chuyển của các vách gây ra. Tình thế bị đảo ngược đối với dòng chảy POISEUILLE : các vách đứng yên, và dòng chảy là do một građiên của $\hat{P}$ gây ra.

Áp dụng 5

Phân phối nước

Một ống hình trụ, đường kính trong d_1, cung cấp nước cho hai ống đường kính d_2 và chiều dài l_2 mà đầu mút cuối của chúng ở áp suất khí quyển P_0 (h.33).



◀ **H.33.** *Phân phối nước.*

Cho P_1 là áp suất ở phía trên (tại điểm A). Khoảng cách giữa điểm A và nhánh rẽ thứ nhất, cũng như khoảng giữa hai nhánh là l_1. Ta sẽ coi các nhánh rẽ là các thể tích đẳng áp nhỏ, và chế độ dòng chảy là chảy tầng. Ta thừa nhận định luật POISEUILLE đối với một ống tiết diện tròn là :

$$D = \frac{\pi\rho a^4}{8\eta l}\Delta\hat{P}.$$

Vẽ một sơ đồ điện tương đương và xác định lưu lượng của mỗi ống.

Dữ liệu :

$P_1 - P_0 = 1$ bar; $d_2 = 4$ mm; $l_1 = l_2 = 5$ m; $d_1 = 10$ mm,

rồi $d_1 = 6$ mm *và* $\frac{\eta}{\rho} = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}.

Các đại lượng tương tự là :

$$P_1 - P_0 \text{ và } E;\ D_1 \text{ và } I_1;\ D_2 \text{ và } I_2;$$

$$R_1 \text{ và } \frac{144\eta l_1}{\pi\rho d_1^4};\ R_2 \text{ và } \frac{144\eta l_2}{\pi\rho d_2^4}.$$

Sự phân tích mạch điện (h.34) cho ta các kết quả :

$$I_0 = E\frac{R_1 + 2R_2}{R_1^2 + 3R_1R_2 + R_2^2};\quad I_1 = I_0\frac{R_1 + R_2}{R_1 + 2R_2}$$

$$\text{và } I_2 = I_0\frac{R_2}{R_1 + 2R_2}$$

Áp dụng số, ta được :

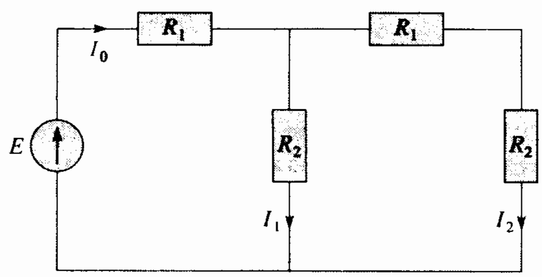
- với $d_1 = 10$ mm :

$$D_1 = 0{,}106 \text{ kg.s}^{-1} \text{ và } D_2 = 0{,}103 \text{ kg.s}^{-1};$$

- với $d_1 = 4$ mm :

$$D_1 = 0{,}046 \text{ kg.s}^{-1} \text{ và } D_2 = 0{,}023 \text{ kg.s}^{-1}.$$

Trong trường hợp thứ nhất, R_1 rất nhỏ so với R_2, và hai lưu lượng gần như bằng nhau.



H.34. *Sự tương tự động điện.*

ĐIỀU CẦN PHẢI NHỚ

■ ĐỘ NHỚT

• Đối với dòng chảy một hướng, như là $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, thì lực bề mặt tiếp tuyến $\vec{F}$, gọi là *lực trượt* hay *lực nhớt*, tác động qua một mặt diện tích S pháp tuyến với $\vec{e}_y$, được mang bởi $\vec{e}_x$.

Chuẩn của lực này bằng :

$$F = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S.$$

Lực $\vec{F}$ này có khuynh hướng tăng tốc các dòng chậm và làm chậm các dòng nhanh.

Hệ số η gọi là *độ nhớt* của chất lưu và với tính gần đúng tốt, có thể được coi như một hằng số đặc trưng của chất lưu ở một nhiệt độ cho trước.

Đơn vị độ nhớt trong hệ quốc tế (SI) là pascan giây (1 Pa.s).

• Trong một chất lỏng *không thể nén được*, các lực trượt tương đương với một lực thể tích mà biểu thức có dạng $\vec{f}_{\text{cis}_{\text{vol}}} = \eta \Delta \vec{v}$.

• Phương trình vi phân của động lực học, hay phương trình NAVIER-STOKES, đối với các chất lưu không thể nén được có dạng :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{\text{vol}} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}.$$

Trong trường hợp đơn giản của một dòng chảy dạng $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$, thì phương trình vi phân trở thành :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x = \vec{f}_{\text{vol}} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x.$$

■ ĐỊNH LUẬT POISEUILLE

• Ở chế độ chảy tầng ổn định, thì lưu lượng khối của một chất lưu nhớt trong một ống dẫn tiết diện không đổi, tỷ lệ với *độ chênh áp* (độ tổn thất cột nước), nghĩa là hiệu số của lượng $\widehat{P} = P + \rho g Z$ giữa các tiết diện ở lối vào và lối ra (trong đó P là áp suất và Z là độ cao).

• Ở chế độ chảy tầng ổn định, thì lưu lượng khối của một chất lưu trong một ống dẫn hình trụ tiết diện tròn và độ chênh áp liên kết với nhau theo :

$$D = \frac{\pi \rho a^4}{8 \eta l} \Delta \widehat{P},$$

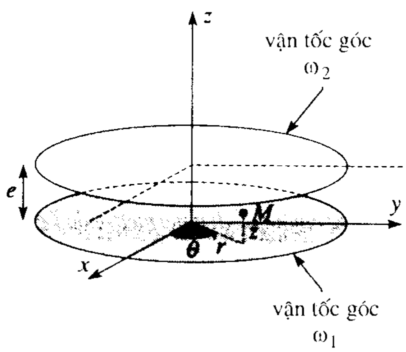
trong đó ρ là khối lượng riêng, η là độ nhớt, a là bán kính và l là chiều dài.

Bài tập có lời giải

Ma sát giữa hai đĩa phân cách nhau bởi một chất lỏng nhớt

ĐỀ BÀI :

Hai đĩa, có cùng bán kính a, quay xung quanh trục thẳng đứng chung (Oz) của chúng. Không gian giữa hai đĩa được choán đầy bởi một chất lưu không thể nén được, có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η. Khoảng cách e giữa các đĩa rất nhỏ so với a, và ta thỏa thuận bỏ qua tương tác giữa chất lưu và thành bên ở $r = a$, ta cũng thừa nhận rằng, ở chế độ chảy tầng, trường vận tốc có dạng :



$$\vec{v} = \omega(z,t)r\vec{e}_\theta .$$

Vận tốc của một điểm chất lưu được cho bởi $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(r,t) = r\omega(z,t)\vec{e}_\theta$, trong đó ω_1 là vận tốc góc quay của đĩa D_1 ở độ cao 0, và ω_2 là vận tốc góc quay của đĩa D_2 ở độ cao e.

1) Hãy giải thích ngắn gọn dạng nêu trên đối với trường các vận tốc.

2) Bằng cách áp dụng định lý mômen động cho một phần tử chất lưu, hãy xác định phương trình đạo hàm riêng được nghiệm đúng bởi $\omega(z, t)$.

3) Ở chế độ ổn định, ω_1 và ω_2 đều không đổi.

a) Xác định hàm $\omega(z)$ ở chế độ ổn định.

b) Tính ngẫu lực Γ do chất lưu tác dụng lên đĩa D_2. Định nghĩa và tính hệ số ma sát đối với hệ hai đĩa này.

c) *Dữ liệu :*

Đối với dầu thầu dầu ở $50^\circ C$: $\eta = 0{,}12$ Pa.s; $\rho = 0{,}9.10^{-3}$ kg.m^{-3}; $a = 10$ cm; $e = 0{,}1$mm; $\omega_2 - \omega_1 = 2000$ vòng.ph^{-1}. Tính hệ số ma sát với dầu thầu dầu ở $50^\circ C$.

4) Chế độ quá độ.

Hệ ban đầu đứng yên (ω triệt tiêu khắp nơi). ω_2 vẫn giữ bằng không, ω_1 đột ngột chuyển từ 0 sang Ω ở thời điểm $t = 0$. Hãy đánh giá τ là thời gian đặc trưng để thiết lập chế độ ổn định ?

5) Ta thừa nhận rằng τ có cùng cấp độ lớn đối với mọi chế độ quá độ. Ở điều kiện nào, ta có thể đơn giản hóa hệ với giả thiết là giữa các đĩa tồn tại một ngẫu lực ma sát tỷ lệ với $\omega_2 - \omega_1$?

HƯỚNG DẪN

Những lực nào tác dụng lên một phần tử chất lưu ?

Lực trượt, tác dụng qua một mặt, phụ thuộc vào vận tốc tương đối giữa các lớp chất lưu.

LỜI GIẢI

1) Dạng này coi trọng tính bất biến bởi phép quay và điều kiện ở giới hạn trên các đĩa. Hơn nữa, dạng này lại tương thích với tính không thể nén được ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$).

2) Ta áp dụng định lý mômen động, đối với trục (Oz), cho một phần tử chất lưu có thể tích $r\,dr\,d\theta\,dz$. Chỉ mình các thành phần của các lực theo $\vec{e}_\theta$ mới được tính đến.

• Hai màng mỏng chất lưu, song song với các đĩa và ở các độ cao z và $z + dz$, trượt lên nhau với vận tốc tương đối :

$$\vec{v}_{rel} = (\omega(z+dz,t) - \omega(z,t))r\vec{e}_\theta = \frac{\partial\omega}{\partial z} r dz \vec{e}_\theta .$$

Vì điều đó đã được làm trong bài giảng, nên ta có thể tập hợp các áp lực và các lực trọng trường vào một số hạng duy nhất ($\hat{P}$).

Sự quay thực hiện quanh trục (Oz), nên chỉ cần sử dụng định luật vô hướng về mômen động là đủ. Ta nhắc lại quy tắc đơn giản :

mômen đối với một trục

= lực × cánh tay đòn.

Liệu ta có thể tiên đoán được xem $\hat{P}$ biến đổi như thế nào theo θ ? Phương trình được suy ra từ định lý mômen động phải cho phép thiết lập điều đó.

Như vậy lực trượt, tác dụng qua một mặt nguyên tố diện tích dS và song song với các đĩa, sẽ là :

$$d\vec{F}_{cis} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial z} r \vec{e}_\theta \, dS .$$

• Các phần tử chất lưu ở trên cùng một bán kính, có vận tốc tương đối triệt tiêu. Lực trượt, tác dụng qua một mặt nguyên tố diện tích dS và pháp tuyến với $\vec{e}_r$, như vậy cũng triệt tiêu.

• Mômen trượt tổng cộng đối với (Oz) là :

$$d\mathcal{M}_{cis} = \eta r^2 \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_z \right] r \, dr \, d\theta = \eta r^3 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right)_z dr \, d\theta \, dz .$$

• Z là độ cao và P là áp suất, ta viết $\hat{P} = P + \rho g Z$ ((Oz) được định hướng theo đường thẳng đứng đi lên).

Các áp lực và trọng lực, được áp đặt vào một phần tử thể tích dτ, tương đương với $d\vec{F}_{\hat{P}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\hat{P}\, d\tau$ và mômen của chúng đối với (Oz) là :

$$d\mathcal{M}_{\hat{P}} = -r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} d\tau \right) = -r \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} dr \, d\theta \, dz .$$

• Mômen động đối với (Oz) bằng :

$$dL_{(Oz)} = \rho \, d\tau \, \omega \, r^2 = \rho \, r^3 \omega \, dr \, d\theta \, dz .$$

Vậy : $\rho r^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = -\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} + \eta r^2 \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$.

Kết luận, $\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial \theta}$ độc lập với θ. Và vì $\hat{P}(\theta + 2\pi) = \hat{P}(\theta)$, nên từ đó ta suy ra $\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} = 0$, và do vậy $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\eta}{\rho} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$.

Tìm hệ thức giữa các ngẫu lực do chất lưu tác dụng lên hai đĩa ? Tại sao lúc đó, người ta lại có thể coi là có một tương tác trực tiếp giữa chúng với nhau ? Ta sẽ nhận thấy điều đó không còn đúng nữa ở chế độ quá độ. (câu hỏi 5).

3) Ở chế độ ổn định, ω (z) là một hàm afin :

$$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{e} z .$$

Lực và mômen trượt đối với một phần tử của D_2 bằng :

$$d\vec{F}_{cis} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_\theta \, dS = -\eta \, r^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{e} dr \, d\theta \, \vec{e}_\theta$$

$$\text{và } d\mathcal{M}_{cis_{(Oz)}} = -\eta \, r^3 \frac{\omega_2 - \omega_1}{e} dr \, d\theta .$$

Sau khi lấy tích phân trên cả đĩa : $\mathcal{M}_{(Oz)} = -\dfrac{\eta \pi a^4}{2e} (\omega_2 - \omega_1)$.

Mômen này tương đương với mômen ma sát chống lại sự quay tương đối của D_2 đối với D_1 :

$\mathcal{M}_{(Oz)} = -C(\omega_2 - \omega_1)$ với $C = \dfrac{\eta \pi a^4}{2e}$.

Với dầu thầu dầu : $C = 0{,}19$ N.m.rad^{-1}.s .

Người ta thu được các hằng số đặc trưng của sự biến đổi, xuất phát từ phương trình đạo hàm riêng không thứ nguyên. Không nhất thiết phải giải phương trình trên để biết cấp độ lớn của các hằng số này.

Phương pháp nghiên cứu này sẽ được triển khai ở chương 6.

4) Đặt :

$$\omega = f\Omega; \; z = \zeta e \text{ và } t = u\tau ,$$

(τ biểu diễn một thời gian được suy ra từ thực nghiệm (ví như nghịch đảo của tần số ở câu **5**)), ta nhận được phương trình biến đổi không thứ nguyên :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\tau\eta}{\rho e^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2},$$

mà đối với nó các đại lượng đặc trưng f, ζ và u đều vào cấp đơn vị. Như vậy xuất hiện một thời gian đặc trưng τ_c sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\tau}{\tau_c}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}$ với $\tau_c = \dfrac{\rho e^2}{\eta}$.

Áp dụng số : $\tau_c = 0{,}08$ ms .

5) Tương tác giữa các đĩa sẽ quy về một lực ma sát với hệ số ma sát C, nếu có thể coi rằng chế độ ổn định bao giờ cũng đạt được, nghĩa là (cả 3 đề xuất sau đây đều tương đương nhau) :

• Thời gian đặc trưng cho sự biến đổi các vận tốc như vậy phải lớn so với τ_c ;

• Phương trình rút gọn có dạng : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 0$;

• $\dfrac{\tau}{\tau_c} = \infty$, nghĩa là $\tau \gg \tau_c$, hay $\nu \ll \dfrac{1}{\tau_c}$ (ν là tần số của chuyển động tuần hoàn).

Thành thử đối với một chuyển động tuần hoàn, thì tần số ν phải rất nhỏ so với $\dfrac{1}{\tau_c}$ nghĩa là so với 1 300Hz, đó là trường hợp các hệ cơ học thông thường.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Dòng chảy chất lưu không thể nén được

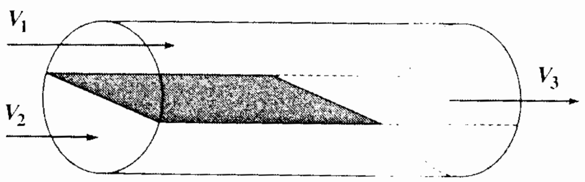
Cho một dòng chảy chất lưu không thể nén được ổn định, độc lập với thời gian, đi qua một hình trụ tiết diện S được trang bị một tấm phân cách, chia tiết diện của hình trụ thành hai phần bằng nhau.

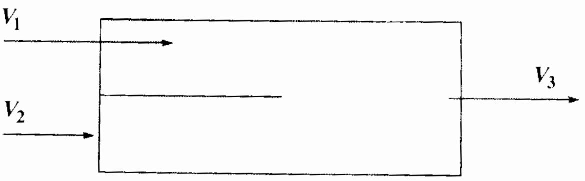
Ở lối vào của hình trụ, các vận tốc của chất lưu là V_1 và V_2, còn ở lối ra, khá xa tấm phân cách, thì vận tốc chất lưu là V_3.

Tính V_3 theo V_1 và V_2.

Liệu có tồn tại một sự tổn hao năng lượng không ? Hãy bình giải.

Khảo sát trường hợp đặc biệt trong đó $V_2 = \dfrac{V_1}{2}$.





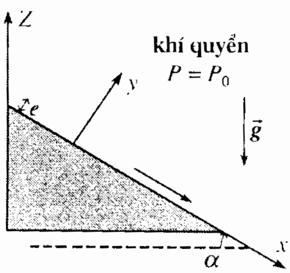
2 Dòng chảy tầng trên một mặt phẳng nghiêng

Một lớp mỏng chất lưu (độ nhớt η, khối lượng riêng ρ) có chiều dày e, chảy dọc theo một mặt phẳng nghiêng, mà đường có độ dốc lớn nhất hợp với đường nằm ngang một góc α.

Trường các vận tốc, giả thiết không phụ thuộc thời gian, có dạng $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$.

Ta bỏ qua các lực nhớt trên mặt phân cách không khí/nước.

Hãy xác định dạng của v (y), cũng như hệ thức giữa chiều dày e và lưu lượng khối D đối với một chiều rộng L.



Tính vận tốc cực đại đối với e = 1mm và $\alpha = 45^0$ trong các trường hợp của bảng dưới đây :

chất lưu	hệ số nhớt η (Pa.s)	khối lượng riêng ρ (kg.m^{-3})
nước	$\eta = 1,0.10^{-3}$ Pa.s	$\rho = 1,0.10^3$ kg.m^{-3}
dầu	$\eta = 1,0$ Pa.s	$\rho = 1,0.10^3$ kg.m^{-3}

3 Bộ giảm áp gồm một mạng các khoang mỏng

1) Một ống nằm ngang có tiết diện vuông cạnh a và chiều dài L được chia thành các khoang mảnh và bằng nhau nhờ rất nhiều lá mỏng chiều dày không đáng kể ?

• Đầu vào tiếp xúc với một bể chứa chất lưu có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η : lối vào được giữ ở áp suất P_1.

• Ở đầu ra, chất lưu ở áp suất bên ngoài $P_0 (P_1 > P_0)$.

Dòng chảy được giả thiết là chảy tầng và ổn định : xác định lưu lượng và vận tốc trung bình chảy ra của chất lưu.

Áp dụng số : chất lưu là dầu

Dữ liệu : $\eta = 1,0$ Pa.s; $\rho = 0,9.10^3$ kg.m^{-3};

$P_1 = 1,5$ bar; $P_0 = 1$ bar; $L = a = 1$ cm; $N = 50$.

Hãy bình giải

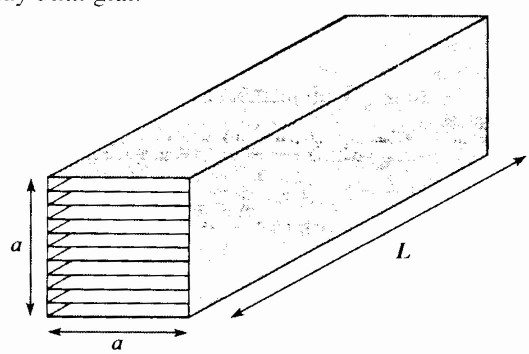
2) Ống được giữ ở vị trí thẳng đứng, và hiệu số áp suất $\Delta P = P_1 - P_0$ tương ứng với chiều cao cột chất lưu gần bằng L.

Áp dụng số : chất lưu là nước.

Dữ liệu : $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pa.s.

$\rho = 1,0.10^3$ kg.m^{-3}; a = 1cm; L = 20cm; N = 50.

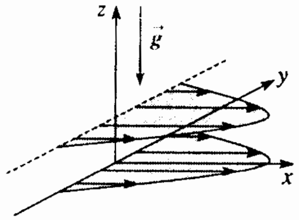
Hãy bình giải.



4 Mặt đẳng áp

Hãy xác định hình dạng các mặt đẳng áp đối với các dòng chảy sau đây của một chất lưu không thể nén được :

a) $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$ trong một trường trọng lực $\vec{g} = -g\vec{e}_z$;



b) $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\theta$ (chế độ ổn định), đối với r trong khoảng giữa a và vô cực, trong một trường trọng lực $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ với $v(a) = v_0$.

Ta thừa nhận rằng lực trượt thể tích bằng $\eta\Delta\vec{v}$, với $\Delta\vec{v}$ trong trường hợp này có dạng :

$$\Delta\vec{v} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) = \frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(\frac{l}{r}\frac{\text{d}(rv)}{\text{d}r}\right)\vec{e}_\theta .$$

Vì cả hai trường vận tốc ở đây đều nghiệm đúng $\text{div}\,\vec{v} = 0$.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5 ★Công suất độ nhớt (trên đơn vị) thể tích

Một chất lưu khối lượng riêng ρ và độ nhớt η đang ở dòng chảy ổn định dạng :

$$\vec{v} = v(y)\vec{e}_x .$$

1) Xác định công suất thể tích $\mathscr{P}_{\text{vol}}$ của các nội lực nhớt.

2) Áp dụng cho dòng chảy COUETTE

Có một chất lưu, mà áp suất không phụ thuộc x, ở giữa hai mặt phẳng nằm ngang cách nhau một khoảng e. Mặt phẳng dưới bất động, còn mặt phẳng trên được kích động một chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Tính công suất tiêu tán.

3) Áp dụng cho dòng chảy POISEUILLE phẳng

Có một dòng nước chảy giữa hai mặt phẳng nằm ngang bất động cách nhau một khoảng $e = 0{,}5$ mm, với vận tốc trung bình $1\ \text{m.s}^{-1}$. Hãy tính công suất tiêu tán trong một hình hộp chiều dài L (theo (Ox)) và chiều rộng a (theo (Oz)). Nếu ta bỏ qua mọi sự truyền nhiệt, thì hãy tính, ra Kelvin trên giây, độ tăng nhiệt độ ở các điểm mà tại đó công suất là cực đại.

Dữ liệu : nước : $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pa.s; $\rho = 1{,}0.10^{3}\ \text{kg.m}^{-3}$; nhiệt dung riêng $c = 4{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

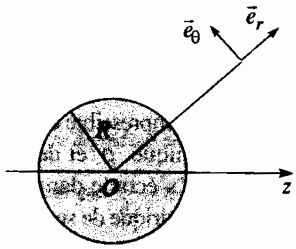
6 ★★Công thức STOKES

Với các vận tốc nhỏ, ở chế độ tuyến tính và ổn định, thì trường các vận tốc xung quanh một quả cầu chất lưu không thể nén được, có biểu thức (trong tọa độ cầu) :

$$v_r = v_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right);$$

$$v_\theta = -v_\infty\sin\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right).$$

1) Xác minh rằng trường này là **nghiệm** của phương trình vi phân đã được tuyến tính hóa và tuân theo các điều kiện ở giới hạn.



2) Xác định các áp lực và lực trượt trên các thành của quả cầu chất lưu, rồi xác định lực tác dụng lên quả cầu đó.

7 ★Nhớt kế COUETTE

Thiết bị này do COUETTE chế tạo để đo độ nhớt của chất lỏng. Nó gồm hai hình trụ đồng trục bán kính R_1 (bán kính ngoài của hình trụ trong) và R_2 (bán kính trong của hình trụ ngoài). Không gian giữa hai hình trụ chứa đầy một chất lỏng mà ta cần đo độ nhớt η. Hình trụ ngoài đứng yên, còn hình trụ trong quay đều với tốc độ Ω. Chiều cao h của chất lỏng đủ lớn để có thể bỏ qua các hiệu ứng ở hai đầu, và nhất là tác động của đáy lên chất lỏng.

Vậy, ta giả thiết rằng trường các vận tốc là ổn định và có dạng :

$$\vec{v} = \omega(r)r\vec{e}_\theta .$$

1) Tìm vận tốc (tương đối) $\vec{v}_{\text{rel}} = v_{\text{rel}}\vec{e}_\theta$ của một điểm trên hình trụ bán kính r đối với hệ quy chiếu gắn với hình trụ bán kính r_0 ?

2) Bằng cách tương tự như với trường hợp dòng chảy phẳng, hãy biểu thị lực trượt, do chất lưu bên trong tác dụng lên chất lưu bên ngoài qua một mặt nguyên tố có diện tích dS pháp tuyến với $\vec{e}_r$, theo đạo hàm $\dfrac{\text{d}v_{\text{rel}}}{\text{d}r}$, rồi theo $\dfrac{\text{d}\omega}{\text{d}r}$.

3) Hãy tính mômen đối với trục quay của các lực trượt tác dụng lên thể tích chất lưu nằm giữa hình trụ ngoài và một hình trụ bán kính r $(R_1 < r < R_2)$. Từ đó suy ra hàm $\omega(r)$.

4) Hãy biểu thị mômen Γ, theo R_1, R_2, Ω và η của ngẫu lực phát động kéo hình trụ ngoài.

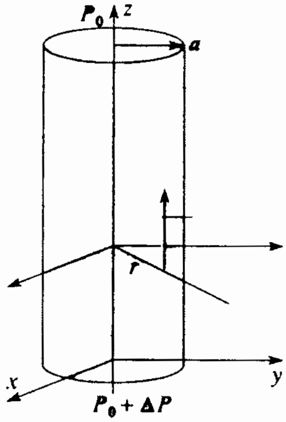
5) Hãy nghiên cứu trường hợp trong đó $R_1 = R_2 - e$, với $e \ll R_1$.

Dữ liệu : $R_2 = 50$ mm ; $e = 3$ mm; $h = 200$ mm; $\Omega = 1$ vòng.s^{-1}.

Để đo được độ nhớt ở lân cận 1Pa.s, thì mômen ngẫu lực phát động có độ lớn cỡ bao nhiêu ?

8 ★Định luật POISEUILLE đối với các ống có tiết diện tròn

Một chất lưu không thể nén được có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η, chảy trong một ống hình trụ tiết diện tròn bán kính a, chiều dài L và trục (Oz).



Ta thừa nhận rằng ở chế độ chảy tầng ổn định, thì :

- vận tốc chất lưu trong ống có dạng $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ (trong tọa độ trụ);
- nếu P là áp suất và Z là độ cao, thì $\hat{P} = P + \rho g Z$ chỉ phụ thuộc vào z; ta sẽ đặt $P(z=0) = P_0 + \Delta P$ và $P(z=L) = P_0$.

1) Bằng cách tương tự như với dòng chảy một hướng, hãy xác định lực trượt do chất lưu ngoài tác dụng lên chất lưu trong qua một mặt nguyên tố diện tích dS và pháp tuyến với $\vec{e}_r$.

2) Bằng cách áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho hệ được cấu tạo, ở thời điểm t cho trước, bởi chất lưu chứa trong một hình trụ chiều dài l và bán kính r, hãy tính $\frac{dv}{dr}$, rồi $v(r)$.

3) Từ đó suy ra hệ thức về sự tỷ lệ giữa lưu lượng và độ sụt áp.

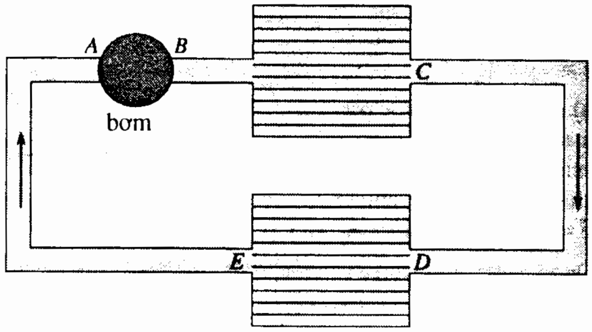
9 ★Sự tương tự với điện động học

Một chất làm lạnh lỏng, độ nhớt $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pa.s, chảy tuần hoàn trong một mạch gồm các ống hình trụ.

Với hai nhóm 50 ống : bán kính $a_1 = 0{,}5$ mm và chiều dài $l_1 = 50$ cm .

Với các ống nối : bán kính $a_2 = 3$ mm và chiều dài $l_2 = 2{,}0$ m .

Và một bơm bảo đảm sự tuần hoàn của chất lưu với lưu lượng thể tích $D_{vol} = 0{,}1$ L.s^{-1}.



1) Hãy biểu diễn một mạch điện tương đương.

2) Áp suất ở lối vào bơm (điểm A) là 1,1bar. Tính áp suất ở B, C, D và E.

3) Tính công suất mà bơm cung cấp cho chất lưu.

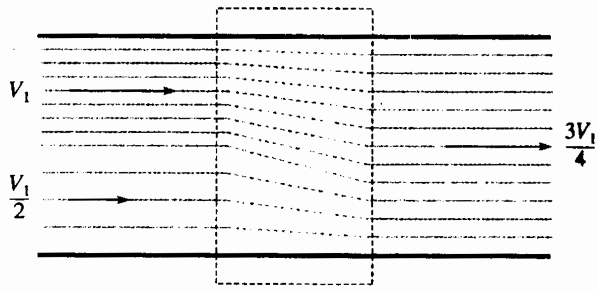
Ta thừa nhận định luật POISEUILLE : $D_{vol} = \frac{\pi a^4}{8\eta l}$.

LỜI GIẢI

1 *Chất lưu là không thể nén được, nên ta có sự bảo toàn lưu lượng thể tích :*

$$\frac{S}{2}V_1 + \frac{S}{2}V_2 = SV_3\text{, hay } V_3 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Trong trường hợp mà $V_2 = \frac{V_1}{2}$ *thì* $V_3 = \frac{3V_1}{4}$ *; dáng đi các đường của trường là như sau (xem chương 2, bài tập 2, các lời giải).*



miền nhiễu loạn trong đó xuất hiện các lực nhớt.

Trong miền nhiễu loạn, các lực nhớt tác động sao cho ở lối ra, trường các vận tốc là đều. Như vậy ở đây phải có sự hao tổn năng lượng :

- *công suất động học ở lối vào :*

$$\rho\frac{S}{2}V_1\frac{V_1^2}{2} + \rho\frac{S}{2}V_2\frac{V_2^2}{2} = \rho\frac{S}{4}(V_1^3 + V_2^3)$$

• *công suất động học ở lối ra :*

$$\rho S V_3 \frac{V_3^2}{2} = \rho \frac{S}{2} V_3^3 .$$

Điều đó gây ra một sự tổn hao năng lượng động học trong đơn vị thời gian bằng :

$$\rho \frac{S}{4}(V_1^3 + V_2^3) - \rho \frac{S}{2} V_3^3 = \rho \frac{S}{4}\left[V_1^3 + V_2^3 - 2\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)^3 \right].$$

Đại lượng này luôn luôn dương hay triệt tiêu (nó triệt tiêu khi $V_1 = V_2 = V_3$). Đúng là các lực nhớt làm tiêu tán năng lượng.

2 *Tham khảo giáo trình* §**4.1**.

Hệ thức cơ bản của động lực học được thể hiện bởi phương trình vi phân :

$$\rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\vec{e}_x = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \rho g(\sin\alpha\, \vec{e}_x - \cos\alpha\, \vec{e}_y) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\vec{e}_x .$$

Ở đây $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, (\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \vec{0}$, *vậy* $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \vec{0}$.

Chất lưu là không thể nén được, bằng phép chiếu, ta được :

• *trên* $\vec{e}_x$: $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\alpha = 0$;

• *trên* $\vec{e}_y$: $\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos\alpha = 0$;

• *trên* $\vec{e}_z$: $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$.

Từ đó ta suy ra $P = -\rho g y\cos\alpha + p(x,t)$ *, p chỉ phụ thuộc vào x và t p(x,t) là nghiệm của :*

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \rho g \sin\alpha = \eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} .$$

Đẳng thức này phải được nghiệm đúng với mọi giá trị của x, y và t. Như vậy, nó phải bằng một hằng số C(t) phụ thuộc thời gian t, nhưng độc lập với các tọa độ không gian x và y. Điều này cho :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \rho g \sin\alpha = C(t) \text{ và } \eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = -C(t) .$$

Ta có thể viết : $p(x,t) = x\rho g \sin\alpha + C(t)x + D_0$ (D_0 *là hằng số thật sự), nghĩa là :*

$$P(x,y,t) = -\rho g(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + \eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}x + D_0 .$$

Với $y = e$, *áp suất phải bằng* P_0, *nghĩa là độc lập với x, điều đó cho phép xác định C(t) và* D_0 :

• $\eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = -\rho g \sin\alpha = -C(t) = -C_0$ *, một hằng số thực sự, nghĩa là vận tốc có biểu thức sau :* $v = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} y(2e - y)$, *vì* $\frac{dv}{dy} = 0$ *ở* $y = e$ *(không có lực trượt trên mặt phân cách chất lưu/ không khí).*

Lúc đó, lưu lượng bằng $D = \int_0^e \rho v(y) L dy = \frac{\rho^2 g \sin\alpha\, L e^3}{3\eta}$.

• $P(x,y,t) = P(x,y) = -\rho g(y - e)\cos\alpha + P_0, (D_0 = P_0)$: *các đường đẳng áp song song với mặt phẳng nghiêng, và như vậy hợp với đường nằm ngang một góc* α.

lỏng	v_{max} (m.s^{-1})	*lời bình giải*
dầu	$\approx 2{,}5.10^{-3}$ m.s^{-1}	*các giả thiết có nhiều khả năng là đúng*
nước	$2{,}5$ m.s^{-1}	*dòng chảy là quá nhanh để các giả thiết về dòng chảy tầng có hiệu lực.*

• ***Phương pháp khác***

Tham khảo giáo trình §**2.1**.

Áp suất phát động (hay hiệu dụng)

$\hat{P} = P + \rho g Z$ *chỉ phụ thuộc vào biến số x, và đại lượng* $\frac{d^2 v}{dy^2}$ *chỉ phụ thuộc vào y.*

Biết rằng $\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}x} = \eta \frac{d^2 v}{dy^2} = -\rho g \sin\alpha$ *(hằng số), ta có thể viết :*

$$\hat{P} = -\rho g x \sin\alpha + cte.$$

(Áp suất đặt ở $y = e$ *là* $P = P_0$ *).*

Phần còn lại của cách giải không thay đổi.

3 1) *Mỗi khoang đều rất rộng so với chiều dày của nó. Ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của các bờ và áp dụng kết quả liên quan đến dòng chảy* P*OISEUILLE phẳng.*

Với mỗi khoang, thì $D_{\text{khoang}} = \frac{\rho a^4}{12\eta L N^2}(P_1 - P_0)$.

Tổng cộng $D = \frac{\rho a^4}{12\eta L N^2}(P_1 - P_0)$, *hay* $v_{moy} = \frac{a^2}{12\eta L N^2}(P_1 - P_0)$.

Với dầu, ta được :

$$D = 1{,}5.10^{-3}\ \text{kg.s}^{-1} = 1{,}5\ \text{g.s}^{-1} = 5{,}4\ \text{kg.h}^{-1}$$

tương ứng với một vận tốc $v_{moy} = 1{,}7$ m.s^{-1} .

Như vậy giả thiết về dòng chảy tầng (cần thiết để áp dụng công thức trên) đã được chứng thực.

2) *Công thức trên cũng y hệt đối với nước, nhưng khoảng cách áp suất rõ ràng là nhỏ hơn, ở lân cận* $\rho g L$:

$$D = \frac{\rho a^4}{12\eta L N^2}\rho g L = \frac{\rho^2 g a^4}{12\eta N^2} , \text{ hay } v_{moy} = \frac{a^2}{12\eta L N^2}\rho g L = \frac{\rho g a^2}{12\eta N^2} ;$$

điều này cho $D = 3{,}3.10^{-3}$ kg.s^{-1} $= 3{,}3$ g.s^{-1} *tương ứng với vận tốc :*

$$v_{moy} = 3{,}3.10^{-2}\ \text{m.s}^{-1} .$$

Vận tốc này nhỏ, nên giả thiết về dòng chảy tầng chắc chắn được nghiệm đúng.

4 *Trong cả hai trường hợp đive của vận tốc đều triệt tiêu. Ta có các dòng chảy không thể nén được, tương thích với giả thiết về chất lưu không thể nén được.*

a) *Từ phương trình vi phân của động lực học, bằng phép chiếu ta nhận được các phương trình vô hướng :*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{và} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g .$$

Như vậy mặt đẳng áp không nhất thiết là phẳng, song song với trục (Oy), vì $\overrightarrow{\text{grad}}\, P.\vec e_y = 0$; $\dfrac{\partial P}{\partial z} = cte$ *nhưng* $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ *có thể phụ thuộc vào y và t.*

b) • *Các phần tử chất lưu vẽ các vòng tròn với vận tốc không đổi, gia tốc toàn phần là:*

$$\frac{D\vec v}{Dt} = -\frac{v^2}{r}\vec e_r .$$

• *Theo các quy tắc tính các toán tử vectơ (xem chương 8) thì:*

$$\Delta\vec v = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec v) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right)\vec e_\theta .$$

Dòng chảy là bất biến trong phép quay có trục (Oz), áp suất độc lập với θ. *Thành thử phương trình vi phân của động lực học sẽ cho:*

• *khi chiếu trên* $\vec e_r$: $\dfrac{dP}{dr} = \rho\dfrac{v^2}{r}$;

• *khi chiếu trên* $\vec e_\theta$: $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv)}{dr}\right) = 0$ *(hệ số nhớt* η *không tham gia vào,* ***nhưng các lực nhớt lại áp đặt lời giải này!****)*

Sau khi lấy tích phân có kể đến các điều kiện ở giới hạn, ta được:

$$v = v_0\frac{a}{r} \text{ và } P = P_0 - \rho g z - \rho\frac{a^2 v_0^2}{2r^2} .$$

Vậy các mặt đẳng áp được sinh ra do sự quay của họ các đường cong:

$$z = \frac{a^2 v_0^2}{2gr^2} + cte .$$

5 1) *Xem tiết* **4** *của giáo trình. Đối với một dòng chảy như vậy, thì P là một hàm afin của x và cho* $\dfrac{dP}{dx} = \eta\dfrac{d^2v}{dy^2} = cte$.

Giả sử có một hình hộp nguyên tố mà các đáy (có diện tích S = aL) song song với mặt phẳng (xOz) và có tung độ y và y + dy.

Hình hộp chịu tác dụng của các lực trượt trên hai đáy của nó:

$$\vec F_{y+dy} = +\eta S\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y+dy}\vec e_x \text{ và } \vec F_y = -\eta S\left(\frac{dv}{dy}\right)_y\vec e_x$$

còn ở phía trước và phía sau chịu các áp suất:

$$d\vec F_x = P(x)a\,dy\,\vec e_x \quad \text{và} \quad d\vec F_{x+L} = -P(x+L)a\,dy\,\vec e_x .$$

(Ta nhận thấy: $P(x+L) - P(x) = \dfrac{dP}{dx}L = \eta\dfrac{d^2v}{dy^2}L$, *vì* $\dfrac{dP}{dx} = \eta\dfrac{d^2v}{dy^2} = cte$ *).*

Động năng của chất lưu là không đổi, nên công suất tổng cộng của các nội lực và ngoại lực triệt tiêu:

$$d\mathscr{P}_{visc} + \vec F_{y+dy}v(y+dy)\vec e_x + \vec F_y v(y)\vec e_x + (P(x) - P(x+L))v(y)a\,dy = 0 .$$

nhờ đó ta được:

$$d\mathscr{P}_{visc} + \eta S\frac{d\left(v\dfrac{dv}{dy}\right)}{dy}dy - \eta S v\frac{d^2v}{dy^2}dy = 0 .$$

S dy là thể tích của hình hộp: $\mathscr{P}_{vol} = -\eta\left(\dfrac{dv}{dy}\right)^2$.

2) $v = v_0\dfrac{y}{e}$; $\mathscr{P}_{vol} = -\eta\dfrac{v_0^2}{e^2}$ *là đều;* $\mathscr{P}_{visc} = -\eta\, l\, a\dfrac{v_0^2}{e}$.

3) *Với gốc ở trong mặt phẳng đối xứng:* $v = v_{max}\left(1 - \dfrac{4y^2}{e^2}\right)$.

$$v_{moy} = \frac{1}{e}\int_{-e/2}^{+e/2} v(y)dy = \frac{2}{3}v_{max} \quad \text{và} \quad \mathscr{P}_{vol} = \frac{144\eta\, v_{moy}^2}{e^2}y^2$$

$$\mathscr{P}_{visc} = l\,a\int_{-e/2}^{+e/2}\mathscr{P}_{vol}dy = -\frac{12\eta\, l\, a\, v_{moy}^2}{e}$$

Công suất tiêu tán trên đơn vị thể tích là cực đại ở gần sát thành hộp:

$$\mathscr{P}_{vol\,max} = \frac{36\eta\, v_{moy}^2}{e^2} = \rho c\frac{dT}{dt}, \text{ hay } \frac{dT}{dt} = 3{,}4.10^{-2}\ \text{K.s}^{-1} .$$

6 1) *Xem chương 8,* $\text{div}\,\vec v = 0$ *và như vậy:*

$$\Delta\vec v = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec v) = \frac{3v_\infty R}{2r^3}(2\cos\theta\,\vec e_r + \sin\theta\,\vec e_\theta)$$

$$\Delta\vec v = -\overrightarrow{\text{grad}}\frac{3v_\infty R\cos\theta}{2r^2} .$$

Biểu thức này tương thích với tính không thể nén được và với phương trình vi phân NAVIER-STOKES, *với điều kiện bỏ qua* $(\vec v.\overrightarrow{\text{grad}})\vec v$ *và ta đặt:*

$$P = P_0 - \frac{3\eta v_\infty R\cos\theta}{2r^2}$$

$\vec v(R,\theta) = \vec 0$ *với mọi giá trị của* θ *và* $\vec v \to v_\infty\vec e_z$ *khi* $r \to \infty$.

Như vậy các điều kiện ở giới hạn đã được coi trọng.

2) • *Tổng hợp các áp lực lên hình cầu:*

- *lên một phần tử bề mặt:* $d\vec F_{pres} = -P(R,\theta)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\vec e_r$;

- *trong phép chiếu lên (Oz):* $dF_{z\,pres} = \dfrac{3\eta v_\infty R\cos^2\theta\sin\theta}{2}d\theta\, d\varphi$.

• *Lực trượt*

- *trên một phần tử bề mặt:* $d\vec F_{cis} = \eta\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R}R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\vec e_\theta$;

- *trong phép chiếu:* $dF_{z\,cis} = \dfrac{3\eta v_\infty R\sin^3\theta}{2}d\theta\, d\varphi$.

Sau khi lấy tích phân: $\vec F = \vec F_{pres} + \vec F_{cis} = 6\pi\eta R v_\infty\vec e_\theta$.

Người ta đã kiểm tra thấy các thành phần khác của áp lực tổng hợp đều triệt tiêu.

7 1) $\vec v_{rel} = (\omega(r) - \omega(r_0))r\,\vec e_\theta = v_{rel}\vec e_\theta$ *(xem áp dụng 1).*

Khi xét hai hình trụ bán kính r và r+dr, ta được:

$$d\vec v_{rel} = r\frac{d\omega}{dr}dr\,\vec e_\theta;\ hay\ \frac{dv_{rel}}{dr} = r\frac{d\omega}{dr} .$$

2) *Lực trượt tỷ lệ với dS, và với* $\dfrac{dv_{rel}}{dr}$, *nghĩa là:*

$$d\vec F = -\eta\frac{dv_{rel}}{dr}\vec e_\theta\, dS = -\eta r\frac{d\omega}{dr}\vec e_\theta\, dS .$$

3) *Thành ngoài tác dụng lên chất lưu đang xét một mômen :*

$\mathcal{M}(R_2)=\eta R_2\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_2} 2\pi R_2 h R_2$ *(lực bề mặt x diện tích x cánh tay đòn), hay* $\mathcal{M}(R_2)=2\pi\eta h\left(r^3\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_2}$.

Cũng thế, mômen tác dụng bởi chất lưu trong là :

$$\mathcal{M}(r)=-2\pi\eta h r^3\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right).$$

Ở chế độ ổn định, mômen tổng cộng áp đặt vào hệ chất lưu triệt tiêu, nghĩa là : $r^3\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)=cte$. *Tích phân hệ thức này, ta được* $\omega=\dfrac{A}{r^2}+B$. *Khi kể đến các giới hạn thì được :*

$$\omega=\Omega\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r^2}-1\right).$$

4) $\Gamma=-2\pi\eta h R_2^3\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_2}=4\pi\eta h\dfrac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\Omega$.

5) *Sau một phép khai triển giới hạn ở bậc 1, ta có :*

$$\omega=\Omega\frac{R_2-r}{R_2-R_1} \text{ và } \Gamma=\frac{2\pi\eta h R_2^3}{e}\Omega.$$

Với các trị số đã cho : $\Gamma\approx 3$ N.m.

8 1) *Vận tốc tương đối của các điểm của hình trụ bán kính r đối với hình trụ bán kính* r_0 *là :*

$$v_{\text{rel}}=v(r)-v(r_0), \text{ từ đó } \vec{F}_{\text{cis}}=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}S\vec{e}_z.$$

2) *Nếu ta làm cân bằng các ngoại lực :*

- *các áp lực :* $\vec{F}_P=\pi r^2(P_{z=0}-P_{z=L})\vec{e}_z$.
- *các trọng lực :* $\vec{F}_g=-\pi r^2L\rho g\vec{e}_z$.

Nhờ đó, với $\hat{P}=P+\rho gz$, *ta được các áp lực và trọng lực :*

$$\vec{F}_{\hat{P}}=\pi r^2(\hat{P}_{z=0}-\hat{P}_{z=L})\vec{e}_z=\pi r^2(P_{z=0}-P_{z=L}-\rho gL)\vec{e}_z$$
$$=\pi r^2(\Delta P-\rho gL)\vec{e}_z=\pi r^2\Delta\hat{P}\vec{e}_z;$$

- *lực trượt :* $\vec{F}_{\text{cis}}=-\eta 2\pi rL\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\vec{e}_z$.

Ở chế độ ổn định, lực tổng hợp của các lực tác dụng bằng không :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\Delta\hat{P}}{2\eta L}r \text{ và vì } v(a)=0:\ v(r)=\frac{\Delta\hat{P}}{4\eta L}(a^2-r^2).$$

3) $D=\rho\displaystyle\int_0^a v(r)2\pi r\,\mathrm{d}r$, *nghĩa là :*

$$D=\frac{\pi\rho a^4}{8\eta L}\Delta\hat{P}=\frac{\pi\rho a^4}{8\eta L}(\Delta P-\rho gL).$$

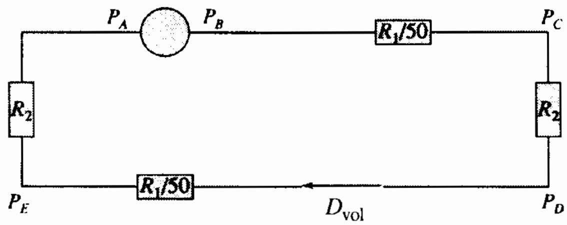
Ta nhận thấy nếu $\Delta P=\rho gL$, *thì không có bất kỳ một lưu lượng nào.*

9 1) *Người ta thấy có những sự tương tự sau đây giữa :*

- *áp suất và điện thế,*
- *lưu lượng thể tích và dòng điện.*

Đối với một ống, ta có thể viết $\Delta P=RD_{\text{vol}}$ *với* $R=\dfrac{8\eta l}{\pi a^4}$ *và đối với một điện trở thuần, ta viết* $\Delta U=RI$.

Ta có sơ đồ điện tương đương :



Với :

$R_1=\dfrac{8\eta l_1}{\pi a_1^4}=2{,}0.10^{10}$ Pa.m^{-3}.Δ ; *vậy* $\dfrac{R_1}{50}=4{,}0.10^8$ Pa.m^{-3}.Δ ;

$R_2=\dfrac{8\eta l_2}{\pi a_2^4}=6{,}5.10^8$ Pa.m^{-3}.Δ .

2) *"Điện trở" tổng cộng của mạch điện là :*

$$R=2R_2+2\frac{R_1}{50}=2{,}1.10^9 \text{ Pa.m}^{-3}.\Delta.$$

Biết rằng lưu lượng thể tích là 0,1 lít trong một giây, $D_{\text{vol}}=10^{-4}$ m^3.s^{-1}, *độ chênh áp suất* P_B-P_A *bằng* $P_B-P_A=2{,}1$ bar, *do đó ta được* $P_B=3{,}2$ bar.

Hiệu áp suất ở các "cực" của $\dfrac{R_1}{50}$ *bằng 0,4 bar.*

Hiệu suất ở các "cực" của R_2 *bằng 0,65 bar.*

Vậy, từ đó ta suy ra các áp suất khác nhau :

P_A	P_B	P_C	P_D	P_E	P_A
1,1 bar	3,2 bar	2,8 bar	2,15 bar	1,75 bar	1,1 bar

3) *Giả sử hệ được tạo thành bởi chất lưu hiện có trong bơm ở thời điểm t.*

Độ biến thiên động năng của nó rất nhỏ, nên ta có thể coi công suất tổng cộng nhận được triệt tiêu, nghĩa là :

Công suất các áp lực ở phía trên và phía dưới + công suất của bơm = 0.

Do đó : $\mathcal{P}_{\text{bom}}=(P_B-P_A)Sv=(P_B-P_A)D_{\text{vol}}$.

Sự tương tự với điện động học như vậy cũng cho công suất :

$$\mathcal{P}_{\text{bom}}=21W.$$

6 SỰ CHẢY THỰC : SỐ REYNOLDS

Mở đầu

Mọi chất lưu, theo cấu trúc của nó, đều nhớt !
Như vậy không tồn tại chất lưu lý tưởng
(cũng vậy, không có các dòng chảy thế)

Thế nhưng các mô hình này lại được dùng trong công nghiệp.
Đôi khi người ta có thể bỏ qua độ nhớt của một chất lưu.

Trong các điều kiện đó, sự vận chuyển động lượng bằng đối lưu (sự kéo theo bởi chất lưu) chiếm ưu thế hơn so với cũng sự vận chuyển đó bằng khuyếch tán (tính nhớt).

Khi đó, ta có nguy cơ thu được các cuộn xoáy.

Một con số không có thứ nguyên cho phép "lượng tử hóa" sự mô tả các dòng chảy khác nhau của một chất lưu nhớt : đó là số REYNOLDS Re.

MỤC TIÊU

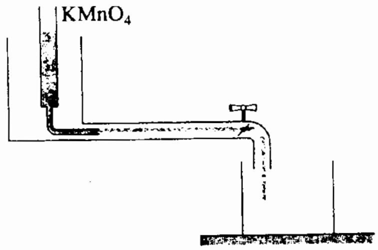
- Phân loại các dòng chảy từ số REYNOLDS.
- Ước lượng các cỡ lớn đặc trưng.
- Phân tích thứ nguyên.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học chất lưu.
- Động lực học chất lưu lý tưởng.
- Độ nhớt của một chất lưu..

Cho tới nay, ta mới giới hạn ở các trường hợp các dòng chảy lý tưởng (chảy thành lớp với các chất lưu nhớt, chảy thế với các chất lưu lý tưởng), có thể mô tả bởi các biểu thức (hay các mô hình) toán học đơn giản.

Một vài thí nghiệm đơn giản chứng tỏ cho ta thấy các sự chảy thực phức tạp hơn nhiều.



H.1. *Vòi nước cho phép điều chỉnh lưu lượng và chất màu cho phép thấy rõ sự chảy trong ống.*

1 Các nghiên cứu thực nghiệm về sự chảy của một chất lưu thực

1.1. Sự chảy thành lớp và cuộn xoáy

1.1.1. Ví dụ thứ nhất : Thí nghiệm của REYNOLDS

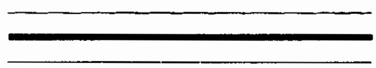
Một bình nước (hay chất lỏng nói chung) cung cấp nước cho một ống nằm ngang, dài; một thiết bị cho phép đưa một sợi màu vào trong ống (*h*.1).

Thí nghiệm chứng tỏ :

• ở các vận tốc nhỏ, sợi màu vẫn thẳng và song song với thành ống (*h*.2). Các đường dòng đi dọc theo nhau không bị rối và trượt trên nhau : ta nói có sự chảy *thành lớp*. Đó là trường hợp của tất cả các ví dụ đã được nghiên cứu cho tới nay.

• ở các vận tốc lớn, sợi màu phân tán ra và trộn lẫn vào chất lưu (*h*.3) : các đường dòng bị rối. Sự chảy ở trong ống là cuộn xoáy : các đường dòng bị rối. Sự chảy ở trong ống là *cuộn xoáy*.

Như vậy, đối với một chất lỏng đã cho, trong một ống đã cho, thì giá trị của vận tốc cho phép phân biệt một sự chảy thành lớp với một sự chảy cuộn xoáy.

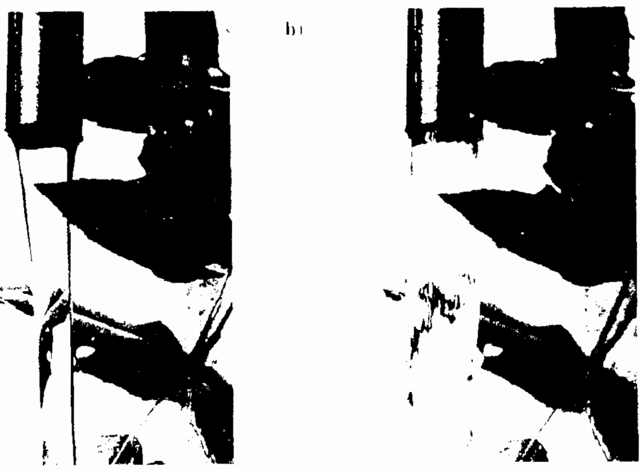


H.2. *Ở vận tốc nhỏ, sự chảy là thành lớp.*

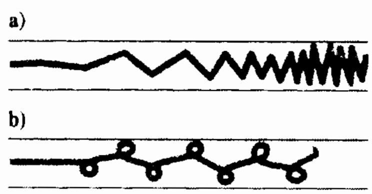
1.1.2. Ví dụ thứ hai

Ta hãy quan sát tia nước khi đi ra từ một cái ống (*h*.4). Nếu lưu lượng yếu, thì sợi nước trong suốt chảy ra một cách đều đặn. Điều này chỉ xảy ra khi vận tốc chảy nhỏ hoặc khi chất lưu rất nhớt (theo nghĩa định tính thông thường của từ này).

a)



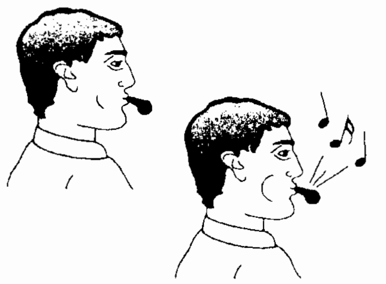
H.4. *Sự chảy* **a.** *thành lớp* **b.** *cuộn xoáy. Đường kính trong của ống bằng* 12 mm, *lưu lượng lần lượt là* 0,2 lít *trong một phút và* 10 lít *trong một phút. Cấu trúc của tia nước cuộn xoáy (ở đây chụp ảnh với thời gian đợi* 1/500s) *biến đổi rất nhanh khó quan sát được một cách rõ ràng.*



H.3. *Ở vận tốc lớn, sự chảy là cuộn xoáy.* **a.** *Hình dáng thu được bằng cách chụp ảnh cổ điển.* **b.** *Hình dáng thu được khi nhìn thức thời (chụp ảnh rất nhanh).*

Tiếp tục tiến hành thí nghiệm trên bằng cách tăng dần lưu lượng : bề mặt của tia nước không còn hoàn toàn nhẵn nữa và hình dáng của nó thay đổi theo thời gian, sau đó, mất đi độ trong suốt. Các đường dòng không còn có dạng đều đặn của chế độ chảy thành lớp. Chúng tạo thành một mạng lưới phức tạp, rối tung, ở chế độ mất ổn định thường xuyên, hình dạng luôn luôn thay đổi và thay đổi rất nhanh. Khi đó, không còn có thể dự đoán được sự biến đổi của các đường dòng nữa và sự chảy, hỗn độn, thành cuộn xoáy.

Sự xuất hiện cuộn xoáy khi vận tốc chảy vượt quá một giá trị nào đó là một hiện tượng rất phổ biến.



H.5. *Phải có một lưu lượng tối thiểu để cuộn xoáy xuất hiện và một âm được phát ra.*

1.1.3. Các tình huống khác

Nếu ta thổi rất nhẹ nhàng vào một chiếc còi thì không thấy một âm nào phát ra : không khí chảy thành lớp và không đổi. Bắt đầu từ một lưu lượng nào đó, còi mới phát ra một âm. Thí nghiệm này chứng tỏ sự tồn tại các hiện tượng không ổn định : sự chảy trở thành cuộn xoáy (*h*.5).

Sự chảy là thành lớp nếu các đường dòng "trượt" trên nhau và vẫn giữ song song với nhau : nói chung, có sự chảy thành lớp nếu "vận tốc" nhỏ.

Trong trường hợp ngược lại, với vận tốc trung bình lớn, sự chảy là *cuộn xoáy*. Sự chảy cuộn xoáy là không bền và có cấu trúc hỗn độn.

2 SỐ REYNOLDS

Số REYNOLDS sẽ cho phép ta xác định một cách định lượng "ranh giới" giữa một dòng chảy thành lớp và một dòng chảy cuộn xoáy.

2.1. Lựa chọn các thông số

Ta hãy dự kiến xác định các thông số tác động vào hai thí nghiệm ở trên.

Sự chuyển tiếp thành lớp - cuộn xoáy với các dòng chảy đang xét phụ thuộc vào :

• vận tốc trung bình V của chất lưu (điều này là đương nhiên) : nhất là trong hai thí nghiệm trên chính chúng ta đã làm rõ thông số này ;

• độ nhớt η của chất lưu : điều này cũng đương nhiên vì các cuộn xoáy rất khó thu được ở trong dầu so với ở trong nước ;

• đường kính D của ống : đối với một chất lưu đã cho, với một lỗ nhỏ, ta dễ thu được một dòng chảy thành lớp hơn là một lỗ lớn.

• khối lượng riêng ρ của chất lưu. Thông số này có vẻ không đương nhiên, nhưng khối lượng riêng lại xuất hiện trong mọi phương trình biến đổi.

2.2. Sự tiếp cận bằng thứ nguyên

Để có thể thực hiện sự phân biệt về mặt định lượng giữa một dòng chảy thành lớp và một dòng chảy cuộn xoáy, từ các thông số ở trên, ta hãy xây dựng một đại lượng không có thứ nguyên.

Các phương trình thứ nguyên của các thông số khác nhau đã lựa chọn là :

$$[V] = L.T^{-1}\ ;\ [\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}\ ;\ [D] = L\ ;\ [\rho] = M.L^{-3}$$

Chỉ có lượng $\frac{\rho VD}{\eta}$ là không có thứ nguyên mà ta có thể xây dựng được từ các thông số này (x. §**10**). Vậy đại lượng này là một con số đặc trưng cho sự chảy. *Con số không có thứ nguyên này gọi là số REYNOLDS:*

$$Re = \frac{\rho VD}{\eta}$$

Ta hãy tính cỡ lớn của số REYNOLDS cho hai dòng chảy, mô tả ở §**1.1.2**. Ký hiệu D_{vol} là lưu lượng thể tích, và D là đường kính của ống, vận tốc trung bình V của dòng chảy được cho bởi $V = \frac{4D_{vol}}{\pi D^2} \approx \frac{D_{vol}}{D^2}$.

Thí nghiệm được thực hiện với nước $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $\eta = 10^{-3}$ PI. Từ trên, ta có:

- khi quan sát thấy một dòng chảy thành lớp $V \approx 2{,}5$ cm.s^{-1} và $Re \approx 300$.
- khi quan sát thấy một dòng chảy cuộn xoáy (rối) $V \approx 1{,}2$ ms^{-1} và $Re \approx 14000$.

Các giá trị này là các đặc trưng của một dòng chảy thành lớp và một dòng chảy cuộn xoáy.

- **Số REYNOLDS $Re = \frac{\rho VL}{\eta}$ là một số không có thứ nguyên, đặc trưng cho dòng chảy của một chất lưu (khối lượng riêng ρ, độ nhớt η), có vận tốc trung bình V, xung quanh một vật cản (hay trong một ống dẫn) có kích thước đặc trưng L.**
- **Sự chuyển tiếp thành lớp - cuộn xoáy**

Nếu số REYNOLDS nhỏ ($Re < \approx 2000$, nói chung là giá trị được chấp nhận), sự chảy thường thường là thành lớp; Với Re lớn ($Re > 2000$), dòng chảy thường là cuộn xoáy.

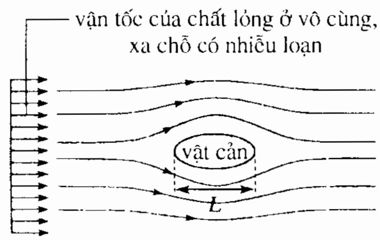
Hình 6 cho chúng ta một vài cỡ lớn của các giá trị có thể có của số REYNOLDS.

mô tả	số REYNOLDS Re
sự biến đổi của vỏ trái đất	10^{-20}
sông băng	10^{-11}
vi khuẩn trong nước	10^{-5}
tinh trùng trong tinh dịch	10^{-3}
hòn bi rơi trong mật ong	10^{-2}
cá trong bể kính	10^{2}
người bơi trong nước	10^{5}
rắn trong nước	10^{6}
chim	10^{6}
cá lớn trong nước	10^{8}

H.6. *Các ví dụ về giá trị của số REYNOLDS.*

3 Những cách giải thích khác nhau của số REYNOLDS

Ta hãy làm rõ các khái niệm quan trọng về sự giải thích số REYNOLDS bằng cách chỉ xem xét một chất lưu không chịu nén, có khối lượng riêng ρ, độ nhớt η đang chảy với vận tốc trung bình V xung quanh (hoặc trong) một vật cản có kích thước đặc trưng L (*h*.7).



H.7. *Một chất lưu không chịu nén, có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η, đang chảy với vận tốc trung bình V xung quanh một vật cản có kích thước đặc trưng L.*

3.1. Những điều cần nhắc lại

Ta nhớ lại rằng trong biểu thức của đạo hàm theo hạt (đạo hàm toàn phần):

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\,.\,\overrightarrow{grad})$$

có hai số hạng :

- $\frac{\partial}{\partial t}$: độ biến thiên **cục bộ** của đại lượng
- $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}$: độ biến thiên **đối lưu** của đại lượng, nghĩa là độ biến thiên gắn với sự dịch chuyển của chất lỏng.

Vậy nên, phương trình biến đổi tổng quát một chất lỏng nhớt, được cho bởi công thức sau:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v},$$

cho phép thu được phương trình sau đây mà vận tốc $\vec{v}$ là nghiệm :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} - \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}.$$

Phương trình biến đổi của vận tốc này được giải thích như sau :

độ biến thiên cục bộ của vận tốc

độ biến thiên đối lưu của vận tốc

$$\left\{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\} + \{(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\} + \left\{-\frac{\eta}{\rho}\right\}\Delta\vec{v} = \left\{\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}{\rho}\right\}$$

độ biến thiên khuyếch tán của vận tốc

số hạng "phát động"

Số REYNOLDS luôn luôn thu được bởi tỷ số của hai đại lượng đặc trưng:

- một liên kết với **sự đối lưu** (ta sẽ cho nó chỉ số "c") ;
- một liên kết với **sự khuyếch tán** (ta sẽ cho nó chỉ số "d").

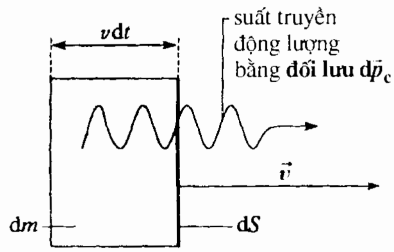
3.2. Tỷ số giữa hai suất truyền động lượng

3.2.1. Truyền động lượng bằng đối lưu

Khối lượng dm đi qua diện tích dS trong thời gian dt (h.8a) bằng dm = $\rho\, v\, dS\, dt$. Động lượng riêng bằng v, như vậy đã có một sự truyền động lượng bằng đối lưu.

Suất truyền động lượng bằng đối lưu bằng :

$$dp_c = \rho v^2 dS\, dt.$$



H.8a. *Sự truyền động lượng bằng đối lưu. Khối lượng dm đi qua dS trong thời gian dt bằng :*

$$dm = D_m dt = \rho v dS dt$$

3.2.2. Truyền động lượng bằng khuyếch tán

Hãy nhớ rằng trong một dòng chảy của chất lỏng nhớt có tồn tại một ứng lực bề mặt tiếp tuyến giữa hai lớp chất lỏng tiếp xúc nếu vận tốc tương đối giữa hai lớp này khác không. Đối với chất lỏng không chịu nén, lực này có dạng :

$$d\vec{F} = dF_{//}\,\vec{e}_x = \frac{\eta}{\rho}\,\|\overrightarrow{\text{grad}}(\rho v_x)\|\,dS\,\vec{e}_x.$$

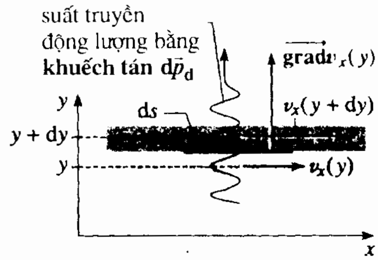
Hệ thức này được giải thích như một sự truyền động lượng bằng khuếch tán qua diện tích dS (*h*.8b) (*x. chương* 5). Suất truyền động lượng bằng khuyếch tán qua diện tích dS trong thời gian dt cho bởi $d\vec{p}_d = dF_{//}\vec{e}_x dt$, hay :

$$dp_d = \frac{\eta}{\rho} \| \overrightarrow{\text{grad}}(\rho v_x) \| \, dS \, dt .$$

Hệ thức này cho phép (bằng cách đánh giá cỡ lớn của đại lượng $\| \overrightarrow{\text{grad}}(\rho v) \|$ là lượng $\frac{\rho v}{L}$) viết biểu thức sau :

Suất truyền động lượng bằng khuyếch tán là :

$$\mathbf{d}\vec{p}_d = \frac{\eta}{\rho}\frac{\rho v}{L}\mathbf{d}S\,\mathbf{d}t = \frac{\eta v}{L}\mathbf{d}S\,\mathbf{d}t .$$



H.8b. *Sự truyền động lượng bằng khuếch tán :*

$\vec{v}(M) = v_x(y)\vec{e}_x$ *và* $d\vec{p}_d = \eta\frac{v}{L}dS\,dt\,\vec{e}_x$

3.2.3. Số REYNOLDS

Số Reynolds được xác định bởi :

$$Re = \frac{\left\{\begin{matrix}\text{suất truyền động lượng}\\ \text{bằng } \textbf{đối lưu}\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\text{suất truyền động lượng}\\ \text{bằng } \textbf{khuyếch tán}\end{matrix}\right\}} = \frac{p_c}{p_d} = \frac{(\rho v^2)}{\left(\frac{\eta v}{L}\right)} = \frac{\rho L v}{\eta}$$

3.2.4. Giải thích.

số REYNOLDS nhỏ $Re \ll 1 \Leftrightarrow p_d \gg p_c$	số REYNOLDS lớn $Re \gg 1 \Leftrightarrow p_c \gg p_d$
ưu thế của sự truyền động lượng bằng **khuyếch tán**	ưu thế của sự truyền động lượng bằng **đối lưu**

3.3. Tỷ số giữa hai thời gian đặc trưng

Để thấy rõ các thời gian đặc trưng gắn với sự đối lưu và sự khuyếch tán, ta hãy trở lại biểu thức đã đưa ra trước đây :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} - \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\rho} .$$

Cần nhớ rằng ta đang có dòng chảy của một chất lỏng không chịu nén (có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η), với vận tốc v xung quanh một vật cản có kích thước đặc trưng L.

3.3.1. Thời gian đặc trưng của sự vận chuyển động lượng bằng đối lưu

Ta hãy so sánh các số hạng biến thiên cục bộ $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$ và đối lưu $((\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v})$ của vận tốc. Nếu hai số hạng này "gần bằng nhau", thì ta có thể xác định một thời gian đặc trưng τ_c sao cho :

$$\frac{v}{\tau_c} = v.\frac{v}{L}, \text{ nghĩa là } \tau_c = \frac{L}{v}$$

Chú ý rằng thời gian đặc trưng biểu thị thời gian cần để một hạt đi hết khoảng cách đặc trưng L.

Thời gian đặc trưng τ_c của sự vận chuyển động lượng bằng đối lưu bằng $\tau_c = \frac{L}{v}$.

3.3.2. Thời gian đặc trưng của sự vận chuyển động lượng bằng khuếch tán

Ta hãy so sánh các số hạng biến thiên cục bộ $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$ và khuếch tán $\left(\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}\right)$ của vận tốc. Nếu hai số hạng này "gần bằng nhau" thì ta có thể xác định một thời gian đặc trưng τ_d sao cho :

$$\frac{v}{\tau_d} = \frac{\eta}{\rho}\frac{v}{L^2},$$

nghĩa là
$$\tau_d = \frac{\rho L^2}{\eta}$$

(thời gian đặc trưng này tồn tại trong mọi hiện tượng khuyếch tán; *x. Nhiệt động lực học, H−prépa, năm thứ nhất và năm thứ hai*).

Thời gian đặc trưng τ_d của sự vận chuyển động lượng bằng khuyếch tán bằng $\tau_d = \frac{\rho L^2}{\eta}$.

3.3.3. Số REYNOLDS

Số REYNOLDS có thể còn được xác định bởi một tỷ số :

$$Re = \frac{\left\{\begin{array}{c}\text{thời gian đặc trưng của sự vận chuyển}\\ \text{động lượng bằng } \textbf{khuyếch tán}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\text{thời gian đặc trưng của}\\ \text{sự vận chuyển động lượng bằng } \textbf{đối lưu}\end{array}\right\}} = \frac{\tau_d}{\tau_c} = \frac{\left(\frac{\rho L^2}{\eta}\right)}{\left(\frac{L}{v}\right)} = \frac{\rho L v}{\eta}.$$

3.3.4. Giải thích

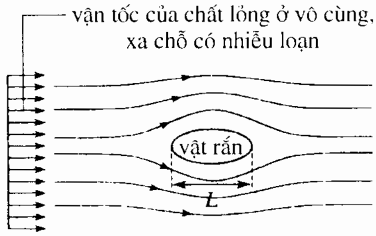
số REYNOLDS nhỏ $Re \ll 1 \Leftrightarrow \tau_d \ll \tau_c$	số REYNOLDS lớn $Re \gg 1 \Leftrightarrow \tau_c \ll \tau_d$
thời gian đặc trưng của sự vận chuyển động lượng bằng khuyếch tán rất ngắn, đó sẽ là các hiện tượng chiếm ưu thế: **sự khuếch tán chiếm ưu thế**	thời gian đặc trưng của sự vận chuyển động lượng bằng đối lưu rất ngắn, đó sẽ là các hiện tượng chiếm ưu thế: **sự đối lưu chiếm ưu thế**

• Với số REYNOLDS lớn, sự vận chuyển động lượng bằng đối lưu mạnh hơn là bằng khuếch tán; điều đó có nghĩa là thời gian đặc trưng gắn với sự vận chuyển bằng đối lưu ngắn hơn là bằng khuếch tán.

• Với số REYNOLDS nhỏ, sự vận chuyển động lượng bằng khuếch tán mạnh hơn là bằng đối lưu. Thời gian đặc trưng gắn với sự vận chuyển bằng khuếch tán ngắn hơn bằng đối lưu.

4 Các định luật đồng dạng

4.1. Phương trình không thứ nguyên cục bộ đối với một chất lỏng không chịu nén



H.9. *Một chất lỏng có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η đi tới một vật cản có kích thước đặc trưng L với vận tốc v_∞.*

Ta hãy xét dòng chảy của một chất lỏng không chịu nén xung quanh một vật cản.

Đối với một dòng chảy đã cho, nghiệm của phương trình NAVIER - STOKES phụ thuộc vào :

- các thông số đặc trưng của chất lỏng (ρ, η);
- các điều kiện giới hạn gán cho áp suất và vận tốc ;
- các đặc trưng của vật cản (hình dạng và kích thước của vật).

Vậy ta hãy tìm lại các thông số đã được xác định trước đây.

Bằng một phép biến đổi tọa độ, ta có thể rút gọn được số các thông số độc lập.

Ta hãy tưởng tượng có một chất lỏng không chịu nén, giả thiết vô cùng rộng; ở xa vật cản, chất lỏng có một vận tốc đều $v_\infty = v_\infty \vec{e}_x$ đã biết (*h*.9).

Gọi L là một chiều dài đặc trưng của vật cản (ví dụ là đường kính đối với một quả cầu). Các đơn vị "tự nhiên" của bài toán, đối với chiều dài là L, đối với vận tốc là v_∞, đối với thời gian là $\dfrac{L}{v_\infty}$ và đối với áp suất là ρv_∞^2 (với nghĩa rộng của số hạng, và luôn luôn ký hiệu là $\hat{P} = P + \rho g z$ như ở *chương* 5). Ta hãy đặt :

$x = x' L$	$x = y' L$	$x = z' L$
$v = v' v_\infty$	$t = t' \dfrac{L}{v_\infty}$	$\hat{P} = \hat{P}' \rho v_\infty^2$

Các tọa độ mới x', y', z' và t' là các số không có thứ nguyên ; ta gọi chúng là các *tọa độ thứ nguyên.*

Ta cũng sẽ ký hiệu $\overrightarrow{\text{grad}}'$, $\overrightarrow{\text{rot}}'$, v.v..., là các toán tử vectơ được xác định trong hệ mới này, ví dụ như :

$$\overrightarrow{\text{grad}}'(P') = \frac{\partial P'}{\partial x'}\vec{e}_x + \frac{\partial P'}{\partial y'}\vec{e}_y + \frac{\partial P'}{\partial z'}\vec{e}_z .$$

Với hệ biến số mới này, phương trình NAVIER-STOKES trở thành :

$$\rho \frac{v_\infty^2}{L}\frac{\mathrm{D}\vec{v}'}{\mathrm{D}t'} = -\rho \frac{v_\infty^2}{L}\overrightarrow{\text{grad}}'(\hat{P}') + \eta \frac{v_\infty}{L^2}\Delta'\vec{v}' .$$

Đặt $\text{Re} = \dfrac{\rho v_\infty L}{\eta}$ là số REYNOLDS của dòng chảy và nhờ vectơ cuộn xoáy $\vec{\omega}' = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}'(\vec{v}')$, khai triển $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}'}{\mathrm{D}t'}$, ta có :

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + 2\vec{\omega}' \wedge \vec{v}' + \overrightarrow{\text{grad}}'\left(\hat{P}' + \frac{v'^2}{2}\right) = \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{v}'$$

- Tính không chịu nén luôn luôn được diễn tả bởi $\text{div}'\vec{v}' = \vec{0}$.

• Để khử áp suất, ta lấy rot của hai vế của đẳng thức trên. Bằng cách áp dụng các quy tắc tổng hợp các toán tử vectơ (*x. chương* 8), và dựa vào $\text{div}'\vec{v}' = \vec{0}$, ta thu được :

$$\frac{\partial\vec{\omega}'}{\partial t'} + \overrightarrow{\text{rot}}'(\vec{\omega}' \wedge \vec{v}') = \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{\omega}' \quad \text{hay} \quad \frac{\partial\vec{\omega}'}{\partial t'} = \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{\omega}' + (\vec{\omega}'.\overrightarrow{\text{grad}}')\vec{v}'.$$

4.2. Định luật đồng dạng với dòng chảy xung quanh một vật cản

Trường vận tốc được xác định bởi :

• các phương trình đạo hàm riêng :

$$\frac{\partial\vec{\omega}'}{\partial t'} + \overrightarrow{\text{rot}}'(\vec{\omega}' \wedge \vec{v}') = \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{\omega}'$$

$$\text{div}'\vec{v}' = 0 \text{ và } \vec{\omega}' = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}'(\vec{v}');$$

• các điều kiện giới hạn :

$$\vec{v}' = \vec{e}_x \text{ ở vô cùng và } \vec{v}' = 0 \text{ ở trên vật cản.}$$

Trong các tọa độ không thứ nguyên, đối với một vật cản có hình dạng và định hướng đã biết, thì vận tốc không thứ nguyên $\vec{v}'$ chỉ phụ thuộc vào một thông số - số REYNOLDS Re. Nếu ta thay đổi các kích thước của vật cản, hoặc nếu ta dùng một chất lỏng khác, nhưng giữ nguyên số Reynolds, thì các dòng chảy là đồng dạng, nghĩa là giống hệt nhau, sai kém một thừa số của thang đo.

Cấu trúc của dòng chảy của một chất lỏng không chịu nén xung quanh một vật cản có hình dạng đã biết, chỉ phụ thuộc vào số *REYNOLDS* $\text{Re} = \frac{\rho L v_\infty}{\eta}$.

Các dòng chảy của hai chất lỏng khác nhau xung quanh hai vật rắn có cùng hình dạng nhưng có các kích thước khác nhau là *đồng dạng với nhau*, nếu có các số REYNOLDS bằng nhau. Khi đó vận tốc không thứ nguyên $\frac{v}{v_\infty}$ sẽ có cùng giá trị tại những điểm tương ứng của hai dòng chảy.

Đặc biệt, chế độ chảy (thành lớp hoặc cuộn xoáy), đối với một hình dạng đã cho, phụ thuộc vào giá trị của Re.

Chú ý:

• *Định nghĩa của số REYNOLDS có phần còn mập mờ. Thực vậy, đối với một vật rắn có hình dạng bất kỳ thì chỉ có cỡ lớn của chiều dài đặc trưng L là có ý nghĩa. Vì vậy, ta cần phải xác định rõ định nghĩa của L (Ví dụ : chiều dài lớn nhất).*

• *Tính đồng dạng chỉ được áp dụng khi vật rắn chìm hoàn toàn trong chất lỏng không chịu nén và không có giới hạn. Nếu vật rắn không chìm hoàn toàn, như một con tàu chẳng hạn, thì ta phải kể tới các sóng bề mặt, mà các sóng này lại không tuân theo cùng các định luật đồng dạng. Hơn nữa, nếu ta phải kể tới tính chịu nén (đó là trường hợp các dòng khí khi có vận tốc rất nhỏ so với vận tốc của âm), thì sự bằng nhau của các số REYNOLDS chưa đủ để đảm bảo cho sự đồng dạng.*

• *Áp suất không thứ nguyên chỉ tham gia vào các phương trình bởi gradien của nó. Vậy, đó là các độ chênh lệch $P'(M) - P'(O)$ đối với một điểm mốc O, chúng có cùng một giá trị cho mọi dòng chảy tương tự.*

Áp dụng 1

Các hệ số thang đo cho một phép thử trên mô hình (maket)

1) *Có nhiều phép thử liên quan đến một chiếc tàu ngầm trong tương lai được thực hiện trên một mô hình với tỷ lệ 1/5, nằm yên trong một bể ở đó có duy trì một dòng chảy không đổi.*

Hãy xác định các hệ số thang đo cần áp dụng cho vận tốc, cho áp suất và cho các hợp lực để chuyển các giá trị đo được trên mô hình vào thực tế.

2) *Ta tưởng tượng các phép thử được thực hiện trong một ống thổi không khí. Giả thiết không khí không chịu nén, hãy xác định vận tốc dòng chảy của không khí. Phương pháp này liệu có sử dụng được không ? Ta sẽ lấy đối với nước* $\frac{\eta}{\rho} = 1{,}0.10^{-6}$

và đối với không khí $\frac{\eta}{\rho} = 1{,}5.10^{-5}$.

1) Coi chiếc tàu ngầm chìm hoàn toàn trong nước, không chịu nén và giả thiết rằng sự bằng nhau của các số REYNOLDS đủ để đảm bảo tính đồng dạng.

• Gọi $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_x$ là vận tốc của chiếc tàu ngầm thực. Trong hệ quy chiếu của tàu ngầm, điều này tương ứng với một dòng chảy sao cho $v_\infty = v_0$. Để thu được cùng một số REYNOLDS thì dòng chảy trong bể phải có một vận tốc bằng $5v_0$. Khi đó các dòng chảy tương tự nhau, và đối với mọi cặp điểm tương ứng :

$$v_{\text{thực}} = \frac{v_{\text{mô hình}}}{5}$$

• Đối với các biến thiên áp suất $\hat{P} - P_0 = (\hat{P}' - P_0')\rho v_\infty^2$. Nếu trong hai trường hợp áp suất bằng P_0 ở độ cao 0, thì khi đó :

$$\hat{P}_{\text{thực}} - P_0 = \frac{\hat{P}_{\text{mô hình}} - P_0}{25}.$$

• Nếu ta khử được ảnh hưởng của trọng lực, $\hat{P} = P$ và áp suất có dư do dòng chảy tạo ra trên mô hình lớn gấp 25 lần. So với tàu ngầm thực, vận tốc được nhân lên với 5, và các khoảng cách được chia cho 5. Điều này kéo theo gradien của các thành phần vận tốc được nhân với 25. Vì các phần tử diện tích trên mô hình nhỏ hơn 25 lần, nên tổng hợp của các lực nén và cắt, do vậy của lực nhớt, do dòng chảy tạo ra có cùng một giá trị trên một phần của mô hình và trên phần tương ứng của con tàu thực.

2) Các số REYNOLDS bằng nhau nếu

$$v_{\text{thực}} = \frac{v_{\text{mô hình}}}{75}.$$

Ví dụ nếu $v_{thực} = 10\ \text{ms}^{-1}$ khi đó $v_{\text{mô hình}} = 750\ \text{ms}^{-1}$ lớn hơn vận tốc âm. Giả thuyết không khí không chịu nén như vậy là không thực tế và không thể có sự đồng dạng của các dòng chảy.

Chú ý :

• *Sự bằng nhau của các lực không liên quan đến thành phần "lực ARCHIMEDE" (do trọng lực) của tổng hợp các lực nén.*

• *Bể để thử không thể hoàn toàn tái tạo lại được các điều kiện giới hạn của biển gần như vô hạn. Cho nên, các kết quả phải được hiệu chính, có tính đến sự có mặt của các thành bể.*

4.3. Các chế độ chảy

4.3.1. Trường hợp đặc biệt của chế độ tuyến tính không đổi

Ta hãy nghiên cứu trường các vận tốc, trong trường hợp một chế độ tuyến tính được giả thiết không đổi.

Đối với các số REYNOLDS nhỏ, chỉ có các hiện tượng khuyếch tán tham gia (các hiện tượng đối lưu không đáng kể) và phương trình trở thành :

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{v}' = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\hat{P}'.$$

Ở *chế độ không đổi*, các vận tốc không thứ nguyên tại mọi điểm, vì vậy được xác định bởi :

$$\overrightarrow{\text{rot}}'(\Delta'\vec{v}') = \Delta'(\overrightarrow{\text{rot}}'\vec{v}') = 0 \ \text{ và } \ \text{div}'(\vec{v}') = \vec{0}$$

$\vec{v}' = \vec{e}_x$ ở vô cùng, và $\vec{v}' = 0$ trên vật cản.

Do vậy, trường $\vec{v}'(M)$ là duy nhất, không phụ thuộc vào số REYNOLDS. Trở lại các tọa độ ban đầu, ta viết :

$$\vec{v}(M) = v_\infty \vec{v}'(M).$$

Vì đối với mỗi điểm M, $\vec{v}'(M)$ là một vectơ không đổi nên ta có :

Với số Reynolds nhỏ ($\mathrm{Re} \ll 1$), trong chế độ tuyến tính không đổi, vận tốc tại mọi điểm tỷ lệ với v_∞.

Chú ý rằng đối với các dòng chảy có số REYNOLDS rất nhỏ ($\mathrm{Re} \ll 1$) thì thời gian không tham gia tường minh vào sự biến đổi của chất lỏng : chế độ chảy luôn luôn là gần như không đổi (*x. chương* 8).

4.3.2. Sự không tuyến tính, các cuộn xoáy và hỗn độn

Nếu trong một dòng chảy, số REYNOLDS Re lớn so với 1, ta phải tính đến các số hạng không tuyến tính. Các nghiệm không còn chồng chất lên nhau được nữa và sự phân bố các đường dòng biến đổi theo số REYNOLDS Re.

Nghiên cứu định lượng một cuộn xoáy bằng cách giải phương trình NAVIER–STOKES là rất phức tạp. Ta xác định một cách đơn giản là sự tồn tại các số hạng không tuyến tính trong một phương trình vi phân đơn giản có thể gây ra các hiệu ứng gần giống như cuộn xoáy :

• với các nhiễu loạn nhỏ, ta thường có thể tuyến tính hóa phương trình vi phân để có các nghiệm có thể tạo lại được.

Ví dụ : Một dao tử ít bị nhiễu loạn luôn luôn dao động xung quanh vị trí cân bằng của nó, bất kể các điều kiện ban đầu như thế nào.

• nếu các nhiễu loạn lớn hơn, có thể tồn tại nhiều nghiệm bền. Các nghiệm này biến đổi xung quanh một hoặc nhiều "tâm hút". Một sự thay đổi rất nhỏ các điều kiện ban đầu hoặc các nhiễu loạn nhỏ bên ngoài có thể làm hệ mất thăng bằng và chuyển về một nghiệm hoàn toàn khác.

Ví dụ : Một con lắc được lăng đi "rất mạnh" có thể dao động xung quanh vị trí $\theta = 0$ hay $\theta = 2\pi$, hay $\theta = 4\pi$,... Tính chất không điều hòa của các dao động này có thể được thể hiện rõ nhờ vào hình ảnh pha (x.H–Prépa, Cơ học năm thứ nhất). Từ các điều kiện ban đầu lân cận, hệ có thể tiến về các chế độ bền, nhưng khác hẳn.

• nếu các nhiễu loạn rất lớn, ta không còn có thể dự đoán hệ sẽ biến đổi như thế nào nữa ; một sự thay đổi rất nhỏ các điều kiện ban đầu hay các thông số có thể dẫn tới các trạng thái hoàn toàn khác biệt : trạng thái hỗn loạn.

Như vậy, ở một dòng chảy chất lỏng, có thể phân biệt được các pha khác nhau : khi tăng vận tốc (do đó tăng số REYNOLDS) của một dòng chảy, ta quan sát thấy các hiện tượng tương tự :

• với Re rất nhỏ (điển hình là $\mathrm{Re} < 1$), dòng chảy là thành lớp, gần như tuyến tính. Dòng chảy là bền, dường như không ảnh hưởng bởi các nhiễu loạn nhỏ. Đó là điều mà ta đã thấy ở §**2.2**.

• nếu Re lớn dần (trong thực tế, giá trị phụ thuộc rất nhiều vào mặt cắt của vật cản hay hình dạng của ống), dòng chảy có thể có nhiều hình dáng tương đối bền. Những nhiễu loạn nhỏ làm cho dòng chảy chuyển từ hình dáng này sang hình dáng khác. Đó là điều mà ta quan sát thấy khi mở dần dần một vòi nước ; có những cấu trúc hình học thay đổi xuất hiện trên tia nước, bắt đầu từ một lưu lượng nào đó.

• với những giá trị lớn hơn của Re, ta không còn có thể mô tả một cách đơn giản dòng chảy khi nó trở thành *cuộn xoáy* (rối). Sự lệch nhỏ nhất khỏi các điều kiện ban đầu và một chút nhiễu loạn cũng làm thay đổi hẳn lời giải. Sự biến đổi của một dòng chảy không thể dự đoán trước và dòng chảy trở thành *hỗn loạn*. Sự cuộn xoáy thể hiện chủ yếu bởi sự không thể xảy ra một chế độ không đổi bền và bởi sự tồn tại thoáng qua các cấu trúc tuần hoàn (sự phân nhánh), cả về không gian lẫn về thời gian. Đó là điều mà ta cũng quan sát thấy khi mở hết cỡ một vòi nước với lưu lượng lớn (đường kính lớn) : dòng chảy dường như tức thời chuyển qua các trạng thái thoáng qua khác nhau ; ta không thể đoán trước được một chế độ chảy nào.

Sự cuộn xoáy được gắn với đặc tính không tuyến tính của các phương trình của cơ học chất lỏng. Nó xuất hiện với các số Reynolds cao, và đặc trưng cho một dòng chảy hỗn loạn và phụ thuộc thời gian.

5 Dòng chảy xung quanh một vật cản

5.1.1. Lực cản chính diện, hệ số cản chính diện

Theo định nghĩa, *lực cản chính diện* là thành phần song song với $\vec{v}_\infty$ của tổng hợp các lực do dòng chảy của chất lỏng tạo ra. Chúng ta đã gặp lực này khi gọi nó là lực ma sát.

Lực này không tính đến các tác dụng của trọng lực. Ta hãy khử lực này khỏi các phương trình : điều đó làm cho P và $\widehat{P}$ trùng nhau.

Hệ số cản chính Cx của một vật rắn là một số không thứ nguyên được xác định bởi :

$$F_{\text{cản chính}} = Cx\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S \text{ nghĩa là } Cx = \frac{F_{\text{cản chính}}}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S}.$$

Tiết diện cản S (maitre-couple) là diện tích của mặt thu được bằng cách "chiếu" vật rắn trên một mặt phẳng vuông góc với dòng chảy (*h*.10)

Đối với một vật cản có kích thước vô hạn thì các đại lượng trên được xác định theo đơn vị dài.

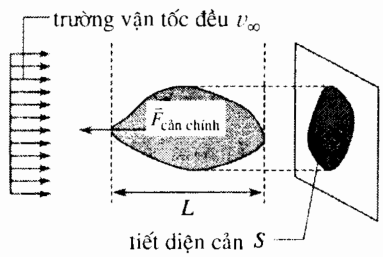
Ta hãy xác định xem, đối với một vật cản có hình dạng và định hướng đã biết, lực cản chính biến đổi như thế nào theo hàm của các thông số ρ, η, v_∞ và L (kích thước của vật cản).

Đối với một vật cản có hình dạng và định hướng đã cho thì hệ số cản chính *Cx* chỉ phụ thuộc vào số REYNOLDS Re :

$$Cx = f(\text{Re}).$$

Kết quả này chỉ thu được duy nhất bằng cách phân tích thứ nguyên (x. §**10**), và nghiệm lại mọi hệ quả của nó hoặc bởi các quan sát thực nghiệm.

Ta hãy thử nghiên cứu các dòng chảy khác nhau tồn tại xung quanh một quả cầu, bằng cách nghiên cứu các dữ kiện thực nghiệm liên quan tới dòng chảy này.



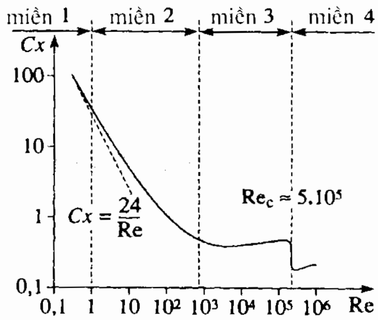
H.10. *Hệ số cản chính Cx là một số không thứ nguyên xác định bởi :*

$$F_{\text{cản chính}} = Cx\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S.$$

5.1.2. Sự biến đổi theo thực nghiệm của Cx(Re) đối với một quả cầu nhẵn

Đường cong trên *h.*11 ghi lại sự biến đổi (theo thí nghiệm) của hệ số cản chính Cx theo $\text{Re} = \dfrac{\rho 2Rv_\infty}{\eta}$ đối với một quả cầu bán kính R.

Các giá trị bằng số đặc biệt chỉ rõ trên *bảng* 12 .



H.11. *Hệ số cản chính Cx(Re) đối với một quả cầu nhẵn.*

$\text{Re}_c \approx 5.10^5$

Re	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	Re_c	10^6
Cx	245	28	4,4	1,1	0,47	0,43	0,47		0,14

H.12. *Một vài giá trị của hệ số cản chính Cx đối với một quả cầu nhẵn theo hàm của* $\text{Re} = \dfrac{\rho 2Rv_\infty}{\eta}$.

Ta thấy xuất hiện trên đường cong này bốn miền đặc trưng

• Miền 1: Re nhỏ

Hệ số cản chính tỷ lệ nghịch với Re:

$$Cx = \frac{24}{\text{Re}}.$$

• Miền 2: miền trung gian.

Ta có thể tính gần đúng Cx theo công thức ABRAHAM :

$$Cx = A\left(1 + \frac{a}{\sqrt{\text{Re}}}\right)^2$$

với $a = 9{,}06$ và $Aa^2 = 24$.

• Miền 3: $10^3 < \text{Re} < \text{Re}_c \approx 5.10^5$.

Hệ số Cx gần như không đổi.

• Miền 4:

Có một sự "chuyển dịch" tương ứng với một số REYNOLDS tới hạn Re_c, mà Cx giảm đột ngột. Sau đó luôn không đổi.

Ta hãy chú ý đến các miền 1 và 3.

■ Miền 1 (Re < 1) : lực cản chính diện ở chế độ tuyến tính không đổi

Hệ số cản chính Cx gần bằng $\dfrac{24}{\text{Re}}$ với $\text{Re} = \dfrac{\rho L v_\infty}{\eta}$ và $L = 2R$.

Ta hãy tính lực cản chính diện F_x :

$F_x = Cx\dfrac{\rho v_\infty^2}{2}S$, với $Cx = 24\dfrac{\eta}{\rho 2Rv_\infty}$, và $S = \pi R^2$, tức là:

$$F_x = 24\frac{\eta}{\rho 2Rv_\infty}\frac{\rho v_\infty^2}{2}\pi R^2 = 6\pi\eta R v_\infty$$

Như dự đoán (a priori) chế độ tuyến tính là một sự gần đúng tốt đối với $\text{Re} \ll 1$. Trong thực tế, đối với phần lớn các hình dạng vật cản, sự gần đúng trên vẫn có thể chấp nhận được đối với $\text{Re} < 1$.

Biểu thức của lực cản chính diện này đối với một quả cầu với số REYNOLDS thấp (Re < 1) $F_x = 6\pi\eta R v_\infty$, tạo thành công thức STOKES.

Trong nước $(\eta \approx 10^{-3}$ Pl$)$, ta có thể áp dụng công thức STOKES cho một quả cầu đường kính 0,1mm dịch chuyển với vận tốc 1 mm.s^{-1} (Re = 0,1)

Với một quả cầu đường kính 1cm dịch chuyển với vận tốc 1 cm.s^{-1} trong nước, Re = 100: ta không thể áp dụng được công thức STOKES. Nếu dịch chuyển này xảy ra trong một chất lỏng nhớt hơn như dầu, với nó $\eta \approx 1$, Re $\approx$ 0,1 thì công thức có thể áp dụng được.

Công thức trên đã được chứng minh (*x. bài tập* 6, *chương* 5).

Chú ý:

• *Lực cản chính diện chỉ tỉ lệ với vận tốc dòng chảy nếu chỉ có một mình vật cản trong một chất lỏng có quy mô vô hạn. Sự có mặt của thành ngăn, hoặc của các vật cản khác, sẽ làm cho bài toán phức tạp hơn* (*x.* §**8**).

• *Với mọi dòng chảy có số REYNOLDS nhỏ xung quanh một vật cản bất kỳ có kích thước hữu hạn, hệ số cản chính tỷ lệ nghịch với* Re. *Vì vậy ta có thể chứng minh rằng lực cản chính diện có dạng tổng quát sau (tiết diện cản S tỉ lệ với L^2):*

$$Cx = \frac{K}{\text{Re}} \Leftrightarrow F_{\text{cản chính}} = K'\eta v_\infty L$$

Các thừa số K và K' thường vào cỡ đơn vị ; chúng phụ thuộc vào hình dạng và vào sự định hướng của vật cản. Các thừa số này có thể được suy ra từ thí nghiệm hoặc tính được bằng một vài phép hình học đơn giản.

Khi số REYNOLDS rất nhỏ (điển hình là Re < 1) thì dòng chảy xung quanh một vật cản là tuyến tính, và lực cản chính diện tỉ lệ với vận tốc dòng chảy.

Với một quả cầu bán kính *R*, lực cản chính diện được tính bởi công thức STOKES :

$$F_{\text{cản chính}} = 6\pi\eta R v_\infty .$$

■ Miền 3 ($10^3 <$ Re $< 10^5$) : lực cản chính trong chế độ cuộn xoáy

Với những số REYNOLDS nằm trong khoảng từ 10^3 đến 10^5, Cx gần như không đổi. Trong phạm vi này, lực cản chính (hay lực ma sát) xấp xỉ tỷ lệ với bình phương của vận tốc.

Đối với một quả cầu, giá trị của nó vào cỡ 0,5. Khi đó ta có thể viết

$$F_x = k\rho v_\infty^2 R^2 ,$$

với $k \approx \frac{\pi}{4} \quad (\approx 1)$

Có thể đạt được các giá trị nhỏ hơn đối với các mặt cắt "khí động lực học" : nhỏ hơn 0,2 đối với một chiếc ô tô.

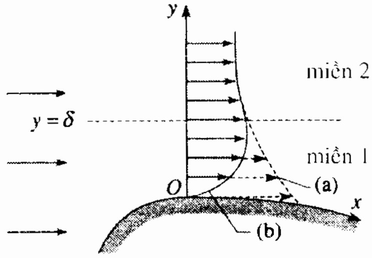
▶ **Để luyện tập : BT1.**

6 Trường hợp giới hạn của chất lỏng lý tưởng

6.1. Số REYNOLDS

Đối với một chất lỏng lý tưởng, $\eta = 0$, và như vậy Re bằng vô cùng. Nếu chúng ta ngoại suy một cách không thận trọng các kết quả trên thì một dòng chảy chất lỏng lý tưởng luôn luôn là cuộn xoáy.

Nghịch lý này là do mô hình của chất lỏng lý tưởng không phải là một ngoại suy từ một chất lỏng thực có độ nhớt nhỏ. Vận tốc của một chất lỏng thực, ngay cả khi có độ nhớt rất nhỏ, cũng bằng không ở chỗ tiếp xúc với vật rắn, trong khi vận tốc một chất lỏng lý tưởng lại khác không và tiếp tuyến với bề mặt của vật rắn.



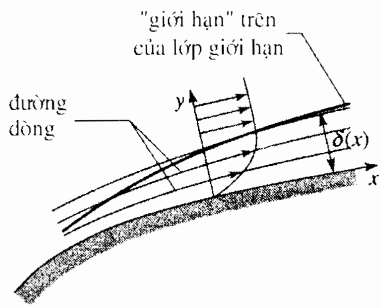
H.13. *Sự khác nhau rõ rệt giữa hai prôfin vận tốc (chú ý: các kích thước dài tăng mạnh theo y). (a): prôfin sẽ có với một chất lỏng lý tưởng; (b) prôfin thực.*

6.2. Lớp giới hạn (tầng biên giới)

Ở lân cận với một vật cản, các prôfin (mặt cắt) vận tốc sẽ rất khác nhau nếu ta xét mô hình của chất lỏng nhớt, tức chất lỏng thực (h.13). Trong khi với mô hình của chất lỏng lý tưởng, vận tốc là khác không thì đối với chất lỏng thực, nó lại bằng không.

Trên *hình* 13, ta quan sát thấy hai miền rất khác nhau :

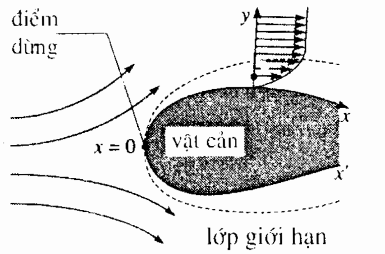
- miền 1: với $y < \delta$, hai prôfin rất khác nhau ;
- miền 2: với $y > \delta$, hai prôfin gần như giống nhau.



H.14. *Một lớp giới hạn không nhất thiết là không đổi.*

Có một sự chuyển tiếp nằm cách vật cản một khoảng cách δ : ta vừa mới được thấy rõ *lớp giới hạn*, tương ứng với miền trong đó các prôfin vận tốc là rất khác nhau.

Đại lượng δ ("giới hạn" trên của lớp giới hạn) thường được gọi là *bề dày của lớp giới hạn*. Bề dày này có thể thay đổi dọc theo một prôfin: như vậy ta có thể có tình huống sau với một vật cản (*h*.14), nó có thể biểu diễn một phần của prôfin các vận tốc như prôfin này có ở gần một điểm dừng (*h*.15).



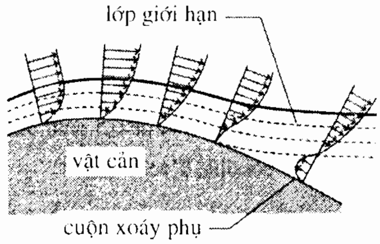
H.15. *Để thấy rõ lớp giới hạn lân cận một điểm dừng.*

Lớp giới hạn đó là một lớp giới hạn thành lớp. Một lớp giới hạn thành lớp có thể trở thành cuộn xoáy; trong trường hợp này, prôfin các vận tốc có hình dáng biểu diễn trên *hình* 16.

Ta hãy trở lại (*h*.17) hai miền xuất hiện trên *hình* 13.

• Miền 1

Trong miền 1, tương ứng với trường hợp thực, ta có thể viết $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$: vận tốc biến thiên nhanh theo y, nhưng biến thiên ít theo x (nhớ rằng các kích thước rất dãn theo y!). Các lực nhớt, do đó các sự truyền động lượng bằng khuếch tán, sẽ chiếm ưu thế.



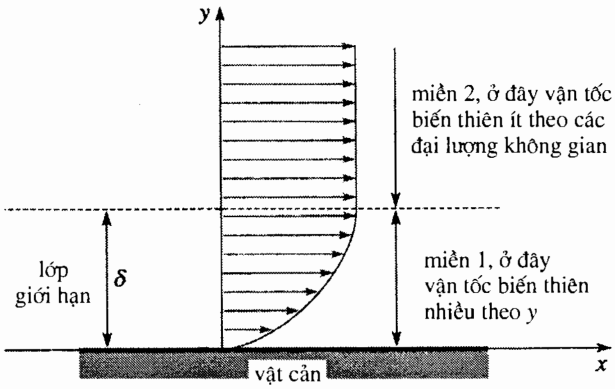
H.16. *Lớp giới hạn thành lớp trở thành cuộn xoáy : các xoáy nước phụ được tạo thành trong một miền mà bề dày có thể tăng lên hay giảm đi. Ở đây, ta thấy xuất hiện một sự bứt khỏi lớp giới hạn thành lớp.*

• Miền 2

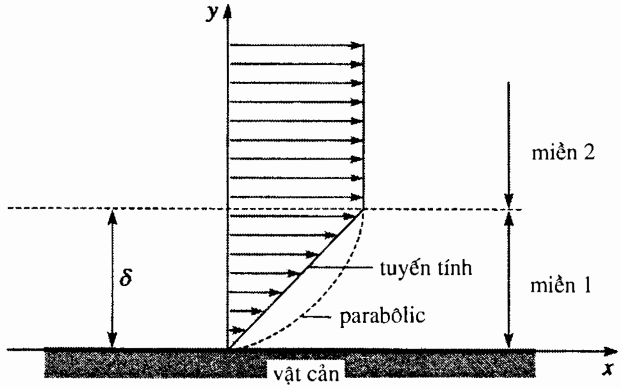
Trong miền này, ta có thể viết $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$: vận tốc biến thiên rất ít theo các đại lượng không gian.

Đôi khi cũng có lợi nếu mô hình hóa prôfin vận tốc bằng một định luật tuyến tính hay parabôlic hoặc theo hàm mũ (*h*.18).

Trong phương trình cục bộ của động lực học, độ nhớt tham dự vào số hạng $\dfrac{\Delta' \vec{v}'}{\mathrm{Re}}$ (phương trình không thứ nguyên).



H.17. *Vận tốc của chất lỏng trong miền 1 có dạng $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$, trong khi đó, nó có dạng $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$ trong miền 2.*



H.18. *Vận tốc của chất lỏng trong miền 1 có thể mô hình hóa bằng một prôfin tuyến tính (vectơ cuộn xoáy Ω đều) hay một prôfin parabôlic (vectơ Ω thay đổi tuyến tính theo y) hoặc theo hàm mũ.*

Một chất lỏng có độ nhớt nhỏ, do giá trị lớn của Re, có đặc tính như một chất lỏng lý tưởng khi laplaxien của vận tốc không quá lớn. Nhưng, ở lân cận vật cản, vận tốc chuyển rất đột ngột từ giá trị không sang một giá trị vào cỡ v_∞. Do đó, $\dfrac{\Delta'\vec{v}'}{\text{Re}}$ không còn bỏ qua được nữa.

6.3. Miền có hiệu lực của các dòng chảy thế

Ở ngoài lớp giới hạn, ta có thể bỏ qua một số hạng nhớt, và mô hình của chất lỏng lý tưởng cho ta một sự gần đúng tốt.

Trong các áp dụng hoặc các bài tập, ta đã nhiều lần liên tiếp xét các dòng chảy *thế* (hay không xoáy) của các chất lỏng lý tưởng. Để kiểm chứng tính chất có căn cứ của giả thuyết này, ta hãy nhớ lại phương trình biến đổi của vectơ cuộn xoáy :

$$\frac{D\vec{\omega}'}{Dt'} = \frac{1}{\text{Re}}\Delta'\vec{\omega}' + (\vec{\omega}'.\overrightarrow{\text{grad}}')\vec{v}'.$$

Ở ngoài lớp giới hạn, $\Delta'\vec{\omega}' \approx 0$ và $\dfrac{D\vec{\omega}'}{Dt'} = (\vec{\omega}'.\overrightarrow{\text{grad}}')\vec{v}'$.

Hệ thức trên có một hệ quả quan trọng : dòng chảy là không xoáy ở vô cùng nên vectơ cuộn xoáy vẫn gần bằng không dọc theo mọi đường dòng không đi qua lớp giới hạn. Nói chung, ta có thể coi dòng chảy là dòng chảy thế ở bên ngoài lớp giới hạn và dòng rẽ xoáy tạo ra, ở cuối vật cản, bởi các đường dòng đã đi qua lớp giới hạn.

Dòng chảy của một chất lỏng có độ nhớt yếu xung quanh một vật rắn gần như một dòng chảy lý tưởng, trừ ra một miền nằm lân cận vật rắn, gọi là *lớp giới hạn*. Các tác dụng của độ nhớt, và đặc biệt là sự tạo ra các cuộn xoáy, gần như được giới hạn ở lớp giới hạn này.

Hãy nhớ rằng một lớp giới hạn, tùy thuộc số REYNOLDS, có thể là thành lớp hay cuộn xoáy (*x*. §**8**).

Bây giờ, ta hãy lưu ý đến lớp giới hạn thành lớp.

6.4. Bề dày của một lớp giới hạn thành lớp

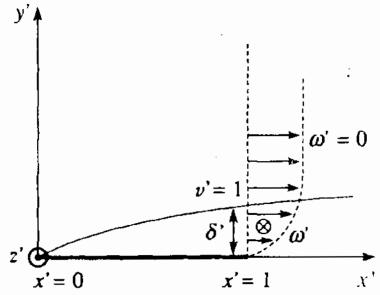
Bằng cách xét thứ nguyên, ta có thể đánh giá cỡ lớn bề dày của lớp giới hạn khi nó có cấu tạo thành lớp.

Ở chế độ không đổi, vận tốc là nghiệm của phương trình:

$$\mathrm{Re}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}'(\vec{\omega}'\wedge\vec{v}') = \Delta'\vec{\omega}'.$$

Hãy tưởng tượng, trên một lớp mỏng dày δ' dọc theo một đơn vị dài của vật cản (trong các tọa độ không thứ nguyên, *hình* 19), vận tốc và vectơ cuộn xoáy có dạng:

$$\vec{v}' = v'(x', y')\vec{e}_x \text{ và } \vec{\omega}' = \omega'(x', y')\vec{e}_z.$$



H.19. *Thể hiện rõ các tọa độ không thứ nguyên.*

Các đạo hàm theo x' rất nhỏ so với các đạo hàm đối với y'. $\Delta'\omega'$ là vào cỡ $\dfrac{\omega'}{\delta'^2}$ (ta có thể kiểm chứng lại, chẳng hạn, bằng cách giả thiết một prôfin theo hàm mũ cho hàm số $\omega'(y')$). Vận tốc đã vào cỡ đơn vị, nên $\vec{\omega}'\wedge\vec{v}'$ là vào cỡ $\omega'\vec{e}_y$. Theo phương (Ox'), khoảng cách biến thiên điển hình của ω' bằng 1 nên:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}'(\vec{\omega}'\wedge\vec{v}') = \frac{\partial\omega'}{\partial x'}\vec{e}_z \approx \omega'\vec{e}_z.$$

Bằng cách đưa các cỡ lớn trên vào phương trình đạo hàm riêng, ta thu được $\delta' \approx \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$

Nếu L là kích thước đặc trưng của vật cản thì kết quả trên tương ứng với $\delta \approx \dfrac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

Đối với một quả cầu bán kính 1cm, chuyển động tịnh biến trong không khí $\left(\dfrac{\eta}{\rho} \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}\right)$, bề dày của lớp giới hạn là vào cỡ vài phần mười của milimét khi có vận tốc 1 m.s^{-1}.

Áp dụng 2

Nghiên cứu hệ số cản chính

Bằng một lập luận theo thứ nguyên, ta hãy xác định xem hình dáng của định luật biến thiên của hệ số cản chính Cx sẽ như thế nào, nếu trên toàn vật rắn có một lớp giới hạn thành lớp có bề dày nhỏ δ.

Lực cản chính diện có cỡ lớn của diện tích, nhân với gradien của thành phần tiếp tuyến của vận tốc

Nghĩa là: $F_{\text{cản chính}} \approx \rho K L^2 \dfrac{v_\infty}{\delta}$.

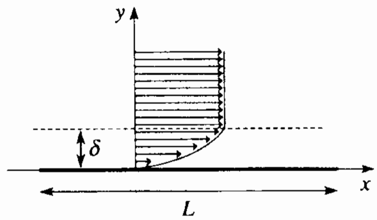
Thay δ bằng giá trị gần đúng của nó, ta thu được:

$$Cx = \frac{K'}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

"Định luật" này hầu như phù hợp với đường cong của *hình* 11, khi Re nằm trong khoảng từ 50 đến 1000. Đối với các giá trị lớn hơn của Re, xoáy rẽ dòng trở thành cuộn xoáy. Định luật này không còn tương ứng với các giá trị thực nghiệm.

6.5. Sự biến đổi của áp suất trong một lớp giới hạn thành lớp

Ta hãy quan tâm đến một lớp giới hạn thành lớp, dừng của chất lỏng không chịu nén. Hãy dùng các ký hiệu của *hình* 20.



H.20. *Các biến số dùng để nghiên cứu áp suất trong lớp giới hạn. Vật cản có một chiều dài đặc trưng L, với* $L \gg \delta$.

Dòng chảy ở ngoài lớp giới hạn đã được biết: không nhớt, và do vậy tuân theo lý thuyết về thế. Trong miền này, vận tốc chỉ phụ thuộc vào x. Áp suất cũng đã biết hay có thể tính được theo định lý BERNOULLI (chất lỏng không chịu nén ở dòng chảy không đổi trong một miền không có cuộn xoáy).

Trong lớp giới hạn, vận tốc $\vec{v}$ tuân theo phương trình bảo toàn khối lượng $(\mathrm{div}(\vec{v}) = 0)$, và phương trình NAVIER-STOKES $\left[\text{với } \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right]$; các cỡ lớn của những số hạng khác nhau xuất hiện trong các phương trình này, dẫn tới các kết quả sau (không chứng minh):

Đối với một dòng chảy không chịu nén, dừng, có số REYNOLDS cao, xung quanh một vật cản có kích thước đặc trưng L:

- **tồn tại một lớp giới hạn, giả sử thành lớp, mà chiều dày δ sao cho** $\dfrac{\delta}{L} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \ll 1$ **;**
- **trong lớp giới hạn:**

– áp suất là không đổi theo y (vuông góc với thành):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 ;$$

– độ biến thiên áp suất theo x (tiếp tuyến với thành) được tạo ra bởi dòng chảy không nhớt ở bên ngoài lớp giới hạn.

Các kết quả này chứng thực cho các phép tính thực hiện với các dòng chảy lỏng lý tưởng, đặc biệt là các dòng chảy thế.

7 Mô tả một vài dòng chảy xung quanh một vật cản

Các đặc trưng của một dòng chảy xung quanh một vật cản đương nhiên là hàm số của số REYNOLDS Re.

Một cách tổng quát, khi số REYNOLDS ngày càng tăng thì:

- sau sự quan sát thấy một dòng chảy thành lớp, nhớt.
- một lớp giới hạn thành lớp phát triển.
- đối với một số REYNOLDS cao (cỡ $\mathrm{Re} \approx 10^6$), lớp này trở thành cuộn xoáy (giá trị tới hạn), khi đó gây ra một sự giảm quan trọng (có thể nói là bất liên tục hay một cú nhảy) của Cx.
- ở xa giá trị tới hạn này, Cx biến thiên ít.

7.1 Mô tả dòng chảy xung quanh một quả cầu

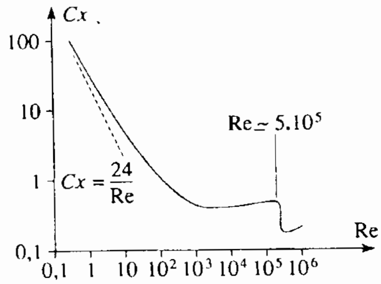
Đối với một quả cầu bán kính R, hệ số cản chính diện Cx được xác định bởi:

$$F_x = Cx \frac{\rho v_\infty^2}{2} \pi R^2 ,$$

và số REYNOLDS bằng:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho 2 R v_\infty}{\eta} .$$

Ta hãy nhớ lại hình dáng của sự biến đổi của hệ số cản chính diện $Cx(\mathrm{Re})$ của một quả cầu nhẵn (*h*.21).



H.21. *Hệ số cản chính diện* Cx(Re) *đối với một quả cầu nhẵn.*

Ta có thể quan sát bằng thực nghiệm các dòng chảy sau.

• Với các giá trị Re nhỏ hơn 1, dòng chảy là thành lớp và gần như tuyến tính. Các đường dòng có hình dáng biểu diễn trên *hình* 22. Cx tỷ lệ nghịch với Re.

• Với các giá trị của Re lớn hơn 1 (cỡ Re ≈ 20), xuất hiện một cuộn xoáy hình xuyến, bền, ở phía sau quả cầu (*h*.23). Các kích thước của cuộn xoáy này tăng theo số REYNOLDS.

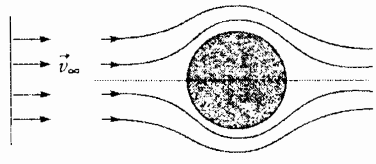
• Với các số REYNOLDS vào cỡ 300 - 450, cuộn xoáy này kết thúc bằng sự chiếm lĩnh toàn bộ phần phía sau quả cầu (*h*.24).

• Bắt đầu Re bằng gần 450, cuộn xoáy tách ra, có dạng một hình đinh ốc (*h*.25). Cuộn xoáy này do hệ quả của sự có mặt một lực ngang "quay tròn" tác dụng lên quả cầu .

• Với Re ≈ 1000, dòng chảy không còn đều đặn nữa: nó hình thành một xoáy rẽ dòng, miền rối và hỗn độn ở phía sau quả cầu (h. 26).

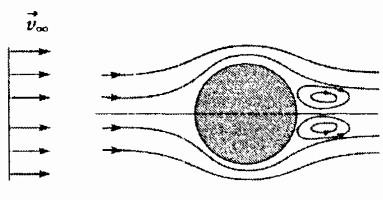
• Nếu Re trở nên rất lớn, (Re >≈ 5.10^6) , xoáy rẽ dòng giảm đáng kể. Các cuộn xoáy biến đổi một cách hỗn độn. Không còn có thể mô tả một cách đơn giản dòng chảy nữa, nó trở thành dòng chảy rối (*h*.27). Mặc dầu trước đây lớp giới hạn là thành lớp, nay nó chuyển thành rối.

Cx biến đổi nhanh ở lân cận một giá trị tới hạn của số REYNOLDS, tương ứng với sự chuyển tiếp lớp giới hạn từ thành lớp sang rối. Điểm tách ra của lớp giới hạn thay đổi vị trí một cách đột ngột, mạnh; do vậy có một "cú nhảy" trong sự biến đổi của *Cx* (*x.* §8).



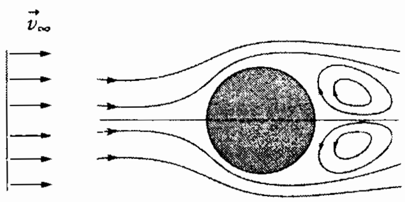
Re < 0,5

H.22. *Với một số REYNOLDS nhỏ, dòng chảy là thành lớp và gần như tuyến tính.*



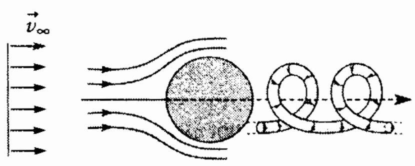
Re ≃ 20

H.23. *Cuộn xoáy xuất hiện ở phía sau quả cầu là hình xuyến.*



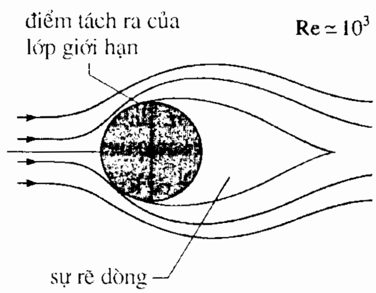
Re ≃ 300

H.24. *Khi Re tăng, cuộn xoáy kết thúc bằng sự chiếm lĩnh phần hạ lưu của quả cầu.*



Re ≃ 450

H.25. *Cuộn xoáy hình xuyến trên tách ra và có dạng đinh ốc.*



H.26. *Dòng chảy không còn đều đặn nữa. Lớp giới hạn là thành lớp, nhưng một miền rối được phát triển ở phía sau quả cầu. Điểm cắt trượt của lớp giới hạn nằm ở "phía trước".* ▶

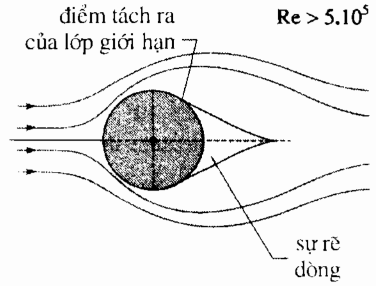
7.2. Mô tả dòng chảy xung quanh một hình trụ vô hạn

Đối với một vật cản có kích thước vô hạn, ta cần xác định lực cản chính diện và hệ số cản chính diện trên một đơn vị chiều dài. Như vậy đối với một hình trụ tròn bán kính R, tức đường kính $D = 2R$, Cx được xác định bởi

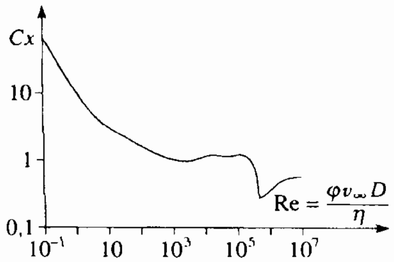
$F_x = Cx\dfrac{\rho v_\infty^2}{2}D = Cx\rho v_\infty^2 R$; và Cx được tính bằng m^{-1}.

Số REYNOLDS Re được xác định bởi $Re = \dfrac{\rho D v_\infty}{\eta}$.

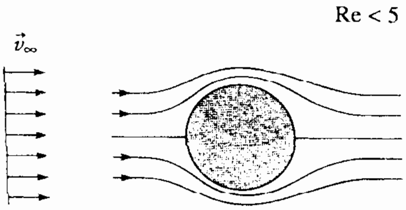
Dáng điệu biến thiên của Cx theo Re đối với một hình trụ, được biểu diễn trên *hình* 28a.



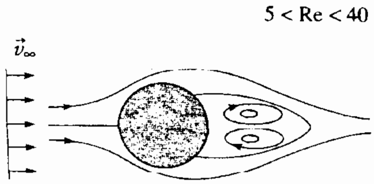
H.27. *Lớp giới hạn thành lớp trước đây trở thành rối : nó được tháo ra ở "phía sau" quả cầu.*



H.28a. *Biến thiên của hệ số cản chính diện đối với một trụ dài vô hạn theo số REYNOLDS.*



H.29. *Dòng chảy thành lớp và gần như tuyến tính*



H.30. *Các cuộn xoáy bền xuất hiện ở phần sau trụ. Dòng chảy có dạng hình trụ.*

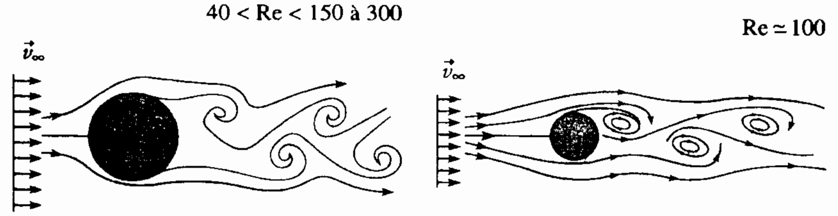
Re	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	5.10^5	10^6	10^7
Cx	400	60	11	3	1,2	1,1	1,12	1,23	gián đoạn	0,4	0,6

H.28b. *Cx là hàm số của* Re *đối với một hình trụ, nhẵn, vô hạn.*

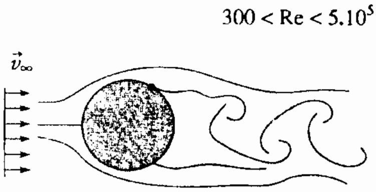
• Với các giá trị nhỏ của Re, vào cỡ đơn vị, dòng chảy là thành lớp và gần như tuyến tính. Các đường dòng có hình dáng được biểu diễn trên *hình* 29. Ta có một dòng chảy thành lớp, nhớt, không bị tách ra.

• Với các giá trị của Re độ vài chục, ta thấy xuất hiện các cuộn xoáy bền, ở phía sau hình trụ (*h*.30). Dòng chảy luôn luôn đối xứng; có một sự bóc tách thành lớp đối xứng.

• Với Re vào cỡ 100, các cuộn xoáy "tách ra" khỏi hình trụ một cách tuần hoàn, trong khi các cuộn xoáy khác lại được hình thành. Dòng chảy là tuần hoàn, nhưng các đường dòng vẫn có thể đồng nhất hóa được (*h*.31). Ta cụ thể hóa một đường cuộn xoáy xen kẽ nhau của BÉNARD-KARMAN.



H.31. *Đường cuộn xoáy xen kẽ nhau của BÉNARD–KARMAN.*



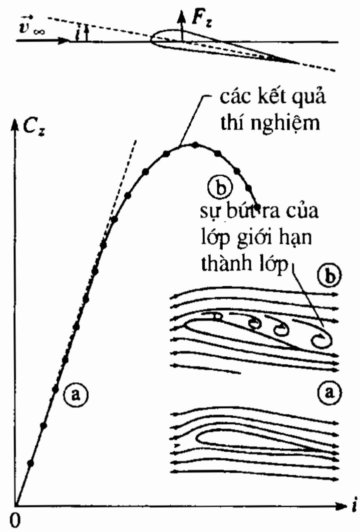
H.32. *Sự tách ra của lớp giới hạn thành lớp được thực hiện ngày càng ra phía sau của hình trụ.*

• Với Re nằm giữa Re = 300 và $\text{Re} \approx 5.10^5$, sự bứt ra của lớp giới hạn luôn luôn được thực hiện bắt đầu từ một lớp giới hạn thành lớp. Các cuộn xoáy được tách ra khỏi hình trụ và trở thành rối (*h*.32).

• Với $5.10^5 < \text{Re} < 5.10^6$, sự bứt ra được thực hiện từ một lớp giới hạn rối, ở đó có "cú nhảy" của *Cx* (*h*.33).

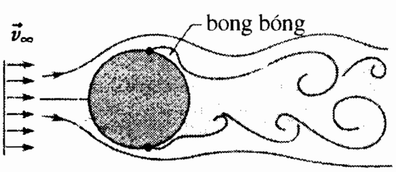
• Ở xa giá trị này của $\text{Re} > 10^7$, *Cx* giữ gần như không đổi (*h*.34).

Chú ý rằng dòng chảy xung quanh một cánh máy bay, được coi như một hình trụ có chiều dài vô hạn, cũng có cùng những đặc tính trên (h.35). Sự bứt ra của lớp giới hạn thành lớp gây ra một sự giảm lực nâng. Sự tạo ra một lớp giới hạn rối (nhờ vào những chỗ gồ ghề nhỏ trên cánh) cho phép giảm bớt sự bứt ra này (x.§8).



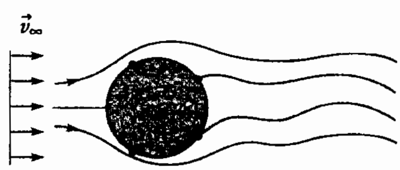
H.35. *Sự biến đổi của hệ số nâng theo góc tới* $F_z = C_z \dfrac{\rho v_\infty^2}{2} L$ *với* C_z *là hệ số nâng.*

$5.10^5 < \text{Re} < 5.10^6$



H.33. *Lớp giới hạn trở thành rối.*

$\text{Re} > 5.10^6$



H.34. *Có một xoáy rẽ dòng rối và hỗn độn ở phía sau hình trụ.*

8 Mở rộng: các dòng chảy có số REYNOLDS rất nhỏ và rất lớn

8.1 Các dòng chảy có số REYNOLDS rất nhỏ.

Khi số REYNOLDS nhỏ (Re < 2000), dòng chảy là thành lớp (và dĩ nhiên không rối)

Có nhiều sự biến đổi với số REYNOLDS rất nhỏ (Re << 1) như chuyển động của một sông băng, sự biến hóa của tầng Trái Đất, sự dịch chuyển của các tinh trùng trong tinh dịch,...

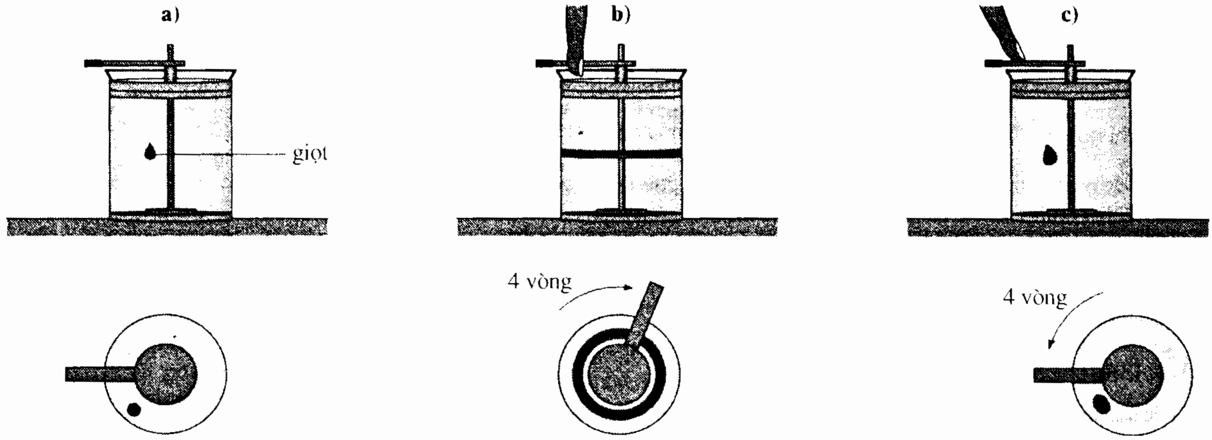
Với số REYNOLDS rất nhỏ (Re << 1):

• các lực nhớt chiếm ưu thế rõ ràng so với các lực quán tính nên người ta có thể bỏ qua lực này.

• các sự biến đổi diễn ra rất chậm, nên cũng có thể bỏ qua các biến thiên nhất thời cục bộ của vận tốc.

Vậy *trong các điều kiện này*, các phương trình biến đổi không phụ thuộc vào thời gian: chúng bất biến đối với biến số này.

Với số REYNOLDS rất nhỏ (Re << 1), các biến đổi của chất lỏng là thuần túy động học, được thực hiện với vận tốc nhỏ (thường là không đổi). Thời gian không tham dự vào, các biến đổi ở giới hạn của tính thuận nghịch : người ta nói đó là *tính thuận nghịch động học*.



H.36. *Tính thuận nghịch của các lực nhớt trong một dòng chảy có số REYNOLDS rất nhỏ* ($Re < 10^{-2}$) :

a. *Vị trí ban đầu của giọt ;*

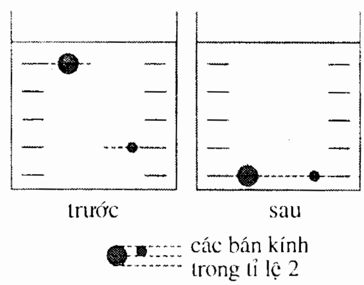
b. *Sự tản ra của giọt sau bốn vòng quay chậm của hình trụ bên trong.*

c. *Giọt gần như lấy lại hình dạng ban đầu sau bốn vòng quay chậm theo chiều ngược lại của hình trụ bên trong.*

Vậy các dòng chảy với số REYNOLDS rất nhỏ được quan sát với các hệ:

- có kích thước nhỏ ;
- (và/ hoặc) được đặt trong một chất lỏng có độ nhớt lớn.

Ta hãy lấy các ví dụ khác nhau.



H.37. *Trong một dịch chuyển ở số REYNOLDS thấp của một hòn bi trong một chất lỏng có tỉ trọng tương đương, vận tốc rơi tỉ lệ với bình phương đường kính của nó.*

8.1.1. Tính thuận nghịch động học của một dòng chảy có số REYNOLDS rất nhỏ

Ta hãy hình dung thí nghiệm sau đây, được mô tả trên *hình* 36. Một giọt chất lỏng được nhuộm màu (sirô) nằm trong một chất lỏng không màu có cùng tỉ trọng (glixêrin), và được đặt giữa hai hình trụ.

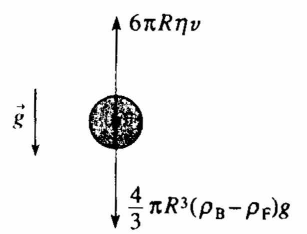
Trên hình 36a, ta thấy giọt ở vị trí ban đầu. Ta thực hiện dòng chảy (do vậy có sự tản ra) của giọt (*h*.36b), bằng cách cho hình trụ trong quay khoảng bốn vòng chậm (một vòng trong 10 giây) (hình trụ ngoài vẫn giữ cố định); giọt gần như lấy lại hình dạng ban đầu (*h*.36c) sau bốn vòng quay chậm (cùng vận tốc) hình trụ trong theo chiều ngược lại.

Tính thuận nghịch của sự biến đổi này (thuần tuý động học) là có thể, vì số REYNOLDS của dòng chảy này rất nhỏ.

8.1.2. Các vận tốc giới hạn ở số REYNOLDS rất nhỏ

Lấy hai hòn bi làm bằng cùng một chất (tỉ trọng giống nhau), nhưng các bán kính có tỉ lệ 2: đặt trong cùng một chất lỏng (glixêrin) có tỷ trọng gần bằng song hơi nhỏ hơn, các hòn bi này nhanh chóng đạt tới một vận tốc rơi giới hạn trong một tỉ lệ 4, nghĩa là tỉ lệ với bình phương bán kính của chúng (*h*.37). Thực vậy, một hòn bi có bán kính R và khối lượng riêng ρ_B, đặt trong một chất lỏng có khối lượng riêng ρ_F và có độ nhớt η, chịu tác dụng của ba lực (*h*.38) :

- trọng lực $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_B \vec{g}$;

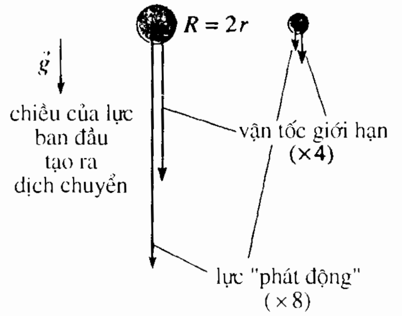


H.38. *Khi đạt tới vận tốc giới hạn:*
$$6\pi R\eta v = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_B - \rho_F)g .$$

• lực đẩy ARCHIMÈDE $-\frac{4}{3}\pi R^3\rho_F\vec{g}$. Vận tốc rất nhỏ cho phép ta sử dụng biểu thức này, mà bình thường chỉ đúng trong tĩnh học (hợp lực $\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_B - \rho_F)\vec{g}$ của hai lực trên "tạo ra" chuyển động) ;

• lực cản chuyển động (lực cản chính diện), do sự nhớt của chất lỏng tạo ra. Với số REYNOLDS rất nhỏ, lực này bằng $-6\pi R\eta\vec{v}$.

Như vậy, trong khi lực "tạo ra chuyển động" tỉ lệ với R^3 (*h*.39), thì vận tốc giới hạn (khi tổng của ba lực trên bằng không) tỉ lệ với R^2, điều này khá phù hợp với thực nghiệm.

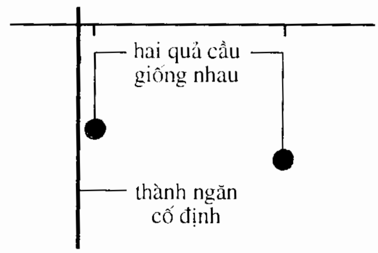


H.39. *Trong khi lực "phát động tạo ra chuyển động" tỉ lệ với R^3, ở số REYNOLDS nhỏ thì vận tốc giới hạn tỉ lệ với R^2.*

8.1.3. Ảnh hưởng của thành ngăn

Trong chuyển động rơi của mình, hòn bi sẽ chuyển động chậm đi nếu nó ở gần thành ngăn (*h*.40). Điều này được giải thích là các mạch chất lỏng có khuynh hướng "đi theo" hòn bi bị thành ngăn hãm lại.

Hiệu ứng này có thể được thấy rõ khi quan sát sự lắng đọng của một tập hợp các hạt có tỉ trọng gần bằng tỉ trọng của chất lỏng trong đó các hạt đang lắng: mặt có gradien theo hạt lớn là không nằm ngang.



H.40. *Trong chuyển động ở số REYNOLDS nhỏ của hai hòn bi trong một chất lỏng có khối lượng riêng tương đương, thì hòn bi nào ở gần thành ngăn sẽ bị chậm đi.*

8.1.4. Chuyển động rơi của một hình trụ

Lấy hai hình trụ giống nhau (có cùng kích thước và cùng tỉ trọng) đặt vào trong glixêrin có tỉ trọng gần bằng nhưng hơi nhỏ hơn.

Hình trụ đặt thẳng đứng dịch chuyển nhanh hơn hình trụ đặt nằm ngang.

Vận tốc dịch chuyển giới hạn song song với các đường sinh ($v_{//}$) bằng gấp đôi vận tốc giới hạn vuông góc với các đường sinh này (*h*.41 và 42).

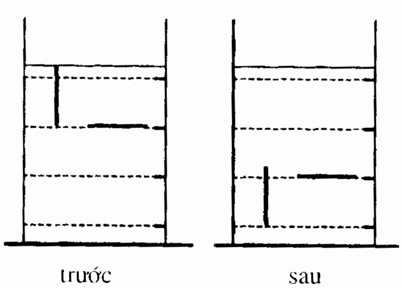
Nếu cũng hình trụ trên được đặt một cách bất kỳ, thì nó không chuyển động theo một đường thẳng đứng (*h*.43). Lực ("phát động") $\vec{F}$ tạo ra chuyển động của hình trụ có thể phân tích thành hai lực $\vec{F}_{//}$ và $\vec{F}_{\perp}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}.$$

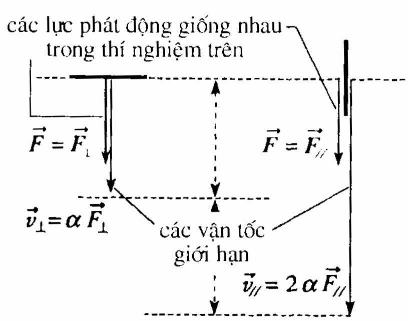
Khi đó vận tốc được phân tích thành hai thành phần $\vec{v}_{//}$ và $\vec{v}_{\perp}$ sao cho:

$$\vec{v}_{//} = 2\alpha\vec{F}_{//} \text{ và } \vec{v}_{\perp} = \alpha\vec{F}_{\perp}$$

với $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$.

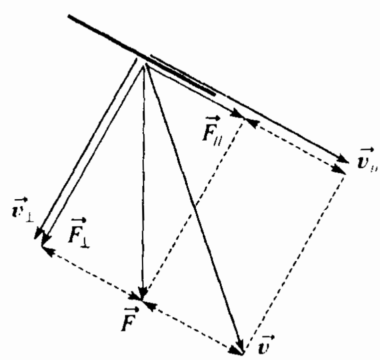


H.41. *Ở số REYNOLDS rất nhỏ, vận tốc rơi giới hạn phụ thuộc vào hướng của nó. Các vận tốc này nằm trong tỉ lệ 2: $v_{//} = 2v_{\perp}$.*



H.42. *Các vận tốc giới hạn khác nhau tuỳ theo chuyển động được thực hiện theo phương vuông góc (⊥) hay song song (//) với các đường sinh của hình trụ:*

$$v_{//} = 2\alpha F_{//} \text{ và } v_{\perp} = \alpha F_{\perp}$$

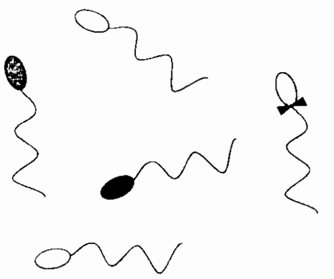


H.43. *Lực ("phát động") $\vec{F}$ có thể được phân tích thành hai lực $\vec{F}_{//}$ và $\vec{F}_{\perp}$:*

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}.$$

Chú ý:

- *Số* REYNOLDS *liên kết với chuyển động của các tinh trùng trong tinh dịch là rất nhỏ, vào cỡ* $Re = 10^{-3}$ *(h.44). Các tinh trùng sử dụng tính chất ở trên để dịch chuyển. Trong thực tế chúng thực hiện một chuyển động xoáy.*
- *Số* REYNOLDS *liên kết với chuyển động của một con rắn trong nước lại hoàn toàn khác:* $Re > 10^5$. *Con rắn dùng lực quán tính để di chuyển, độ nhớt của chất lỏng trong đó con rắn di chuyển có thể bỏ qua.*



H.44. *Số* REYNOLDS *liên kết với chuyển động của các tinh trùng trong tinh dịch là vào cỡ* $Re = 10^{-3}$.

8.1.5. Ống HELE-SHAW

Một ống HELE-SHAW (*h*.45) được cấu tạo bởi hai tấm trong suốt (plexiglat) rất gần nhau: khoảng cách giữa hai tấm vào cỡ milimét.

Ta có thể đặt vật cản giữa hai tấm đó; các vật cản này có kích thước ngang cỡ vài centimet, nhưng chiều cao của chúng bằng khoảng cách giữa hai tấm.

Vận tốc chảy tạo ra cho chất lỏng giữa hai tấm rất nhỏ, cỡ $mm.s^{-1}$

Ta hãy tính độ lớn của số REYNOLDS với nước:

$$Re = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{10^3.10^{-3}.10^{-3}}{10^{-3}} = 1$$

Như vậy số REYNOLDS là nhỏ.

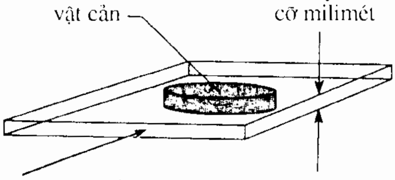
Vậy, theo tiết diện, trường vận tốc có dạng parabôlic (dòng chảy POISEUILLE giữa hai mặt phẳng) (*h*.46).

Ở chế độ không đổi, ta có thể cụ thể hóa các đường dòng của một dòng chảy bằng cách sử dụng phẩm màu, hoặc các sợi lanh tẩm dầu trong dầu vadơlin chẳng hạn.

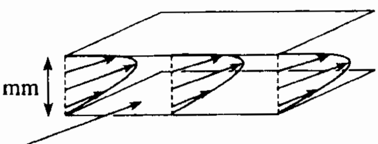
Lợi ích của một ống HELE-SHAW như sau:

Đối với một vật cản đã cho, các đường dòng thu được ở số REYNOLDS nhỏ, trong ống HELE-SHAW giống như các đường dòng thu được bằng lý thuyết khi giả thiết chất lỏng là lý tưởng (nghĩa là không có độ nhớt), như vậy tương ứng với một dòng chảy có số REYNOLDS bằng vô cùng!

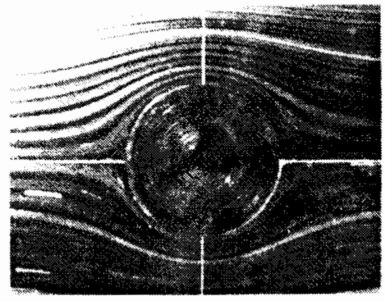
Đó là điều mà ta quan sát thấy trên *hình* 47.



H.45. *Ống* HELE–SHAW *được cấu tạo bởi hai tấm cách nhau khoảng* 1 mm, *giữa chúng có một chất lỏng dịch chuyển với vận tốc nhỏ, cỡ* $mm.s^{-1}$.



H.46. *Hình dáng của trường vận tốc của một chất lỏng trong một ống* HELE–SHAW.



H.47. *Dòng chảy xung quanh một hình trụ có bề dày nhỏ* (1mm) *và vận tốc nhỏ* ($1\ mm.s^{-1}$) . *Dòng chảy được thể hiện rõ nhờ các sợi lanh tẩm dầu trong dầu vadơlin.*

8.2. Các dòng chảy với số REYNOLDS rất lớn

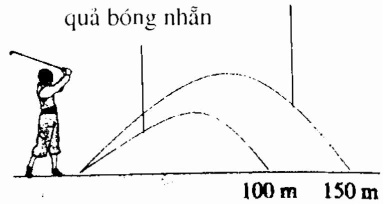
8.2.1. Các lưu ý

Ta biết rằng, ở số REYNOLDS rất lớn, các dòng chảy là chảy rối: các sự chảy rối này tồn tại khi vận tốc lớn hơn một vận tốc giới hạn, quá nó, độ nhớt không còn đủ để điều hòa các chuyển động.

Khi mà vận tốc di chuyển của một chiếc ôtô trong không khí lớn (máy bay, quả bóng gôn...) thì các sự chảy rối này xuất hiện.

Các sự chảy rối có thể có hại bởi các chấn động mà chúng tạo ra, nhưng chúng cũng có những tác dụng lý thú:

- sự chảy rối làm cho sự hỗn hợp nhiên liệu với không khí trong một động cơ tốt hơn.
- sự chảy rối cho phép một vài máy bay bay nhanh hơn.



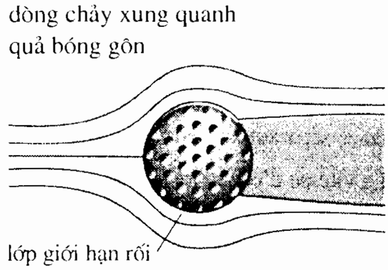
H.48. *Trong cùng những điều kiện lăng bóng, quả bóng gôn (móp méo) bay xa hơn một quả bóng nhẵn.*

8.2.2. Tại sao một quả bóng gôn lại không nhẵn ?

Trong những điều kiện sử dụng bình thường, số REYNOLDS của một quả bóng gôn lớn hơn $Re = 10^6$. Các quả bóng gôn được làm móp méo đi sao cho sự chảy rối tăng lên để chúng bay được xa hơn.

Vì vậy, trong cùng các điều kiện lăng quả bóng, thì quả bóng gôn có thể đạt tới khoảng cách 150m, còn với quả bóng nhẵn thì khoảng cách này sẽ chỉ là 100m (*h*.48).

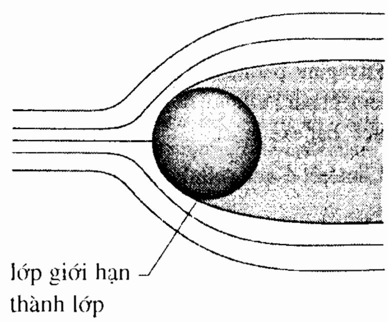
Sự không đều đặn cho phép thu được xung quanh quả cầu một lớp giới hạn rối (*h*.49), trong khi đó lớp này là thành lớp đối với một mặt nhẵn (*h*.50). Khi lớp giới hạn thành rối thì lực cản chuyển động sẽ nhỏ đi (*h*.51).



H.49. *Xung quanh một quả bóng gôn có một lớp giới hạn rối.*

Ta có thể thấy rõ các sự chảy rối này bằng cách thêm vào trên một quả cầu nhẵn một vành tròn gồ ghề.

Như vậy, đối với một dòng chảy đặc trưng bởi một số REYNOLDS đã cho (nhưng lớn: $Re > 10^5$), thì các lớp giới hạn là rất khác nhau khi không có hoặc có vành gồ ghề này (*h*.52).



H.50. *Xung quanh một quả bóng nhẵn có một lớp giới hạn thành lớp.*

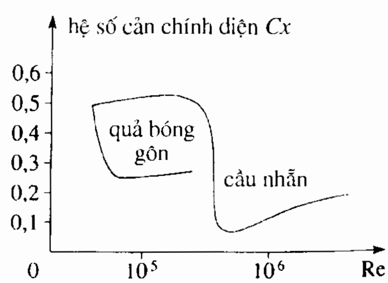
Ta hãy khảo sát các biểu diễn bằng đồ thị của *hình* 52.

- Trong trường hợp **a)** (quả cầu nhẵn) và **b)** (một sợi dây mảnh đã được đặt lên quả cầu nhẵn), các số REYNOLDS là giống nhau ($Re = 2.10^5$), nhưng các hệ số cản chính diện lại khác nhau:

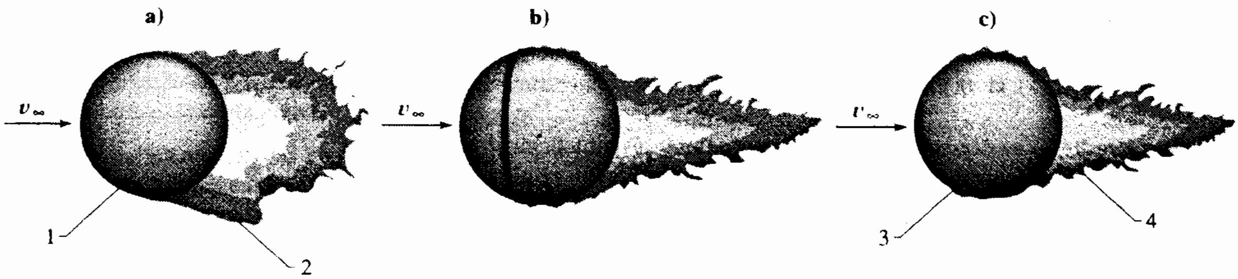
$$\textbf{a)}\ Cx = 0{,}4;\ \textbf{b)}\ Cx = 0{,}1$$

Điều này là do sự xuất hiện lớp giới hạn rối tạo ra bởi sự có mặt của sợi dây trong trường hợp **b)**.

- Trong trường hợp **c)**, quả cầu là nhẵn, và $Re = 4.10^5$. Trong những điều kiện này $Cx = 0{,}1$.
- Điểm (1) tương ứng với sự bứt khỏi của lớp giới hạn thành lớp, và điểm (2) tương ứng với sự chuyển tiếp thành lớp-rối.
- Điểm (3) tương ứng với một sự chuyển tiếp thành lớp-rối trong lớp giới hạn.
- Miền chỉ rõ bởi (4) tương ứng với sự bứt khỏi thành rối.
- Trong khi một lớp giới hạn thành lớp tách rời khỏi một prôfin **a)** thì một lớp giới hạn rối lại có khuynh hướng bám vào prôfin hơn **b)**, điều mà ta cũng quan sát thấy trên *hình* 53. Điều đó có tác dụng làm giảm hệ số cản chính diện *Cx*.



H.51. *Sự khác nhau giữa các hệ số cản chính diện Cx(Re) của một quả bóng nhẵn và của một quả bóng gôn trong một chuyển động có số REYNOLDS lớn.*



H.52. *Các dòng chảy khác nhau với số* REYNOLDS *lớn* $Re > 10^5$ *xung quanh một quả cầu.*

trường hợp	cầu	Re	*Cx*
a	cầu nhẵn	$Re = 2.10^5$	0,4
b	dây mảnh đặt trên một cầu nhẵn	$Re = 2.10^5$	0,1
c	cầu nhẵn	$Re = 4.10^5$	0,1

H.53. *Trong khi lớp giới hạn rối (b) móc vào prôfin, thì lớp giới hạn thành lớp lại rời khỏi đó (a).*

9 Mở rộng: các chất lỏng phi NEWTON

9.1. Đại cương

Trong công nghiệp, thường người ta cần thực hiện:

• các hỗn hợp hoặc các khuấy động liên tục một vài chất lỏng nào đó làm cho chúng đồng nhất: chẳng hạn, các chất lỏng này có thể là các dung dịch đại phân tử hoặc các pôlime nóng chảy, các chất tẩy hay các sản phẩm dầu, các chất lỏng sinh học hay các thực phẩm, thể lơ lửng của than hoặc quặng;

• các lớp sơn hoặc các lớp trát, dễ trộn, dễ làm và đồng thời không được "chảy" khi trát lên tường, hoặc trong khi sấy khô.

Ta biết rằng các hiện tượng xuất hiện trong các dòng chảy lỏng khác nhau ở trên (khi quay, khuấy hoặc trát) có liên quan trực tiếp với đặc tính của chúng (hay trạng thái nhớt), nghĩa là gắn với độ nhớt η của chúng.

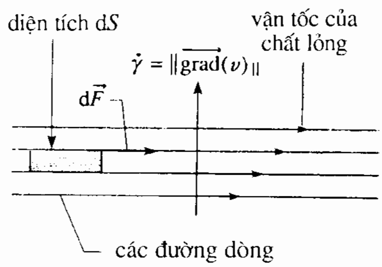
Đối với một chất lỏng thực, độ nhớt (còn gọi là độ nhớt biểu kiến) η là tỷ số:

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}},$$

giữa ứng lực tiếp tuyến σ đặt vào chất lỏng $\left[\text{nghĩa là } \sigma = \left\|\frac{dF}{dS}\right\|\right]$ và gradien vận tốc:

$$\dot{\gamma} = \|\overrightarrow{\text{grad}}\, v\|,$$

(đồng nhất với nghịch đảo của thời gian) được tạo ra khi có dòng chảy (*h*.54).



H.54. *Độ nhớt* η *của một chất lỏng thực được xác định bởi hệ thức sau :*

$$\sigma = \eta.\dot{\gamma},$$

với $\sigma = \left\|\frac{dF}{dS}\right\|$ *và* $\dot{\gamma} = \|\overrightarrow{\text{grad}}\, v\|$

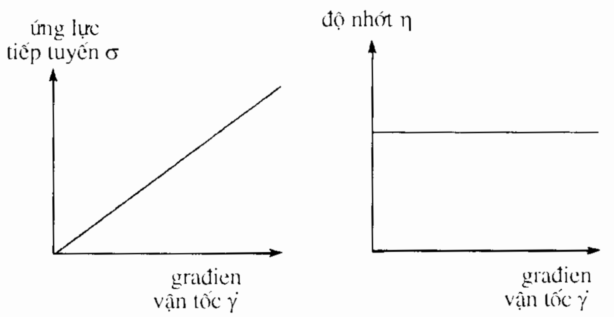
Đối với một chất lỏng thực, ứng lực σ trên tính bằng $N.m^{-2}$ và do đó, độ nhớt η cũng vậy, là các hàm số của chất lỏng, mà nhất là của gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ (tính bằng s^{-1}): $\rho(\dot{\gamma})$ và $\eta(\dot{\gamma})$.

Nếu độ nhớt η này chỉ phụ thuộc vào bản chất của chất lỏng, cũng có thể là hàm của nhiệt độ T và áp suất P ($\eta = f(T, P)$) thì chất lỏng này được gọi là chất lỏng Newton; trong các trường hợp khác, chất lỏng là phi Newton (*h*.55).

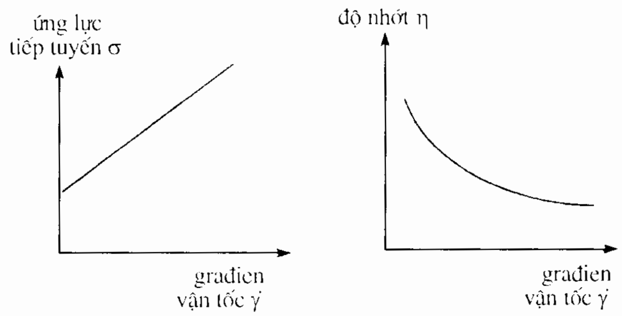
chất lỏng Newton	chất lỏng phi Newton
độ nhớt η chỉ phụ thuộc vào bản chất của chất lỏng (dầu)	độ nhớt η phụ thuộc: • vào bản chất của chất lỏng ; • vào gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ tạo ra khi có dòng chảy.

H.55. *Xác định các đặc tính Newton và phi Newton của một chất lỏng*

Như vậy, đối với một chất lỏng Newton, ứng lực tiếp tuyến σ biến thiên tuyến tính theo gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ (*h*.56), nhưng cũng có thể có các đặc tính khác (*h*.57).



H.56. *Biến đổi của ứng suất tiếp tuyến và độ nhớt đối với một chất lỏng Newton.*



H.57. *Biến đổi của ứng suất tiếp tuyến và độ nhớt đối với một chất lỏng phi Newton.*

Ta hãy lấy ví dụ khác nhau về chất lỏng thực thường gặp.

• Máu

Mặc dầu platma là một chất lỏng Newton, song sự có mặt của các hồng cầu làm cho máu không phải là một chất lỏng Newton (η phụ thuộc $\dot{\gamma}$).

{Platma (chất lỏng Newton)} + {hồng cầu (hạt)}
= {máu (chất lỏng phi Newton)}.

• Các chất lỏng có cấu trúc

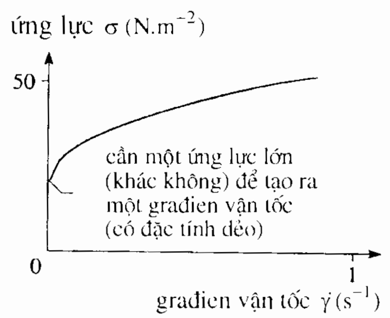
– Dầu là một chất lỏng Newton, nhưng huyền phù cấu tạo bởi lòng đỏ trứng và dầu (nước xốt mayone) lại là một chất lỏng phi Newton.

– Không khí và lòng trắng trứng là chất lỏng Newton, nhưng chất bọt thu được khi đánh bông lòng trắng trứng (tuyết trứng) lại không phải là một chất lỏng Newton.

• Trát (phủ)

Đối với một lớp trát hơi dày để chống thấm ở mặt trước nhà và một lớp sơn mịn bóng, ta có sự thay đổi sau đây của ứng lực σ, ở gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ thấp:

– ứng lực hữu hạn ở gradien vận tốc bằng không (ứng lực tạo hình) của lớp trát (*h*.58) là đủ lớn để đạt được một lớp "dày" ở mặt trước (có thể nhờ một

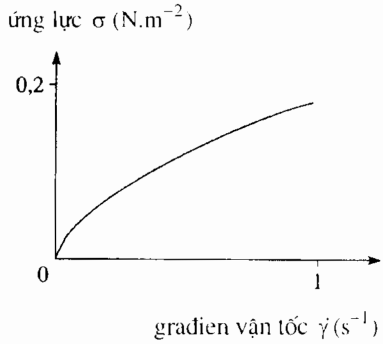


***H.58.** Sự biến thiên của ứng lực σ theo gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ đối với việc trát chống thấm hơi dày, lúc một dòng chảy có gradien vận tốc thấp.*

trục lăn lỗ chỗ), dày tới 0,5 kg.m^{-2}.

– ứng lực ở gradien vận tốc thấp của lớp sơn mịn bóng (*h*.59) là nhỏ để có thể đạt tới lớp sơn dày 0,1 kg.m^{-2}.

Ở nhiều chất lỏng phi Newton tương đối quen thuộc có một ngưỡng chảy: đó là trường hợp kem đánh răng, bơ hoặc các bột nhão khác. Để thấy rõ đặc tính này, ta có thể làm theo cách sau. Ta lấy một thiết bị gồm hai khối trụ: trụ dưới có đục một lỗ, và ta có thể đặt các gia trọng lên trục trên chuyển động được (*h*.60). Trong khi dầu chảy ngay mà không cần trụ trên thì ta lại phải thêm các gia trọng thì dòng chảy của kem đánh răng mới bắt đầu xảy ra; ta cũng nhớ rằng cần một ứng lực tối thiểu thì thuốc đánh răng mới ra khỏi ống!.



H.59. *Sự biến thiên của ứng lực σ theo gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ đối với việc sơn bóng mịn, lúc dòng chảy có gradien vận tốc thấp.*

9.2. Nguyên tắc của phép đo độ nhớt

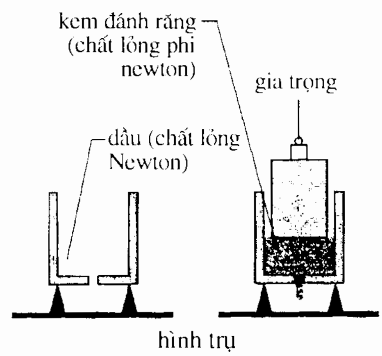
Phép đo độ nhớt được thực hiện nhờ một lưu đàn kế. Một số lớn các lưu đàn kế đã xuất hiện; chúng thường dựa trên nguyên tắc có một trung tâm quay được (có thể là các đĩa, các hình chóp, hình trụ, hình cầu hoặc các cánh), còn các cốt bên ngoài được giữ cố định.

Quay lưu đàn kế, nghĩa là tạo ra một sự cắt, do đó một gradien vận tốc đã biết (và do vậy đọc được). Các nỗ lực cần thiết để tạo ra sự quay này cho phép đọc được độ nhớt trên mặt hiện số trực tiếp hoặc trên các bảng tra.

Do vậy trên nhiều thang thập tiến gradien vận tốc phải có khả năng thay đổi trong một thang có độ rộng đi từ $\dot{\gamma} > 10^{-3}$ s^{-1} tới $\dot{\gamma} < 10^{6}$ s^{-1}. Chỉ có một lưu đàn kế thì sẽ không thể phủ được toàn bộ các miền khác nhau này.

Ta hãy lấy trường hợp của sơn. Tùy theo miền cần tạo ra sơn huyền phù, gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ có thể thay đổi từ 10^{-2} s^{-1} tới 10^{5} s^{-1} (*h*.61). Trong quá trình có các pha khác nhau này, người ta cần phải biết độ nhớt biểu kiến của sơn.

Người ta có thể đặc trưng cho các chất lỏng trên bằng các *mô hình đặc tính* khác nhau; các mô hình này rất có ích để biết trước được (chẳng hạn) cỡ lớn của công suất sẽ đưa vào quá trình khuấy hoặc trộn các chất lỏng này.



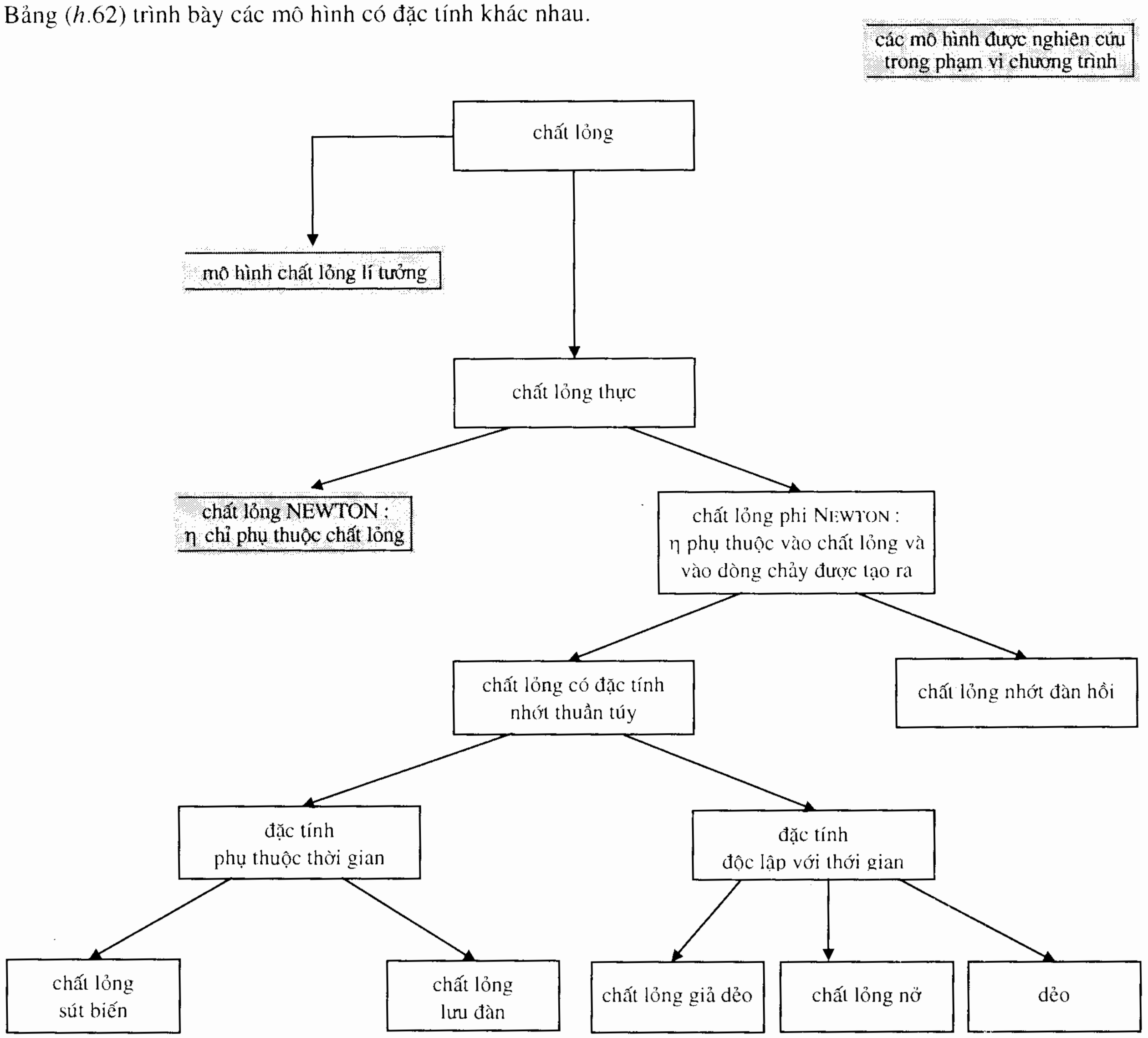
H.60. *Trong khi dầu (chất lỏng Newton) chảy dưới tác dụng của chính trọng lượng của nó, thì trong trường hợp kem đánh răng (chất lỏng phi Newton) lại cần phải thêm các gia trọng, dòng chảy mới bắt đầu xảy ra.*

Gradien vận tốc $\dot{\gamma}$ (s^{-1})	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	
dự trữ dàn trải ra lắng đọng									
trút, rót nhúng									
bơm									
trộn									
rải rắc									
phun áp đặt bằng trục lăn									
áp đặt bằng bàn chải									

H.61. *Cỡ lớn của gradien vận tốc khi qua các pha khác nhau của sơn huyền phù.*

9.3. Các mô hình đặc tính của một chất lỏng đang chảy

Bảng (*h*.62) trình bày các mô hình có đặc tính khác nhau.



H.62. *Các mô hình đặc tính khác nhau của một chất lỏng.*

Trong khuôn khổ của chương trình, sự nghiên cứu của chúng ta giới hạn ở (các ô màu xám):

- mô hình của chất lỏng lý tưởng (nghĩa là mô hình chất lỏng không nhớt);
- mô hình chất lỏng thực mà với nó độ nhớt η là không đổi, với mọi loại dòng chảy tạo ra cho chất lỏng này, nghĩa là cho các chất lỏng Newton.

Ta hãy khảo sát các đặc tính có thể có khác.

■ **Các chất lỏng nhớt đàn hồi**, vừa biểu thị đặc tính nhớt và vừa biểu thị đặc tính đàn hồi (ta có thể gán cho chất lỏng này một thời gian đặc trưng τ_c); đặc tính tổng thể của chúng nói chung phụ thuộc vào "lịch sử" của chúng, nghĩa là vào các ứng suất mà chúng đã chịu trước đó. Trong đa số các quá trình công nghiệp các biến đổi của các sản phẩm này là đủ chậm "so với τ_c " để chỉ đặc tính nhớt của chúng có tác động vào quá trình.

■ Nhiều vật liệu có cấu trúc dễ bị ảnh hưởng khi cắt vật liệu: vận tốc để vật liệu sắp xếp lại (thường là chậm) làm thay đổi tính nhớt, do vậy độ nhớt phụ thuộc vào thời gian.

• Trong đa số các trường hợp, tính nhớt giảm với thời gian tác dụng của lực cắt hay ứng lực không đổi: khi đó chất lỏng được gọi là chất lỏng **sút biến** (thixotrope). Hiện tượng sút biến là một hiện tượng thuận nghịch (hay nghịch đảo) và chất lỏng lấy lại trạng thái ban đầu của nó sau "một thời gian nào đó". Đặc tính này là rất quan trọng (và nên làm), chẳng hạn trong quá trình quét sơn cho một giá đỡ.

• Khi trong thời gian tác dụng mà tính nhớt tăng theo ứng lực (trường hợp hiếm hơn), thì chất lỏng này có đặc tính **phản sút biến**, cũng được gọi là *tính lưu đàn* (rhéopecte).

■ Khi tính nhớt độc lập với thời gian:

• thường gặp hơn cả là tính nhớt của các chất lỏng này giảm khi građien vận tốc tác dụng tăng: chúng được gọi là chất lỏng **giả dẻo** hay **chất lỏng lưu đàn** (rhéofluidisant) (đa số nghiên cứu đã được thực hiện trên các chất lỏng này);

• trong trường hợp ngược lại (tình trạng rất ít thấy) các chất lỏng này được gọi là **chất lỏng nở.**

■ Nhiều chất lỏng có **đặc tính dẻo**, nghĩa là có một ngưỡng ứng suất σ_0 (gọi là ứng lực dẻo) mà dưới giá trị đó građien vận tốc bằng không. Các vật liệu này có một vẻ nhão, gần giống vẻ của sản phẩm không thấm mặt trước (*h*.58). Khi ứng suất đàn hồi trở nên nhỏ, thì sản phẩm gần như là giả dẻo.

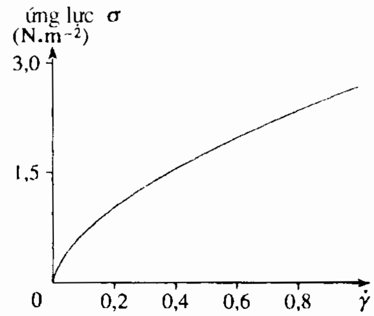
9.4. Chất lỏng giả dẻo

Nhiều nghiên cứu đã được thực hiện trên các chất lỏng rất thường gặp này; có nhiều sự mô hình hóa toán học đặc tính của chúng, mà một định luật đơn giản (định luật hàm mũ của OSTWALD, 1926) có biểu thức:

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1},$$

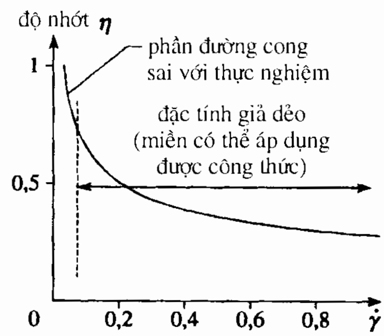
trong đó K là một hằng số chỉ phụ thuộc vào chất lỏng; n thường được gọi là chỉ số của đặc tính: đối với chất lỏng giả dẻo, $n < 1$ (đối với một chất lỏng nở, $n > 1$). Như vậy, đối với việc sơn mịn bóng, các biến đổi của ứng suất $\sigma(\mathrm{N.m^{-2}})$ và độ nhớt η biến thiên theo định luật được chỉ rõ trên *h*.63 và 64. Đối với việc trát một lớp không thấm hơi dày lại không phải như vậy (*h*.65 và 66). Mô hình này được sử dụng rất rộng rãi để nghiên cứu các chất lỏng giả dẻo có để lộ một thiếu sót là đã giả thiết độ nhớt tiến tới vô cùng khi građien vận tốc trở nên rất nhỏ. Kết quả này mâu thuẫn với thực nghiệm, vì đối với các chất lỏng này, độ nhớt luôn luôn tiến tới giới hạn hữu hạn đối với một vận tốc cắt bằng không.

Bằng thực nghiệm người ta thấy, độ nhớt thường biến thiên (*h*.67) giữa hai giới hạn η_0 và η_∞; khi đó, có nhiều mô hình khác để mô tả đặc tính của các chất lỏng này. Đó là phương trình CROSS (1965) $\dfrac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \dfrac{1}{1 + C\dot{\gamma}^{2/3}}$, trong đó C là một hằng số đặc trưng của chất lỏng;



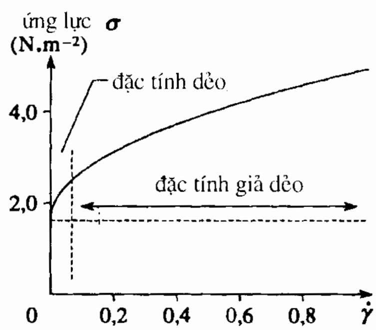
H.63. *Ứng lực σ biến thiên theo građien vận tốc $\dot{\gamma}$ đối với việc sơn mịn bóng, khi một dòng có građien vận tốc thấp, có thể mô hình hoá được bởi định luật OSTWALD:*

$$\sigma = 0,27\dot{\gamma}^{0,61}.$$



H.64. *Độ nhớt của việc sơn mịn bóng cho bởi định luật OSTWALD đối với các građien nhỏ, có chỉ số:*

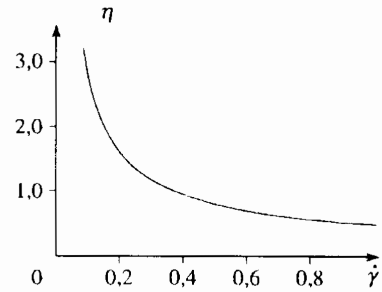
$$\eta = 0,27\dot{\gamma}^{-0,39}.$$



H.65. *Ứng suất σ biến thiên theo građien vận tốc $\dot{\gamma}$ đối với việc trát hơi dày, khi một dòng chảy có građien vận tốc hạ thấp, không thể mô hình hóa được bởi định luật OSTWALD:*

$$\sigma = 16,2 + 33,2\dot{\gamma}^{0,5}$$

và phương trình của CARREAU (1972) $\frac{\eta-\eta_\infty}{\eta_0-\eta_\infty}=[1+(t_c\dot\gamma)^2]^{\frac{n-1}{2}}$ trong đó t_c (đồng nhất với thời gian) là một hằng số đặc trưng của chất lỏng.



H.66. *Độ nhớt của một lớp trát mặt trước hơi dày không tuân theo định luật OSTWALD đối với các gradien nhỏ, có chỉ số:*

$$\eta=\frac{(16,2+33,25\dot\gamma^{0,5})}{\dot\gamma}.$$

9.5. Kết luận

Sự phân tích dòng chảy của một chất lỏng thực và sự đo độ nhớt của nó dưới các ứng suất khác nhau cho ta thấy rõ có một "mô hình đặc tính" mà ta thường có thể gán nó với một sự mô hình hoá toán học.

Bằng phép loại suy với dòng chảy của chất lỏng Newton, ta thường có thể thu được cỡ lớn của các ứng suất hoặc các công suất cần sử dụng khi một chất lỏng phi Newton "hoạt động" (*x. bài tập* 8).

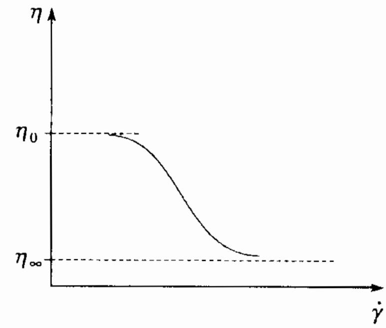
10 Mở rộng: lợi ích của phép phân tích bằng thứ nguyên

10.1. Cơ sở của phép phân tích thứ nguyên

Sự phân tích thứ nguyên thường cho phép dễ dàng tìm ra chiều hướng hoặc định luật biến thiên của một vài đại lượng vật lý nào đó . Ta chỉ cần biểu thị đại lượng cần tìm dưới dạng một đa thức trong đó có mặt các biến số mong muốn và sau đó thỏa mãn tính đồng nhất của công thức cần tìm.

Các ký hiệu được ghi trên *hình* 68.

Do đó, với các đại lượng thường gặp, ta có những cách viết như trên bảng *hình* 69.



H.67. *Chiều hướng biến đổi của* η *theo gradien vận tốc* $\dot\gamma$ *đối với một chất lỏng giả dẻo.*

đơn vị của	kí hiệu
khối lượng	M
chiều dài	L
thời gian	T

H.68. *Viết tắt các đơn vị cơ bản.*

đại lượng	phương trình thứ nguyên
vận tốc	$[v]=\mathrm{L.T^{-1}}$
khối lượng riêng	$[\rho]=\mathrm{M.L^{-3}}$
lực	$[F]=\mathrm{M.L.T^{-2}}$
áp suất	$[P]=\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
năng lượng	$[E]=\mathrm{M.L^{2}.T^{-2}}$
độ nhớt	$[\eta]=\mathrm{M.L^{-1}.T^{-1}}$

H.69. *Phương trình thứ nguyên của các đại lượng thường gặp.*

10.2. Các tình huống đơn giản thường gặp

10.2.1. Cách xác định một đại lượng đặc trưng

Trong chương dành cho động lực học các chất lỏng lý tưởng, ta đã tính đường kính đặc trưng của một cái ống, tức chiều dài mao dẫn, khi có kể đến lực căng bề mặt.

Ta hãy lấy một ống rỗng có đường kính *D*; khi ống này được đặt lên mặt của một chất lỏng có khối lượng riêng ρ, có hệ số căng bề mặt *A*, trong trọng trường g, thì chất lỏng dâng lên ở trong ống nếu đường kính của ống nhỏ hơn so với đường kính tới hạn D_c (*h*.70).

Để tìm được cỡ lớn của D_c, ta đã dùng phép phân tích thứ nguyên, và đã tìm D_c dưới dạng $D_c=k.A^\alpha\rho^\beta g^\gamma$, *k* là hệ số không có thứ nguyên.

Ta hãy nhớ lại:

$$[D_c]=\mathrm{L};\ [A]=[F].\mathrm{L^{-1}}=\mathrm{M.T^{-2}};\ [\rho]=\mathrm{M.L^{-3}};\ [g]=\mathrm{L.T^{-2}}$$

Một biểu thức phải luôn luôn đồng nhất, nên:

$$\mathrm{L}=(\mathrm{M}^\alpha.\mathrm{T}^{-2\alpha})(\mathrm{M}^\beta.\mathrm{L}^{-3\beta})(\mathrm{L}^\gamma.\mathrm{T}^{-2\gamma})=\mathrm{M}^{\alpha+\beta}.\mathrm{L}^{-3\beta+\gamma}.\mathrm{T}^{-2\alpha-2\gamma}$$

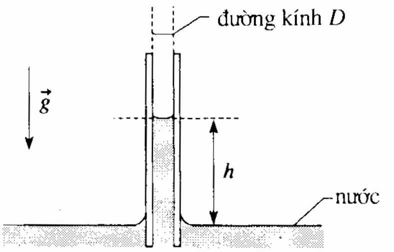
nghĩa là

$$\alpha=-\beta;\ \alpha=-\gamma\ \text{ và }\ 1=\gamma-3\beta\ .$$

Lời giải là duy nhất: $\alpha = -\beta = -\gamma = \frac{1}{2}$; khi đó, ta có thể xác định đường kính tới hạn bởi công thức (lấy $k = 1$):

$$D_c = \sqrt{\frac{A}{\rho g}}$$ (đại lượng này gọi là chiều dài mao dẫn).

• Đối với nước $D_c \approx 3$ mm nếu đường kính của ống rất lớn hơn 3 mm, ta có thể bỏ qua các tương tác bề mặt, và ngược lại, nếu đường kính rất nhỏ hơn 3 mm, các tương tác bề mặt không thể bỏ qua và chất lỏng dâng lên trong ống.



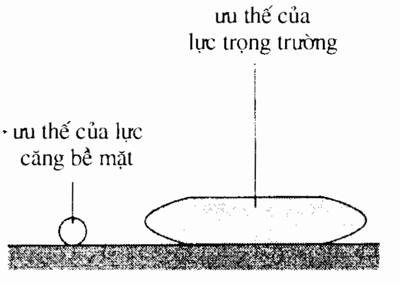
H.70. *Chất lỏng dâng lên trong ống có đường kính D nhỏ hơn so với D_c.*

• Đối với thủy ngân $D_c = 2$ mm: nếu các giọt thủy ngân có đường kính nhỏ, chúng có dạng hình cầu (do ưu thế của các lực căng bề mặt), nếu không chúng có dạng dẹt (do ưu thế của trọng lực) (*h*.71). Chú ý rằng ta đã thiết lập được một đại lượng không có thứ nguyên : $\dfrac{D_c}{\sqrt{\dfrac{A}{\rho g}}}$.

10.2.2. Lực tác dụng bởi một chỗ có khuỷu lên chất lỏng

Ta hãy tính lực tác dụng bởi một chỗ khuỷu (góc θ và tiết diện S) lên một chất lỏng không chịu nén, có khối lượng riêng ρ, đang chuyển động với vận tốc v (*h*.72).

Bằng trực giác, lực F này càng lớn nếu vận tốc v của chất lỏng, khối lượng riêng ρ của nó, tiết diện S của khuỷu cũng như góc θ, càng lớn. Giả thiết lực này chỉ phụ thuộc các biến số trên.



H.71. *Giọt thủy ngân trên mặt đất nằm ngang.*

Một lần nữa, ta hãy dùng phép phân tích thứ nguyên để tìm F dưới dạng:

$$F = \Phi(\theta)\rho^{\alpha} S^{\beta} v^{\gamma}\ .$$

Như đã biết:

$$[F] = \mathrm{M.L.T^{-2}}\ ;\ [\rho] = \mathrm{M.L^{-3}}\ ;\ [S] = \mathrm{L^2}\ ;\ [v] = \mathrm{L.T^{-1}}$$

(θ là một số không có thứ nguyên, do đó $\Phi(\theta)$ cũng vậy).

Một biểu thức phải luôn luôn đồng nhất, do đó:

$$\mathrm{M.L.T^{-2}} = (\mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{-3\alpha})(\mathrm{L}^{2\beta})(\mathrm{L}^{\gamma}.\mathrm{T}^{-\gamma}) = \mathrm{M}^{\alpha}.\mathrm{L}^{-3\alpha+2\beta+\gamma}.\mathrm{T}^{-\gamma}$$

Lời giải vẫn là duy nhất:

$$\alpha = 1\ ;\ \gamma = 2\ ;\ \text{và}\ \beta = 1\ .$$

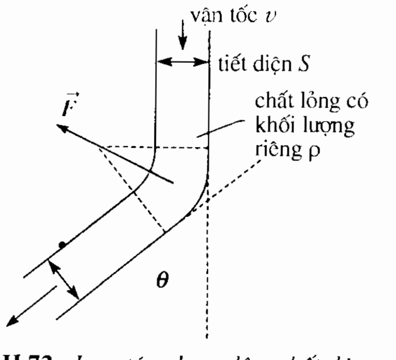
Lực có dạng (lời giải duy nhất có thể có):

$$\rho S v^2\ .$$

Trong thủy động lực học, ta nên đưa biểu thức ρv^2 về dạng $\frac{\rho v^2}{2}$ (áp suất động lực), và vì vậy, ta có:

$$F = \Phi(\theta) S \frac{\rho v^2}{2}\ .$$

Chương cuối của giáo trình này dành cho các cân bằng sẽ cho phép ta xác định hàm số $\Phi(\theta) = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, cũng như sự định hướng của $\vec{F}$.



H.72. *Lực tác dụng lên chất lỏng làm nó lệch hướng có dạng:*

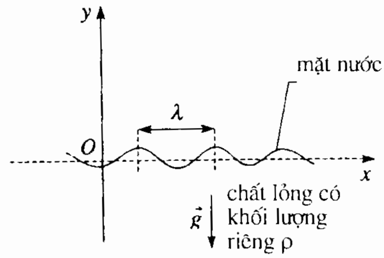
$$F = \Phi(\theta) S \frac{\rho v^2}{2}\ .$$

Một lần nữa ta đã xây dựng được một đại lượng không thứ nguyên:

$$\frac{F}{S.\dfrac{\rho v^2}{2}}\ \text{hay là}\ \frac{P}{\dfrac{\rho v^2}{2}}\ .$$

10.2.3. Vận tốc của sóng trọng trường

Thực nghiệm cho thấy, sóng trên bề mặt của một chất lỏng có khối lượng riêng ρ, có chiều sâu vô hạn ($y < 0$) lan truyền với vận tốc c chỉ phụ thuộc vào bước sóng λ và gia tốc trọng trường g (*h*.73).



H.73. *Vận tốc của các sóng cho bởi:* $c = k\sqrt{\lambda g}$.

Bằng một lập luận tương tự như ở trên, bằng cách đặt $c = \lambda^{\alpha}\rho^{\beta}g^{\gamma}$, ta phải có:

$$L.T^{-1} = L^{\alpha}.M^{\beta}.L^{-3\beta}.L^{\gamma}.T^{-2\gamma}.$$

Phương trình trên cho ta $\beta = 0$ (khối lượng riêng của chất lỏng không tham dự) $\gamma = \frac{1}{2}$ và do vậy $\alpha = \frac{1}{2}$.

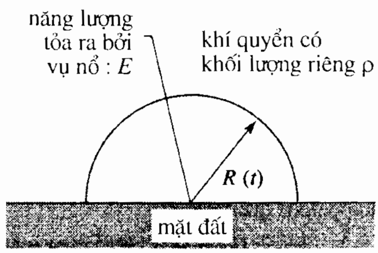
Vận tốc có dạng $c = k\sqrt{\lambda g}$, k là một hằng số không thứ nguyên.

Ta đã thu được chính dạng này khi nghiên cứu về sóng lừng (*chương* 4), với các giả thuyết sau: các phương trình được tuyến tính hoá và chiều sâu của biển là vô hạn.. Với một chiều sâu hữu hạn, ta không thể thu được c bằng phân tích thứ nguyên.

Ta lại thiết lập được một đại lượng không thứ nguyên $\dfrac{c}{\sqrt{\lambda g}}$.

10.2.4. Động lực của sóng va chạm gây ra bởi một vụ nổ

Khi có một vụ nổ trên mặt đất, ở đó trạng thái ban đầu của bầu khí quyển được đặc trưng bởi khối lượng riêng ρ, sự bùng nổ năng lượng E có kèm theo một sóng va chạm có dạng bán cầu bán kính R thay đổi với thời gian t (*h*.74). Giả sử rằng sự biến đổi của bán kính R chỉ phụ thuộc vào các thông số E, ρ, t, ta hãy khảo sát R dưới dạng $R = t^{\alpha}\rho^{\beta}E^{\gamma}$.



H.74. *Sự biến đổi của bán kính của sóng va chạm của vụ nổ này có dạng:*

$$5\log(R) = 2K + \log\left(\frac{E}{\rho}\right) + 2\log(t).$$

Ta thu được:

$$L = T^{\alpha}.M^{\beta}.L^{-3\beta}.M^{\gamma}.L^{2\gamma}.T^{-2\gamma},$$

từ đó cho:

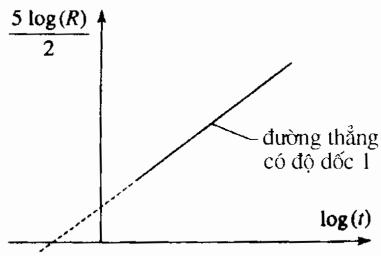
$$\alpha - 2\gamma = 0;\ \beta + \gamma = 0 \text{ và } -3\beta + 2\gamma = 1.$$

Lời giải là duy nhất:

$$\alpha = \frac{2}{5};\ \beta = -\frac{1}{5};\ \gamma = \frac{1}{5},$$

nghĩa là $R = K\sqrt[5]{\dfrac{t^2E}{\rho}}$, hay là $\dfrac{5}{2}\log(R) = K + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{E}{\rho}\right) + \log(t)$.

Lập luận mà ta vừa trình bày là do G.I. TAYLOR đưa ra. Kết quả lý thuyết của phép tính toán này thu được bằng phép phân tích thứ nguyên hoàn toàn phù hợp với các phép đo được bằng cách chụp ảnh một vụ thử hạt nhân ở Hợp chủng quốc. Sự biến đổi của $\frac{5}{2}\log(R)$ theo $\log(t)$ là một đường thẳng có độ dốc bằng 1 (*h*.75). Các quan sát này đã cho phép G.I. TAYLOR đánh giá được năng lượng tỏa ra trong vụ nổ tương ứng.



H.75. *Sự biến đổi của* $\frac{5}{2}\log(R)$ *theo* $\log(t)$ *là một đường thẳng có độ dốc bằng 1.*

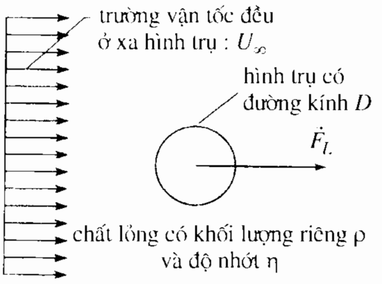
Chú ý rằng ta lại có một đại lượng không thứ nguyên $\dfrac{R}{\sqrt[5]{\dfrac{t^2E}{\rho}}}$.

10.3. Các tình huống khó xử hơn

Trong những tình huống ở trên, sự xác định hàm số cần tìm là duy nhất. Ta hãy xem xét trường hợp mà sự xác định là không duy nhất.

Ta sẽ giới hạn ở những trường hợp của cơ học chất lỏng.

Lấy ví dụ (*h*.76) về phép tính lực F_L tác dụng lên một đơn vị dài của một hình trụ tròn đường kính D, hình trụ này được đặt trong một dòng chảy của chất lỏng không chịu nén, có khối lượng riêng ρ, có hệ số nhớt η và có vận tốc đều U_∞ ở vô cùng.



H.76. *Lực F_L tác dụng lên một đơn vị dài của hình trụ là hàm của U_∞ (vận tốc đều của chất lỏng ở vô cùng), ρ khối lượng riêng của chất lỏng), η (độ nhớt của chất lỏng) và D (đường kính của trụ tròn).*

Ta lại tìm lực F_L dưới dạng $F_L = kD^\alpha U_\infty^\beta \rho^\gamma \eta^\delta$.

Phương trình thứ nguyên:

$$[F_L] = \mathrm{M.L.T^{-2}.L^{-1}} = \mathrm{MT^{-2}} = \mathrm{L}^\alpha.(\mathrm{L.T^{-1}})^\beta(\mathrm{M.L^{-3}})^\gamma.(\mathrm{M.L^{-1}.T^{-1}})^\delta$$

dẫn ta tới tập hợp các hệ thức sau:

$$\gamma - \delta = 1;$$
$$\alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 0;$$
$$-\beta - \delta = -2.$$

Như vậy ta sẽ phải giải:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ta không thể tìm được α, β, γ và δ, vì chỉ có $r = 3$ hệ thức để xác định $N = 4$ ẩn (ma trận có hạng 3).

Phương pháp gồm ba giai đoạn.

- Trước hết chọn r là biến số "phụ thuộc": chiều dài đặc trưng D hoặc các hàm số của trường $\rho(M, t)$, $P(M, t)$, $U(M, t)$. Ở đây ta sẽ lấy 3 biến số phụ thuộc, ví dụ D, U_∞ và ρ.
- Sau đó, tìm $N - r$ hệ số không thứ nguyên, nối các biến số còn lại với các biến số phụ thuộc. ở đây, cần phải có một hệ thức duy nhất giữa η và tập hợp các biến số D, U_∞ và ρ.

Sự tìm kiếm hệ thức này dẫn tới $\eta = k'D^p U_\infty^q \rho^r$, bằng phương trình thứ nguyên, ta có lời giải duy nhất:

$$\eta = k'DU_\infty\rho.$$

Chú ý rằng:

$$\frac{1}{k'} = \frac{\rho U_\infty D}{\eta} = \mathrm{Re}\ \text{(số REYNOLDS)}.$$

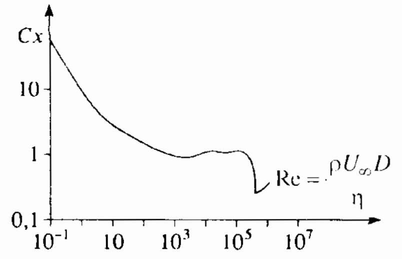
- Cuối cùng ta biểu thị đại lượng cần tìm theo các biến số phụ thuộc, khi đó hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào các đại lượng không thứ nguyên ở trên.

Như vậy, ở đây ta có thể viết $F_L = k(\mathrm{Re})D^\alpha U_\infty^\beta \rho^\gamma$.$k(\mathrm{Re})$ là một hàm số không thứ nguyên của số REYNOLDS Re. Biểu thức này cho ngay: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 1$ (lời giải vẫn là duy nhất). Do vậy, ta thu được:

$$F_L = Cx(\mathrm{Re})\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D.$$

Như vậy $Cx = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}$ là hàm duy nhất của số REYNOLDS $\text{Re} = \dfrac{\rho U_\infty D}{\eta}$.

Định luật này được xác định bởi nhiều thí nghiệm, và mọi kết quả được đưa lên đường cong sau đây (*h*.77).



H.77. *Sự biến đổi của* $Cx = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}$ *(F_L = lực trên một đơn vị dài) theo số* REYNOLDS *Re, ứng với một hình trụ đường kính D đang chuyển động với vận tốc U_∞ đối với một chất lỏng có khối lượng riêng ρ :* $\text{Re} = \dfrac{\rho U_\infty D}{\eta}$ *).*

<u>*Chú ý:*</u>

• *Trong sự trình bày ở trên, thực tế đã dẫn ta tới việc "xây dựng" hai (nói chính xác hơn N + 1 − r) đại lượng không thứ nguyên G_1 và G_2, giữa chúng có một mối quan hệ "phức tạp" được suy ra từ thực nghiệm. Hai đại lượng được chọn là:*

$$G_1 = \text{Re} = \frac{\rho U_\infty D}{\eta} \quad \text{và} \quad G_2 = Cx = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}.$$

• *Sự lựa chọn các đại lượng này là không duy nhất; hoàn toàn tương tự, ta sẽ có thể lấy:*

$$G_1' = G_1 G_2 \quad \text{và} \quad G_2' = \frac{G_1}{G_2}.$$

Một hệ thức khác nối các đại lượng không thứ nguyên G'_1 và G'_2.

▶ **Để luyện tập: BT 9.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ CÁC DÒNG CHẢY THÀNH LỚP VÀ RỐI

• Một dòng chảy là *thành lớp* nếu các đường dòng "trượt" trên nhau nhưng vẫn giữ song song với nhau: nói chung, có dòng chảy thành lớp khi "vận tốc chảy" nhỏ.

• Trong trường hợp ngược lại, với một "vận tốc chảy" lớn, dòng chảy là *rối*. Dòng chảy rối không bền và có cấu trúc hỗn độn.

■ SỐ REYNOLDS

• *Số REYNOLDS* $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho VL}{\eta}$ là một số không có thứ nguyên đặc trưng cho dòng chảy của một chất lỏng (có khối lượng riêng ρ, độ nhớt η) có vận tốc trung bình V, xung quanh một vật cản (hoặc trong một ống dẫn) có kích thước đặc trưng L.

• Chuyển tiếp thành lớp - rối

Nếu số REYNOLDS nhỏ ($\mathrm{Re} <\approx 2000$, là giá trị thường được chấp nhận), thì dòng chảy thường là thành lớp; với Re lớn, dòng chảy thường là rối.

Cấu trúc dòng chảy của một chất lỏng không chịu nén, xung quanh một vật cản có hình dạng đã cho, chỉ phụ thuộc vào số REYNOLDS $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho L v_\infty}{\eta}$.

• Hai dòng chảy của hai chất lỏng khác nhau xung quanh hai vật rắn có cùng hình dạng, nhưng có kích thước khác nhau, là *tương tự* với nhau nếu có số REYNODLS bằng nhau. Khi đó, vận tốc không thứ nguyên $\dfrac{v}{v_\infty}$ sẽ có cùng một giá trị tại các điểm tương ứng của hai dòng chảy. Đặc biệt, chế độ chảy (thành lớp hoặc rối), với một hình dạng đã cho, phụ thuộc vào giá trị của Re. Ở số REYNOLDS nhỏ ($\mathrm{Re} < 1$), trong chế độ tuyến tính không đổi, vận tốc tại mọi điểm tỉ lệ với v_∞.

Sự chảy rối được gắn với đặc tính không tuyến tính của các phương trình của cơ học chất lỏng. Sự chảy rối xuất hiện với các số REYNOLDS lớn, và có đặc tính của một dòng chảy hỗn độn và phụ thuộc vào thời gian.

■ DÒNG CHẢY XUNG QUANH MỘT VẬT CẢN

Đối với một vật cản có hình dạng và định hướng đã cho, thì hệ số cản chính diện Cx chỉ phụ thuộc vào số REYNOLDS Re:

$$Cx = f(\mathrm{Re}).$$

Khi số REYNOLDS rất nhỏ (điển hình là $\mathrm{Re} < 1$), thì dòng chảy xung quanh một vật cản là tuyến tính và lực cản chính diện tỉ lệ với vận tốc của dòng chảy.

Với một quả cầu bán kính R, lực cản chính diện cho bởi công thức STOKES:

$$F_{\text{cản}} = 6\pi\eta R v_\infty .$$

■ LỚP GIỚI HẠN

Sự chảy của một chất lỏng có độ nhớt nhỏ xung quanh một vật rắn gần giống như sự chảy của một chất lỏng lý tưởng, trừ một miền nằm kề vật rắn, gọi là *lớp giới hạn*. Các tác dụng của độ nhớt, và đặc biệt sự tạo ra các cuộn xoáy, gần như xảy ra ở lớp giới hạn này.

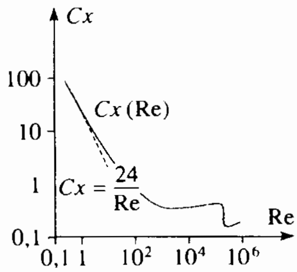
Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Lực ma sát trên một quả cầu

Sơ đồ dưới đây biểu diễn hệ số cản chính $Cx(\mathrm{Re})$ đối với một quả cầu. Ở số REYNOLDS rất nhỏ:

$$Cx = \frac{24}{\mathrm{Re}}.$$



Thường lực cản tác dụng lên một quả cầu tịnh tiến trong một chất lỏng, được mô hình hóa bởi một trong hai công thức:

- $\vec{F}_{cản} = -KSv\vec{v}$;
- $\vec{F}_{cản} = -f\vec{V}$;

với S là tiết diện cản chính (maitre-couple), K là hệ số phụ thuộc vào chất lỏng và f là hệ số phụ thuộc vào chất lỏng và vào bán kính.

Từ sơ đồ, hãy xác định định luật thích hợp về lực cản, và giá trị của các hằng số cho các trường hợp:

1) Một hòn bi sắt đường kính 1cm rơi tự do:

a) trong không khí ($\eta \approx 2.10^{-5}$ Pl) ;

b) trong nước ($\eta \approx 1.10^{-3}$ Pl) ;

c) trong dầu ($\eta \approx 1$ Pl) ;

khối lượng riêng của sắt gần bằng $7{,}8 \,.\, 10^3 \mathrm{kg.m^{-3}}$.

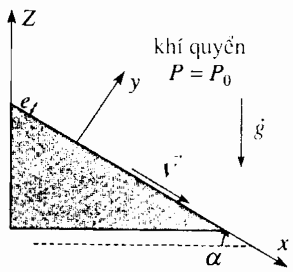
2) Một giọt nước hình cầu rơi tự do trong không khí:

a) đường kính 10 μm ;

b) đường kính 0,4 mm.

2 Dòng chảy thành lớp trên mặt phẳng nghiêng

Một lớp mỏng chất lỏng (độ nhớt η, khối lượng riêng ρ), có bề dày e, chảy dọc theo một mặt phẳng nghiêng, có đường dốc chính, hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc α.



Trong dòng chảy thành lớp, trường vận tốc độc lập với thời gian, có dạng (x. *bài tập 2, chương 5*):

$$\vec{V} = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} y(2e - y)\vec{e}_x.$$

Hãy tính vận tốc cực đại khi e = 1mm và $\alpha = 30^0$.

chất lỏng	hệ số nhớt	khối lượng riêng
dầu	$\eta = 1{,}0$ Pl	$\rho \approx 1{,}0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$
nước	$\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pl	$\rho \approx 1{,}0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$

Kết luận.

3 Đường kính của một ống dẫn

Một tháp nước cung cấp cho một ống dẫn hình trụ có một đầu hở thông với áp suất khí quyển.

Dữ kiện:

chiều sâu của bình chứa: $h_0 = 3$ m ;

mức chênh lệch của ống dẫn: $h_1 = 13$ m ;

chiều dài của ống dẫn: L = 100 m ;

độ nhớt của nước: $\eta = 1{,}0.10^{-3}$ Pl ;

lưu lượng theo thể tích:

1) $D_{vol} = 1\,\mathrm{L.s^{-1}}$; 2) $D_{vol} = 0{,}5\,\mathrm{L.min^{-1}}$.

Người ta công nhận công thức POISEUILLE cho lưu lượng theo khối lượng D_m của một chất lỏng có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η, trong một ống dẫn hình trụ có đường kính d và có chiều dài L, đặt dưới sự sụt áp suất $\Delta\hat{P}$:

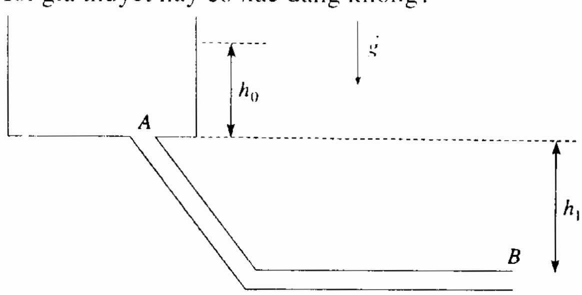
$$D_m = \frac{\pi \rho d^4}{128\eta L}\Delta\hat{P}.$$

Vận tốc ở cách trục một khoảng r có dạng:

$$v(r) = v_0\left(1 - 4\frac{r^2}{d^2}\right).$$

Giả sử dòng chảy là thành lớp, hãy xác định đường kính của ống dẫn.

Một dòng chảy như thế là thành lớp nếu Re < 2000. Hỏi giả thuyết này có xác đáng không?



4 Van giảm áp được cấu tạo từ một mạng các lát mỏng

Một ống nằm ngang có tiết diện hình vuông cạnh a và có chiều dài l, được chia thành nhiều lát mỏng và bằng nhau bởi một số lớn các lá có bề dày không đáng kể.

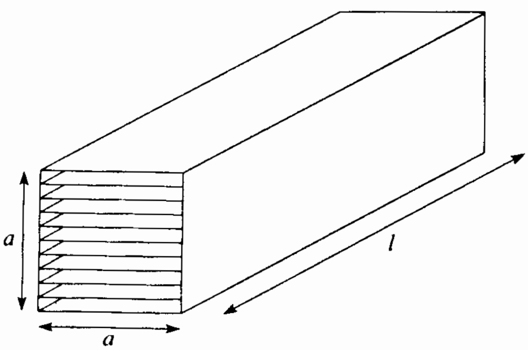
Đầu vào tiếp xúc với một bình chứa đựng một chất lỏng có khối lượng riêng ρ và có độ nhớt η, được giữ ở áp suất P_1. Ở đầu ra, chất lỏng có áp suất bằng áp suất bên ngoài P_0 ($P_1 > P_0$). Chế độ chảy là thành lớp và không đổi, hãy xác định lưu lượng, vận tốc trung bình ở đầu ra và số REYNOLDS của dòng chảy.

Dữ kiện: $P_0 = 1$ bar; $P_1 = 1{,}5$ bar; $l = a = 1\text{cm}$; $N = 50$.
Nếu các giả thuyết được xác nhận, hãy tính lưu lượng trong các trường hợp sau:

a) nước: $\eta = 1{,}0.10^{-3}\text{Pl}$;

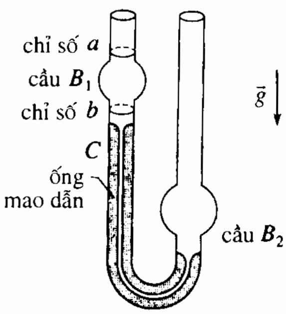
b) không khí $\eta = 1{,}7.10^{-5}\text{Pl}$;

c) dầu : $\eta = 1{,}0$ Pl và $\rho = 0{,}9.10^3$ kg.m^{-3}.



5 Nghiên cứu một nhớt kế

Một loại nhớt kế được đơn giản hóa trên sơ đồ bên. Nó được cấu tạo bởi một ống mao dẫn C nối với hai quả cầu B_1 và B_2. Cầu B_1 được đổ đầy một chất lỏng không chịu nén, có khối lượng riêng ρ, và có độ nhớt η, đến mức a (chỉ số a). Người ta đo thời gian τ cần để mặt chất lỏng đi từ mức này qua mức b (chỉ số b).



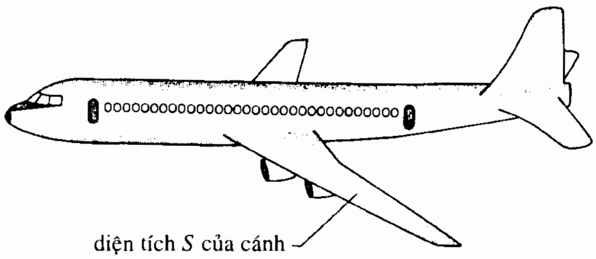
Nhớt kế này được dùng để thực hiện các phép đo tương đối.

1) Hãy chứng tỏ rằng nếu ta lấy hai chất lỏng có khối lượng riêng ρ_1 và ρ_2, có độ nhớt η_1 và η_2, thì các thời gian dịch chuyển τ_1 và τ_2 thỏa mãn:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}$$

2) Các khối lượng riêng của acéton và của nước ở 293K lần lượt bằng $\rho_{\text{acéton}} = 792{,}0$ kg.m^{-3} và $\rho_{\text{nước}} = 998{,}2$ kg.m^{-3}. Độ nhớt của nước ở 293 K là $\eta_{\text{nước}} = 1{,}0050.10^{-3}\text{Pl}$. Cần có $\tau_{\text{nước}} = 120{,}5$ s để cho nước chảy giữa hai chỉ số của nhớt kế. Nếu cần có $\tau_{\text{acéton}} = 49{,}5$ s cho acéton, thì độ nhớt của acéton $\eta_{\text{acéton}}$ bằng bao nhiêu?

6 Lực nâng của cánh một chiếc Boeing



Ta muốn đánh giá lực nâng của một cánh theo diện tích S của nó, theo khối lượng riêng ρ của chất lưu và theo vận tốc V của máy bay.

1) Bằng cách sử dụng phép phân tích thứ nguyên, hãy xác định kiểu phụ thuộc của lực nâng bởi một đơn vị diện tích của cánh máy bay vào các đại lượng sau: vận tốc V của máy bay và khối lượng riêng ρ của chất lưu trong đó máy bay dịch chuyển.

2) Một chiếc Boeing có khối lượng gần bằng $1{,}5.10^5$ kg, và diện tích các cánh vào khoảng $2{,}8.10^2$ m^2, bay ở độ cao 11 km (ở đó tỉ trọng của không khí gần bằng $0{,}37$ kg.m^{-3}); với một vận tốc bay vào cỡ $2{,}5.10^2$ m.s^{-1}. Hãy nói rõ thêm câu trả lời của câu hỏi **1**).

7 Ước lượng đường kính của một phân tử bằng phép phân tích thứ nguyên

Hệ số nhớt η của một chất khí là hàm số của khối lượng m của các phân tử của chất khí đó, của đường kính Φ và của vận tốc toàn phương trung bình U của các phân tử.

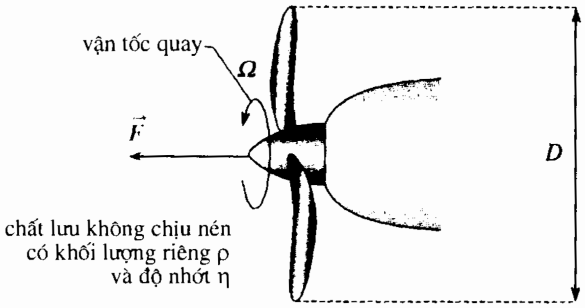
Từ bảng sau đây, hãy ước lượng đường kính của phân tử mêtan (CH_4). Coi các chất khí là lý tưởng.

	đường kính Φ(m)	khối lượng phân tử M (kg.mol^{-1})	Độ nhớt η (kg.m^{-1}.s^{-1})
hêli (He)	$2{,}1.10^{-10}$	4.10^{-3}	$2{,}0.10^{-5}$
mêtan (CH_4)	??	16.10^{-3}	$1{,}1.10^{-5}$

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

8 ★★ Cánh quạt (chân vịt) đẩy

Một chiếc cánh quạt dịch chuyển theo một trục nằm ngang với vận tốc không đổi V, trong một chất lưu giả thiết không chịu nén, có khối lượng riêng ρ và độ nhớt η. Chiếc cánh quạt này có đường kính D, quay với vận tốc góc Ω.



1) Hãy xác định biểu thức của lực đẩy bằng phép phân tích thứ nguyên.

2) Để nghiên cứu các đặc trưng của một cánh quạt (nguyên mẫu) có đường kính D = 4m, quay với $\Omega = 100$ vg.min^{-1}; người ta thực hiện một maket (hình mẫu) có đường kính $D' = 0{,}50$ m .

a) Chứng tỏ rằng nếu maket dịch chuyển trong cùng một chất lưu thì về mặt vật lý, sự tương tự đầy đủ là không thể thực hiện được.

b) Maket và nguyên mẫu vẫn dịch chuyển trong cùng một chất lưu. Chứng tỏ rằng có thể bỏ qua các lực nhớt.

c) Lực đẩy của maket $F' = 230$ N, và ngẫu lực tác dụng $\Gamma = 22$ N.m với vận tốc dịch chuyển $V' = 9$ km.h^{-1} và một vận tốc quay $\Omega' = 360$ vg.min^{-1}.

Hãy xác định vận tốc V, lực đẩy F, ngẫu lực Γ, và hiệu suất r đối với cánh quạt nguyên mẫu bằng độ lớn thực.

Dữ kiện:

chất lưu	ρ (kg.m^{-3})	η (Pl)
không khí	1,3	$1{,}8.10^{-5}$
nước	$1{,}0.10^{3}$	$1{,}0.10^{-3}$

9 ★Ước tính lực tác dụng lên một đơn vị dài trên một hình trụ

Lực trên một đơn vị dài F_L tác dụng lên một hình trụ có tiết diện tròn, đường kính D, đặt trong một chất lưu có khối lượng riêng ρ, độ nhớt η và vận tốc U_∞ (ở xa hình trụ), chỉ phụ thuộc vào các thông số trên:

$$F_L = f(D, \rho, \eta, U_\infty).$$

Dựa vào bảng dưới đây, hãy ước tính đại lượng F_L này đối với một hình trụ có đường kính D = 0,1 m dịch chuyển với vận tốc 60 m.s^{-1} trong không khí.

chất lưu	nước	thủy ngân	không khí
khối lượng riêng ρ (Kg.m^{-3})	$1{,}00.10^{-3}$	$1{,}36.10^{4}$	$1{,}30.10^{4}$
độ nhớt η (N.s.m^{-2})	$1{,}00.10^{-3}$	$1{,}55.10^{-3}$	$1{,}83.10^{-5}$
đường kính D của trụ (m)	0,01	0,01	0,1
vận tốc tương đối của chất lưu U_∞(m.s^{-1})	30	5.5	60
lực F_L tác dụng lên một đơn vị dài của hình trụ (N.m^{-1})	$4{,}5.10^{-3}$	$7{,}0.10^{2}$	??

LỜI GIẢI

1 • *Nếu $\vec{F}_{cản} = -KSv\vec{v}$, vậy ứng với phần gần nằm ngang của đường cong, nghĩa là với các số REYNOLDS trong khoảng $10^3 < \text{Re} < 10^5$ khi đạt tới các vận tốc giới hạn. Biết rằng trong miền này $Cx \approx 0{,}5$, ta có $K \approx 0{,}25\rho_{\text{chất lưu}}$. Với $S = \pi R^2$, vận tốc giới hạn cho bởi:*

$$v_{gh} = \sqrt{\frac{mg}{K\pi R^2}} \text{ và } \text{Re} = \frac{\rho D v_{gh}}{\eta}.$$

• *Nếu $\vec{F}_{cản} = -6\pi\eta R\vec{v}$, khi đó ứng với phần tuyến tính của đường cong $Cx \approx \dfrac{24}{\text{Re}}$ dẫn tới biểu thức này, nghĩa là trong miền $\text{Re} < 1$.*

Hệ số f bằng $f = 6\pi\eta R$. Vận tốc giới hạn cho bởi:

$$v_{gh} = \frac{mg}{6\pi\eta R} \text{ và ta vẫn có } \text{Re} = \frac{\rho D v_{gh}}{\eta}.$$

Để lựa chọn giữa hai mô hình, ta tính số REYNOLDS Re đối với vận tốc giới hạn thu được :

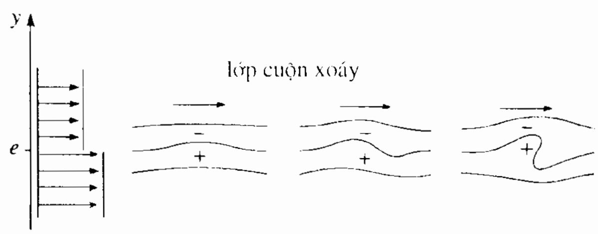
		các hệ số $f(\mathrm{N.m^{-1}.s})$ và K $(\mathrm{kg.m^{-3}})$	vận tốc giới hạn $(\mathrm{m.s^{-1}})$	số REYNODS	bình luận
TH.1)a) bi sắt trong không khí	thành lớp	$f = 1,9.10^{-6}$	$2,1.10^{+4}$	$1,4.10^{+7}$	sai $\mathrm{Re} \gg 1$
	rối	$K = 3,3.10^{-1}$	$4,0.10^{+1}$	$2,6.10^{+4}$	mô hình đúng $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$
TH.1)b) bi sắt trong nước	thành lớp	$f = 9,4.10^{-5}$	$4,3.10^{+2}$	$4,3.10^{+6}$	sai $\mathrm{Re} \gg 1$
	rối	$K = 2,5.10^{+2}$	1,4	$1,4.10^{+4}$	mô hình đúng $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$
TH.1)c) bi sắt trong dầu	thành lớp	$f = 9,4.10^{-2}$	$4,3.10^{-1}$	3,8	mô hình gần đúng $\mathrm{Re} \approx 1$
	rối	$K = 2,3.10^{+2}$	1,5	14	sai $\mathrm{Re} \ll 10^{+3}$
TH.2)a) giọt nước có đường kính 10 µm	thành lớp	$f = 1,9.10^{-6}$	$2,7.10^{-3}$	$1,8.10^{-3}$	mô hình đúng $\mathrm{Re} \ll 1$
	rối	$K = 3,3.10^{-1}$	$4,5.10^{-1}$	$2,9.10^{-1}$	sai $\mathrm{Re} \ll 10^{+3}$
TH.2)b) giọt nước có đường kính 0,4mm	thành lớp	$f = 7,5.10^{-8}$	4,4	$1,1.10^{+2}$	mô hình đúng $\mathrm{Re} \gg 1$
	rối	$K = 3,3.10^{-1}$	2,8	74	sai $\mathrm{Re} \ll 10^{+3}$

2 *Ta tính số REYNOLDS liên quan tới dòng chảy này bằng cách lấy V_{max} và e như các đại lượng đặc trưng của dòng chảy*

chất lưu	vận tốc cực đại $v_{max}(\mathrm{m.s^{-1}})$	số REYNOLDS Re
dầu	$v_{max} \approx 2,5\ \mathrm{mm.s^{-1}}$	$\mathrm{Re} \approx 2,5.10^{-3}$
nước	$v_{max} = 2,5\ \mathrm{m.s^{-1}}$	$\mathrm{Re} = 2500$

Với dầu, giả thuyết dòng chảy thành lớp có nhiều khả năng đúng hơn.

Với nước, giả thuyết dòng chảy thành lớp chắc chắn là không đúng : các cuộn xoáy hoặc sự không bền vững sẽ xuất hiện. Có thể các sự không bền vững loại sau đây sẽ phát triển.



Ở mức mặt phân cách chất lỏng - không khí, có một sự gián đoạn của vận tốc : trong chất lỏng, $v(y = e) = v\vec{e}_x$ là cực đại, trong khi đó, ở trong không khí $v(y = e_+) = 0$. Do vậy, có một lớp cuộn xoáy tại $y = e$. Những sự không bền vững có thể phát triển trong lớp cuộn xoáy này nếu số REYNOLDS lớn (x.sơ đồ).

3 *Dòng chảy trong bể chứa rất chậm, do vậy ta giả thiết áp suất ở đây thay đổi theo định luật của tĩnh học chất lỏng : $P(A) = P_{Kq} + \rho g h_0$. Công thức POISEUILLE cũng được phép viết là :*

$$P(A) = P_{Kq} - \rho g h_1 + \frac{128\eta\, L\, D_{vol}}{\pi d^4}.$$

Từ đó, suy ra : $\rho g(h_0 + h_1) = \dfrac{128\eta\, L\, D_{vol}}{\pi d^4}$.

Vận tốc cực đại v_0 thỏa mãn :

$$D_{vol} = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r v(r)\mathrm{d}r \text{ với } v(r) = v_0\left(1 - 4\frac{r^2}{d^2}\right).$$

từ đó, cho : $v_0 = \dfrac{8D_{vol}}{\pi d^2}$ *với* $d = \sqrt[4]{\dfrac{128\eta\, L\, D_{vol}}{\pi\rho g(h_0 + h_1)}}$.

Số REYNOLDS cho bởi : $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v_0 d}{\eta}$.

1) *Lưu lượng $3,6\ \mathrm{m^3h^{-1}}$ được thực hiện qua một ống có đường kính $d = 1,27$ cm, với một vận tốc cực đại bằng $v_0 = 15,8\ \mathrm{m.s^{-1}}$, điều này cho một số REYNOLDS bằng $\mathrm{Re} \approx 2.10^{+5}$. Chế độ là chảy rối và phép tính d là sai.*

2) *Lưu lượng $0,5\ \mathrm{L.min^{-1}}$ được thực hiện qua một ống có đường kính $d = 0,38$ cm, với vận tốc cực đại $v_0 = 1,4\ \mathrm{m.s^{-1}}$, điều này cho một số REYNOLDS bằng $\mathrm{Re} \approx 5\ 500$. Chế độ vẫn còn là chảy rối và phép tính d là sai.*

Vậy giả thuyết là không phù hợp với loại dòng chảy này.

4 *Mỗi lát rất rộng so với bề dày của nó. Ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của các bờ và áp dụng kết quả liên quan đến dòng chảy POISEUILLE phẳng.*

Với mỗi lát, lưu lượng theo khối lượng là :

$$D_{lát} = \frac{\rho a^4}{12\eta l N^3}(P_1 - P_0),$$

cho $v_{th} = \dfrac{a^2}{12\eta l N^2}(P_1 - P_0)$. *Tổng lại :* $D = \dfrac{\rho a^4}{12\eta l N^2}(P_1 - P_0)$.

Chiều dài đặc trưng là $\dfrac{a}{N}$ *và* $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho a^3}{12\eta^2 l N^3}(P_1 - P_0) = \dfrac{D_{lát}}{a\eta}$.

a) *Nước :* $\mathrm{Re} = 3,3.10^3$.

b) *Không khí :* $\mathrm{Re} = 1,5.10^4$ *(bỏ qua tính chịu nén).*

c) *Dầu :* $\mathrm{Re} = 3.10^{-3}$.

Giả thuyết về dòng chảy thành lớp là sai đối với nước và không khí, và được xác nhận đúng đối với dầu, với nó dòng chảy thu lại thành một sự rò rỉ nhẹ :

$$D = 1,5.10^{-3}\ \mathrm{kg.s^{-1}} = 1,5\ \mathrm{g.s^{-1}}.$$

5 1) *Trong một ống mao dẫn, lưu lượng theo thể tích cho bởi (x. bài tập 8, chương 5) :*

$$D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\Delta P = \alpha \frac{\Delta P}{\eta}.$$

Lực tạo ra chuyển động của chất lỏng qua ống mao dẫn trực tiếp là hàm số của độ chênh lệch áp suất ΔP do một cột chất lỏng có độ cao đã cho gây ra, do vậy tỉ lệ trực tiếp với khối lượng riêng ρ.

Lưu lượng theo thể tích qua ống mao dẫn trên ở số REYNOLDS rất nhỏ là không đổi với thời gian. Thời gian τ của thí nghiệm tỉ lệ nghịch với lưu lượng theo thể tích.

Điều đó cho : $\tau = \frac{V}{D_v} = \beta\frac{\eta}{\rho}$, trong đó β là một hằng số của thí nghiệm, không phụ thuộc vào chất lỏng.

Vậy ta có :

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}.$$

2) *Áp dụng bằng số cho :*

$$\eta_{\text{acéton}} = \eta_{\text{nước}}\frac{\rho_{\text{acéton}}\cdot\tau_{\text{acéton}}}{\rho_{\text{nước}}\tau_{\text{nước}}} = 0,328.10^{-3}\ \text{Pl}.$$

6 1) *Lực trên đơn vị diện tích đồng nhất với một áp suất nên nó được cho bởi công thức $\frac{F}{S} = k\frac{\rho V^2}{2}$, nếu chỉ có các đại lượng ρ và V tham dự. Điều này cho $F = kS\frac{\rho V^2}{2}$, k là một đại lượng không thứ nguyên, nghĩa là một con số không có thứ nguyên, là hàm số của dòng chất lưu tồn tại xung quanh máy bay.*

2) *Dựa vào các giá trị bằng số, ta tính k trong trường hợp một chiếc Boeing.*

Máy bay đang bay ở độ cao không đổi, lực nâng F phải trực đối với trọng lượng của nó ; nếu bỏ qua biến thiên của g với độ cao, ta có $F \approx 1,5.10^6$ N.

Hoàn thành mọi phép tính ta thu được $k = 0,46$.

Với đa số các máy bay, hệ số k có giá trị trong khoảng 0,2 và 0,6.

Đối với một chiếc Boing, ta có thể viết: $F = 0,46\ S\frac{\rho V^2}{2} = 130\frac{\rho V^2}{2}$.

7 *Ta tìm η dưới dạng $\eta = k\, m^\alpha \Phi^\beta U^\gamma$, k là một đại lượng không thứ nguyên. Hệ thức trên trở thành :*

$$[\eta] = [m]^\alpha.[\Phi]^\beta.[U]^\gamma,\ hay\ \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-1} = \text{M}^\alpha.\text{L}^{2\beta}.\text{L}^\gamma.\text{T}^{-\gamma}.$$

Ta tìm được $\alpha = 1, \gamma = 1$ và $\beta = -2$. Vậy $\eta = k\frac{mU}{\Phi^2}$.

U là vận tốc toàn phương trung bình, đối với khí lý tưởng ở nhiệt độ phòng :

$$\frac{1}{2}mU^2 = \frac{3}{2}k_BT,$$

hay $U = \sqrt{\frac{3k_B.T}{m}}$, do đó ta còn có : $\eta = k'\frac{\sqrt{T}\sqrt{m}}{\Phi^2}$.

Chú ý rằng $m = \frac{M}{N_A}$, N_A là số Avogadro.

Giả thiết k' giống nhau đối với hai chất khí (cũng như các nhiệt độ), khi đó ta thu được $\eta = \frac{K\sqrt{M}}{\Phi^2}$, K là một hằng số giống nhau đối với hai khí.

Ta có thể viết

$$\Phi_{CH_4} = \Phi_{He}\left(\frac{\eta_{He}}{\eta_{CH_4}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M_{CH_4}}{M_{He}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2,1.10^{-10}\times 1,9 = 4,0.10^{-10}\,m$$

Giá trị này phù hợp với giá trị thường được chấp nhận là 300pm.

8 1) *Ta tìm lực F dưới dạng: $F = kV^a\rho^b\eta^c D^d\Omega^e$, k là một con số không thứ nguyên. Phép phân tích thứ nguyên dẫn tới:*

$$[F] = \text{M.L.T}^{-2} = \text{L}^a.\text{T}^{-a}.\text{M}^b.\text{L}^{-3b}.\text{M}^c.\text{L}^{-c}.\text{T}^{-c}.\text{L}^d.\text{T}^{-e}$$

từ đó cho

$$\begin{aligned} b + c &= 1 \\ a - 3b + c + d &= 1 \\ -a - c - e &= -2 \end{aligned}$$

Hay còn là : $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ *có $N = 5$ cột và $r = 3$ hàng dẫn tới phải tìm $N + 1 - r = 3$ đại lượng không thứ nguyên G_1, G_2 và G_3*

Chọn ρ, V và D làm các đại lượng phụ thuộc và thiết lập các đại lượng không thứ nguyên.

- *Hệ số nhớt η cho phép thiết lập (nhờ các đại lượng ρ, V và D) một đại lượng đầu tiên G_1 đồng nhất (chẳng hạn!) với số REYNOLDS Re:*

$$G_1 = \text{Re} = \frac{\rho VD}{\eta}.$$

- *Vận tốc góc Ω, đồng nhất với T^{-1} là tỉ số của một vận tốc trên một chiều dài, cho đại lượng không thứ nguyên $G_2 = \frac{\Omega D}{V}$.*

- *Bây giờ ta phải xác định $F = f(\text{Re}, G_2).\rho^a.V^b.D^c$, f là hàm số không thứ nguyên.*

Rất dễ dàng tìm được các hệ số a, b, và c:

$$F = f(\text{Re}, G_2)\rho V^2 D^2.$$

Chú ý rằng hệ thức sau cùng này làm xuất hiện "một con số về lực" (đại lượng không thứ nguyên): $G_3 = N_F = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$.

Tóm lại ta thu được:

$$F=\rho V^2D^2 f(\mathrm{Re},G) \text{ với } \mathrm{Re}=\frac{\rho VD}{\eta} \text{ và } G=\frac{\Omega D}{V}.$$

Lưu ý rằng hình dạng của cánh quạt xuất hiện trong hàm số f, phụ thuộc vào thí nghiệm.

2) a) *Hai cánh quạt (giả sử "có cùng hình dạng") dịch chuyển trong cùng một chất lưu. Vậy ta có:* $\rho=\rho'; \eta=\eta'$. *Để có thể áp dụng được tập hợp các quy tắc về đồng dạng, ta phải có: Re = Re', và G = G'; điều này buộc phải có:*

$$VD=V'D' \text{ và } \frac{\Omega D}{V}=\frac{\Omega' D'}{V'}.$$

Từ đó suy ra $\frac{V'}{V}=\frac{D}{D'}=8$ *và do vậy* $\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{V'}{V}.\frac{D}{D'}=64$.

Tính một cỡ lớn của vận tốc của đầu cánh quạt nguyên mẫu: vận tốc này bằng $\frac{\Omega D}{2}$ *có giá trị vào cỡ* 200 $\mathrm{m.s^{-1}}$. *Đối với maket, vận tốc này còn lớn hơn: 8 lần giá trị trên, tức* 1600 $\mathrm{m.s^{-1}}$.

• ***Nếu chất lưu là không khí***

Các vận tốc trên hoặc cùng cỡ lớn, hoặc là rất lớn hơn vận tốc của âm trong môi trường đó (340 $\mathrm{m.s^{-1}}$). *Mô hình không khí không chịu nén như vậy là không đúng. Trong môi trường này,* $\mathrm{Re}_{\text{không khí}}\approx 9.10^4$.

• ***Nếu chất lưu là nước***

Các vận tốc trên rất lớn, nhất là trong trường hợp của maket; áp suất động lực là vào cỡ $\frac{\rho V^2}{2}$, *nghĩa là vào khoảng* 10^3 Pa. *Ở đó nhất thiết sẽ có hiện tượng khí xâm thực (sự sinh hốc). Trong môi trường này* $\mathrm{Re}_{\text{nước}}\approx 7.10^5$.

b) *Trong không khí hoặc trong nước, các số* REYNOLDS *rất lớn. Do vậy, có thể bỏ qua độ nhớt đối với nguyên mẫu và maket; điều này dẫn tới lấy* $\mathrm{Re}=\infty$.

c) *Vậy, điều bắt buộc duy nhất còn lại là:*

$$\frac{\Omega D}{V}=\frac{\Omega' D'}{V'}.$$

Điều này cho: $\frac{V}{V'}=\frac{\Omega D}{\Omega' D'}=\frac{100}{360}.\frac{4}{0,5}=2,22$, *tức* $V=20\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

Khi đó các lực F và F' được liên kết với nhau bởi công thức:

$$\frac{F}{F'}=\frac{\rho V^2D^2}{\rho' V'^2D'^2}=\left(\frac{V}{V'}\right)^2\left(\frac{D}{D'}\right)^2=\left(\frac{40}{18}\right)^2\left(\frac{4}{0,5}\right)^2=316, \text{ tức } F=72,7.10^3\ \mathrm{N}$$

Hiệu suất r là một số không thứ nguyên, r = g(Re,G) với $\mathrm{Re}=\frac{\rho VD}{\eta}$ *(ở đây bằng vô cùng),* $G=\frac{\Omega D}{V}$. *Vậy các hiệu suất đối với nguyên mẫu và maket là giống nhau: r = r'. Ta hãy tính r':*

$$r'=\frac{\text{công suất của } F'}{\text{công suất của ngẫu lực } \Gamma'}=\frac{F'V'}{\Gamma'\Omega'}=\frac{230\times\frac{9000}{3600}}{22\times 360\times\frac{2\pi}{60}}=0,693,$$

từ đó: r = 0,69.

Một phép tính tương tự cho ngẫu lực tác dụng vào cánh quạt nguyên mẫu cho:

$$\Gamma=\frac{FV}{r\Omega}=\frac{72,7.10^3\times\frac{20.10^3}{3600}}{0,69\times 100\times\frac{2\pi}{60}}=55896, \text{ tức } \Gamma=56.10^3\ \mathrm{N.m}.$$

9 *Cũng như ở* §**10.3**, *có 3 phương trình 4 ẩn và ta phải xác định hai đại lượng không thứ nguyên. Nếu lấy các đại lượng độc lập là D, ρ và* U_∞ *thì khi đó có thể chọn:*

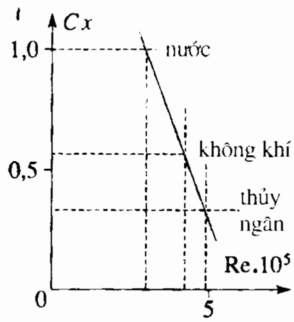
$$G_1=\mathrm{Re}=\frac{\rho U_\infty D}{\eta} \text{ và } G_2=Cx=\frac{F_L}{\frac{1}{2}U_\infty D}.$$

Khi đó, ta thiết lập được bảng sau đây:

chất lưu	nước	thủy ngân	không khí
Re	$3,0.10^5$	$4,8.10^5$	$4,3.10^5$
Cx	1,00	0,34	??

Ta tuyến tính hóa đường cong trong miền biến thiên hợp của số REYNOLDS: *sơ đồ cho ngay Cx = 0,55 (phép tính chính xác cho Cx = 0,52), từ đó giá trị thu được cho* F_L *bằng* $F_L=1,3.10^2\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

Đồ thị kèm theo mô tả sự biến thiên của Cx theo Re cho một hình trụ.



7

CÁC CÂN BẰNG CƠ HỌC VÀ CÁC CÂN BẰNG NĂNG LƯỢNG

MỤC TIÊU

■ Áp dụng các định luật của động lực học và của nhiệt động lực học cho một chất lỏng đang chảy.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Cách mô tả LAGRANGE và EULER về một dòng chảy.

■ Các định lí đối với một hệ chất điểm :

• về động lượng (kết thức động học) ;

• về mômen động lượng ;

• về động năng.

■ Nguyên lý thứ nhất và nguyên lý hai nhiệt động lực học.

Mở đầu

Chúng ta đã biết các định luật của cơ học hệ chất điểm, hoặc các định luật của nhiệt động lực học áp dụng cho các hệ kín.

Mục đích của chương này là qua các ví dụ, chúng tỏ có thể diễn giải các định luật trên như thế nào để áp dụng chúng cho các hệ mở.

Khi đó chúng ta sẽ có thể trả lời các câu hỏi như :

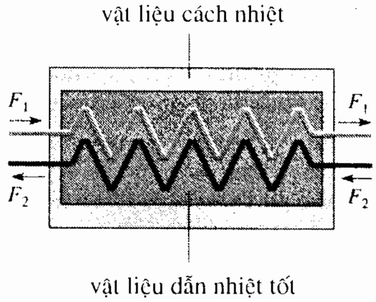
• *lực đẩy của một động cơ phản lực là gì ?*

• *công suất sinh ra do sự dãn khí trong một tuabin là gì ?*

1 Về một thiết bị trao đổi nhiệt : đại cương và các định nghĩa

1.1. Mô tả thiết bị trao đổi nhiệt

Một thiết bị trao đổi nhiệt được cấu tạo bởi hai ống dẫn C_1 và C_2 tiếp xúc nhiệt với nhau, có tiết diện đều diện tích bằng S_1 và S_2, trong đó có hai chất lỏng F_1 và F_2 ở nhiệt độ khác nhau chảy qua (*hình* 1).



H.1a. *Thiết bị trao đổi nhiệt : ta giả thiết rằng trong thiết bị, chất lỏng F_1 nguội đi, và chất lỏng F_2 nóng lên.*

Chúng ta chấp nhận các giả thuyết đơn giản hóa sau :

- hệ toàn bộ được cô lập về nhiệt với bên ngoài ;
- các chất lỏng là không chịu nén ;
- nội năng của một khối lượng m của chất lỏng chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ T của nó và lân cận T_0, có thể được tính bởi biểu thức.

$$U = mc(T - T_0)$$

với quy ước, nội năng bằng không ở nhiệt độ T_0 (*x. áp dụng* 1).

- Nhiệt dung riêng c tại mỗi điểm đã biết.
- Có một "chất dẫn nhiệt tốt" giữa các ống dẫn hai chất lỏng.
- Dòng chảy *một chiều* (chỉ có một kích thước) : các đặc trưng nhiệt động học và cơ học của chất lỏng giả thiết là đều trên một tiết diện thẳng của ống dẫn (*).
- Vận tốc của mỗi dòng chảy không phụ thuộc vào thời gian.
- Giả thiết chất lỏng là lý tưởng và bỏ qua các thay đổi nhỏ của độ cao.

(*) Ta hãy nhớ rằng dòng chảy một chiều là một sự lý tưởng hóa các dòng chảy thực : vận tốc của chất lỏng bằng không ở sát thành ống, và tồn tại một lớp giới hạn (mà độ dày phụ thuộc vào độ nhớt của chất lỏng), bên trong lớp này vận tốc là không đồng nhất.

Theo hệ thức BERNOULLI, các áp suất P_1 và P_2 là đều đối với mỗi ống dẫn (có tiết diện đều).

Chất lỏng F_1 vào thiết bị trao đổi nhiệt ở nhiệt độ T_{1e} và ra khỏi đó ở nhiệt độ T_{1s}. Tương tự, chất lỏng F_2 vào ở nhiệt độ T_{2e} và ra ở nhiệt độ T_{2s}. Ta giả thiết $T_{1e} > T_{2e}$: chất lỏng F_1 nguội đi và F_2 nóng lên trong thiết bị trao đổi nhiệt.

1.2. Hệ mở và hệ kín

Các định nghĩa này đã được đưa ra trong nhiệt động lực học và trong cơ học

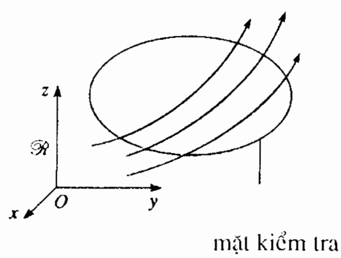
1.2.1. Các định nghĩa (nhắc lại)

Một hệ là kín nếu nó không trao đổi vật chất với bên ngoài.

Một hệ là mở, ngược lại, có thể trao đổi vật chất với bên ngoài.

Cụ thể là :

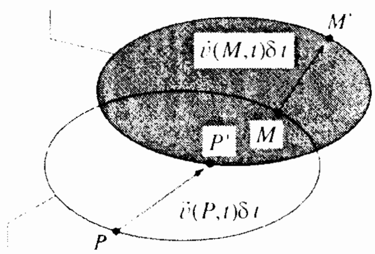
- một hệ mở không được xác định bởi một tập hợp xác định các hạt vật chất, mà bởi một ranh giới mà một dòng vật chất có thể đi qua (hình 2a). Ranh giới Σ giới hạn một hệ mở, được gọi là *mặt kiểm tra* là đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu (x. chương 2, § 1. 3) ;



H.2a. *Chất lỏng đi qua mặt kiểm tra cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu.*

• một hệ kín được xác định bởi một tập hợp các hạt vật chất (*h*.2b). Biên giới Σ^* giới hạn một hệ kín, gọi là *mặt chứa các hạt*, chuyển động trong hệ quy chiếu nghiên cứu : các điểm của mặt Σ^* dịch chuyển với vận tốc bằng vận tốc cục bộ của chất lỏng (*x. chương* 2, §**1.3**)

Thiết bị trao đổi nhiệt mà ta nghiên cứu tạo thành một *hệ mở*. Ở mỗi thời điểm hệ được cấu tạo bởi các ống dẫn và bởi chất lỏng ở bên trong, và hệ được giới hạn bởi chiếc vỏ đoạn nhiệt và bởi các tiết diện vào và ra của hai ống dẫn (*h*.3)



H.2b. *Vận động của một mặt chứa hạt : mặt bị chất lỏng "kéo theo". Khối lượng M của chất lỏng, giới hạn bởi mặt chuyển động này, là bất biến với thời gian.*

1.2.2. Hệ mở $\mathscr{S}$ và hệ kín $\mathscr{S}^*$ chồng khít nhau (trùng phùng)

Kí hiệu $\mathscr{S}$ là hệ giới hạn bởi mặt kín cố định Σ gọi là *mặt kiểm tra* (*h*.3) ; hệ được cấu tạo bởi thiết bị trao đổi nhiệt, các ống dẫn và chất lỏng chứa ở bên trong. $\mathscr{S}$ là một hệ mở, vì đã có sự truyền vật chất qua mặt cố định Σ.

Ở thời điểm t_0, các ống dẫn và chất lỏng nằm trong $\mathscr{S}$ có thể coi là một hệ vật chất kín được kí hiệu là $\mathscr{S}^*$; hệ này được xác định bởi một mặt chứa các hạt Σ^*, mà các điểm dịch chuyển với vận tốc của chất lỏng (*x. chương* 2, §**1.3**)

$\mathscr{S}$ và $\mathscr{S}^*$ trùng nhau (chồng lên nhau) ở thời điểm t_0, nhưng sau đó lại biến đổi một cách khác nhau :

• $\mathscr{S}$ vẫn được giới hạn bởi một biên giới bất động Σ, và các nguyên tố chất lỏng chứa trong đó được thay thế dần dần bởi các nguyên tố chất lỏng khác ;

• $\mathscr{S}^*$ được cấu tạo bởi các ống dẫn bất động và bởi chất lỏng chuyển động. Biên giới của nó bị biến dạng theo thời gian, nhưng nó vẫn gồm các nguyên tố chất lỏng cũ (*h*.3).

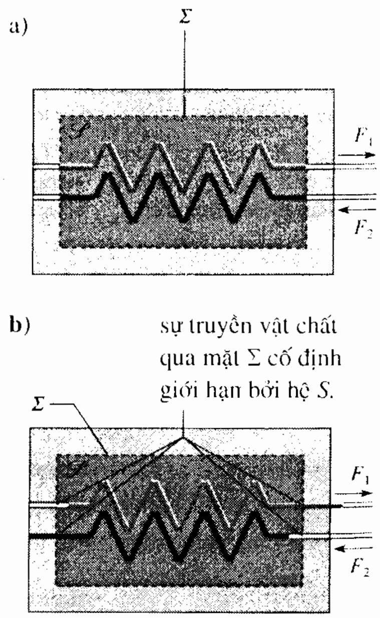
Chúng ta đã gặp một tình huống tương tự trong động học chất điểm. Để biểu thị mối quan hệ giữa các vận tốc của một động điểm, do các quan sát viên gắn với hai hệ quy chiếu đo được, ta đã đưa ra khái niệm *điểm trùng phùng*. Động điểm M và điểm trùng phùng của nó gắn với hệ quy chiếu $\mathscr{R}'$ trùng với nhau lúc t, nhưng quỹ đạo của chúng sau đó lại khác nhau.

Bằng sự loại suy, ta cũng sẽ gọi $\mathscr{S}^*$ là hệ kín *trùng phùng* với hệ mở $\mathscr{S}$ ở thời điểm t.

Hệ kín $\mathscr{S}^*$ mà vào thời điểm t, được cấu tạo bởi cũng những phần tử vật chất của hệ mở $\mathscr{S}$, được gọi là *hệ kín trùng phùng của* $\mathscr{S}$.

Các định luật cơ học và nhiệt động lực học có quan hệ với các hệ kín, chúng xác định cách mô tả LAGRANGE.

Hoặc như ta đã thấy ở *chương* 1, sự mô tả tự nhiên một dòng chảy được suy ra từ các thông tin xuất phát từ các bộ thu cố định lại là phép mô tả Euler. Vì vậy, ta phải diễn tả sự biến đổi của $\mathscr{S}^*$ theo các dữ kiện Euler.



H.3. *Hệ mở $\mathscr{S}$ được giới hạn bởi mặt kiểm tra cố định Σ – vẽ chấm chấm.* **a.** *Hệ mở $\mathscr{S}$ và hệ kín trùng với $\mathscr{S}^*$ lúc t_0*, **b.** *Lúc $t_0 + dt$, các hệ này không còn trùng với nhau nữa.*

1.3. Nội năng riêng và lưu lượng đối lưu

1.3.1. Nội năng riêng

Dòng chảy được xác định bởi một tập hợp các đại lượng *cục bộ* ; các đại lượng nàylà xác định tại mỗi điểm như áp suất, vận tốc và nhiệt độ và gọi là các đại lượng *cường tính*, đối lập với các đại lượng *quảng tính*, chúng là xác định trong một hệ xác định.

1 Về một thiết bị trao đổi nhiệt : đại cương và các định nghĩa

1.1. Mô tả thiết bị trao đổi nhiệt

Một thiết bị trao đổi nhiệt được cấu tạo bởi hai ống dẫn C_1 và C_2 tiếp xúc nhiệt với nhau, có tiết diện đều diện tích bằng S_1 và S_2, trong đó có hai chất lỏng F_1 và F_2 ở nhiệt độ khác nhau chảy qua (*hình* 1).

Chúng ta chấp nhận các giả thuyết đơn giản hóa sau :

- hệ toàn bộ được cô lập về nhiệt với bên ngoài ;
- các chất lỏng là không chịu nén ;
- nội năng của một khối lượng m của chất lỏng chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ T của nó và lân cận T_0, có thể được tính bởi biểu thức.

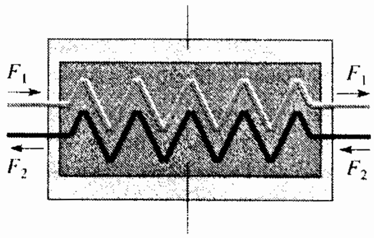
$$U = mc(T - T_0)$$

với quy ước, nội năng bằng không ở nhiệt độ T_0 (*x. áp dụng* 1).

- Nhiệt dung riêng c tại mỗi điểm đã biết.
- Có một "chất dẫn nhiệt tốt" giữa các ống dẫn hai chất lỏng.
- Dòng chảy *một chiều* (chỉ có một kích thước) : các đặc trưng nhiệt động học và cơ học của chất lỏng giả thiết là đều trên một tiết diện thẳng của ống dẫn (*).
- Vận tốc của mỗi dòng chảy không phụ thuộc vào thời gian.
- Giả thiết chất lỏng là lý tưởng và bỏ qua các thay đổi nhỏ của độ cao.

Theo hệ thức BERNOULLI, các áp suất P_1 và P_2 là đều đối với mỗi ống dẫn (có tiết diện đều).

Chất lỏng F_1 vào thiết bị trao đổi nhiệt ở nhiệt độ T_{1e} và ra khỏi đó ở nhiệt độ T_{1s}. Tương tự, chất lỏng F_2 vào ở nhiệt độ T_{2e} và ra ở nhiệt độ T_{2s}. Ta giả thiết $T_{1e} > T_{2e}$: chất lỏng F_1 nguội đi và F_2 nóng lên trong thiết bị trao đổi nhiệt.



H.1a. *Thiết bị trao đổi nhiệt : ta giả thiết rằng trong thiết bị, chất lỏng F_1 nguội đi, và chất lỏng F_2 nóng lên.*

(*) *Ta hãy nhớ rằng dòng chảy một chiều là một sự lý tưởng hóa các dòng chảy thực : vận tốc của chất lỏng bằng không ở sát thành ống, và tồn tại một lớp giới hạn (mà độ dày phụ thuộc vào độ nhớt của chất lỏng), bên trong lớp này vận tốc là không đồng nhất.*

1.2. Hệ mở và hệ kín

Các định nghĩa này đã được đưa ra trong nhiệt động lực học và trong cơ học

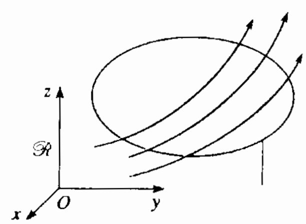
1.2.1. Các định nghĩa (nhắc lại)

Một hệ là kín nếu nó không trao đổi vật chất với bên ngoài.

Một hệ là mở, ngược lại, có thể trao đổi vật chất với bên ngoài.

Cụ thể là :

- một hệ mở không được xác định bởi một tập hợp xác định các hạt vật chất, mà bởi một ranh giới mà một dòng vật chất có thể đi qua (hình 2a). Ranh giới Σ giới hạn một hệ mở, được gọi là *mặt kiểm tra* là đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu (x. chương 2, § 1. 3) ;

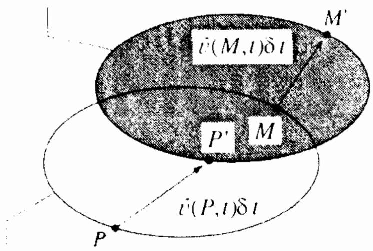


H.2a. *Chất lỏng đi qua mặt kiểm tra cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu.*

• một hệ kín được xác định bởi một tập hợp các hạt vật chất (*h*.2b). Biên giới Σ^* giới hạn một hệ kín, gọi là *mặt chứa các hạt*, chuyển động trong hệ quy chiếu nghiên cứu : các điểm của mặt Σ^* dịch chuyển với vận tốc bằng vận tốc cục bộ của chất lỏng (*x. chương* 2, §**1.3**)

Thiết bị trao đổi nhiệt mà ta nghiên cứu tạo thành một *hệ mở*. Ở mỗi thời điểm hệ được cấu tạo bởi các ống dẫn và bởi chất lỏng ở bên trong, và hệ được giới hạn bởi chiếc vỏ đoạn nhiệt và bởi các tiết diện vào và ra của hai ống dẫn (*h*.3)

mặt chứa các hạt lúc $t + \delta t$



mặt chứa các hạt lúc t

H.2b. *Vận động của một mặt chứa hạt : mặt bị chất lỏng "kéo theo". Khối lượng M của chất lỏng, giới hạn bởi mặt chuyển động này, là bất biến với thời gian.*

1.2.2. Hệ mở $\mathcal{S}$ và hệ kín $\mathcal{S}^*$ chồng khít nhau (trùng phùng)

Kí hiệu $\mathcal{S}$ là hệ giới hạn bởi mặt kín cố định Σ gọi là *mặt kiểm tra* (*h*.3) ; hệ được cấu tạo bởi thiết bị trao đổi nhiệt, các ống dẫn và chất lỏng chứa ở bên trong. $\mathcal{S}$ là một hệ mở, vì đã có sự truyền vật chất qua mặt cố định Σ.

Ở thời điểm t_0, các ống dẫn và chất lỏng nằm trong $\mathcal{S}$ có thể coi là một hệ vật chất kín được kí hiệu là $\mathcal{S}^*$; hệ này được xác định bởi một mặt chứa các hạt Σ^*, mà các điểm dịch chuyển với vận tốc của chất lỏng (*x. chương* 2, §**1.3**)

$\mathcal{S}$ và $\mathcal{S}^*$ trùng nhau (chồng lên nhau) ở thời điểm t_0, nhưng sau đó lại biến đổi một cách khác nhau :

• $\mathcal{S}$ vẫn được giới hạn bởi một biên giới bất động Σ, và các nguyên tố chất lỏng chứa trong đó được thay thế dần dần bởi các nguyên tố chất lỏng khác ;

• $\mathcal{S}^*$ được cấu tạo bởi các ống dẫn bất động và bởi chất lỏng chuyển động. Biên giới của nó bị biến dạng theo thời gian, nhưng nó vẫn gồm các nguyên tố chất lỏng cũ (*h*.3).

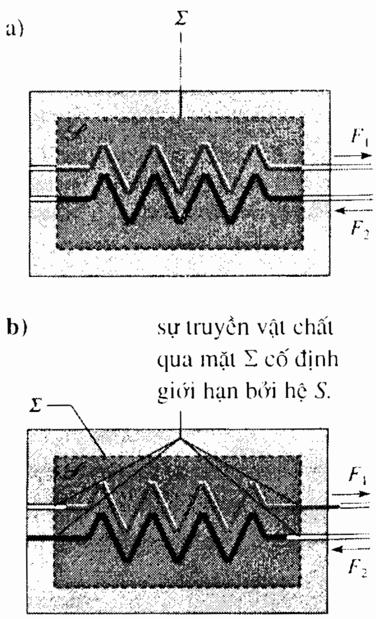
Chúng ta đã gặp một tình huống tương tự trong động học chất điểm. Để biểu thị mối quan hệ giữa các vận tốc của một động điểm, do các quan sát viên gắn với hai hệ quy chiếu đo được, ta đã đưa ra khái niệm *điểm trùng phùng*. Động điểm M và điểm trùng phùng của nó gắn với hệ quy chiếu $\mathcal{R}'$ trùng với nhau lúc t, nhưng quỹ đạo của chúng sau đó lại khác nhau.

Bằng sự loại suy, ta cũng sẽ gọi $\mathcal{S}^*$ là hệ kín *trùng phùng* với hệ mở $\mathcal{S}$ ở thời điểm t.

Hệ kín $\mathcal{S}^*$ mà vào thời điểm t, được cấu tạo bởi cũng những phần tử vật chất của hệ mở $\mathcal{S}$, được gọi là *hệ kín trùng phùng của $\mathcal{S}$*.

Các định luật cơ học và nhiệt động lực học có quan hệ với các hệ kín, chúng xác định cách mô tả LAGRANGE.

Hoặc như ta đã thấy ở *chương* 1, sự mô tả tự nhiên một dòng chảy được suy ra từ các thông tin xuất phát từ các bộ thu cố định lại là phép mô tả Euler. Vì vậy, ta phải diễn tả sự biến đổi của $\mathcal{S}^*$ theo các dữ kiện Euler.



H.3. *Hệ mở $\mathcal{S}$ được giới hạn bởi mặt kiểm tra cố định Σ – vẽ chấm chấm.* **a.** *Hệ mở $\mathcal{S}$ và hệ kín trùng với $\mathcal{S}^*$ lúc t_0.* **b.** *Lúc $t_0 + dt$, các hệ này không còn trùng với nhau nữa.*

1.3. Nội năng riêng và lưu lượng đối lưu

1.3.1. Nội năng riêng

Dòng chảy được xác định bởi một tập hợp các đại lượng *cục bộ* ; các đại lượng nàylà xác định tại mỗi điểm như áp suất, vận tốc và nhiệt độ và gọi là các đại lượng *cường tính*, đối lập với các đại lượng *quảng tính*, chúng là xác định trong một hệ xác định.

Trong trường hợp đang nghiên cứu, ta không thể xác định được "nhiệt độ của hệ $\mathscr{S}$" vì nhiệt độ này thay đổi một cách liên tục từ điểm này qua điểm khác của hệ. Để xác định nội năng của $\mathscr{S}$ (hay của $\mathscr{S}^*$), ta phải "cắt" hệ $\mathscr{S}$ thành một số rất lớn các hệ con, xác định ở *thang trung mô*, phải đủ nhỏ để chúng được coi là đồng nhất, và phải đủ lớn để khái niệm nhiệt độ còn có ý nghĩa.

Ta hãy xét ở lân cận của điểm M một phần tử trung mô vật chất có khối lượng δm. Hệ này có thể tích δV, nội năng δU và nhiệt độ T. Cần đặc biệt chú ý rằng ta đã dùng các ký hiệu δV và δU mà không dùng δT : đó là vì khi lượng vật chất đang xét trở thành rất nhỏ thì các đại lượng quảng tính tiến tới không, còn các đại lượng cường tính lại vẫn bất biến.

Chẳng hạn đối với một phần tử chất lỏng $F_1 : \delta U = \delta m c_1(T - T_0)$.

Do vậy, ta có thể định nghĩa một biến số *cường tính*, đó là nội năng riêng $u_m (\delta U = u_m \delta m)$; nội năng riêng này phụ thuộc vào các điều kiện cục bộ và không phụ thuộc vào "kích cỡ" (khối lượng hay thể tích) của phần tử vật chất. Như vậy, với chất lỏng $F_1 : u_m = c_1(T - T_0)$.

Nội năng của $\mathscr{S}$ có biểu thức :

$$U_{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{S}} u_{\mathrm{m}}(M)\mathrm{d}m .$$

Tại mọi điểm M của $\mathscr{S}$, khối lượng riêng $\rho(M)$ và nội năng riêng $u_m(M)$ là xác định, và nội năng của $\mathscr{S}$ còn có thể viết là :

$$U_{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{S}} \rho(M) u_{\mathrm{m}}(M)\mathrm{d}\tau ,$$

tuy nhiên người ta thường thích thao tác với biểu thức ở trên hơn, vì *dm* biểu thị riêng nó là một hệ kín, mà điều này lại không đúng với trường hợp $\mathrm{d}\tau$ (*x. áp dụng* 3)

Tương tự như vậy, ta có thể định nghĩa các đại lượng riêng khác, như thể tích riêng v là nghịch đảo của khối lượng riêng $\rho : \delta m = \rho \mathrm{d}\tau$ hay $\mathrm{d}\tau = v \delta m$.

Người ta thường ký hiệu các đại lượng riêng bằng chữ thường (chữ không viết hoa). Trong cơ học chất lỏng, để tránh lẫn lộn với vận tốc dòng chảy v, ta sẽ ký hiệu thể tích riêng là $\frac{1}{\rho}$.

Áp dụng 1

Các đại lượng riêng (theo đơn vị khối lượng)

1) *Hãy viết biểu thức của động năng riêng, và thế năng trọng trường riêng của một chất lỏng theo hàm của vận tốc dòng chảy v và theo độ cao z của nó.*

2) *Trên ví dụ của nước, hãy chứng tỏ rằng các độ biến thiên nội năng và entanpi riêng của một chất lỏng không chịu nén là gần như bằng nhau. Hãy viết biểu thức của chúng theo hàm của nhiệt dung riêng c của chất lỏng.*

Với nước, $c = 4{,}2\ \mathrm{kJ.K^{-1}.kg^{-1}}$

v

1) Động năng của một phần tử trung mô bằng $\delta \mathscr{E}_K = \frac{1}{2} v^2 \delta m$ và thế năng trọng trường của nó : $\delta \mathscr{E}_p = g z \delta m$ (nếu theo quy ước, $\mathscr{E}_p = 0$ khi $z = 0$).

Vậy các năng lượng riêng tương ứng bằng :

$$e_{K_m} = \frac{1}{2} v^2 \quad \text{và} \quad e_{p_m} = g z$$

2) Nội năng U của một hệ lỏng phụ thuộc vào hai biến số : $U(T, V)$. Nếu hệ là không chịu nén, V là không đổi thì nội năng chỉ còn phụ thuộc vào nhiệt độ T. Trong một miền nhiệt độ giới hạn (với một khối lượng m của chất lỏng) , điều này được thể hiện bởi định luật quen thuộc.

$$U = mc(T - T_0)\text{, hay } \Delta u_m = c\Delta T .$$

$H = U + PV$ hay $h = u_m + \dfrac{P}{\rho}$. Do đó, vì ρ không đổi, nên : $\Delta h_m = c_m \Delta T + \dfrac{1}{\rho}\Delta\rho$

Trong trường hợp của nước, $\rho = 1{,}00.10^3$ kg.m^{-3}.

Nếu $\Delta T = 1$ K thì : $\Delta u_m = 4{,}2$ kJ.kg^{-1}.

Ta thu được một độ biến thiên bằng nhau của $\dfrac{P}{\rho}$ với :

$$\Delta P = 42.10^5\,\text{Pa} .$$

Vậy, với các áp dụng thông thường, ta có thể bỏ qua các biến thiên của $\dfrac{P}{\rho}$ và $\Delta h_m \approx \Delta u_m \approx c_m \Delta T$.

1.3.2. Lưu lượng khối (nhắc lại)

Như đã biết, lưu lượng khối D_m của một chất lỏng đang chảy qua một diện tích Σ, bằng khối lượng đi qua diện tích đó trong một đơn vị thời gian, và với một khoảng thời gian δt, ta có : $\delta m = D_m \delta t$.

Nếu dòng chảy là một chiều, thì lưu lượng khối qua một tiết diện thẳng diện tích S của một chất lỏng, có khối lượng riêng ρ và có vận tốc chảy v, có biểu thức (h.4) $D_m = \rho v S$.

Trong ví dụ đang nghiên cứu, và theo hệ thức trên thì các vận tốc v_1 và v_2 của chất lỏng là đều với mỗi ống dẫn.

1.3.3. Lưu lượng đối lưu của nội năng

Chất lỏng đang chảy vận chuyển theo nó không chỉ khối lượng mà còn năng lượng. Lưu lượng nội năng D_U qua một tiết diện Σ bằng lượng nội năng đi qua tiết diện đó trong một đơn vị thời gian.

Một lưu lượng có sự vận chuyển vật chất tham dự gọi là lưu lượng đối lưu

Sự phân biệt như trên là quan trọng, vì có thể còn nhiều dạng truyền năng lượng khác qua một diện tích : sự dẫn và sự bức xạ.

1.3.4. Hệ thức với lưu lượng khối

Xét khối lượng δm của chất lỏng, có nội năng δU, đi qua một tiết diện cho trước, trong thời gian δt.

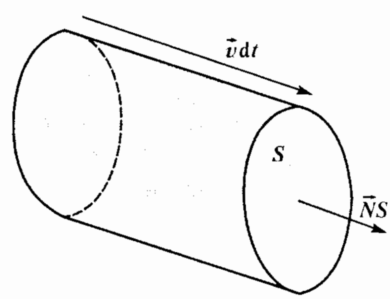
Ta có : $\delta U = u_m \delta m = u_m D_m \delta t$ và từ đó, ta suy ra giá trị của lưu lượng D_U của U :

$$D_U = u_m D_m .$$

Trong trường hợp đang nghiên cứu, lưu lượng *vào* của nội năng qua tiết diện vào của chất lỏng F_1 bằng :

$$D_{U_{1e}} = c_1(T_{1e} - T_0)D_m .$$

Để đơn giản hóa các ký hiệu, ta bỏ chỉ số m đi ; từ nay về sau u sẽ chỉ nội năng riêng.



H.4. *Lưu lượng khối. Chất lỏng đi qua tiết diện thẳng có diện tích S trong thời gian dt được chứa trong một hình trụ có thể tích S v dt (S vuông góc với vận tốc $\vec{v}$ của chất lỏng).*

1.4. Cân bằng (bilan) năng lượng

1.4.1. Nguyên lý thứ nhất của nhiệt động lực học

Dựa vào nguyên lý thứ nhất của nhiệt động lực học (liên quan đến các hệ kín), ta hãy thực hiện một sự cân bằng năng lượng đối với hệ kín $\mathscr{S}^*$ giữa hai thời điểm gần nhau t và $t + dt$.

Năng lượng toàn phần $\mathscr{E}$ của $\mathscr{S}^*$ được xác định bởi $\mathscr{E} = U + \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_p$, trong đó U là nội năng, $\mathscr{E}_K$ là động năng vĩ mô và $\mathscr{E}_p$ là thế năng vĩ mô.

Đối với $\mathscr{S}^*$, sự cân bằng năng lượng được biểu thị bởi $d\mathscr{E} = \delta W + \delta Q$, trong đó δW là công của các ngoại lực không dẫn xuất từ $\mathscr{E}_p$ và δQ là năng lượng do $\mathscr{S}^*$ nhận được qua sự truyền nhiệt.

• Trong trường hợp đang nghiên cứu, động năng là không đổi và các biến thiên của thế năng trọng trường được bỏ qua, ta có :

$dU = \delta W + \delta Q$ nhưng nhớ rằng cân bằng này liên quan tới $\mathscr{S}^*$.

• Các thành bên ngoài của các ống dẫn là đoạn nhiệt. Hơn nữa, nếu ta bỏ qua sự truyền nhiệt bằng dẫn nhiệt trong các chất lỏng qua các tiết diện vào và ra, thì số hạng trao đổi nhiệt δQ bằng không.

• Các ngoại lực có khả năng cung cấp công cho $\mathscr{S}^*$ chỉ là các áp lực tác dụng lên các tiết diện vào và ra. Các công suất của chúng là :

$P_1 S_1 v_1$ và $P_2 S_2 v_2$, là dương, ở ngang các tiết diện vào ;

$-P_1 S_1 v_1$ và $-P_2 S_2 v_2$, là âm, ở ngang các tiết diện ra.

Do vậy công suất toàn phần và công δW bằng không.

Ta chỉ còn phải biểu thị rõ dU đối với $\mathscr{S}^*$ theo các biến số Euler.

1.4.2. Độ biến thiên nội năng của $\mathscr{S}$

$U_{\mathscr{S}}$ có thể biểu thị như tổng nội năng của các phần tử của hệ :

$$U_{\mathscr{S}} = U_{\text{ống + vật dẫn nhiệt}} + U_{\text{lỏng 1}} + U_{\text{lỏng 2}}.$$

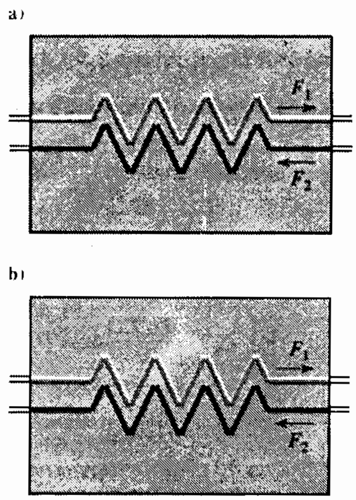
Nghĩa là, theo hàm số của nhiệt độ $T(M, t)$ và của nhiệt dung riêng $c(M)$ tại mỗi điểm :

$$U_{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{S}} c(M)T(M,t)\mathrm{d}m \quad \text{với } c(M) = c_1 \text{ trong } F_1 \text{, v.v...}$$

từ đó :

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathscr{S}}}{\mathrm{d}t} = \iiint_{\mathscr{S}} c(M)\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}\mathrm{d}m \quad (\mathscr{S} \text{ được giới hạn bởi mặt kiểm tra } \Sigma \text{ cố định}).$$

Tích phân được lấy cho toàn bộ thể tích của $\mathscr{S}$ bao gồm các ống dẫn, vật dẫn nhiệt, và chất lỏng chứa ở trong đó lúc t.



H.5. *Biến đổi của hệ kín* $\mathscr{S}^*$; $\delta m_1 = D_{m1}dt$; $\delta m_2 = D_{m2}dt$ *với* D_{m1} *và* D_{m2} *là các lưu lượng khối đi ra.*

a. *Ở thời điểm t*

b. *Ở thời điểm t + dt.*

1.4.3. Độ biến thiên nội năng của $\mathscr{S}^*$

$\mathscr{S}$ và $\mathscr{S}^*$ trùng với nhau ở thời điểm t, nhưng lại lệch nhau lúc $t + dt$ (*h*.5)

Tại thời điểm t : $U_{\mathscr{S}^*}(t) = U_{\mathscr{S}}(t)$.

Tại điểm thời $t + dt$: $U_{\mathscr{S}^*}(t+dt) = U_{\mathscr{S}}(t+dt) + \delta U_{1s} + \delta U_{2s} - \delta U_{1e} - \delta U_{2e}$, với ký hiệu δU_{1s} là nội năng chứa trong phần tử F_1, có khối lượng δm_1, đi ra khỏi thiết bị trao đổi nhiệt trong thời gian dt, δU_{1e} là nội năng của phần tử F_2, có khối lượng δm_1 đi vào thiết bị trao đổi nhiệt trong thời gian dt, v.v... (*h*.5).

Ta có thể biểu thị các δU theo các lưu lượng khối D_{m_1} và D_{m_2} và theo các nội năng riêng của các chất lỏng ở đầu vào và ở đầu ra của thiết bị trao đổi nhiệt :

$$\delta U_{1e} = \delta m_1 u_{1e} = D_{m_1} u_{1e} dt \text{ v.v...}$$

Ta thu được :

$$U_{\mathscr{S}^*}(t+dt) - U_{\mathscr{S}^*}(t) = U_{\mathscr{S}}(t+dt) - U_{\mathscr{S}}(t) + [D_{m_1}(u_{1s} - u_{1e}) + D_{m2}(u_{2s} - u_{2e})]dt,$$

hay :

$$\frac{dU_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \underbrace{\frac{dU_{\mathscr{S}}}{dt}}_{\text{biến thiên cục bộ}} + \underbrace{D_{m_1}(u_{1s} - u_{1e}) + D_{m_2}(u_{2s} - u_{2e})}_{\text{biến thiên đối lưu}}.$$

Theo hàm số của các nhiệt độ :

$$\frac{dU_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{dU_{\mathscr{S}}}{dt} + D_{m_1} c_1 (T_{1s} - T_{1e}) + D_{m_2} c_2 (T_{2s} - T_{2e}).$$

$D_{m_1}(u_{1s} - u_{1e}) + D_{m_2}(u_{2s} - u_{2e})$ biểu diễn tổng (đại số) của các lưu lượng đối lưu đi ra của nội năng, và từ đó, ta suy ra :

$$\frac{dU_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{dU_{\mathscr{S}}}{dt} + \text{(lưu lượng đối lưu toàn phần đi ra của nội năng)}$$

Chú ý :

Lượng $\frac{dU_{\mathscr{S}^*}}{dt}$ *biểu thị cái gì ? Đó là độ biến thiên của nội năng liên quan đến một hệ kín, nghĩa là một hệ được giới hạn bởi một mặt có chứa hạt. Ta có thể biểu thị lượng này trực tiếp dưới dạng* $\frac{DU}{Dt}$ *(là đạo hàm toàn phần của U ; x. chương* 2, §**1.3**).

1.4.4. Biểu thức EULER của phép cân bằng năng lượng

Bằng cách tập hợp các kết quả trên lại, ta có thể biểu thị phép cân bằng năng lượng bằng các đại lượng EULER :

$$\frac{dU_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{dU_{\mathscr{S}}}{dt} + D_{m_1}(u_{1s} - u_{1e}) + D_{m_2}(u_{2s} - u_{2e}) = 0,$$

hoặc là theo hàm của nhiệt độ :

$$\iiint_{\mathscr{S}} c(M) \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} dm + D_{m_1} c_1 (T_{1s} - T_{1e}) + D_{m_2} c_2 (T_{2s} - T_{2e}) = 0$$

(giả thiết các chất lỏng không chịu nén)

1.4.5. Trường hợp của chế độ không đổi

Chế độ chảy là không đổi nếu mọi đại lượng EULER không đổi theo thời gian ; ở đây điều này được biểu thị bởi $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Cần đặc biệt ghi nhớ rằng đặc tính không đổi chỉ liên quan đến $\mathscr{S}$ mà không liên quan đến $\mathscr{S}^*$: các phần tử chất lỏng khác nhau của $\mathscr{S}^*$ thấy nhiệt độ của chúng thay đổi theo thời gian.

Phép cân bằng năng lượng trở thành :

$$D_{m_1}c_1(T_{1s} - T_{1e}) + D_{m_2}c_2(T_{2s} - T_{2e}) = 0 .$$

Trên phương diện của riêng chất lỏng F_1, thao tác chỉ là, trong khoảng thời gian dt, phải đưa nhiệt độ của một khối lượng $\delta m_1 = D_{m_1}dt$ từ T_{1e} lên T_{1s}.

Do vậy $D_{m_1}c_1(T_{1s} - T_{1e})dt$ và $D_{m_2}c_2(T_{2s} - T_{2e})$, biểu thị các độ tăng nội năng của chất lỏng F_1 và F_2 trong thời gian dt.

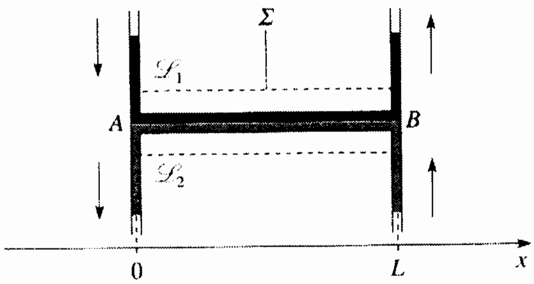
Áp dụng 2 sẽ đưa ra một mô hình trao đổi nhiệt giữa các chất lỏng để xác định các nhiệt độ ở đầu ra.

Áp dụng 2

Thiết bị trao đổi nhiệt dòng ngược

Hai chất lỏng $\mathscr{S}_1$ (nóng) và $\mathscr{S}_2$ (lạnh) chảy ngược chiều nhau trong hai ống dẫn riêng biệt và tiếp xúc nhiệt với nhau (h.6). Ta xác định vị trí x của một tiết diện nằm giữa O (điểm A) và L (điểm B).

$\mathscr{S}_2$, có nhiệt dung riêng c_1, chảy từ A đến B với một lưu lượng khối D_{m_1} và trong chế độ không đổi, nhiệt độ của nó biến thiên theo một định luật $T_1(x)$. Cũng vậy, ta định nghĩa c_2, D_{m_2} và $T_2(x)$ đối với $\mathscr{S}_2$ (h.6).



H.6. *Thiết bị trao đổi nhiệt dòng ngược.*

$\mathscr{S}_1$ đi vào tại A ở nhiệt độ T_{1A}, đã biết, và đi ra tại B ở nhiệt độ T_{1B}.$\mathscr{S}_2$ đi vào tại B ở nhiệt độ T_{2B}, thấp hơn T_{1A}, đã biết, và đi ra tại A ở nhiệt độ T_{2A}.

Giả thiết sự trao đổi nhiệt giữa hai ống dẫn tuân theo một định luật tuyến tính. Công suất nhiệt $d\mathscr{P}_{th}$ do một đoạn dài dx ở cùng mức của $\mathscr{S}_1$ nhường cho $\mathscr{S}_2$ bằng :

$$d\mathscr{P}_{th} = G(T_1 - T_2)dx .$$

1) *Hãy viết cặp hai phương trình vi phân theo $T_1(x)$ và $T_2(x)$.*

2) Xét trường hợp trong đó $D_{m_1}c_1 = D_{m_2}c_2 = Dc$.

a) *Hãy xác định T_{2A} và nghiệm lại một cách định tính kết quả bằng cách làm thay đổi các thông số L, D, c và G.*

b) *Hãy xác định công suất do $\mathscr{S}_2$ nhận được ở ngang mức với thiết bị trao đổi nhiệt.*

1) Khi chế độ không đổi đã được thiết lập thì nhiệt độ của các chất lỏng chỉ còn phụ thuộc vào x thôi. Ta hãy viết phương trình cân bằng năng lượng cho hệ kín cấu tạo từ một phần tử của $\mathscr{S}_1$ (tương ứng $\mathscr{S}_2$), có khối lượng δm và chiều dài δx (h.7).

Ở thời điểm t, phần tử có hoành độ x và nội năng của nó (nếu đặt $u(T_0) = 0$) là :

$$\delta U_1(t) = \delta m\, c_1(T(x) - T_0)$$

(tương ứng $\delta U_2(t) = \delta m\, c_2(T(x) - T_0)$.

Ở thời điểm $t + dt$, phần tử có hoành độ $x + v_1dt$, và nội năng của nó là :

$$\delta U_1(t + dt) = \delta m c_1(T(x + v_1dt) - T_0)$$

(tương ứng $\delta U_2(t + dt) = \delta m c_2(T(x - v_2dt) - T_0)$.

Nếu bỏ qua công của các áp lực thì sự biến thiên của δU chỉ do sự truyền nhiệt trên chiều dài δx :

$$\delta m c_1 \frac{dT_1}{dx} v_1 dt = G(T_2(x) - T_1(x))\,\delta x$$

(tương ứng :

$$\delta m c_2 \frac{dT_2}{dx}(-v_2)dt = -G(T_2(x) - T_1(x))\,\delta x ,$$

cẩn thận với các dấu !)

Nếu S là diện tích tiết diện của ống dẫn :

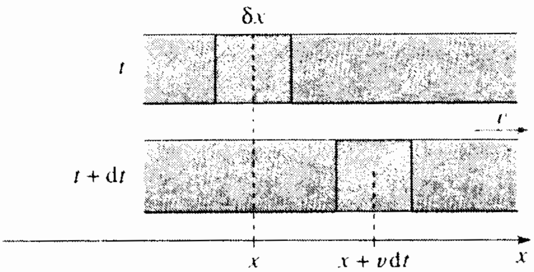
$$\delta m v_1 = \rho_1 S \delta x v_1 = \rho_1 S v_1 \delta x = D_{m_1}\delta x ,$$

từ đó ta có phương trình vi phân :

$$D_{m_1}c_1\frac{dT_1}{dx}=-G(T_1-T_2)$$

Tương tự, ta cũng thu được $D_{m_2}c_2\frac{dT_2}{dx}=-G(T_1-T_2)$

(*hãy cẩn thận với các dấu !*).



H.7. *Biến đổi của một phần tử của* $\mathcal{V}_1$.

2) a) Đặt $\lambda=\frac{D_{m_1}c_1}{G}=\frac{D_{m_2}c_2}{G}=\frac{Dc}{G}$ (đồng nhất với một chiều dài), $\theta=T_1-T_2$ và $\psi=T_1+T_2$.

Lấy tổng và hiệu của hai phương trình trên, ta có :

$$\frac{\lambda d\theta}{dx}=0 \text{ và } \lambda\frac{d\psi}{dx}=-2\theta,$$

từ đó cho θ không đổi và $\psi=\psi_0-2\frac{\theta}{\lambda}x$.

Nếu viết $T_1(0)=T_{1A}$ và $T_2(L)=T_{2B}$, ta thu được θ, sau đó $T_{2A}=T_{1A}-\theta$, nghĩa là :

$$T_{2A}=\frac{T_{1A}\frac{L}{\lambda}-T_{2B}}{1+\frac{L}{\lambda}}$$

T_{2A} tiến lại gần T_{1A} nếu λ tiến tới *O*. Dễ dàng thấy rằng tình huống này xảy ra nếu làm cho sự trao đổi nhiệt dễ dàng hơn, điều này có thể thực hiện được với *L* lớn, *G* lớn hoặc *D* nhỏ. Các nhận xét trực giác này phù hợp tốt với kết quả tính toán.

b) Đối với $\mathcal{V}_2$, thao tác tương ứng là, trong thời gian *dt*, phải đưa một khối lượng $\delta m=D_{m_2}dt$ từ nhiệt độ T_{2B} lên nhiệt độ T_{2A}, do đó thu một năng lượng bằng $D_{m_2}c_2(T_{2A}-T_{2B})dt$.

Vậy, công suất nhiệt do $\mathcal{V}_2$ nhận được bằng :

$$\mathcal{P}_{th}=D_{m_2}c_2(T_{2A}-T_{2B}).$$

1.5. Tổng quát hóa

Các phương pháp đã sử dụng cho phép cân bằng nội năng của thiết bị trao đổi nhiệt có thể mở rộng ra cho các đại lượng quảng tính khác như cơ năng hay các đại lượng vectơ như động lượng và mômen động lượng.

1.5.1. Đại lượng tính theo đơn vị thể tích

Với mọi đại lượng quảng tính, ta kết hợp một đại lượng theo đơn vị thể tích tương ứng là một vô hướng hoặc một vectơ ; do vậy ta thu được bảng trên *hình* 8.

đại lượng G	**đại lượng theo đơn vị thể tích** g_v	$\delta G=g_v\delta\tau$
nội năng U	u_v	$\delta U=u_v\delta\tau$
entanpi H	h_v	$\delta H=h_v\delta\tau$
entrôpi S	s_v	$\delta S=s_v\delta\tau$
động năng $\mathcal{E}_K$	$\frac{\rho v^2}{2}$	$\delta\mathcal{E}_K=\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)\delta\tau$
động lượng $\vec{p}$	$\rho\vec{v}$	$\delta\vec{p}=\rho\vec{v}\delta\tau$
mômen động lượng $\vec{L}_0$	$\rho\vec{r}\wedge\vec{v}$	$\delta\vec{L}_0=\rho(\vec{r}\wedge\vec{v})\delta\tau$

H.8. *Đại lượng theo đơn vị thể tích.*

1.5.2. Đại lượng theo đơn vị khối lượng

Với mỗi đại lượng quảng tính, ta kết hợp với một đại lượng theo đơn vị khối lượng tương ứng là một vô hướng hoặc một vectơ ; do vậy ta thu được bảng trên *hình* 9.

đại lượng G	**đại lượng theo đơn vị khối lượng g**	$\delta G = g\delta m$
nội năng U	u_m	$\delta U = u_m \delta m$
entapani H	h_m	$\delta H = h_m \delta m$
entrôpi S	s_m	$\delta S = s_m \delta m$
động năng $\mathcal{E}_K$	$\dfrac{v^2}{2}$	$\delta \mathcal{E}_K = \left(\dfrac{v^2}{2}\right)\delta m$
động lượng $\vec{p}$	$\vec{v}$	$\delta \vec{p} = \vec{v}\delta m$
mômen động lượng $\vec{L}_O$	$\vec{r} \wedge \vec{v}$	$\delta \vec{L}_O = (\vec{r} \wedge \vec{v})\delta m$

H.9. *Đại lượng theo đơn vị khối lượng.*

Áp dụng 3

Đạo hàm toàn phần
của một đại lượng quảng tính

Trong tiết **§1.3** *của chương 2, ta đã thấy rằng đạo hàm toàn phần* $\dfrac{DG}{Dt}$ *của đại lượng quảng tính G bằng:*

$$\frac{DG}{Dt} = \begin{Bmatrix}\text{độ biến thiên}\\ \text{cục bộ}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{độ biến thiên}\\ \text{đối lưu}\end{Bmatrix}$$

$$= \iiint_V \frac{\partial g_v(M,t)}{\partial t} d\tau + \oiint_S g_v(P,t)\vec{v}(P,t).\vec{N}dS$$

với g_v *là mật độ theo thể tích của G,* $\delta G = g_v \delta\tau$.

Bằng cách sử dụng hệ thức trên, hãy tính $\dfrac{DG}{Dt}$ *nếu dùng* g_m *(mật độ theo khối lượng của G).*

Hãy xác nhận lại $\dfrac{DG}{Dt} = \iiint_V \dfrac{Dg_m(M,t)}{Dt} dm$.

Đại lượng quảng tính G được xác định bởi :

$$G = \iiint_V g_m(M,t)dm = \iiint_V g_m(M,t)\,\rho(M,t)d\tau \ .$$

Hệ thức trên cho :

$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial(g_m\rho)}{\partial t}d\tau + \oiint_S (g_m\rho)\vec{v}.\vec{N}dS .$$

$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial g_m}{\partial t}\rho d\tau + \iiint_V g_m \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_V \mathrm{div}(g_m \rho \vec{v})d\tau \ .$$

$$= \iiint_V \left\{\frac{\partial g_m}{\partial t}\rho + g_m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(g_m\rho\vec{v})\right\}d\tau \ .$$

Từ phương trình bảo toàn khối lượng $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$, cho ta :

$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \left\{\frac{\partial g_m}{\partial t}\rho - g_m\mathrm{div}(\rho\vec{v}) + \mathrm{div}(g_m\rho\vec{v})\right\}d\tau \ .$$

Vì $\mathrm{div}(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}f.\vec{A}$, ta thu được :

$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \left\{\frac{\partial g_m}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g_m\right\}\rho d\tau \ .$$

Biết biểu thức của đạo hàm toàn phần nên kết quả cuối cùng là :

$$\frac{DG}{Dt} = \iiint_V \frac{Dg_m}{Dt}dm \quad \text{với} \quad G = \iiint g_m dm \ .$$

Chú ý :

Hệ thức rất đơn giản trên đây của áp dụng 3, khi thiết lập các cân bằng, phải dẫn ta tới lập luận không những với các phần tử khối lượng δm (các hệ "kín") mà cả với các phần tử thể tích (các hệ "mở").

Các phần tử khối lượng δm là các hạt chất lỏng đã thấy ở chương 1, **§1.2.3**.

1.5.3. Lưu lượng đối lưu của một đại lượng quảng tính

Lưu lượng D_G gửi qua một mặt Σ của đại lượng quảng tính G bằng số lượng của G đi qua Σ trong một đơn vị thời gian.

Lưu lượng của G có sự vận chuyển vật chất tham dự gọi là lưu lượng đối lưu.

Khối lượng chất lỏng δm đi qua một tiết diện Σ trong thời gian dt bằng $D_m dt$. Theo định nghĩa của g_{m} (riêng, theo đơn vị khối lượng) thì lượng G mang bởi δm bằng $\delta G = g_{\mathrm{m}} D_{\mathrm{m}} dt$. Từ đó, ta suy ra giá trị của lưu lượng của G : $D_G = g_{\mathrm{m}} D_{\mathrm{m}}$.

Trong trường hợp một dòng chảy một chiều, lưu lượng đối lưu của một đại lượng quảng tính G được biểu thị theo hàm số của lưu lượng và của đại lượng riêng g_{m} bởi $D_G = g_{\mathrm{m}} D_{\mathrm{m}}$.

▶ **Để luyện tập : BT1**

1.5.4. Phép cân bằng

Như đối với ví dụ đã giải quyết trên đây, chúng ta sẽ phải áp dụng các định luật của cơ học hoặc của nhiệt động lực học được phát biểu cho các hệ kín, trong khi các dữ kiện của ta lại liên quan tới một hệ mở $\mathscr{S}$.

Khi đó, ta sẽ xem hệ kín $\mathscr{S}^*$ như trùng với hệ $\mathscr{S}$ ở thời điểm t, sau đó thực hiện một phép cân bằng của sự biến đổi số lượng của đại lượng quảng tính G (vô hướng hoặc vectơ) chứa trong $\mathscr{S}^*$ giữa hai thời điểm vô cùng gần nhau. Ta sẽ không có ý định thiết lập một định luật tổng quát, mà sẽ chỉ thực hiện một phép cân bằng phù hợp với từng ví dụ cụ thể.

Chỉ có phương pháp là điều cần nhớ (chứ không phải một công thức bất kỳ nào !!).

2 Các cân bằng động lượng

2.1. Định lý về động lượng

Ta hãy nhắc lại định lý về động lượng đối với một hệ chất điểm .

2.1.1. Động lượng hay kết thức động học

Động lượng của một hệ chất điểm bằng tổng động lượng của các phần tử của hệ.

• Với một hệ chứa N hạt có khối lượng m_i và các vận tốc $\vec{v}_i$, động lượng bằng :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i .$$

• Đối với một hệ liên tục, như một chất lỏng, một phần tử thể tích nằm lân cận một điểm M có động lượng nguyên tố $d\vec{p} = \vec{v}(M)dm$ và động lượng của hệ bằng :

$$\vec{p} = \iiint_{hệ} \vec{v}(M)dm .$$

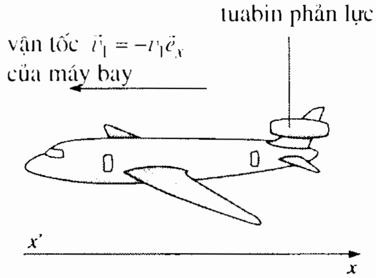
• Nếu mọi điểm của hệ, mà khối lượng toàn phần là m, đều có cùng một vận tốc $\vec{v}$ thì :

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

• Động lượng *riêng* tại một điểm bằng vận tốc của dòng chảy tại điểm đó. Do vậy, lưu lượng đối lưu của động lượng qua một diện tích được biểu thị theo hàm số của lưu lượng riêng D_m và của vận tốc $\vec{v}$.

Đối với mỗi thành phần đềcác : $D_{p_x} = v_x D_m$, hay dưới dạng vectơ :

$$D_{\vec{p}} = \vec{v} D_m .$$



H.10. *Tuabin phản lực gắn trên một máy bay.*

2.1.2. Phát biểu định lý

Đạo hàm theo thời gian của động lượng của một *hệ chất* (hệ kín) bằng tổng hợp các ngoại lực tác dụng vào hệ đó.

• Nếu hệ quy chiếu nghiên cứu là hệ Galilé thì các ngoại lực là do tương tác với các hệ khác. Trong trường hợp ngược lại, ta phải thêm vào các lực quán tính.

• Tổng hợp các *nội lực* bằng không.

2.2. Ví dụ về cân bằng động lượng : lực đẩy của một tuabin phản lực

2.2.1. Mô hình đơn giản hóa

Tuabin phản lực được gắn trên một máy bay (*h*.10), chuyển động tịnh tiến so với bầu khí quyển : $\vec{v}_{m.bay} = -v_1\vec{e}_x$ là không đổi. Từ nay ta hãy biểu thị mọi đại lượng trong hệ quy chiếu của máy bay, giả thiết là galilé.

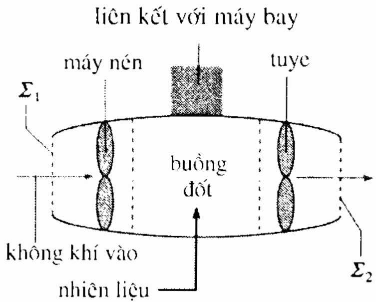
Không khí đi vào động cơ phản lực với một vận tốc $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$, sau đó bị nén lại.Các khí phát ra từ sự đốt cháy được giãn nở trong một ống tuye. Chúng cung cấp năng lượng cần thiết cho sự vận hành của máy nén, rồi cuối cùng được phụt ra với một vận tốc $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_x$.

Trong mô hình đơn giản hóa của ta, $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ được giả thiết là đều trên các tiết diện vào và ra Σ_1 và Σ_2 (*h*.11).

Nếu ta không kể đến các cuộn xoáy, ta có thể chấp nhận dòng chảy của các chất lỏng là không đổi (trong hệ quy chiếu của tuabin phản lực) và áp suất ở các mặt vào và ra bằng áp suất của khí quyển bao quanh.

Ký hiệu $D_{m.k.khí}$ là lưu lượng khối của không khí đi vào nghĩa là khối lượng của không khí đi vào tuabin phản lực trong một đơn vị thời gian.

Nhiên liệu là dầu hỏa được giả thiết cấu tạo bởi đođêcan $C_{12}H_{26}$ có khối lượng phân tử $M = 170$ g.mol^{-1}. Không khí là hỗn hợp của 20% khí oxy O_2 và 80% khí nitơ N_2 ; cần 18,5 mol khí oxy, tức 2,664 kg không khí để đốt cháy 1mol $C_{12}H_{26}$.



H.11. *Tuabin phản lực.*

Hơn nữa nếu giả thiết lưu lượng dầu hỏa bằng một nửa lưu lượng cần có với các tỷ lệ hợp thức thì lưu lượng khối của nhiên liệu bằng :

$$D_{\text{m.n.liệu}} = \frac{170}{5328} = \alpha D_{\text{m.k.khí}} \text{ với } \alpha = 0{,}032 .$$

Trong các điều kiện đó, do có sự bảo toàn khối lượng của các chất tham gia phản ứng (chế độ không đổi), nên lưu lượng riêng đi ra bằng :

$$D_{\text{m ra}} = (1+\alpha) D_{\text{m k.khí}} = 1{,}032 D_{\text{m k.khí}}$$

Vấn đề của ta là xác định lực tác dụng bởi tuabin phản lực lên máy bay theo hàm số của các dữ kiện (vận tốc và lưu lượng).

2.2.2. Phép cân bằng động lượng

Ta hãy xét *hệ mở* $\mathcal{S}$ gồm tuabin phản lực, nhiên liệu và các chất khí nằm giữa Σ_1 và Σ_2 ở thời điểm t.

<u>*Chú ý :*</u>

Ta biết rằng sự cân bằng động lượng của hệ (mở hoặc kín) chỉ duy nhất do chất lưu, song vì các lý do đơn giản hóa, thường cũng rất có lợi , chẳng hạn sự cân bằng các lực, là đưa vào hệ "cái vỏ vật chất" hoặc "bình chứa" trong đó chất lưu đang biến đổi.

Vì các đại lượng không phụ thuộc tường minh vào thời gian nên động lượng của $\mathcal{S}$ là không đổi :

- do dòng chảy của các chất lưu là không đổi nên $\rho(M)\vec{v}(M)$ là hằng số tại mọi điểm của $\mathcal{S}$;
- chuyển động của các bộ phận động của động cơ phản lực (máy nén v.v...) có thể giả thiết là ổn định.

Ta hãy xét hệ kín $\mathcal{S}^*$, trùng với $\mathcal{S}$ ở thời điểm t. Gọi δm_1 là khối lượng không khí đi vào $\mathcal{S}$ và δm_2 là khối lượng của chất khí đi ra khỏi $\mathcal{S}$ trong khoảng thời gian nguyên tố dt (h.12).

Động lượng của $\mathcal{S}^*$, bản thân nó, thay đổi. Ta hãy thực hiện phép cân bằng động lượng giữa các thời điểm t và t + dt :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t) = \vec{p}_{\mathcal{S}}(t)$$

$$\vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t+\mathrm{d}t) = \vec{p}_{\mathcal{S}}(t+\mathrm{d}t) + \delta m_2 v_2 \vec{e}_x - \delta m_1 v_1 \vec{e}_x .$$

vì $\vec{p}_{\mathcal{S}}$ không đổi nên :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}}(t+\mathrm{d}t) = \vec{p}_{\mathcal{S}}(t)$$

và $\vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t) = (\delta m_2 v_2 - \delta m_1 v_1)\vec{e}_x .$

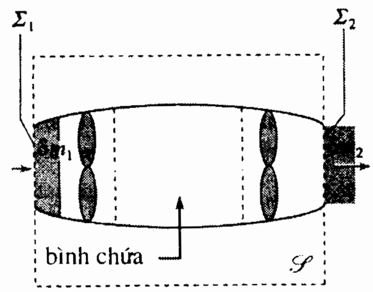
Thay các giá trị của δm vào :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}_{\mathcal{S}^*}(t) = (D_{\text{m ra}} v_2 - D_{\text{m k.khí}} v_1)\vec{e}_x \mathrm{d}t,$$

ta có :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}^*}}{\mathrm{d}t} = D_{\text{m.k.khí}}[(1+\alpha)v_2 - v_1]\vec{e}_x ,$$

(biểu thức mà ta sẽ có thể viết $\dfrac{\mathrm{D}\vec{p}}{\mathrm{D}t}$).



H.12. Ở thời điểm t + dt, $\mathcal{S}^*$ đồng nhất với $\mathcal{S}$ giảm δm_1 và tăng δm_2.

2.2.3. Lực đẩy của động cơ phản lực

Áp dụng định lý động lượng cho hệ kín $\mathcal{S}^*$:

$$\frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}^*}}{dt} = D_{\text{m.k.khí}}[(1+\alpha)v_2 - v_1]\vec{e}_x = \vec{R}_{\text{ngoài}\to\mathcal{S}^*}.$$

Các lực do ngoại vi tác dụng lên $\mathcal{S}^*$ là :

- các lực do khí quyển tác dụng lên thành ngoài bao gồm các lực áp suất và các lực cắt (hay lực ma sát) ;
- lực do máy bay tác dụng lên động cơ phản lực.

Vì các hệ $\mathcal{S}$ và $\mathcal{S}^*$ trùng nhau ở thời điểm t nên các lực tác dụng lên chúng bằng nhau, và ta gọi lực trực đối với hợp lực này là *lực đẩy* $\vec{F}_p$.

Vậy, đối với $\mathcal{S}$, ta có thể viết :

$$\vec{F}_{\text{máy bay}\to\mathcal{S}} + \vec{F}_{\text{khí quyển}\to\mathcal{S}} + \vec{F}_p = 0.$$

Ta cũng sẽ thu được một biểu thức giống hệt nếu động cơ phản lực là một hệ kín mà ngoài các lực $\vec{F}_{\text{máy bay}\to\mathcal{S}}$ và $\vec{F}_{\text{khí quyển}\to\mathcal{S}}$ ta sẽ tác dụng thêm vào $\mathcal{S}$ một lực bằng $\vec{F}_p$.

Vậy lực đẩy tương đương với một lực đặt vào động cơ phản lực, và lực này có biểu thức :

$$\vec{F}_p = -D_{\text{m. k. khí}}[(1+\alpha)v_2 - v_1]\vec{e}_x.$$

Nếu lưu ý rằng $\alpha << 1$, ta có :

$$F_p = |\vec{F}_p| \approx D_{\text{m.k.khí}}(v_2 - v_1).$$

Để làm ví dụ, ta hãy xét máy bay bay với $300\ \text{m.s}^{-1}$ ở độ cao lớn, tại đó khối lượng riêng của không khí là $0,3\ \text{kg.m}^{-3}$. Nếu mặt vào Σ_1 có một diện tích $1\ \text{m}^2$ thì $D_m = 90\ \text{kg.s}^{-1}$.

Với các giả thuyết của chúng ta, nếu $v_2 = 800\ \text{m.s}^{-1}$, thì lực đẩy của động cơ phản lực bằng $4,5.10^4$ N ("4,5 tấn"), và mỗi giây nó tiêu thụ 2,9 kg nhiên liệu.

<u>*Chú ý :*</u>

- *Giá trị của v_2 có thể thu được từ tỷ số nén, và các xem xét nhiệt động lực học. Có thể tham khảo lại các bài tập của ch. 8. H.Prépa. Nhiệt động lực học, năm thứ nhất.*
- *Ta đã đưa cả tuabin phản lực vào hệ mở $\mathcal{S}$. Ta cũng có thể coi hệ $\mathcal{S}'$ chỉ cấu tạo bởi chất lưu chứa trong động cơ phản lực. Nhưng trong trường hợp này, sự phân tích các ngoại lực sẽ khác đi :*

$$\vec{R}_{\text{ngoài}\to\mathcal{S}'} = \vec{F}_{\text{động cơ}\to\mathcal{S}'} + P_{\text{k.quyển}}(S_1 - S_2)\vec{e}_x.$$

Ta hãy viết điều kiện cân bằng cơ học của riêng động cơ (không có chất lưu) :

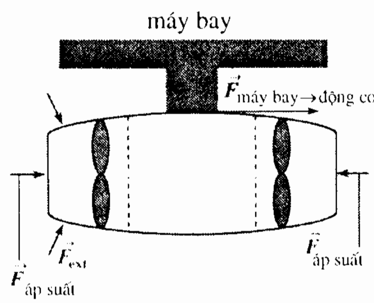
$$\vec{0} = -\vec{F}_{\text{động cơ}\to\mathcal{S}'} + \vec{F}_{\text{ngoài}} + \vec{F}_{\text{máy bay}\to\text{động cơ}},$$

trong đó $\vec{F}_{\text{ngoài}}$ biểu thị tổng hợp các lực do không khí tác dụng lên thành ngoài của động cơ phản lực (*h*.13).

Bằng cách phối hợp các cân bằng trên, ta thu được cùng một biểu thức cho lực đẩy, tương đương với một lực đặt vào động cơ :

$$\vec{F}_p = -(\vec{F}_{\text{máy bay}\to\text{động cơ}} + \vec{F}_{\text{k.quyển}\to\mathcal{S}'}) = -D_{\text{m.k khí}}[(1+\alpha)v_2 - v_1]\vec{e}_x.$$

Các nghiên cứu trên chứng tỏ rằng sự chọn hệ, đương nhiên nếu nó không làm thay đổi kết quả, có ảnh hưởng đến tính phức tạp của các phép tính và của các lập luận.



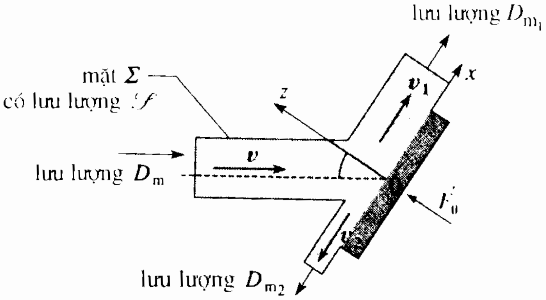
H.13. *Cân bằng các ngoại lực.*

Áp dụng 4

Tia nước trên một tấm phẳng

Một tia nước được hướng tới một tấm phẳng với một vận tốc v, một lưu lượng khối D_m và một góc tới α.

Các đại lượng vectơ sẽ được biểu thị trong cơ sở trực giao $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; $\vec{e}_z$ vuông góc với tấm và $\vec{e}_x$ nằm trong mặt phẳng tới, xác định bởi $\vec{e}_z$ và vận tốc của tia nước tới (h.14).



H.14. *Tia nước tác dụng một lực trực đối với $\vec{F}_0$.*

Ta thừa nhận các giả thiết sau đây :

- *bỏ qua độ nhớt của nước : do vậy không có một mất mát cơ năng nào ;*
- *sau khi chạm vào tấm, vận tốc của nước vẫn tiếp tuyến với tấm ;*
- *tia nước và tấm được đặt dưới áp suất khí quyển.*
- *bỏ qua ảnh hưởng của trọng trường.*
- *tia nước tới tách ra thành hai tia một chiều mà các vận tốc đều nằm trong mặt phẳng tới.*

Hãy xác định :

a) *Các vận tốc v_1 và v_2 của các tia ló ;*

b) *lưu lượng khối D_{m_1} và D_{m_2} của chúng ;*

c) *lực đẩy. Ta có thể định nghĩa lực đẩy như là lực đối của lực phụ $\vec{F}_0$ tác dụng vào để giữ cho tấm nằm yên.*

a) Chất lưu là lý tưởng và dòng chảy là không đổi trong hệ quy chiếu nghiên cứu.

Vậy ta có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI cho mỗi đường dòng. Vì áp suất bên ngoài ở mọi nơi đều bằng áp suất khí quyển nên vận tốc của hai tia nước ló bằng nhau và bằng $v : \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| \approx \|\vec{v}\| = v$.

b) Ta hãy xét hệ mở $\mathscr{S}$ cấu tạo bởi tấm và bởi chất lỏng nằm giữa một tiết diện của tia tới và một tiết diện của mỗi tia ló. Vì dòng chảy là không đổi nên động lượng chứa trong $\mathscr{S}$ là hằng số.

$\delta m = D_m dt$, $\delta m_1 = D_{m_1} dt$ và $\delta m_2 = D_{m_2} dt$ biểu thị các lượng nước đi qua các biên giới của $\mathscr{S}$ trong khoảng thời gian nguyên tố dt.

Ta hãy xét hệ $\mathscr{S}^*$ trùng với $\mathscr{S}$ ở thời điểm t và thực hiện phép cân bằng động lượng đối với $\mathscr{S}^*$ giữa hai thời điểm t và $t + dt$.

Ở thời điểm t : $\vec{p}_{\mathscr{S}^*}(t) = \vec{p}_{\mathscr{S}}(t)$.

Ở thời điểm $t + dt$:

$$\vec{p}_{\mathscr{S}^*}(t + dt) = \vec{p}_{\mathscr{S}}(t + dt) - \delta m v(\sin\alpha\, \vec{e}_x - \cos\alpha\, \vec{e}_z)$$
$$+ (\delta m_1 v - \delta m_2 v)\vec{e}_x$$

Trong chế độ không đổi $\vec{p}_{\mathscr{S}}(t) = \vec{p}_{\mathscr{S}}(t + dt)$, từ đó :

$$\vec{p}_{\mathscr{S}^*}(t + dt) - \vec{p}_{\mathscr{S}^*}(t) = -D_m v \cos\alpha\, dt\, \vec{e}_z$$
$$+[-D_m v \sin\alpha + D_{m_1} v - D_{m_2} v]\, dt\, \vec{e}_x,$$

hay là :

$$\frac{d\vec{p}_{\mathscr{S}^*}}{dt} = -D_m \cos\alpha\, \vec{e}_z + [-D_m \sin\alpha + D_{m_1} - D_{m_2}]v\vec{e}_x$$
$$= \vec{F}_0 + \vec{F}_{\text{áp suất}}.$$

- Vì áp suất bằng áp suất khí quyển tại mọi điểm ở biên giới của $\mathscr{S}$ **(chính vì lý do này mà ta đã chọn cách đưa tấmvào hệ)**, nên tổng hợp các lực áp suất bằng không.
- Bây giờ ta hãy xét sự cân bằng của riêng tấm :

$$\vec{O} = \vec{F}_{\text{nước}\to\text{tấm}} + \vec{F}_{\text{k.khí}\to\text{tấm}} + \vec{F}_0$$

Vì các lực cắt không có mặt (chất lỏng không nhớt) nên tác dụng của tấm lên nước sẽ vuông góc với tấm cũng như tác dụng của các lực áp suất khí quyển : vậy $\vec{F}_0$ cũng vuông góc với tấm. Khi đó ta suy ra sự cân bằng động lượng :

$D_m \sin\alpha = D_{m_1} - D_{m_2}$ với $D_m = D_{m_1} + D_{m_2}$,

hay là : $\dfrac{D_{m_1}}{D_m} = \dfrac{1 + \sin\alpha}{2}$ và $\dfrac{D_{m_2}}{D_m} = \dfrac{1 - \sin\alpha}{2}$.

c) Từ phép cân bằng động lượng, ta cũng rút ra :

$\vec{F}_0 = -D_m v \cos\alpha\, \vec{e}_z$, từ đó : $\vec{F}_{\text{đẩy}} = D_m v \cos\alpha\, \vec{e}_z$.

▶ **Để luyện tập : BT 2 và 3**

3 Các cân bằng mômen động lượng và động năng

3.1. Định lý vô hướng về mômen động lượng (nhắc lại)

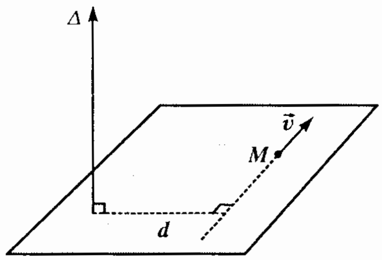
3.1.1. Mômen động lượng đối với một trục

Mômen động lượng của một chất điểm đối với một trục $\Delta(0, \vec{e}_\Delta)$ bằng :

$$L_\Delta = \vec{e}_\Delta.(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}).$$

Trong các tọa độ trụ trục Δ : $L_\Delta = mr^2\dot{\theta}$.

Nếu $\vec{v}$ vuông góc với trục Δ (*h*.15) : $L_\Delta = \varepsilon\, m v d$.



H.15. *Mômen động lượng đối với trục* Δ : $L_\Delta = \varepsilon\, m d v$.

$\varepsilon = +1$ *nếu M "quay" xung quanh trục* Δ *theo chiều dương (trường hợp hình vẽ).*

• Mômen động lượng của một hệ vật chất bất kỳ đối với trục Δ bằng tổng các mômen động lượng của các phần tử của hệ.

Nếu hệ là một vật rắn quay xung quanh trục Δ : $L_\Delta = J_\Delta\omega$.

• Trong các tọa độ trụ, mômen động lượng riêng tại một điểm của một chất lỏng đang chảy :

$$l_\Delta = \rho\, r^2\dot{\theta}.$$

3.1.2 Phát biểu định lý

Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng đối với một trục cố định của một hệ vật chất bằng mômen tổng hợp của các *ngoại lực* đặt vào hệ đối với trục đó.

Nếu hệ quy chiếu nghiên cứu là phi Galilé thì ta phải thêm vào các ngoại lực các lực quán tính.

3.2. Định lý về động năng (nhắc lại)

3.2.1. Động năng

• Động năng của một chất điểm bằng : $\mathscr{E}_K = \dfrac{1}{2}mv^2$.

• Động năng của một hệ vật chất bất kỳ bằng tổng các động năng của các phần tử của hệ.

• Nếu hệ là một vật rắn quay xung quanh một trục *cố định* Δ :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

• Động năng *riêng* tại một điểm của một chất lỏng đang chảy bằng :

$$e_K = \frac{1}{2}v^2$$

3.2.2. Phát biểu định lý

Đạo hàm theo thời gian của động năng của một hệ vật chất bằng công suất của các ngoại lực và nội lực.

• Công suất của một lực đặt vào một điểm mà vận tốc bằng $\vec{v}$, là $\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v}$.

• Trong trường hợp một vật rắn, công suất của các nội lực bằng không.

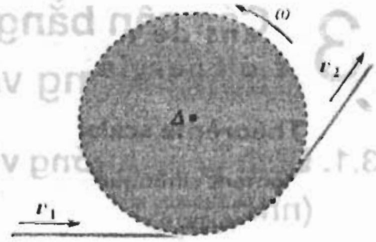
• Đối với một vật rắn quay xung quanh một trục cố định Δ, công suất của các lực mà mômen đối với Δ là $\mathscr{M}_\Delta$, bằng :

$$\mathscr{P} = \mathscr{M}_\Delta\omega.$$

3.3. Ví dụ : nghiên cứu một tuabin

3.3.1. Mô tả mô hình

Một tuabin, được một tia nước khởi động, quay xung quanh trục cố định Δ của nó với vận tốc góc ω (*h*.16).



H.16. *Tuabin bị kéo bởi một tia nước.*

Những giả thiết và ký hiệu

• Ta hiểu mômen động lượng hay mômen của các lực là các mômen đối với trục quay Δ.

• Tia tới và tia ló là một chiều và có bề dày không đáng kể. Các tia này đi vào và đi ra tiếp tuyến với một vòng tròn trục Δ và bán kính a. Lưu lượng khối của nước là D_m, vận tốc của tia tới bằng $\vec{v}_1$ (độ lớn v_1) và vận tốc của tia ló bằng $\vec{v}_2$ (độ lớn v_2). Giá trị của v_1 đã biết, song của v_2 phụ thuộc vào ω.

• Mômen động lượng đối với Δ của tuabin và của nước mà tuabin chứa bằng $J\omega$. Giả thiết J là hằng số.

• Máy do tuabin kéo và các ma sát ở trên trục tác dụng một mômen *cản* có giá trị tuyệt đối Γ. Giả thiết Γ không đổi, không phụ thuộc vào chế độ làm việc.

• Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

3.3.2 Phép cân bằng mômen động lượng

Ta hãy xét hệ *mở* $\mathcal{S}$, cấu tạo bởi tuabin và chất lỏng chứa ở giữa tiết diện vào Σ_1 và tiết diện ra Σ_2, cùng với hệ kín $\mathcal{S}^*$ trùng phùng ở thời điểm t (*h*.17).

Sự lựa chọn hệ như thế là có lý do vì nó sẽ cho phép ta áp dụng một cách khá đơn giản định lý về mômen động lượng. Thực vậy, vì hệ hoàn toàn chịu áp suất ở bên ngoài, đồng đều, nên mômen của các lực áp suất bằng không. Hơn nữa, ta lại không biểu thị các *nội lực* tương tác giữa tia nước và tuabin.

Trong khoảng thời gian nguyên tố dt, một khối lượng $\delta m = D_m dt$ nước đi vào Σ_1 với một mômen động lượng :

$$\delta L_1 = \delta m v_1 a \; ;$$

và một khối lượng bằng thế đi ra khỏi Σ_2 với một mômen động lượng :

$$\delta L_2 = \delta m v_2 a \, .$$

• Ta hãy thực hiện với $\mathcal{S}^*$ một phép cân bằng mômen động lượng giữa hai thời điểm t và $t + dt$:

$$L_{\mathcal{S}^*}(t) = L_{\mathcal{S}}(t) \; ;$$

$$L_{\mathcal{S}^*}(t+dt) = L_{\mathcal{S}}(t+dt) - D_m v_2 \, a dt + D_m v_1 \, a dt \; ;$$

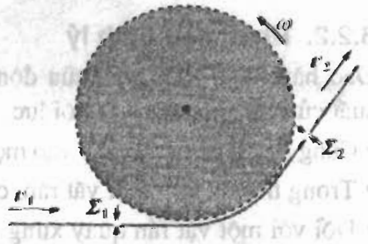
$$L_{\mathcal{S}}(t) = J\omega(t) \text{ và } L_{\mathcal{S}}(t+dt) = J\omega(t+dt) \, ,$$

từ đó :

$$L_{\mathcal{S}^*}(t+dt) - L_{\mathcal{S}^*}(t) = -D_m a(v_1 - v_2)dt + J[\omega(t+dt) - \omega(t)] \, ,$$

hay là :

$$\frac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt} = -D_m a(v_1 - v_2) + J\frac{d\omega}{dt} \, .$$



H.17. *Hệ mở $\mathcal{S}$ được cấu tạo bởi tuabin và nước nằm giữa Σ_1 và Σ_2.*

• Bây giờ ta áp dụng định lý mômen động lượng cho *hệ kín* $\mathcal{S}^*$:

$$\frac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt} = \mathcal{M}_{\text{ngoài} \to \mathcal{S}}$$

Mômen đối với Δ của các ngoại lực áp suất bằng không nên ta thu được phương trình vi phân :

$$\frac{dL_{\mathscr{S}^*}}{dt} = -D_m a(v_1 - v_2) + J\frac{d\omega}{dt} = -\Gamma \ .$$

• Dấu "– " trước Γ dựa vào đặc tính cản của mômen : phương trình này do vậy chỉ có ý nghĩa với $\omega > 0$.

• Thực ra, v_2 phụ thuộc vào tương tác giữa tia nước và tuabin. Vậy ta phải có các giả thiết phụ để thu được nmột phương trình vi phân của hàm số $\omega\ (t)$.

3.3.3. Phép cân bằng cơ năng

Một giả thiết về năng lượng mất mát do các ma sát sẽ cho phép ta xác định v_2 theo hàm số của ω, Γ và v_1. Thực vậy, định lý động năng áp dụng cho $\mathscr{S}^*$ viết là :

$$\mathscr{E}_{K\mathscr{S}^*}(t + dt) - \mathscr{E}_{K\mathscr{S}^*}(t) = (\mathscr{P}_{\text{ngoài}} + \mathscr{P}_{\text{trong}})dt$$

Ở đây công suất của các ngoại lực là :

$$\mathscr{P}_{\text{ngoài}} = -\Gamma\omega \ .$$

Công suất của các nội lực không phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Nếu ta đứng trong hệ quy chiếu của tuabin thì các lực do nước tác dụng lên tuabin đặt tại các điểm có vận tốc bằng không. Công suất của các nội lực chỉ giới hạn ở công suất của các lực nhớt :

$$\mathscr{P}_{\text{trong}} = \mathscr{P}_{\text{nhớt}} \text{ với } \mathscr{P}_{\text{nhớt}} < 0 \ .$$

Ta hãy thực hiện phép cân bằng động năng cho $\mathscr{S}^*$:

$$\mathscr{E}_{K\mathscr{S}^*}(t+dt) - \mathscr{E}_{K\mathscr{S}^*}(t) = \frac{1}{2}D_m dt\, v_2^2 + \mathscr{E}_{K\mathscr{S}}(t+dt) - \frac{1}{2}D_m dt\, v_1^2 - \mathscr{E}_{K\mathscr{S}}(t) \ ;$$

$$\mathscr{E}_{K\mathscr{S}}(t+dt) - \mathscr{E}_{K\mathscr{S}}(t) = \frac{d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt} \ .$$

Vậy :

$$-\Gamma\omega + \mathscr{P}_{\text{nhớt}} = \frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) + J\omega\frac{d\omega}{dt} \ ,$$

hay là :

$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2\Gamma\omega}{D_m} - \frac{2J\omega}{D_m}\frac{d\omega}{dt} + 2\frac{\mathscr{P}_{\text{nhớt}}}{D_m} \ .$$

Từ nay, để cho đơn giản, ta sẽ bỏ qua sự mất mát năng lượng do tính nhớt sinh ra.

3.3.4. Phương trình vi phân của chuyển động của tuabin

Từ các phương trình rút ra từ hai phép cân bằng, ta có thể khử v_2, và thu được một phương trình vi phân theo $\omega\ (t)$:

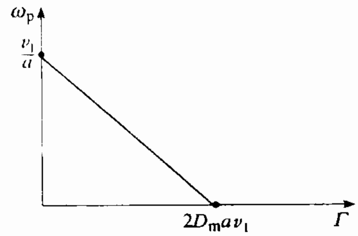
$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{2\Gamma\omega}{D_m} + \frac{2J\omega}{D_m}\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_1 - v_2 = \frac{\Gamma}{D_m a} + \frac{J}{D_m a}\frac{d\omega}{dt} \ .$$

Từ trên, ta suy ra $v_1 + v_2 = 2\omega a$ và cuối cùng :

$$J\frac{d\omega}{dt} - 2D_m a(v_1 - \omega a) + \Gamma = 0 .$$

Phương trình vi phân này được nghiệm đúng nếu $\omega > 0$.



H.18. *Chế độ không đổi : ngẫu lực cản và vận tốc quay.*

3.3.5. Nghiên cứu chế độ không đổi

• Ở chế độ không đổi , $\frac{d\omega}{dt} = 0$, và sau một vài phép tính ta thu được giá trị ω_p của ω :

$$\omega_p = \frac{v_1}{a}\left[1 - \frac{\Gamma}{2D_m a v_1}\right] \text{ nếu } \omega_p > 0 .$$

Nếu Γ quá lớn, biểu thức này cho một giá trị âm của ω_p, không tương thích với giả thiết theo đó ω ngược dấu với mômen cản.

Trong trường hợp này, mômen của các ngoại lực nhỏ hơn Γ (về giá trị tuyệt đối) (*h*.18).

$$\omega_p = 0 \text{ nếu } \Gamma > D_m a v_1 .$$

Trong trường hợp giới hạn $\Gamma = 0$, các vận tốc v_1 và v_2 bằng nhau. Chất lỏng bảo toàn động năng của nó và "không biết" tới tuabin.

• Công suất do tuabin cung cấp ở chế độ không đổi bằng :

$$\mathcal{P}_{\text{cung cấp}} = \Gamma\omega_p = \frac{\Gamma v_1}{a}\left[1 - \frac{\Gamma}{2D_m a v_1}\right]$$

hay còn là (*h*.19)

$$\mathcal{P}_{\text{cung cấp}} = 2D_m a\omega_p(v_1 - \omega_p a) .$$

Công suất này là cực đại nếu $\omega_p = \frac{v_1}{2a}$ và $\Gamma = v_1 D_m a$, điều này tương ứng với $v_2 = 0$.

Công suất cung cấp đúng là cực đại nếu chất lỏng mất toàn bộ động năng ban đầu của nó. Vì vậy chúng ta đã bỏ qua sự mất mát năng lượng nên tình huống này tương ứng với một hiệu suất tối ưu về mặt năng lượng bằng 100%

3.3.6. Chế độ chuyển tiếp

Ta hãy đặt $\tau = \frac{J}{2D_m a^2}$.

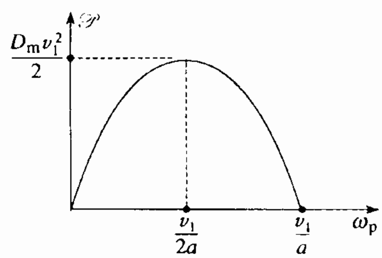
Phương trình vi phân theo ω (t) trở thành :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega - \omega_p}{\tau} = 0 .$$

Nếu ở thời điểm ban đầu vận tốc quay bằng không, thì nghiệm là :

$$\omega = \omega_p\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right],$$

trong đó τ biểu thị thời gian đặc trưng của sự thiết lập chế độ không đổi.

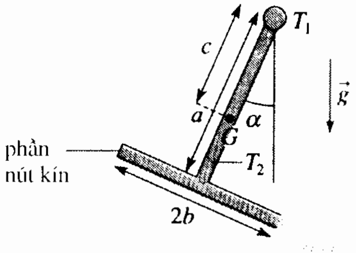


H.19. *Chế độ không đổi : Công suất và vận tốc quay.*

Áp dụng 5

Cân bằng của một cái ống

Một cái ống T_1 có thể quay tự do xung quanh trục nằm ngang Δ của nó. Ống này cung cấp nước cho một ống T_2, hình chữ "T", hàn vào T_1. Đầu của một trong các nhánh của T được nút lại, nước chảy ra ở nhánh kia (h.20)



H.20. *Góc α phụ thuộc vào lưu lượng.*

Theo hàm của các kích thước của T_2, hãy xác định giá trị của góc α khi có cân bằng. Bằng cách nêu ra các lý do, ta có thể đưa ra các giả thiết đơn giản hóa.

Các dữ kiện :

khối lượng của ống $T_2 : m_1 = 200$ g ;

các kích thước của $T_2 : a = 1{,}0$ m và $b = 20$ cm ;

khoảng cách từ tâm quán tính G của T_2 đến trục quay : $c = 64$ cm ;

tiết diện (đều) của $T_2 : S = 1{,}0$ cm^2 ;

khối lượng riêng của nước : ρ ;

lưu lượng khối : $D_m = 0{,}20$ kg.s^{-1}.

Ta sẽ giả sử các dòng chảy là một chiều và có hình sợi chỉ (chiều dày không đáng kể).

Ta hãy xét hệ mở $\mathcal{S}$ cấu tạo bởi ống T_2, và bởi nước mà ống chứa, cùng với hệ kín trùng phùng $\mathcal{S}^*$ ở thời điểm t. Σ_1 là tiết diện vào (ở chỗ nối giữa T_1 và T_2) và Σ_2 là tiết diện ra.

Ống đang quay xung quanh Δ, ta sẽ thực hiện một phép cân bằng mômen động lượng.

Các tác dụng ở bên ngoài lên $\mathcal{S}^*$ là :

• trọng lực, tương đương với một lực $m\vec{g}$ đặt ở tâm quán tính G. Khối lượng nước chứa trong $\mathcal{S}$ là $m_2 = \rho S(a+2b)$ và mômen đối với trục quay Δ của các lực trọng trường là $\mathcal{M} = -(m_1 + m_2)gc\sin\alpha$;

• áp suất : hệ $\mathcal{S}$ chịu áp suất bao quanh trên toàn bộ mặt ngoài của hệ, trừ tiết diện vào Σ_1, tại đó áp suất cao hơn.

Tổng hợp của các lực áp suất không bằng không, nhưng vì lực do áp suất dư tại Σ_1 được đặt trên trục quay Δ, nên mômen của các lực áp suất đối với Δ bằng không ;

• tác dụng của T_1, mà mômen đối với Δ bằng không.

Định lý mômen động lượng viết $\dfrac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt} = \mathcal{M}$.

Ta hãy xác định $\dfrac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt}$ bằng một phép cân bằng mômen động lượng giữa hai thời điểm gần nhau.

Nước thoát ra với một vận tốc $v = \dfrac{D_m}{\rho S}$.

$\delta m = D_m dt$ là khối lượng của nước đi vào $\mathcal{S}$ trong thời gian dt.

Mômen động lượng riêng bằng không đối với nước đi vào, và bằng av đối với nước đi ra.

Ở thời điểm t : $L_{\mathcal{S}^*}(t) = L_{\mathcal{S}}(t)$.

Ở thời điểm $t + dt$:

$$L_{\mathcal{S}^*}(t+dt) = L_{\mathcal{S}}(t+dt) + D_m dt(av - 0)$$

Lúc cân bằng, $L_{\mathcal{S}}(t) = L_{\mathcal{S}}(t+dt)$ và do vậy $\mathcal{M} = D_m av$.

Từ đó $-[m_1 + \rho S(a+2b)]gc\sin\alpha = \dfrac{D_m^2 a}{\rho S}$ hay :

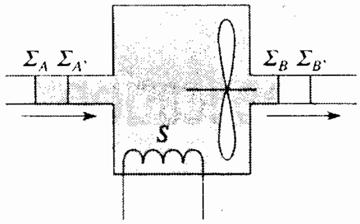
$$\sin\alpha = -A = -\frac{D_m^2 a}{\rho Sgc[m_1 + \rho S(a+2b)]} \text{ nếu } A < 1.$$

Nếu lưu lượng quá lớn, $A > 1$, và ống quay xung quanh Δ mà không có thể có vị trí cân bằng nào.

Áp dụng bằng số : $\alpha = 11^{\circ}$.

▶ **Để luyện tập : BT 4**

4 Các phép cân bằng entanpi và entropi



H.21. *Giữa các tiết diện Σ_A và Σ_B, chất lỏng có thể trao đổi năng lượng dưới dạng công có ích và dưới dạng truyền nhiệt.*

4.1. Các giả thiết và ký hiệu

Ta hãy áp dụng các nguyên lý nhiệt động học cho một chất lỏng chảy trong một ống dẫn. Để đơn giản hóa, ta giả thiết dòng chảy là một chiều và chỉ có thế năng vĩ mô là do trọng lực.

Gọi $\mathcal{S}$ là hệ mở được cấu tạo bởi chất lỏng nằm giữa hai tiết diện của ống Σ_A và Σ_B, và $\mathcal{S}^*$ là hệ kín trùng phùng ở thời điểm t.

Ở thời điểm $t + dt$, hệ kín $\mathcal{S}^*$ nằm ở giữa hai tiết diện Σ_A và Σ_B (*h*.21).

Chất lỏng nằm trong trạng thái *A* giữa Σ_A và $\Sigma_{A'}$, và trong trạng thái *B* giữa Σ_B và $\Sigma_{B'}$. Ta hãy ký hiệu P_A, P_B, v_A, v_B v.v... là các đại lượng tương ứng với các trạng thái *A* và *B*.

4.2. Các sự trao đổi năng lượng

Theo nguyên lý thứ nhất nhiệt động học, đối với hệ kín $\mathcal{S}^*$:

$$\Delta\mathcal{E}_{\mathcal{S}^*} = W + Q \quad \text{với } \mathcal{E} = U + \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p,$$

trong đó *W* là công do $\mathcal{S}^*$ nhận được và *Q* là năng lượng mà $\mathcal{S}^*$ nhận được bằng truyền nhiệt.

Tương ứng với nội năng *U* có nội năng riêng *u*.

Tương ứng với động năng vĩ mô $\mathcal{E}_K$ có động năng riêng :

$$e_K = \frac{1}{2}v^2.$$

Tương ứng với thế năng vĩ mô $\mathcal{E}_p$ có thế năng riêng e_p. Vì thế năng là thế năng của trọng trường nên :

$$e_p = gz \text{ với } z \text{ là độ cao}$$

$\mathcal{S}^*$ có thể nhận từ bên ngoài năng lượng bằng truyền nhiệt *Q* (dẫn nhiệt và bức xạ) ; gọi $\mathcal{P}_{th}$ là công suất nhiệt. $\mathcal{S}^*$ cũng có thể nhận một công *W* của các lực không dẫn xuất từ $\mathcal{E}_p$, công này có thể được phân tích thành :

- công "có ích", do một máy cung cấp (máy nén, cánh quạt...). Gọi $\mathcal{P}_u$ là công suất cơ học có ích, còn gọi là công suất *chỉ định* $\mathcal{P}_i$;
- công của các lực áp suất ở thượng lưu và ở hạ lưu.

Chú ý : Công suất của các **nội lực** *nhớt không được tính đến trong phép cân bằng năng lượng này.*

4.3. Phép cân bằng năng lượng đối với $\mathcal{S}^*$

4.3.1. Độ biến thiên năng lượng của $\mathcal{S}^*$

Ta hãy thực hiện một phép cân bằng năng lượng đối với $\mathcal{S}^*$ giữa hai thời điểm gần nhau :

- ở thời điểm t : $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^*}(t) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(t)$;
- ở thời điểm $t + dt$: $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^*}(t + dt) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(t + dt) + \delta\mathcal{E}_B - \delta\mathcal{E}_A$.

Ta sử dụng tính quảng tính của năng lượng $\mathcal{E}$ và ký hiệu $\delta\mathcal{E}_B$ là năng lượng của phần tử chất lỏng có khối lượng δm_B đã đi ra qua tiết diện Σ_B trong dt, và $\delta\mathcal{E}_A$ là năng lượng của phần tử chất lỏng có khối lượng δm_A, đã đi vào qua tiết diện Σ_A trong dt.

Các độ biến thiên của $\mathscr{E}_{\mathscr{S}^*}$ và $\mathscr{E}_{\mathscr{S}}$ giữa t và $t + dt$ được liên kết với nhau bởi :

$$d\mathscr{E}_{\mathscr{S}^*} = d\mathscr{E}_{\mathscr{S}} + \delta\mathscr{E}_B - \delta\mathscr{E}_A,$$

hoặc, bằng cách đưa vào các năng lượng riêng và các lưu lượng tại A và tại B.

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}}}{dt} + \left(u_B + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B\right)D_{mB} - \left(u_A + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A\right)D_{mA}.$$

4.3.2. Công suất của các lực áp suất

Ta hãy lấy lại phương pháp đã sử dụng trong thiết bị trao đổi nhiệt ở §1. Ký hiệu S_A và S_B là diện tích của các tiết diện Σ_A và Σ_B. Nếu dòng chảy xảy ra theo chiều từ A tới B, thì công suất của các lực áp suất là dương tại A và là âm tại B.

Tổng lại, $\mathscr{P}_{\text{áp}} = P_A S_A v_A - P_B S_B v_B$ hay còn là : $\mathscr{P}_{\text{áp}} = \frac{P_A}{\rho_A} D_{mA} - \frac{P_B}{\rho_B} D_{mB}$.

4.3.3. Công suất có ích và entanpi riêng

Nguyên lý thứ nhất được diễn tả bởi sự cân bằng năng lượng : $\frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \mathscr{P}_{\text{th}} + \mathscr{P}_{\text{u}} + \mathscr{P}_{\text{áp}}$ hay là :

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}}}{dt} + \left(u_B + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B\right)D_{mB} - \left(u_A + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A\right)D_{mA} = \mathscr{P}_{\text{th}} + \mathscr{P}_{\text{u}} + \frac{P_A}{\rho_A}D_{mA} - \frac{P_B}{\rho_B}D_{mB}.$$

hay còn là, nếu đưa vào *entanpi riêng* $h = u + \frac{P}{\rho}$:

$$\mathscr{P}_{\text{th}} + \mathscr{P}_{\text{u}} = \left(h_B + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B\right)D_{mB} - \left(h_A + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A\right)D_{mA} + \frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}}}{dt}$$

Vậy ta có thể không cần dẫn một cách tường minh công của các lực áp suất ở thượng lưu và hạ lưu nữa bằng cách sử dụng hàm *entanpi riêng*.

4.4. Phép cân bằng entanpi đối với một dòng chảy không đổi

4.4.1. Công suất cơ học có ích và công suất nhiệt

Vả lại nếu dòng chảy là *không đổi* thì các lưu lượng khối đều bằng nhau :

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathscr{S}}}{dt} = 0.$$

Trong trường hợp một dòng chảy *không đổi* một chiều, công suất cơ học có ích và công suất nhiệt do hệ nhận được giữa hai điểm A và B biểu thị một cách đơn giản bằng hàm entanpi riêng $h = u + \frac{P}{\rho}$.

$$\mathscr{P}_{\text{th}} + \mathscr{P}_{\text{u}} = \left[(h_B - h_A) + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)\right]D_{\text{m}}.$$

Chú ý :

- *Sự vận hành của một chiếc máy không bao giờ hoàn toàn không đổi, mà theo chu kì : chẳng hạn một chiếc cánh quạt đang chuyển động, và sau mỗi vòng nó trở lại tại cùng một vị trí. Biểu thức trên là có hiệu lực với điều kiện phải lấy các giá trị trung bình của công suất, của lưu lượng, của h và của v.*

• *Hệ thức trên không đưa ra một giả thiết nào về độ nhớt của chất lỏng, cũng như về tính thuận nghịch của sự biến đổi của chất lỏng.*

• *Ta có thể dễ dàng mở rộng hệ thức trên cho một hệ mở gồm nhiều hơn hai lối vào/ra, chẳng hạn như thiết bị trao đổi nhiệt đã được nghiên cứu ở đầu chương. Ta hãy đánh dấu các cửa này bằng chỉ số i. Với mỗi lối vào/ra, được gán cho một lưu lượng có dấu dương đối với một lối vào và có dấu âm đối với một lối ra, một entanpi riêng, một vận tốc v.v... Bằng cách sử dụng lại các phương pháp như trên, ta thu được :*

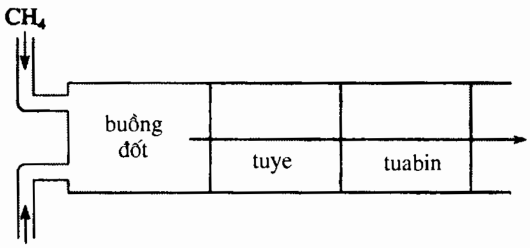
$$\mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u = \sum_i D_{mi}\left(h_i + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i\right) \text{ và } \sum_i D_{mi} = 0\,.$$

Áp dụng 6

Sự cân bằng của một tuabin khí

Một tuabin khí được cung cấp một hỗn hợp đồng nhất mêtan và không khí mà tỷ lệ theo thể tích là CH_4 : 5% ; O_2 : 19% *và* N_2 : 76%.

Hỗn hợp ban đầu có vận tốc không đáng kể nằm trong các điều kiện khí quyển (P_0, T_0). *Hỗn hợp được nén lại rồi đưa vào buồng đốt. Hỗn hợp khí từ đó ra được tăng tốc trong một ống tuye, sau đó tác động làm cho một tuabin quay trước khi bị tống ra ngoài với một vận tốc* v_1, *ở nhiệt độ* T_1 *và áp suất* P_1 *(h. 22)*



H.22. *Sơ đồ một tuabin khí.*

Hãy xác định công suất cơ học cung cấp cho tuabin, cũng như hiệu suất của động cơ với các dữ kiện và các giả thiết sau đây :

• $T_0 = 298$ K ; $T_1 = 1100$ K ; $P_1 = P_0 = 1$ bar ; $v_1 = 20$ m.s^{-1} ;

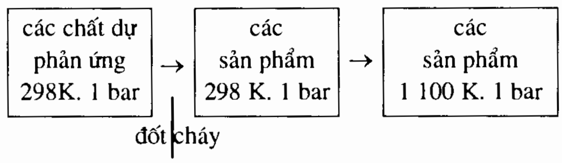
• *mức tiêu thụ* CH_4 : 16 g.s^{-1}.

• *mọi thành phần đều được coi là khí lý tưởng :* $C_p = 30$ J.K^{-1}.mol^{-1} ;

• *bỏ qua mọi trao đổi nhiệt với bên ngoài ;*

• *entanpi mol ở 298 K và dưới 1 bar :*
CH_4 : −75 kJ.mol^{-1} ; $H_2O_{hơi}$: − 242 kJ.mol^{-1} ; CO_2 : − 393 kJ.mol^{-1}.

Đối với một hỗn hợp ban đầu cấu tạo từ 1 mol CH_4, ta có thể xác định được độ biến thiên entanpi từ tư liệu trên *hình* 23.



H.23. *Phép tính* ΔH.

Phản ứng đốt cháy :

$$CH_2 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

bảo toàn lượng khí, cho 20 mol đối với một giây vận hành. Vậy nhiệt dung của hệ đang xét là $C_p = 600$ J.K^{-1}.

$\Delta H_{cháy} = -802$ kJ ;

$\Delta H_{toàn\ phần} = -802 + 0{,}60 \times 802 = -321$ kJ .

Hệ đang xét, ban đầu được cấu tạo bởi 1 mol CH_4, 3,8 mol O_2 và 15,2 mol N_2, có một khối lượng bằng 0,699 kg, vậy :

$$\Delta h = -0{,}97 \text{ MJ.kg}^{-1} \text{ và } D_m = 0{,}699 \text{ kg.s}^{-1}.$$

Phép cân bằng entanpi cho :

$$\mathcal{P}_u = D_m\left(\Delta h + \frac{1}{2}v_1^2\right), \text{ hay : } \mathcal{P}_u = -320 \text{ kW}.$$

Công suất nhiệt hao phí do sự đốt cháy ở 300 K của 1 mol CH_4 trong một giây sẽ là 802 kW. Ta có thể định nghĩa hiệu suất bởi hệ thức :

$$\eta = \frac{|P_u|}{|P_{cháy}|}\text{, nghĩa là } \eta = 40\%.$$

4.4.2. Công có ích và nhiệt trao đổi

Gọi w_u và q là công có ích riêng và nhiệt nhận riêng, nhận bởi một đơn vị khối lượng của chất lưu khi nó đi từ A qua B.

Trong một khoảng thời gian τ, nó đi vào máy một khối lượng $m = D_m\tau$, và nhận một công có ích $W_u = \mathscr{P}_u.\tau = w_u m$. Vậy $\mathscr{P}_u = D_m w_u$ và cũng thế $\mathscr{P}_{th} = D_m q$.

Khi đó ta có thể khử D_m trong biểu thức của phép cân bằng entanpi.

Công có ích riêng w_u (còn gọi là công riêng chỉ định w_i), và nhiệt lượng riêng nhận được q, nhận bởi chất lưu giữa hai tiết diện của một dòng chảy một chiều không đổi được biểu thị bởi :

$$q + w_u = (h_B - h_A) + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)$$

Ở giữa hai tiết diện gần nhau :

$$\delta q + \delta w_u = dh + \frac{1}{2}d(v^2) + gdz.$$

Ngoài trường hợp của các ống tuye ra, mà chức năng là cung cấp một tia phun ra với vận tốc lớn thì các độ biến thiên của v^2 luôn luôn hầu như không đáng kể. Điều này cũng xảy ra tương tự đối với các độ biến thiên của gz. Do vậy, phép cân bằng entanpi thường được rút gọn bằng thực nghiệm về $\delta q + \delta w_u = dh$.

Áp dụng 7

Mạch làm lạnh

Trong một ống bằng đồng, tiết diện không đổi, chiều dài L, có một dòng không khí nén nóng lưu chuyển với vận tốc vào cỡ m.s^{-1}. *Dòng không khí này đi vào ở A, có tọa độ O, ở nhiệt độ* θ_A, *và lại trở ra ở B, có hoành độ L, ở nhiệt độ* θ_B. *Các trao đổi nhiệt (qua ống) giữa không khí nóng có nhiệt độ* $\theta(x)$ *và môi trường bao quanh, có nhiệt độ* θ_0, *theo một quy luật tuyến tính. Công suất nhiệt* $d\mathscr{P}$ *do không khí nhường cho một đoạn ống dài dx là :*

$$d\mathscr{P} = K(\theta(x) - \theta_0)dx.$$

Các dữ kiện và giả thiết :

Không khí được coi là một khí lý tưởng :

$c_p = 1{,}0$ kJ.K^{-1}.kg^{-1}; $D_m = 0{,}010$ kg.s^{-1};

$K = 2{,}0$ W.K^{-1}.m^{-1}; $\theta_A = 200°C$; $\theta_0 = 20°C$.

$L = 10$m.

Hãy xác định nhiệt độ θ_B *cũng như nhiệt lượng trao đổi bởi 1 kg không khí nóng. Người ta sẽ xác nhận rằng độ biến thiên động năng là thực sự bỏ qua được.*

• Ta hãy thực hiện một phép cân bằng entanpi đối với một đoạn dài dx của ống :

$$D_m[h(x+dx) - h(x)] = d\mathscr{P}_{th} = -K(\theta(x) - \theta_0)dx,$$

từ đó suy ra phương trình vi phân $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\lambda}(\theta - \theta_0)$

với $\lambda = \frac{D_m c_p}{K} = 5$ m (chiều dài đặc trưng).

Dựa vào các điều kiện giới hạn, nghiệm là :

$$\theta = \theta_0 + (\theta_A - \theta_0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),$$

$$\theta_B = \theta(L), \text{ cho } \theta_B = 44°C.$$

• Ta hãy thực hiện phép cân bằng cho toàn bộ ống :

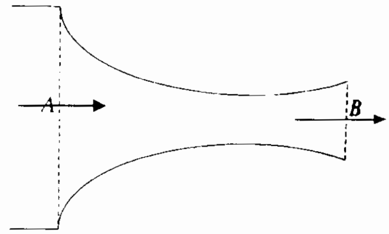
$h_B - h_A = c_p(\theta_B - \theta_A) = q$, cho $q = 156$ kJ.kg^{-1}.

• Với các vận tốc vào cỡ m.s^{-1}, độ biến thiên động năng riêng bằng vào cỡ J.kg^{-1}, điều này cho thấy nó có thể bỏ qua được so với Δh.

▶ **Để luyện tập : BT.6.**

4.5. Phép cân bằng entrôpi

4.5.1. Ví dụ về một ống tuye



H.24. *Ống tuye.*

Một ống tuye là một ống dẫn có tiết diện thay đổi, trong đó một chất khí giãn ra đồng thời được tăng tốc. Một nghiên cứu sơ lược về hình dạng của ống tuye sẽ được nêu ra trong *bài tập* 11.

Ta có thể giả thiết rằng trong chế độ không đổi, dòng chảy là một chiều và đoạn nhiệt. Ngoài ra, ta cũng giả thiết chất lưu là một chất khí lý tưởng mà tỷ số $\frac{c_p}{c_V}$ bằng γ.

Chất lưu được nhận vào tuye ở *A*, dưới áp suất P_A, ở nhiệt độ T_A, và có vận tốc không đáng kể. Chất lưu ra khỏi tuye ở *B*, dưới áp suất P_B (áp suất bên ngoài chẳng hạn), ở nhiệt độ T_B và có vận tốc v_B (*h*.24).

Vì chất khí là lý tưởng nên phép cân bằng entanpi giữa *A* và *B* được viết :

$$0 = h_B - h_A + \frac{1}{2}v^2 = c_p(T_B - T_A) + \frac{1}{2}v_B^2,$$

(người ta có thể chứng thực rằng độ biến thiên của gz là bỏ qua được trước mọi số hạng khác), từ đó :

$$v_B = \sqrt{2c_p(T_B - T_A)}.$$

Bằng cách sử dụng hệ thức ROBERT-MAYER, $C_{p\,mol} - C_{v\,mol} = R$, ta có thể biểu thị c_p theo hàm của khối lượng phân tử *M* của tỷ số γ của chất khí.

$$c_p = \frac{R}{M}.\frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Một phép cân bằng entrôpi sẽ cho phép ta xác định được T_B.

Ta hãy thực hiện một phép cân bằng entrôpi S cho hệ $\mathscr{S}^*$ giữa hai thời điểm gần nhau :

- ở thời điểm t : $S_{\mathscr{S}^*}(t) = S_{\mathscr{S}}(t)$;
- ở thời điểm $t + dt$: $S_{\mathscr{S}^*}(t + dt) = S_{\mathscr{S}}(t + dt) + \delta S_B - \delta S_A$.

δS_B là entrôpi của phần tử chất lưu có khối lượng δm_B đi ra ở tiết diện Σ_B trong thời gian d*t*.

Nếu s là entrôpi riêng thì $\delta S_B = D_m s_B dt$. Tương tự $\delta S_A = D_m.s_A dt$.

Vậy ta có thể viết phương trình cân bằng entrôpi :

$$\frac{dS_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{dS_{\mathscr{S}}}{dt} + D_m(s_B - s_A).$$

Vì dòng chảy là không đổi nên entrôpi chứa trong $\mathscr{S}$ là một hằng số. Hơn nữa, năng lượng do $\mathscr{S}^*$ nhận bằng trao đổi nhiệt bằng không, nên độ biến thiên entrôpi giới hạn ở số hạng tạo ra :

$$\frac{dS_{\mathscr{S}^*}}{dt} = \frac{\delta S_{\text{tạo ra}}}{dt} = D_m(s_B - s_A).$$

- **Trường hợp 1 : dòng chảy đẳng entrôpi**

$S_{\text{tạo ra}} = 0$ và $s_B = s_A$. Đối với một khí lý tưởng $P_A\left(\frac{1}{\rho_A}\right)^\gamma = P_B\left(\frac{1}{\rho_B}\right)^\gamma$

hay $T_B = T_A\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Kết luận lại : $v_B = \sqrt{2c_pT_A\left(1 - \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$.

• **Trường hợp 2 : dòng chảy không đẳng entrôpi**

Nếu ta tính đến tính bất thuận nghịch của các phép biến đổi do các phần tử chất lưu thực hiện thì có sự tạo ra entrôpi ở bên trong ống tuye.

$s_B > s_A$, vậy $P_B v_B^{\gamma} > P_A v_A^{\gamma}$, hay còn là : $T_B > T_A\left(\dfrac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, hay là :

$$v_B < \sqrt{2c_pT_A\left(1-\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}.$$

Áp dụng 8

Sự giãn nở pôlitrôpic trong một ống tuye

Trong một ống tuye có không khí nén giãn nở. Các dữ kiện và các giả thiết như sau.

• *Không khí được coi như một chất khí lý tưởng, có nhiệt dung riêng ở áp suất không đổi* $c_p = 1{,}0\ \text{kJ.K}^{-1}$, *có tỷ số* $\gamma = 1{,}4$ *có khối lượng phân tử 29 g.*

• *Ở lối vào của tuye, vận tốc của nó là không đáng kể và ở trong trạng thái A :* $T_A = 600$ K và $P_A = 5{,}0$ bar.

• *Ở lối ra của tuye, áp suất của nó là* $P_B = 1$ bar .

• *Tiết diện của lối ra của tuye* $a = 1\ \text{cm}^2$.

1) *Sự giãn nở là đẳng entrôpi. Hãy xác định vận tốc đi ra và lưu lượng khối.*

2) *Người ta mô hình hóa tính bất thuận nghịch của sự giãn bởi :*

$$T\text{d}s = \lambda P\text{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

với $\lambda = 0{,}1$.

Hãy xác định lại vận tốc và lưu lượng

1) Theo nghiên cứu ở trên :

$$v = \sqrt{2c_pT_A\left(1-\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} = 665\ \text{m.s}^{-1}.$$

$$T_B = 379\ \text{K}$$

và $\rho_B = \dfrac{MP_B}{RT_B} = 0{,}92\ \text{kg.m}^{-3}$

Từ đó suy ra lưu lượng khối $D_m = \rho_B v a = 61\ \text{g.s}^{-1}$.

2) Hãy chứng tỏ rằng giả thiết giúp ta viết được $P\rho^{-k} = \text{cte}$ (giãn politrrôpic)

Cân bằng entrôpi :

$$T\text{d}s = \lambda P\text{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \text{d}u + P\text{d}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Chất khí là lý tưởng ; nếu M là khối lượng phân tử của nó thì :

$$\text{d}u = c_V\text{d}T = \frac{Mc_V}{R}\left(-\frac{P}{\rho^2}\text{d}\rho + \frac{1}{\rho}\text{d}P\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left(-\frac{P}{\rho^2}\text{d}\rho + \frac{1}{\rho}\text{d}P\right).$$

từ đó : $\dfrac{\text{d}P}{P} - k\dfrac{\text{d}\rho}{\rho} = 0$ với $k = \gamma - \lambda(\gamma-1)$.

Chỉ cần thay γ bằng k trong các biểu thức cho T_B và v.

Ta thu được :

$$k = 1{,}36\ ;\ T_B = 392\ \text{K}\ ;\ v = 465\ \text{m.s}^{-1};$$

$$\rho_B = 0{,}89\ \text{kg.m}^{-3};\ D_m = 57\ \text{g.s}^{-1}.$$

▶ **Để luyện tập : BT7**

4.5.2. Phép cân bằng cơ năng đối với một dòng chảy không đổi một chiều

Hàm entanpi riêng $h = u + \frac{P}{\rho}$ do vậy có thể được coi như một hàm của hai biến số trạng thái P và s, mà phương trình vi phân là $dh = \frac{1}{\rho}dP + Tds$ (*).

(*) *Ta nhớ lại rằng biểu thức này, không đưa ra một giả thiết nào về bản chất, thuận nghịch hay không của sự biến đổi thực hiện bởi chất lưu. Điều đó tương đương với sự khẳng định rằng có một hàm số trạng thái $h(P, s)$, với :*

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_s \text{ và } T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_P .$$

Ta hãy đồng nhất vi phân của hàm $h(P, s)$ và biểu thức của sự cân bằng entanpi :

$$dh = \frac{1}{\rho}dP + Tds = \delta q + \delta w_u - \frac{1}{2}d(v^2) - g dz .$$

Theo nguyên lý thứ hai, $Tds \geq \delta q$, ta có $\delta w_u \geq \frac{1}{2}d(v^2) + g dz + \frac{1}{\rho}dP$.

Vậy giữa hai điểm A và B của một dòng chảy :

$$w_u \geq \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) + \int_A^B \frac{1}{\rho}dP .$$

Để giải thích ý nghĩa của kết quả này, ta có thể coi công có ích được dùng để :

- tăng cơ năng của chất lưu : số hạng $\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)$;
- "trút" chất lưu từ trạng thái A sang trạng thái B ; số hạng $\int_A^B \frac{1}{\rho}dP$;
- bù lại phần năng lượng hao phí do nội ma sát nếu chất lưu là nhớt, điều này giải thích chiều của bất đẳng thức.

Ta sẽ có thể thiết lập trực tiếp biểu thức trên bằng cách thực hiện một phép cân bằng cơ năng.

4.5.3. Dòng chảy thuần khiết của một chất lỏng

Ta hiểu dòng chảy thuần khiết là một dòng chảy không có công có ích, nghĩa là không có máy. Đối với một chất lỏng, giả thiết không chịu nén, ta có thể đơn giản hóa biểu thức trên :

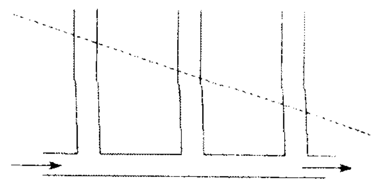
$$\int_A^B \frac{1}{\rho}dP = \frac{P_B - P_A}{\rho} .$$

Vì công có ích bằng không nên còn lại :

$$\left(\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + g z_A\right) - \left(\frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + g z_B\right) = \frac{\varpi}{\rho} \geq 0$$

Đại lượng ϖ, đồng nhất với một áp suất, gọi là *tổn hao áp suất*.

- Nếu chất lỏng không nhớt thì dòng chảy không tạo ra entrôpi, và sự tổn hao áp suất bằng không. Khi đó ta tìm lại được phương trình BERNOULLI .
- Nếu chất lỏng là nhớt, sự tổn hao áp suất là dương. Điều đó có ý nghĩa đặc biệt là ở vận tốc và độ cao bằng nhau, áp suất giảm từ thượng lưu về hạ lưu.



H.25. *Sự tổn hao áp suất trong một dòng chảy của chất lỏng thực không chịu nén trong một ống có tiết diện không đổi.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ CÁC HỆ MỞ VÀ CÁC HỆ KÍN

Một hệ là *kín* nếu nó không trao đổi vật chất với bên ngoài.

Ngược lại, một hệ *mở* có thể trao đổi vật chất với bên ngoài.

• Một hệ mở không được hạn định bởi một tập hợp xác định các hạt chất, mà bởi một biên giới gọi là *mặt kiểm tra* được chọn cố định.

• Một hệ kín, được hạn định bởi một tập hợp xác định các hạt vật chất. Biên giới Σ^* giới hạn một hệ kín gọi là *mặt chứa các hạt*, chuyển động trong hệ quy chiếu nghiên cứu : các điểm của Σ^* dịch chuyển với vận tốc cục bộ của chất lỏng.

Các định luật của cơ học và của nhiệt động lực học liên quan đến các hệ kín.

■ LƯU LƯỢNG ĐỐI LƯU CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG QUẢNG TÍNH

• Lưu lượng D_G qua một mặt Σ của đại lượng quảng tính G bằng số lượng của G đi qua Σ trong một đơn vị thời gian.

Ta gọi lưu lượng *đối lưu* là lưu lượng của G liên kết với sự vận chuyển vật chất.

• Trong trường hợp của một dòng chảy một chiều, lưu lượng đối lưu của một đại lượng quảng tính G được biểu thị theo hàm của lưu lượng khối và của đại lượng riêng g_m bởi $D_G = g_m D_m$.

Ví dụ, động năng riêng là $e_{K_m} = \frac{1}{2}v^2$, và lưu lượng động năng là $D = \frac{1}{2}D_m v^2$.

■ CÁC PHÉP CÂN BẰNG

Cho $\mathscr{S}$ là một hệ mở và $\mathscr{S}^*$ một hệ kín trùng phùng với $\mathscr{S}$ ở thời điểm t.

Đạo hàm theo thời gian của một đại lượng quảng tính liên quan đến $\mathscr{S}^*$ thu được từ một phép cân bằng giữa hai thời điểm gần nhau. Ví dụ, đối với động năng :

$$(\mathscr{P}_{\text{int}} + \mathscr{P}_{\text{ext}})\mathrm{d}t = \mathscr{E}_{\mathrm{K},\mathscr{S}^*}(t+\mathrm{d}t) - \mathscr{E}_{\mathrm{K},\mathscr{S}^*}(t) = \mathscr{E}_{\mathrm{K},\mathscr{S}}(t+\mathrm{d}t) - \mathscr{E}_{\mathrm{K},\mathscr{S}}(t) + \delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_2} - \delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_1},$$

với $\delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_1}$ là động năng của vật chất đi vào $\mathscr{S}$ trong $\mathrm{d}t$ và $\delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_2}$ là động năng của vật chất đi ra khỏi $\mathscr{S}$ trong $\mathrm{d}t$.

Ở chế độ không đổi, trạng thái của $\mathscr{S}$ là không thay đổi, và phép cân bằng được đơn giản hóa :

$$(\mathscr{P}_{int} + \mathscr{P}_{ext})\mathrm{d}t = \delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_2} - \delta\mathscr{E}_{\mathrm{K}_1}.$$

■ CÁC CÂN BẰNG ENTANPI

• Trong trường hợp của một dòng chảy *không đổi* một chiều, công suất cơ học có ích và công suất nhiệt do hệ nhận giữa hai điểm A và B, được biểu thị một cách đơn giản bằng hàm *entanpi riêng* $h = u + \frac{P}{\rho}$.

$$\mathscr{P}_{\text{th}} + \mathscr{P}_{\text{u}} = [(h_B - h_A) + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)]D_m.$$

• Công có ích riêng w_u (còn gọi là công riêng chỉ định w_i), và nhiệt lượng nhận riêng q do chất lưu nhận được giữa hai tiết diện của một dòng chảy một chiều không đổi được biểu thị bởi :

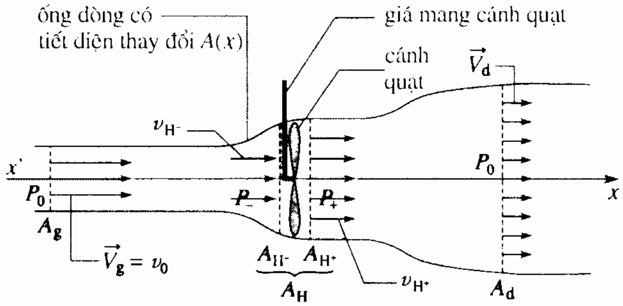
$$q + w_u = (h_B - h_A) + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A).$$

Bài tập có lời giải

Hiệu suất của một cánh quạt

Theo Mines-Ponts, 1988

Một cánh quạt gió mà chiều dày được bỏ qua, quay xung quanh một trục (Ox) cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Cánh quạt được đặt hoàn toàn trong không khí, đó là một chất lưu có khối lượng riêng ρ, giả thiết không chịu nén và có độ nhớt không đáng kể. Ở xa cánh quạt, chất lưu chuyển động với một vận tốc không đổi và đều, song song với trục quay (Ox) của cánh quạt. Ống dòng bao quanh cánh quạt có một tiết diện thẳng diện tích thay đổi $A(x)$.



Ta chấp nhận các giả thiết đơn giản hóa sau đây :

- ở bên ngoài ống dòng này, áp suất là đều và bằng P_0 ;
- vận tốc và áp suất của chất lưu là đồng đều trên một tiết diện thẳng của ống ;
- ở phía thượng lưu của cánh quạt, và ở khá xa, áp suất bằng P_0, vận tốc của chất lưu bằng $\vec{V}_g = v_g\vec{e}_x$, và tiết diện thẳng có một diện tích A_g ;
- ở phía hạ lưu của cánh quạt, và ở khá xa, áp suất bằng P_0, vận tốc của chất lưu bằng $\vec{V}_d = v_d\vec{e}_x$, và tiết diện thẳng có một diện tích A_d ;
- ở lân cận sát ngay cánh quạt, và ở hai phía của mặt phẳng của nó (lần lượt ở phía thượng lưu và hạ lưu) :

– các áp suất được ký hiệu bởi P_- và P_+ ;

– các tiết diện thẳng của ống dòng có một diện tích $A_{H^-} = A_{H^+} = A_H$;

– các vận tốc được ký hiệu bởi $v_{H^-}\vec{e}_x$ và $v_{H^+}\vec{e}_x$;

- các cuộn xoáy được giả thiết chỉ nằm quanh quẩn trong không gian giữa A_{H^-} và A_{H^+}.

1) Từ sự bảo toàn lưu lượng, hãy suy ra các hệ thức liên kết các diện tích và các vận tốc. Ta sẽ đặt $v_H = v_{H^-} = v_{H^+}$.

2) Liệu ta có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI cho một vài miền nào đó của dòng chảy ? Từ đó hãy suy ra một hệ thức liên kết P_+, P_-, v_g, v_d và ρ.

3) Hãy xác định bằng hai cách lực $\vec{F} = F\vec{e}_x$ do chất lưu tác dụng lên cánh quạt. Từ đó hãy suy ra v_0 theo hàm của v_g và v_d, sau đó F theo hàm của ρ, A_H, v_g và v_H.

4) Hãy xác định công suất $\mathcal{P}$ do chất lưu truyền cho cánh quạt.

Người ta đặt $v_H = v_g u$. Hãy xác định, với A_H và v_g đã cho :

- giá trị u_F của u làm cho F cực đại, và các biểu thức F_m và $\mathcal{P}_F$ tương ứng của lực và của công suất.
- giá trị $u_{\mathcal{P}}$ của u làm cho $\mathcal{P}$ cực đại, và các biểu thức $F_{\mathcal{P}}$ và $\mathcal{P}_m$ tương ứng của lực và của công suất.

Vẽ các đường cong $F(u)$ và $\mathcal{P}(u)$. Hãy bình luận.

5) Hãy định nghĩa hiệu suất năng lượng r của cánh quạt. Biểu thị r theo hàm của u và định rõ giá trị bằng số của hiệu suất cực đại r_m.

6) Người ta cho rằng có thể chế tạo được một cánh quạt có hiệu suất tối ưu.

Dữ kiện : $A_H = 3\ \text{m}^2$, $v_g = 10\ \text{m.s}^{-1}$ và $\rho = 1{,}2\ \text{kg.m}^{-3}$ (không khí khí quyển).

Hãy xác định lực do không khí tác dụng lên cánh quạt và công suất nhận được.

HƯỚNG DẪN

Rõ ràng là hệ thức BERNOULLI *không áp dụng được cho toàn bộ một đường dòng. Nếu có trường hợp này thì ta sẽ có $v_d = v_g$, $A_d = A_g$ và cánh quạt sẽ không trao đổi cả động lượng lẫn động năng với chất lưu. Ngược lại, có thể áp dụng hệ thức trên cho một số đoạn của đường dòng. Trước hết, ta hãy nêu ra mọi điều kiện để áp dụng được hệ thức đó.*

Ta có thể nhận định rằng chuyển động ở ngang mức của cánh quạt là độc lập với thời gian được không ? Chỗ nào là miền có cuộn xoáy ?

Câu hỏi tinh tế này sử dụng các kết quả của những câu hỏi trên. Có thể nên biểu thị lực này, một mặt, theo hàm của các áp suất P_+ và P_-, mặt khác, theo hàm của các vận tốc v_g và v_d.

Ta nên thực hiện một phép cân bằng cho đại lượng quảng tính nào để xác định một lực ?

LỜI GIẢI

1) Vì chất lưu là không chịu nén nên lưu lượng khối ($D_m = \rho A v$) có cùng một giá trị qua mọi tiết diện ; điều đó cho ta :

$$A_g v_g = A_{H^-} v_{H^-} = A_{H^+} v_{H^+} (= A_H v_H) = A_d v_d .$$

2) Ở phía thượng lưu (giữa A_g và A_{H^-}) và ở phía hạ lưu (giữa A_{H^+} và A_d) :

- dòng chảy là độc lập với thời gian. Ta cũng chú ý rằng nó cũng không có xoáy (không có cuộn xoáy) ;
- chất lưu là không chịu nén và không nhớt.

Như vậy, ta có thể áp dụng hệ thức BERNOULLI trong hai miền trên, đặc biệt là trên đường dòng trùng với trục đối xứng của dòng chảy :

- ở phía thượng lưu : $P_- - P_0 = \frac{1}{2}\rho(v_H^2 - v_g^2)$;
- ở phía hạ lưu : $P_+ - P_0 = \frac{1}{2}\rho(v_H^2 - v_d^2)$.

Từ đó : $P_+ - P_- = \frac{1}{2}\rho(v_g^2 - v_d^2)$

Ngược lại, rất khó để mô hình hóa được dòng chảy trong không gian giữa A_{H^-} và A_{H^+} .

Thực vậy, cũng như thế nếu ta đưa ra giả thiết chuyển động là không đổi $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ thì sẽ có một sự truyền năng lượng giữa chất lưu và cánh quạt (thực hiện được nhờ các cuộn xoáy). Vậy hệ thức BERNOULLI không thể áp dụng được trong miền này.

3) Phép tính thứ nhất

Cho một hệ mở $\mathscr{S}_1$ tạo bởi chất lưu nằm giữa hai mặt phẳng ở phía thượng lưu (A_{H^-}) và ở phía hạ lưu (A_{H^+}) rất gần cánh quạt.

Ta hãy thực hiện một phép cân bằng đối với động lượng của hệ kín $\mathscr{S}_1^*$ trùng phùng ở thời điểm t :

$\vec{p}_{\mathscr{S}_1^*}(t) = \vec{p}_{\mathscr{S}_1}(t)$ và $\vec{p}_{\mathscr{S}_1^*}(t + dt) = \vec{p}_{\mathscr{S}_1}(t + dt) + D_m dt(v_{ra} - v_{vào})\vec{e}_x$.

Ta biết $\vec{p}$ là không đổi đối với hệ mở $\mathscr{S}_1$ và rằng :

$$v_{ra} = v_{vào} = v_H .$$

Vậy $\frac{d\vec{p}_{\mathscr{S}_1^*}}{dt} = \vec{0}$, hay $\vec{F}_{pres \to \mathscr{S}_1} + \vec{F}_{cánh\ quạt \to \mathscr{S}_1} = \vec{0}$.

Biết các áp suất trên hai mặt của $\mathscr{S}$:

$$\vec{F}_{chất\ lưu \to cánh\ quạt} = -\vec{F}_{cánh\ quạt \to \mathscr{S}_1} = \vec{F}_{pres \to \mathscr{S}_1} = (P_- - P_+)A_H \vec{e}_x .$$

Phép tính thứ hai

Cho hệ mở $\mathscr{S}_2$ tạo bởi chất lưu nằm giữa hai mặt phẳng ở xa mang các chỉ số g và d.

Ta hãy thực hiện một phép cân bằng cho $\vec{p}$ đối với hệ kín $\mathscr{S}_2^*$:

$$\vec{p}_{\mathscr{S}_2^*}(t) = \vec{p}_{\mathscr{S}_2}(t) \text{ và } \vec{p}_{\mathscr{S}_2^*}(t + dt) = \vec{p}_{\mathscr{S}_2}(t + dt) + D_m dt(v_d - v_g)\vec{e}_x .$$

Vì $\vec{p}$ là không đổi với hệ *mở* $\mathcal{S}_2$, nên ta có thể viết :

$$\frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}_2^*}}{dt} = \vec{F}_{pres\to\mathcal{S}_2} + \vec{F}_{cánh\ quạt\to\mathcal{S}_2} = D_m(v_d - v_g)\vec{e}_x .$$

$\mathcal{S}_2$ nhúng chìm hoàn toàn trong môi trường có áp suất P_0, vậy $\vec{F}_{pres\to\mathcal{S}_2} = \vec{0}$ và :

$$\vec{F}_{c.lưu\to cánh\ quạt} = -\vec{F}_{cánh\ quạt\to\mathcal{S}_2} = D_m(v_g - v_d)\vec{e}_x .$$

Đồng nhất hai biểu thức của lực

$$D_m(v_g - v_d) = (P_- - P_+)A_H = \frac{1}{2}\rho A_H(v_g^2 - v_d^2),$$

từ đó $v_g + v_d = 2\dfrac{D_m}{\rho A_H} = 2v_H$, nghĩa là :

$$v_H = \frac{1}{2}(v_g + v_d) \text{ và } F = 2\rho A_H(v_g - v_H)v_H .$$

Nên thực hiện phép cân bằng cho đại lượng quảng tính nào để xác định được một công suất cơ học ?

Khi tìm hiểu một hàm số, và trước khi biểu diễn đồ thị, cần thiết phải cho miền xác định của nó. Các giới hạn của miền này có thể có bản chất toán học, hay vật lý : f(u) có thể được xác định một cách toán học đối với các giá trị của u không có ý nghĩa vật lý.

4) Ta hãy thực hiện một phép cân bằng động năng đối với hệ $\mathcal{S}_1^*$ được định nghĩa ở câu hỏi **3**).

Động năng của $\mathcal{S}_1$ là không đổi (chế độ không đổi), và động năng đi vào bằng động năng đi ra, vậy :

$$\frac{d\mathcal{E}_{K\mathcal{S}_1^*}}{dt} = \mathcal{P}_{pres} + \mathcal{P}_{cánh\ quạt} = 0$$

Công suất $\mathcal{P}$ do chất lưu cung cấp cho cánh quạt, ngược dấu với $\mathcal{P}_{cánh\ quạt}$, do vậy bằng :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{pres} = A_H v_H(P_- - P_+) = 2\rho A_H(v_g - v_H)v_H^2 .$$

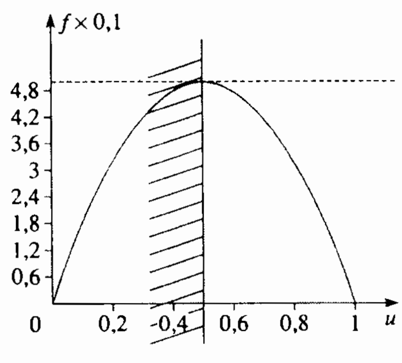
Bằng cách sử dụng biến số không thứ nguyên u :

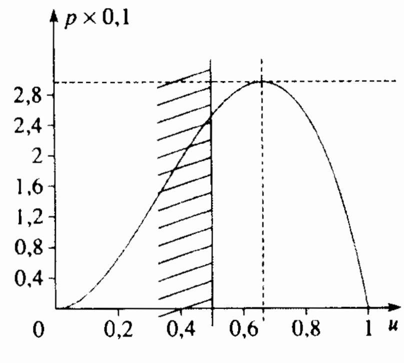
$$F = 2\rho A_H v_g^2 u(1-u) \text{ và } \mathcal{P} = 2\rho A_H v_g^3 u^2(1-u)$$

v_d là dương và $v_H = \dfrac{1}{2}(v_g + v_d) \geq \dfrac{1}{2}v_g$. Các hàm số $F(u)$ và $\mathcal{P}(u)$ chỉ được xác định với $u \geq \dfrac{1}{2}$ và $u < 1$.

Các đường cong vẽ được (với $\dfrac{1}{2} < u < 1$) tương ứng với :

$$f(u) = \frac{F(u)}{\rho A_H v_g^2} = 2u(1-u) \text{ và } p(u) = \frac{P(u)}{\rho A_H v_g^3} = 2u^2(1-u) .$$





• F là cực đại với $u = u_{F_m} = \frac{1}{2}$; $F_m = \frac{1}{2}\rho A_H v_g^2$; $\mathscr{P}_m = \frac{1}{4}\rho A_H v_g^3$.

• $\mathscr{P}$ là cực đại với $u = u_{\mathscr{P}_m} = \frac{2}{3}$; $F_m = \frac{4}{9}\rho A_H v_g^2$; $\mathscr{P}_m = \frac{8}{27}\rho A_H v_g^3$.

Chú ý :

• *Nếu* $u = u_F$, $v_d = 0$ *và* $A_g = \frac{1}{2}A_H$. *Toàn bộ động lượng của chất lưu được truyền cho cánh quạt. Do vậy lực đúng bằng lưu lượng vào của động lượng :* $F = D_m v_g = \frac{1}{2} r A_H v_g^2$.

• *Nếu u tăng quá* $\frac{1}{2}$, v_d *tăng và lượng động năng do mỗi phần tử chất lỏng truyền cho giảm ; nhưng, tiết diện vào tăng, lưu lượng tăng và tích số (động năng riêng bị mất × lưu lượng) đi qua một cực đại với* $u = \frac{2}{3}$.

Nói chung, hiệu suất được xác định bởi tỷ số giữa lượng "thu được" và lượng "bỏ ra" của cùng một đại lượng

Nếu không có cánh quạt thì lượng năng lượng bỏ ra trong một đơn vị thời gian, với một cái máy chiếm cùng một diện tích như cánh quạt sẽ là bao nhiêu ?

5) Nếu không có cánh quạt, không khí giữ nguyên vận tốc v_g và động năng riêng của nó bằng $\frac{1}{2}v_g^2$. Công suất bỏ ra (cung cấp) trên một máy cũng cồng kềnh như cánh quạt là bằng lưu lượng động năng qua diện tích A_H, nghĩa là :

$$\mathscr{P}_{\text{cung cấp}} = \frac{1}{2}D_m v_g^2 = \frac{1}{2}\rho A_H v_g^3$$

Khi đó hiệu suất bằng $r = \dfrac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_{\text{cung cấp}}} = 4u^2(1-u)$.

Hiệu suất cực đại $r_m = \frac{16}{27}$ thu được với $u = \frac{2}{3}$. Vì công suất cung cấp là một hằng số nên hiệu suất và công suất tỷ lệ với nhau.

6) $\mathscr{P} = 1{,}07$ kW với $F = 160$ N.

Bài tập

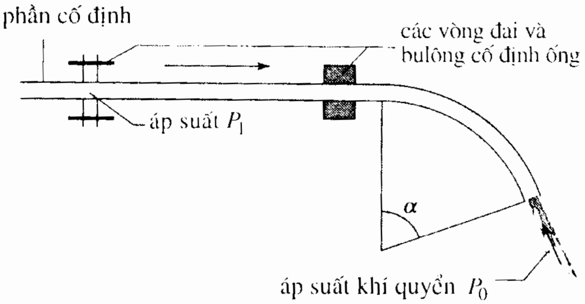
ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Đồng hồ đo khí

Khí mêtan là thành phần chủ yếu của khí thiên nhiên, có thể cho một năng lượng $Q_{mol} = 890$ kJ.mol^{-1} khi cháy ở 300 K. Tìm lưu lượng theo thể tích ở 300 K ra đơn vị m^3.h^{-1} của một ống dẫn cung cấp cho một lò đốt có công suất lý thuyết là 20 kW ?

2 Lực tác dụng lên một ống có khuỷu

Từ một lỗ cố định trong một ống nằm ngang, cứng, có tiết diện không đổi S có nước chảy ra với một lưu lượng khối D_m. Ống có khuỷu, và phương trung bình chịu một góc quay α. Mặt ngoài của ống nằm trong khí quyển có áp suất P_0 ; ống được giữ cố định nhờ các đai và bulông.



Ở hạ lưu (phía dưới), nước được phun ra khí quyển, và ở phía thượng lưu áp suất bằng P_1 cao hơn P_0.

Sự tổn hao áp suất tuân theo một quy luật tuyến tính $P_1 - P_0 = K\,D_m$.

Hãy tính :

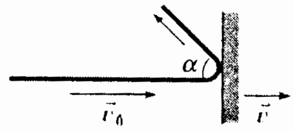
a) lực do nước tác dụng lên ống.

b) tổng hợp lực $\vec{R}$ do {các vòng đai, các bulông và phần cố định} tác dụng lên ống để giữ cho hệ thống đứng yên tại chỗ.

Áp dụng :
$D = 1$ kg.s^{-1}; $S = 10$ cm^2; $K = 0{,}2$ bar.kg^{-1}; $\alpha = 90^0$.

3 Tia nước trên một bản chuyển động

Một bản đặt vuông góc với phương nằm ngang (Ox), chuyển động tịnh tiến với vận tốc không đổi $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Bản bị "đẩy" bởi một tia nước có vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ và lưu lượng khối D_m. Một bộ làm lệch dòng lái tia nước một góc có giá trị α trong hệ quy chiếu của bản $\mathscr{R}_P$. Tia nước giữ một tiết diện đều, áp suất của nó luôn bằng áp suất khí quyển và người ta bỏ qua mọi tính nhớt.

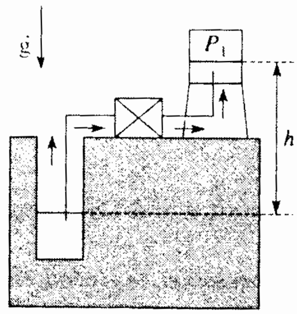


1) Tính lưu lượng $D_{/P}$ của tia nước trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_P$.

2) Tính lực tác dụng lên bản.

4 Công suất của một bơm nước

Một chiếc bơm hút nước từ một giếng lên và chuyển nước vào một bình chứa đã được điều áp với một lưu lượng khối không đổi D_m. Mức trên của nước trong bình chứa ở độ cao h phía trên mức nước của giếng, và áp suất ở đó bằng P_1, cao hơn áp suất khí quyển P_0.



Tính công suất $\mathscr{P}$ do bơm cung cấp cho chất lỏng :

a) nếu bỏ qua mọi độ nhớt ;

b) nếu sự tổn hao áp suất ΔP trong các ống tỷ lệ với lưu lượng, nghĩa là $\Delta P = K\,D_m$.

Người ta thừa nhận rằng công suất của các lực nhớt chỉ phụ thuộc vào lưu lượng, mà không phụ thuộc vào h và P_1.

5 Máy trộn

Một máy trộn có van, thu nhận nước lạnh (nhiệt độ T_1, lưu lượng khối D_1), và nước nóng (T_2, D_2).

Hãy xác định nhiệt độ T_f của nước đi ra khỏi van. Hãy nói rõ các giả thiết

6 Máy nén đoạn nhiệt

Một máy nén đưa không khí từ trạng thái 1 ở bầu khí quyển ($P_1 = 1$ bar, $T_1 = 300$ K) lên trạng thái 2 ($P_2 = 6$ bar, T_2). Công suất của động cơ nén khí bằng 1,5 kW, và lưu lượng khối bằng 6,5 g.s^{-1}. Đối với không khí được coi là khí lý tưởng : $c_P = 1{,}0$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} và $\gamma = 1{,}4$.

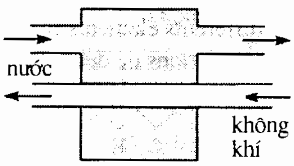
1) Tính nhiệt độ T_2.

2) Tính entrôpi tạo ra trong một đơn vị thời gian.

3) Lưu lượng sẽ là bao nhiêu nếu sự biến đổi của không khí là đẳng entrôpi.

7 Máy làm lạnh

Trong một thiết bị trao đổi nhiệt hoàn toàn cách nhiệt, không khí nóng ($P_1 = 6$ bar, $T_1 = 500$K) được làm lạnh đẳng áp tới nhiệt độ T_0 bằng 300K. Chất lưu giảm nhiệt được cấu tạo bởi nước (nhiệt dung riêng $c = 4{,}18$ kJ.K^{-1}) đi vào ở nhiệt độ $\theta_e = 12^oC$ và đi ra ở nhiệt độ θ_s. Lưu lượng của nước là $d = 100$ g.s^{-1} và lưu lượng của không khí là 6,5 g.s^{-1}.

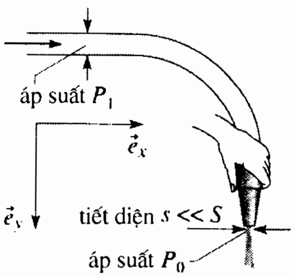


Tính θ_s.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

8 Lực lên một vòi rồng chữa cháy

Một ống mềm có tiết diện S, tận cùng bằng một đầu bịt có tiết diện ở cuối s rất nhỏ so với S. Áp suất ở trong ống bằng P_1 và tia nước đi ra trong khí quyển có áp suất P_0. Đầu bịt hợp với phần trước của ống một góc vuông. Vận tốc của tia nước sẽ được giả thiết là rất lớn so với vận tốc của chất lưu ở trong ống.



Nước được coi là một chất lưu lý tưởng, tính lưu lượng khối D_m và F_y thành phần song song với tia nước của lực $\vec{F}$ do người cầm vòi rồng tác dụng.

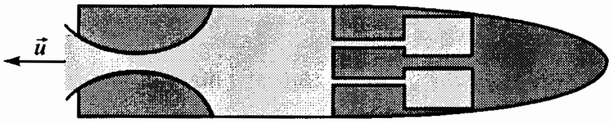
Dữ kiện : $P_1 = 10$ bar ; $P_0 = 1$ bar ; $s = 1$ cm^2.

9 Tên lửa

Một tên lửa có khối lượng ở thời điểm t là m, phụt về phía sau các chất khí thoát ra từ sự cháy nhiên liệu và chất oxy hóa nhiên liệu chứa trong tên lửa. Giả thiết tên lửa chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}$ đối với hệ quy chiếu nghiên cứu coi là Galilé và giả thiết vận tốc $\vec{u}$ của các chất khí phụt ra trong *hệ quy chiếu $\mathcal{R}_f$ của tên lửa* là đều và không đổi. D_m biểu thị lưu lượng khối của chúng.

1) Tính lực đẩy của tên lửa, nghĩa là lực $\vec{F}_p$ cần phải đặt vào một hệ kín chịu cùng các ngoại lực để thu được cùng một gia tốc

2) Tên lửa, có vận tốc ban đầu bằng không không được đặt dưới một tác dụng bên ngoài nào. Lưu lượng là không đổi và khối lượng cuối cùng bằng một phân số α của khối lượng ban đầu.



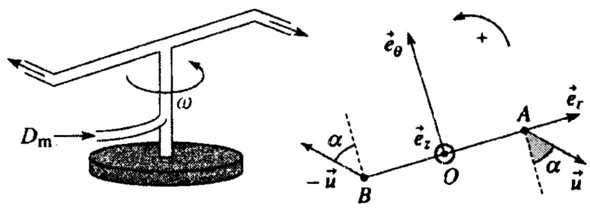
Tính động năng cuối cùng $\mathscr{E}_{K\,cuối}$ của tên lửa. Khối lượng ban đầu là cố định, hỏi với giá trị α_m nào của α thì $\mathscr{E}_{K\text{-}cuối}$ cực đại ? Xác định hiệu suất cơ năng r và tính hiệu suất đó đối với $\alpha = \alpha_m$.

10 Con quay phun tưới

Một con quay phun tưới được cấu tạo bởi một ống thẳng đứng trục (Oz), và một ống nằm ngang có hai tay đòn dài a, tận cùng bởi các đầu bịt với tiết diện cuối cùng bằng S. Chiếc ống nằm ngang có thể quay xung quanh trục cố định (Oz). Bỏ qua bề dày của các ống, và giả thiết các dòng chảy là một chiều.

Mômen quán tính của con quay và của nước chứa ở trong đó bằng J, và khi quay với vận tốc góc ω, nó sẽ chịu một ngẫu lực cản không đổi có giá trị tuyệt đối Γ.

Lưu lượng khối của nước là D_m.



1) Thiết lập phương trình vi phân cho $\omega(t)$.

2) Tính ω_p, giá trị của ω ở chế độ không đổi.

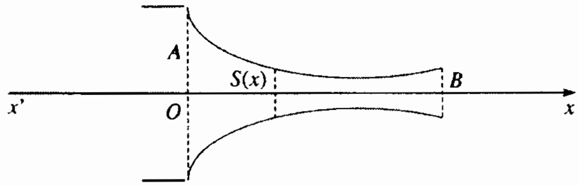
3) ω bằng không tại thời điểm ban đầu, hãy khảo sát chế độ chuyển tiếp.

11 Mặt cắt (profin) của một ống tuye

Để đơn giản hóa, người ta giả thiết dòng chảy của khí trong một ống tuye là một chiều, không đổi, đoạn nhiệt và đẳng entrôpi. Mục đích của bài tập là liên kết vận tốc chảy $v(x)$ với tiết diện $S(x)$ của ống tuye.

Chất khí đi vào ống tuye tại $x = 0$, với vận tốc $v(0)$ nhỏ không đáng kể, một áp suất $P(0) = P_A$, một nhiệt độ $T(0) = T_A$ và một khối lượng riêng $\rho(0) = \rho_A$.

Chất khí được giả thiết là lý tưởng và có khối lượng phân tử M. Tỷ số γ được giả thiết không đổi và đã biết.



1) Hãy biểu thị quan hệ tồn tại giữa vận tốc $v(x)$ và khối lượng riêng $\rho(x)$.

2) Hãy biểu thị hệ thức giữa lưu lượng khối D, $v(x)$ và $S(x)$.

3) Tùy theo vận tốc phun v_B của chất khí, hãy biện luận hình dáng của mặt cắt của ống tuye.

12 Động cơ tuabin

Theo ENSAM, 1991

Ta hãy sơ đồ hóa một động cơ. Chất lưu vận hành là không khí, được coi là khí lý tưởng.

Dữ kiện : $c_P = 1{,}0\ \mathrm{kJ.K^{-1}.kg^{-1}}$ và $\gamma = 1{,}4$.

Lưu lượng khối của không khí là $D_m = 0{,}9\ \mathrm{kg.s^{-1}}$.

Các phần tử có các đặc trưng sau đây.

• Tuabin nén (T.C)

Hiệu suất cơ học $\eta_m = 0{,}95$;

không khí hút vào : $t_1 = 10^\circ\mathrm{C}$ và $p_1 = 1{,}0$ bar ; $\dfrac{p_2}{p_1} = 4$; nén đoạn nhiệt ; hiệu suất chỉ định đối với quá trình đẳng entrôpi : $\eta_{sc} = 0{,}9$.

Theo định nghĩa, $\eta_{sc} = \dfrac{W_i'}{W_i}$ với W_i là công chỉ định và W_i' là công chỉ định của một quá trình đẳng entrôpi ảo giữa trạng thái 1 và áp suất P_2.

• Tua bin (T.U)

Hiệu suất cơ học $\eta_m = 0{,}95$, nhiệt độ nạp khí vào : $t_4 = 927^\circ\mathrm{C}$; giãn đoạn nhiệt, với $\eta_{st} = \dfrac{W_i}{W_i'} = 0{,}81$.

Tua bin làm khởi động tuabin nén và cơ cấu truyền của vật truyền.

• Thiết bị trao đổi nhiệt đoạn nhiệt (E)

Hiệu suất : $\varepsilon = \dfrac{t_3 - t_2}{t_5 - t_2} = 0{,}74$

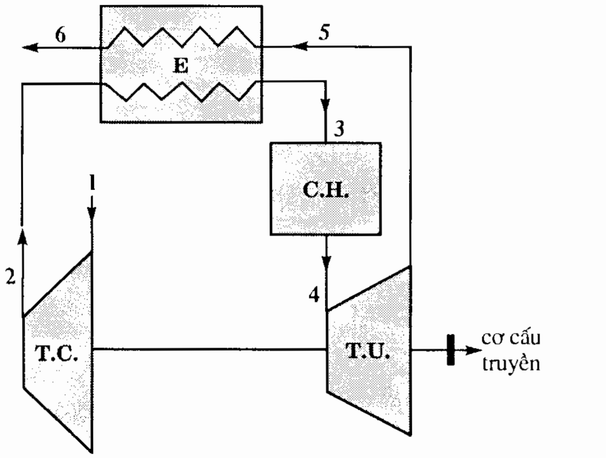
• Buồng đốt (C.H.)

Các thành đoạn nhiệt ; đốt cháy đẳng áp ; hiệu suất $\eta_c = 0{,}97$.

Theo định nghĩa : $\eta_c = \dfrac{\text{(nhiệt do chất lưu nhận)}}{\text{(nhiệt do đốt cháy)}}$

Người ta bỏ qua :

- các tổn hao áp suất, từ đó $P_2 = P_3 = P_4$ và $P_5 = P_6 = P_1$;
- các biến thiên động năng và thế năng ;
- các biến thiên nhiệt độ trong các ống dẫn nối liền các phần tử khác nhau ;
- các biến thiên lưu lượng do nhiên liệu bơm vào.



1) Tính nhiệt độ t_2 cũng như công suất $\mathscr{P}_C$ cung cấp cho trục của máy nén.

2) Tính nhiệt độ t_5 và công suất $\mathscr{P}_T$ có sẵn trên trục của tuabin. Từ đó suy ra công suất $\mathscr{P}_u$ do cơ cấu truyền của vật truyền nhận được.

3) Tính nhiệt độ t_3, hiệu suất toàn bộ η và lưu lượng khối theo giờ D_h của nhiên liệu mà năng suất tỏa nhiệt bằng $4{,}0.10^4\ \mathrm{kJ.kg^{-1}}$.

4) Tính nhiệt độ t_6 ở đầu ra của thiết bị trao đổi nhiệt.

LỜI GIẢI

1 $\mathscr{P} = qD_m = Q_{mol}D_{mol} = Q_{mol}\dfrac{D_{vol}}{V_{mol}}$. *Thể tích phân tử bằng* 24,6 L *(giả thiết là khí lý tưởng) và* $D_{vol} = 1{,}99\ \mathrm{m^3.h^{-1}}$.

2 a) *Bằng cách thực hiện một phép cân bằng động lượng đối với chất lưu chứa ở trong ống tại thời điểm* t *mà vận tốc là* $v = \dfrac{D_m}{\rho S}$, *ta thu được :*

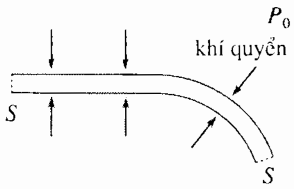
$\vec{F}_{\text{ống}\to\text{nước}} + P_1 S\vec{e}_x - P_0 S(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) = D_m[v(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) - v\vec{e}_x]$.

Từ đó suy ra :

$$\vec{F}_{\text{nước}\to\text{ống}} = \left(\frac{D_m^2}{\rho S} + P_0 S\right)[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y] + KD_m S\vec{e}_x .$$

b) *Ta khảo sát tập hợp các lực tác dụng lên ống.*

Tổng hợp các lực do một trường áp suất đều trên một mặt kín bằng không. Để tính tổng hợp các lực áp suất khí quyển $\vec{R}_0$ *tác dụng lên phía ngoài ống, ta tưởng tượng một tình huống ở đó hệ sẽ chìm hoàn toàn trong môi trường có áp suất* P_0.



Tổng hợp các lực áp suất sẽ bằng không, vậy :

$$\vec{R}_0 + P_0 S\vec{e}_x - P_0 S(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) = \vec{0} .$$

hay : $\vec{R}_0 = -P_0 S[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y]$.

Vậy ta có :

$$\vec{R}_0 + \vec{R} + \vec{F}_{\text{nước}\to\text{ống}} = \vec{0} ,$$

điều này cho $\vec{R} = -\vec{R}_0 - \vec{F}_{\text{nước}\to\text{ống}}$ *hay :*

$$\vec{R} = -\left(\frac{D_m^2}{\rho S} + P_0 S\right)[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y] + KD_m S\vec{e}_x + P_0 S[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y]$$

$$= -\left(\frac{D_m^2}{\rho S}\right)[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y] + KD_m S\vec{e}_x .$$

Lực này không phụ thuộc vào áp suất khí quyển. Kết quả này cũng có thể được thiết lập bằng một phép cân bằng động lượng liên quan với hệ {ống + nước}.

Áp dụng bằng số : $F_x = -21$ N *và* $F_y = +1$ N.

3

1) $D_{/P} = \rho S(v_0 - v)$ và $D_m = \rho S v_0$, vậy $D_{/P} = D_m\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$ *nếu* $v < v_0$.

2) $\mathcal{R}_p$ *là hệ Galilê. Sự bảo toàn năng lượng trong* $\mathcal{R}_p$ *bao hàm rằng vận tốc (vô hướng) của nước là không đổi trong* $\mathcal{R}_p$ *(người ta không tính đến trọng lực).*

Vận tốc của tia tới trong $\mathcal{R}_p$ *bằng* $\vec{V}_{/P} = (v_0 - v)\vec{e}_x$.

Vận tốc của tia ló trong $\mathcal{R}_p$ *là* $\vec{V}'_{/P} = (v_0 - v)(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$.

Hệ {bản + nước tiếp xúc với bộ làm lệch dòng} được đặt dưới áp suất khí quyển (có hợp lực bằng không) và dưới một lực $-\vec{F}$ *bù trừ với lực tác dụng bởi tia nước. Một phép cân bằng động lượng đối với hệ này cho :*

$$-\vec{F} = D_{/P}(\vec{V}'_{/P} - \vec{V}_{/P}),\ \textit{hay}\ \ \vec{F} = D_m v_0\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^2[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y] .$$

4

a) *Ta thực hiện một phép cân bằng cơ năng đối với hệ* $\mathcal{S}^*$ *tạo bởi nước, ở thời điểm t, chứa trong một ống dòng liên kết mặt trên của giếng và mặt trên của bình chứa. Gốc của các thế năng được chọn ở ngang mức với mặt giếng.*

- *Các động năng riêng đi vào và đi ra được bỏ qua.*
- *Thế năng riêng đi vào bằng không* ($z = 0$).
- *Thế năng riêng đi ra bằng* gh.

Vậy :

$$\mathcal{E}_{M,\mathcal{S}^*}(t+dt) - \mathcal{E}_{M,\mathcal{S}^*}(t) = \mathcal{E}_{M,\mathcal{S}}(t+dt) - \mathcal{E}_{M,\mathcal{S}}(t) + D_m dt(gh - 0)$$
$$= D_m dt(gh - 0) .$$

Vì chế độ là không đổi, nên $\mathcal{E}_{M,\mathcal{S}}(t+dt) = \mathcal{E}_{M,\mathcal{S}}(t)$.

Công suất của các lực áp suất là :

$$\mathcal{P}_{pres} = P_0 S_{giếng} v_{giếng} - P_1 S_{bình} v_{bình} = (P_0 - P_1)\frac{D_m}{\rho} .$$

$$\mathcal{E}_{M,\mathcal{S}^*}(t+dt) - \mathcal{E}_{M,\mathcal{S}^*}(t) = (\mathcal{P} + \mathcal{P}_{pres})dt\ ,\ \textit{từ đó}\ \ \mathcal{P} = D_m\left(gh + \frac{P_1 - P_0}{\rho}\right).$$

b) *Ta phải thêm vào phép cân bằng công suất của các nội lực nhớt.*

Người ta giả thiết động cơ không hoạt động với $h = 0$ *và* $P_1 = P_0 - \Delta P$. *Khi đó phép cân bằng năng lượng sẽ cho :*

$$\mathcal{P}_{nhớt} = -\mathcal{P}_{áp\ suất} = -D_m\frac{\Delta P}{\rho} = -K\frac{D_m}{\rho} .$$

Vì $\mathcal{P}_{nhớt}$ *không phụ thuộc* h *và* P_1 *nên :*

$$\mathcal{P} = D_m\left(gh + \frac{P_1 - P_0}{\rho}\right) + K\frac{D_m^2}{\rho}$$

5 *Các giả thiết*

Có thể giả thiết van là đoạn nhiệt (ít nhất là trong chế độ không đổi, khi các ống đã nóng). Hơn nữa, nhiệt dung riêng ở áp suất không đổi c của nước không phụ thuộc vào nhiệt độ trong khoảng đang xét.

Ở chế độ không đổi, entanpi đi vào van trong khoảng dt *bằng entanpi đi ra cũng trong khoảng thời gian đó.*

$$\rho C_m D_1 T_1 dt + \rho C_m D_2 T_2 dt = \rho C_m(D_1 + D_2)T_f dt\ \ \textit{hay}\ \ T_f = \frac{D_1T_1 + D_2T_2}{D_1 + D_2} .$$

6

1) *Vì chất khí là lý tưởng nên* $\mathcal{P} = D_m\Delta h = D_m c_p(T_2 - T_1)$ *từ đó* $T_2 = 531$ K.

2) *Đối với một khí lý tưởng,* $dh = c_p dT = Tds + vdP$ *và*

$$\Delta s = c_p\left[\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right].$$

Thực hiện một phép cân bằng entrôpi đối với hệ kín $\mathcal{S}^*$ *trùng phùng với hệ mở* $\mathcal{S}$ *cấu tạo bởi máy nén và chất khí chứa trong đó :*

$$\frac{dS_{\mathcal{S}^*}}{dt}=\frac{dS_{\mathcal{S}}}{dt}+D_m s_{ra}-D_m s_{vào}.$$

Vì entrôpi là không đổi nên phép cân bằng này dẫn tới :

$$\frac{dS_{tạo\,ra}}{dt}=D_m\Delta s=0,38\ \mathrm{J.K^{-1}.s^{-1}}.$$

3) *Ở lối ra của một quá trình đẳng entrôpi, nhiệt độ sẽ là* 501 K *và lưu lượng là* $7,5\ \mathrm{g.s^{-1}}$.

7 *Các công suất nhiệt do chất lưu nhận được ở đầu vào và đầu ra là ngược dấu. Đối với mỗi chất lưu, một cân bằng entanpi cho :*

$$D_m(h_{vào}-h_{ra})=\mathcal{P}_{th}$$

Vậy $d\Delta h_{nước}+D_m\Delta h_{k.khí}=0$, *hay* $\theta_s=\theta_c+\frac{D_m c_p}{dc}(T_1-T_0)$, *từ đó* $\theta_s=15,1^\circ C$.

8 *Vì chất lưu là lý tưởng nên có thể tính lưu lượng bằng cách sử dụng hệ thức* BERNOULLI :

$$\frac{v_{tia}^2}{2}+\frac{P_0}{\rho}+gz=\frac{v_{ống}^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+gz \quad \text{và} \quad D_m=\rho s v_{tia}$$

Biết rằng $v_{tia}^2\gg v_{ống}^2$, *nên :*

$$\rho v_{tia}^2=2(P_1-P_0) \quad \text{và} \quad D_m=\rho s v_{tia}=s\sqrt{2\rho(P_1-P_0)}.$$

Một phép cân bằng động lượng áp dụng cho hệ tạo bởi đầu bịt, khuỷu ống và chất lưu chứa trong đó, cho :

$$\vec{F}+(P_1-P_0)S\vec{e}_x+\vec{F}'=D_m(\vec{v}_{tia}-\vec{v}_{ống}),$$

$\vec{F}$ *biểu thị lực phải tìm để tác dụng lên đầu ống, và* $\vec{F}'=F'\vec{e}_x$ *biểu thị các lực liên kết của ống ở thượng lưu.*

Vì $v_{tia}\gg v_{ống}$, *ta có :*

$$\vec{F}+(P_1-P_0)S\vec{e}_x+\vec{F}'=D_m(\vec{v}_{tia}-\vec{0}).$$

Từ đó ta suy ra $F_y=2s(P_1-P_0)$.

Áp dụng bằng số : $D_m=4,2\ \mathrm{kg.s^{-1}}$ *và* $F_y=180$ N .

9 1) *Ta đứng trong hệ quy chiếu phi Galilê* $\mathcal{R}_f$

Cho hệ mở $\mathcal{S}$ *cấu tạo bởi tên lửa, nhiên liệu và các chất khí chứa trong tên lửa và hệ kín trùng phùng* $\mathcal{S}^*$. *Hệ này chịu một lực tương tác* $\vec{F}_0$ *(trọng lực, lực ma sát v.v..).* $\vec{p}_{\mathcal{S}}$ *là không đổi, và phép cân bằng động lượng cho :*

$$\vec{F}_0+\vec{F}_{q.tính}=D_m\vec{u}-\vec{0}\ \text{(lưu lượng vào bằng không)}$$

Theo định nghĩa $\vec{F}_0+\vec{F}_p=m\vec{a}=-\vec{F}_{q.tính}$, *hay* $\vec{F}_p=-D_m\vec{u}$.

Sự phân tích cũng có thể được tiến hành trong hệ quy chiếu nghiên cứu, song phép tính toán kém đơn giản hơn một chút.

2) $m(t)\frac{dv}{dt}=(m_0-D_m t)\frac{dv}{dt}=D_m u$.

Tích phân phương trình này ta được $v(t)-0=u\ln\frac{m_0}{m_0-D_m t}$.

Vậy $v_{cuối}=-u\ln\alpha$ *và* $\mathscr{E}_{K.cuối}=\frac{1}{2}m_0u^2\alpha(\ln\alpha)^2$.

Hàm $f(\alpha)=\alpha(\ln\alpha)^2$ *nhận một cực đại với* $\ln\alpha+2=0$. $\mathscr{E}_{K.cuối}$, *do vậy, cực đại với* $\alpha=\alpha_0=0,14$.

Cơ năng phải tiêu tốn để phun vào một khối lượng khí dm, *trong hệ quy chiếu của tên lửa bằng* $d\mathscr{E}_M=dm\frac{1}{2}u^2$. *Cơ năng toàn phần phải tiêu tốn là* $\frac{1}{2}m_0u^2(1-\alpha)$ *và khi đó* $r=\frac{\alpha(\ln\alpha)^2}{1-\alpha}$. *Nếu* $\alpha=\alpha_0$ *thì* $r=0,63$.

10 1) *Cho* $\mathcal{S}$ *là hệ mở cấu tạo bởi con quay phun tưới và nước chứa trong đó (đơn giản nhất là đưa con quay phun nước vào hệ, vì trong trường hợp này, dễ xác định các ngoại lực) và* $\mathcal{S}^*$ *là hệ kín trùng phùng ở thời điểm t. L biểu thị mômen động lượng đối với trục quay. Ta thực hiện một phép cân bằng mômen động lượng trong hệ quy chiếu nghiên cứu, được giả thiết là Galilê.*

- *Trong thời gian* dt, *một khối lượng* $\delta m=\frac{1}{2}D_m dt$ *ra khỏi mỗi đầu bịt với một vận tốc mà thành phần theo* $\vec{e}_\theta$ *là* $\omega a-\frac{D_m}{\rho S}\cos\alpha$.
- *Khối lượng* $2\delta m$ *đi vào ống đứng có mômen động lượng bằng không.*

$$L_{\mathcal{S}^*}(t+dt)-L_{\mathcal{S}^*}(t)=L_{\mathcal{S}}(t+dt)-L_{\mathcal{S}}(t)+2\delta m\,a\left(\omega a-\frac{D_m}{\rho S}\cos\alpha\right).$$

từ đó : $\frac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt}=\frac{dL_{\mathcal{S}}}{dt}+D_m a\left(\omega a-\frac{D_m}{\rho S}\cos\alpha\right)$.

$\frac{dL_{\mathcal{S}^*}}{dt}=-\Gamma$ *nếu* $\omega>0$ *và* $\frac{dL_{\mathcal{S}}}{dt}=\frac{d(J\omega)}{dt}=J\frac{d\omega}{dt}$.

Nếu $\omega>0$, $\tau\frac{d\omega}{dt}+\omega=\omega_0$ *với* $\omega_0=\frac{D_m}{\rho Sa}\cos\alpha-\frac{\Gamma}{D_m a^2}$ *và* $\tau=\frac{J}{D_m a^2}$.

2) $\omega_p=\omega_0$ *nếu* $\Gamma<\frac{D_m^2 a}{\rho S}\cos\alpha$ *hay* $\omega_p=0$ *nếu* $\Gamma\geq\frac{D_m^2 a}{\rho S}\cos\alpha$.

3) $\omega=\omega_p\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$.

11 1) *Sự chảy là đoạn nhiệt và không có công có ích vậy* $v^2=2(h_A-h)$.

Chất khí là lý tưởng, nên $(h_A-h)=c_p(T_A-T)$.

Quá trình dãn là đẳng entrôpi, vậy $T = T_A\left(\frac{P}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ và

$\rho = \rho_A\left(\frac{P}{P_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Sau các phép tính, ta tìm được

$$\rho = \rho_1\left(1 - \frac{v^2}{2c_pT_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

2) *Lưu lượng khối* $D_m = \rho v S$ *là không đổi, nghĩa là :*

$$v(x)S(x)\left(1 - \frac{v^2(x)}{2c_pT_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{D_m}{\rho_1} = \text{cte} .$$

3) *Ta đạo hàm biểu thức trên :* $\frac{S'}{S} + \frac{v'}{v} + \frac{1}{\gamma-1}\frac{-\frac{vv'}{c_pT_A}}{1 - \frac{v^2}{2c_pT_A}} = 0$.

v(x) là một hàm số đồng biến và S' triệt tiêu với :

$$v = v_0 = \sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}c_pT_A} = \sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{M}T_A} .$$

Do vậy ta có bảng biến thiên của S (nếu $v_B > c_0$*) :*

x	0	x_0	x_B
v	0 ↗	v_0 ↗	v_B
S	↘	S_0 ↗	S_B

• *S (0) sẽ vô cùng lớn ! Mô hình giả thiết v(0) = 0 vì vậy, không áp dụng được tại x = 0.*

• $v_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$. *Hình như đây cũng là biểu thức của vận tốc của âm ở nhiệt độ* T_0 *của chất khí tại* x_0 .

• *Nếu* v_B *(được xác định bởi áp suất* P_B*) nhỏ hơn* v_0*, khi đó chỉ minh S (x) là nghịch biến*

Kết luận

Với một vận tốc phun nhỏ ($v_B < v_0$)*, ống tuye là hội tụ.*

Với một vận tốc phun lớn (siêu âm), ống tuye là hội tụ (tăng tốc tới v_0*), sau đó phân kỳ.*

12 1) *Gọi* T_2' *là nhiệt độ của một quá trình nén đẳng entrôpi ảo :*

$$T_2' = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 420,5 \text{ K} .$$

Phép cân bằng entanpi cho

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = w_{i12} = \frac{1}{\eta}w_{i12}' = \frac{c_p}{\eta}(T_2' - T_1) ,$$

từ đó $t_2 = 163°C$.

$\mathscr{P}_c = \frac{D_m(h_2 - h_1)}{\eta_m}$, *từ đó* $\mathscr{P}_c = 145$ kW.

2) *Bằng một lập luận tương tự :* $T_5' = 807,5$ K ; $T_5 = 882$ K ; $t_5 = 609°C$.

$\mathscr{P}_T = -\eta_m D_m(h_5 - h_4)$ và $\mathscr{P} = 269$ kW .

Công suất sử dụng được là $\mathscr{P}_u = 124$ kW.

3) *Theo hiệu suất của thiết bị trao đổi nhiệt,* $t_3 = 493°C$.

Phép cân bằng entanpi đối với CH cho $h_4 - h_3 = c_p(T_4 - T_3) = 434 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Vậy công suất nhiệt do nhiên liệu cung cấp là :

$$\mathscr{P}_{th} = D_m\frac{h_4 - h_3}{\eta_c} = 447 \text{ kW} .$$

Từ đó $\eta = 0,28$ và $D_h = \frac{447.10^3}{4.10^7}.3600 = 40,2 \text{ kg.h}^{-1}$

4) *Thiết bị trao đổi nhiệt là đoạn nhiệt, vậy* $h_3 - h_2 + h_6 - h_5 = 0$.

hay $t_6 = 279°C$.

8 TRƯỜNG VÀ PHÉP TÍNH VECTƠ

MỤC TIÊU

■ Nắm vững các công cụ toán học cần thiết cho việc nghiên cứu vật lý các trường.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Các phép tính đơn giản.

Mở đầu

Chương đặc biệt này đặt ở cuối sách nhằm trình bày một cách đơn giản và thiên về ý nghĩa vật lý, các công cụ toán học chủ yếu cần thiết để nghiên cứu vật lý các trường.

Mục đích của chương này không phải là chứng minh tất cả; tuy nhiên, chúng ta cũng nêu lên các mối liên hệ chính yếu tồn tại giữa các toán tử khác nhau này.

Trong giáo trình này thì chương này luôn được nhắc đến để tham khảo. Hơn nữa, nó còn là một phần bổ sung hữu ích để nghiên cứu điện từ học.

1 Các tọa độ không gian

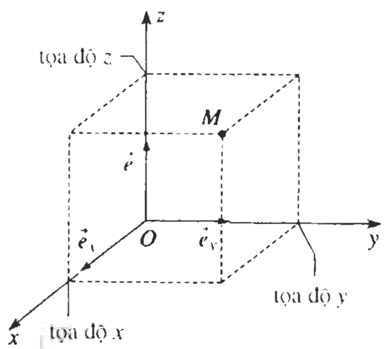
1.1. Tọa độ DESCARTES

Đây là các tọa độ đơn giản nhất để sử dụng. Các vectơ đơn vị $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$ tạo thành một tam diện thuận. Một điểm M được xác định bởi ba tọa độ của nó x, y và z (*h*.1).

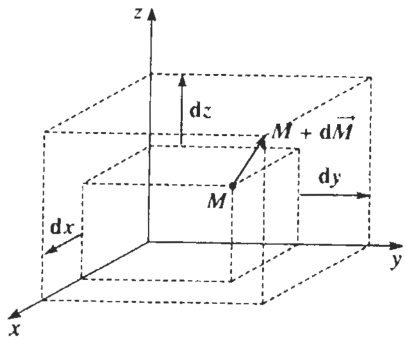
Tương ứng với một độ dời nguyên tố của M là vectơ $\mathrm{d}\vec{M}$ với (*h*.2):

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z .$$

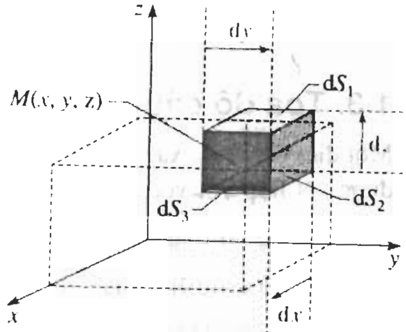
Kết hợp với các tọa độ này còn có các diện tích nguyên tố, các thể tích nguyên tố (*hình* 3). Mọi đại lượng vô hướng g (hay đại lượng vectơ $\vec{G}$) phụ thuộc điểm M sẽ được ký hiệu $g(M) = g(x, y, z)$ hay $\vec{G}(M) = \vec{G}(x, y, z)$.



H.1. *Hệ tọa độ* DESCARTES. *Các tọa độ của M là x, y, z :*
M(x, y, z).



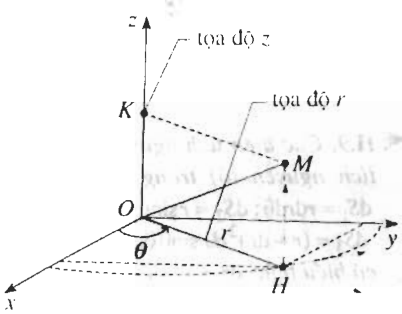
H.2. *Vectơ* $\mathrm{d}\vec{M}$ *có các thành phần* d*x*, d*y*, d*z*, *nghĩa là:*
$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.



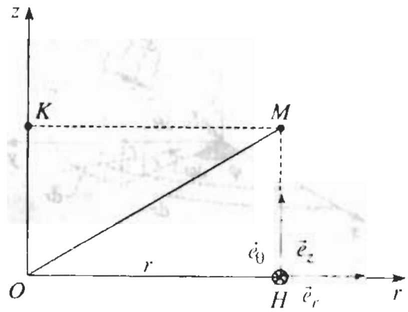
H.3. *Thể tích nguyên tố* $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *được giới hạn bởi sáu diện tích nguyên tố phẳng với* $\mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$ *và* $\mathrm{d}S_3 = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

1.2. Tọa độ trụ

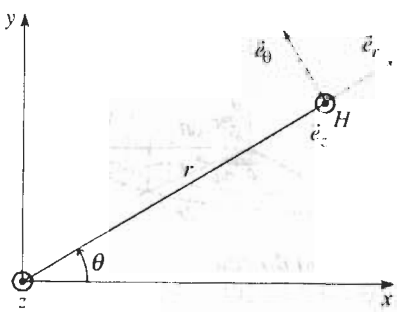
Một điểm M được xác định bởi ba tọa độ của nó r, θ và z (*h*.4). Các tọa độ này được kết hợp với các vectơ đơn vị $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ và $\vec{e}_z$ tạo thành một cơ sở phép chiếu trực giao phụ thuộc vào chính điểm M. Các vectơ $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ và $\vec{e}_z$ tạo thành một tam diện thuận (*h*.4).



H.4a. *Hệ tọa độ trụ. Các tọa độ của M là r, θ, z: M(r, θ, z).*



H.4b. *Sự xếp đặt các vectơ* $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ *và* $\vec{e}_z$.

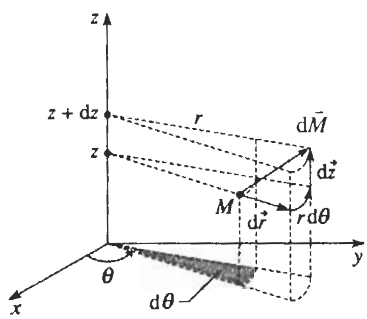


H.4c. *Trong mặt phẳng* (*xOy*), *ta lại tìm thấy hệ tọa độ cực.*

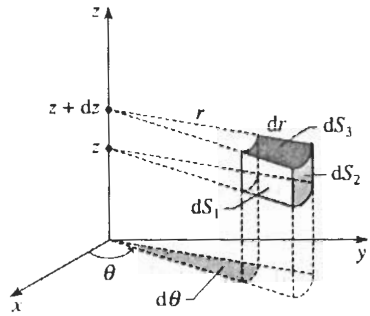
Với mỗi độ dời nguyên tố của M lại tương ứng một vectơ $\mathrm{d}\vec{M}$

Trong tọa độ trụ (*hình* 5): $\mathbf{d}\vec{M} = \mathbf{d}r\,\vec{e}_r + r\mathbf{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathbf{d}z\,\vec{e}_z$ **.**

Kết hợp với các tọa độ này là các phần tử diện tích và thể tích (*h*.6). Mọi đại lượng g phụ thuộc điểm M sẽ được ký hiệu $g(M) = g(r, \theta, z)$ hay $\vec{G}(M) = \vec{G}(r, \theta, z)$.



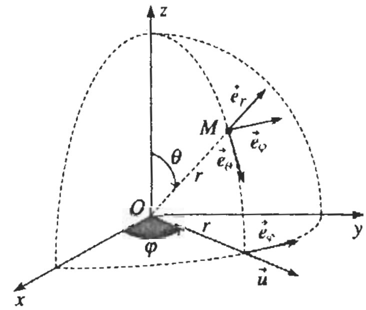
H.5. *Trong tọa độ trụ:*
$d\vec{M} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$.



H.6. *Sự thể hiện các diện tích (và thể tích) nguyên tố trong trường hợp các tọa độ trụ:*
$dS_1 = dr dz$; $dS_2 = (r + dr) d\theta\, dz$;
$dS_3 = r d\theta\, dr$ *và thể tích có biểu thức* $d\tau = r\, d\theta\, dr\, dz$.

1.3. Tọa độ cầu

Một điểm M được xác định bởi ba tọa độ của nó r, θ và φ. Các tọa độ này được kết hợp với vectơ đơn vị $\vec{e}_r$; $\vec{e}_\theta$; $\vec{e}_\varphi$, tạo thành một cơ sở của phép chiếu trực giao phụ thuộc vào chính điểm M. Các vectơ $\vec{e}_r$; $\vec{e}_\theta$; $\vec{e}_\varphi$ tạo thành một tam diện thuận (*h*.7). Với mỗi độ dời nguyên tố của M lại tương ứng một vectơ $d\vec{M}$.

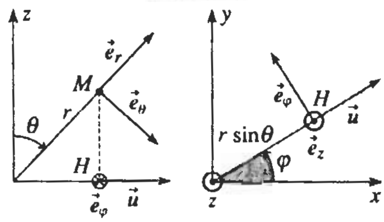


H.7a. *Trường hợp các tọa độ cầu.*

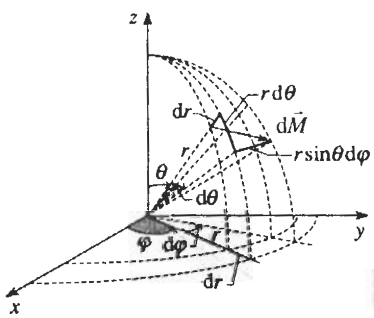
Trong tọa độ cầu (*h*.8):

$$d\vec{M} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi.$$

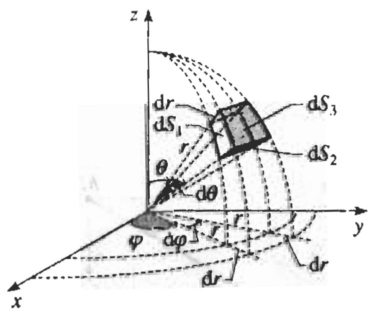
Kết hợp với các tọa độ này là các phần tử diện tích và thể tích (*h*.9). Mọi đại lượng g phụ thuộc điểm M sẽ được ký hiệu $g(M) = g(r, \theta, \varphi)$ hay $\vec{G}(M) = \vec{G}(r, \theta, \varphi)$.



H.7b. *Sự thể hiện hai hệ tọa độ cực.*



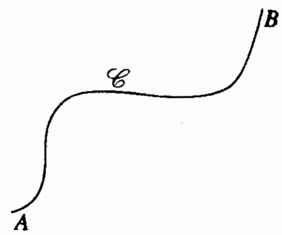
H.8. *Tọa độ cầu:*
$d\vec{M} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi$.



H.9. *Các diện tích nguyên tố (và thể tích nguyên tố) trong tọa độ cầu:*
$dS_1 = r dr d\theta$; $dS_2 = r\sin\theta\, dr\, d\varphi$;
$dS_3 = (r + dr)^2 d\theta \sin\theta\, d\varphi$ *và thể tích có biểu thức* $d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

<u>Chú ý:</u> Các đại lượng r và θ, được định nghĩa ở đây, khác các đại lượng tương ứng trong toạ độ trụ. Trái lại, tọa độ φ và vectơ đơn vị $\vec{e}_\varphi$ tương ứng lại đồng nhất với các đại lượng θ và $\vec{e}_\theta$ trong tọa độ trụ !

2 Đường chu vi và bề mặt

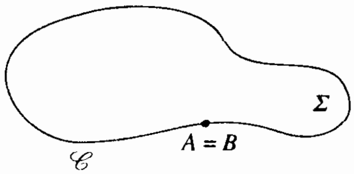


H.10. *Đường cong $\mathscr{C}$ không được định hướng từ A đến B.*

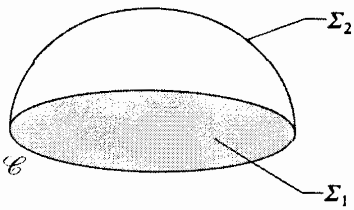
2.1. Định nghĩa

Cho một đường cong $\mathscr{C}$ nối hai điểm A và B trong một không gian (*h*.10). Khi A và B trùng nhau, thì đường cong được gọi là kín: nó xác định một đường chu vi (*h*.11). Đường chu vi này, không nhất thiết là phẳng, lúc đó sẽ giới hạn một mặt S không duy nhất. Các mặt Σ_1 và Σ_2 đều tì lên trên cùng một đường chu vi $\mathscr{C}$ (*h*.12).

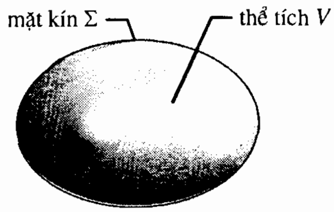
Một mặt kín là một mặt giới hạn một thể tích V (*h*.13).



H.11. *Đường chu vi với một mặt kết hợp tì lên đường cong này.*



H.12. *Hai mặt Σ_1 và Σ_2 tì lên trên cùng một đường cong kín (hay đường chu vi) $\mathscr{C}$.*



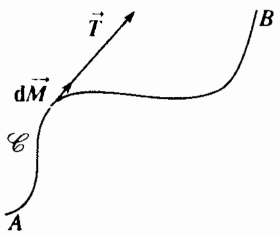
H.13. *Mặt kín Σ giới hạn một thể tích kết hợp V.*

2.2. Quy ước về sự định hướng

Ta kết hợp với đường chu vi một chiều đi: một phần tử chiều dài vô hướng dl cho phép dựng vectơ $\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}l\vec{T}$, trong đó $\vec{T}$ là vectơ đơn vị tiếp tuyến với đường cong (*hình* 14a và b).

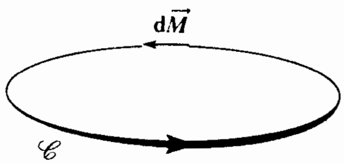
Với một mặt, ta kết hợp một hướng : một phần tử diện tích vô hướng dS, và pháp tuyến $\vec{N}$ của nó, xác định một vectơ $\mathrm{d}\vec{S}$, độ dài dS và hướng theo pháp tuyến $\vec{N}$ sao $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{N}$ (*h*.14c).

a)



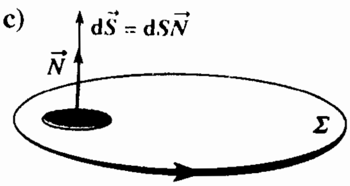
H.14a. *Đường cong $\mathscr{C}$ được định hướng từ A đến B.*

b)



H.14b. *Đường cong kín $\mathscr{C}$ có định hướng, hay đường chu vi có định hướng.*

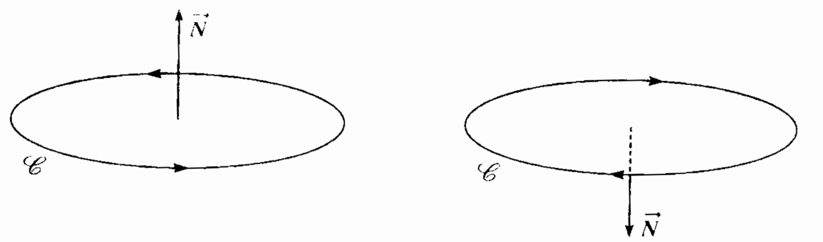
c)



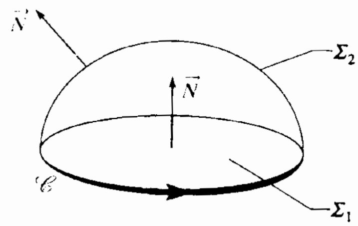
H.14c. *Đường chu vi có định hướng với một mặt kết hợp.*

Trong trường hợp một đường chu vi, các phần tử vectơ $\vec{T}$ và $\vec{N}$ tuân theo một quy ước về định hướng :

- không có quy ước tuyệt đối về sự định hướng đối với một đường chu vi (*h*.14b) ;
- nhưng tồn tại một quy ước về sự định hướng giữa một đường chu vi và các mặt tì lên đường chu vi này. Quy ước tương đối về sự định hướng được chỉ rõ trên các *hình* 15 và 16.

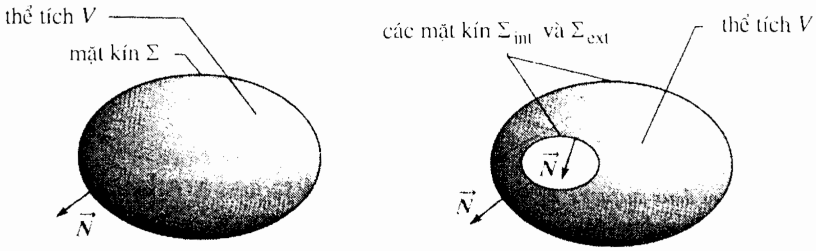


H.15. *Quy ước về sự định hướng của các mặt tì lên đường cong $\mathscr{C}$ có định hướng cho trước.*



H.16. *Hai mặt Σ_1 và Σ_2 tì lên cùng một đường cong kín có định hướng $\mathscr{C}$.*

Một mặt kín, theo quy ước, được định hướng là dương ra phía ngoài thể tích mà nó giới hạn (*h.*17).



H.17. *Mặt kín Σ giới hạn thể tích kết hợp V. Thể tích V có thể được giới hạn bởi hai mặt kín Σ_{int} và Σ_{ext}.*

2.3. Các tích phân kết hợp

2.3.1. Tích phân của một trường các vô hướng

Cho một đường cong $\mathscr{C}$ và một mặt Σ kín hay không. Ta sẽ gặp các tích phân vô hướng hay vectơ được tạo thành xuất phát từ các trường vô hướng:

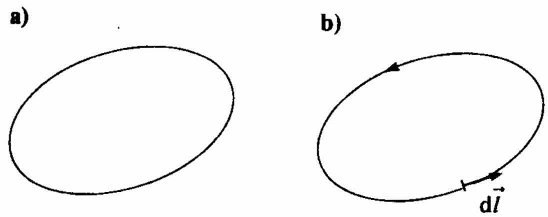
- tích phân vô hướng: $\int_{\mathscr{C}} g\,\mathrm{d}l$ và $\iint_{\Sigma} g\,\mathrm{d}S$;
- tích phân vectơ: $\int_{\mathscr{C}} g\,\mathrm{d}\vec{l}$ và $\iint_{\Sigma} g\,\mathrm{d}\vec{S}$.

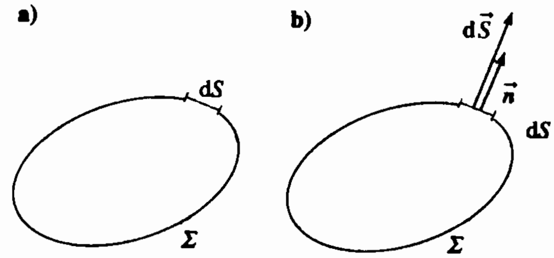
Hai tích phân đầu, các vô hướng, được dựng nên xuất phát từ trường vô hướng g. Hai tích phân sau, được dựng nên xuất phát từ cùng một trường như nhau, lại là các tích phân vectơ.

Việc phân biệt các tích phân vô hướng và tích phân vectơ là rất quan trọng. Thành thử trên một đường chu vi $\mathscr{C}$ (trong trường hợp này, phải vẽ một vòng tròn trên dấu tích phân), ta có thể xác định hai tích phân sau đây:

$$\oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}} \mathrm{d}l \quad \text{và} \quad \oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Tích phân thứ nhất biểu diễn chiều dài của đường chu vi $\mathscr{C}\left(\oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}} \mathrm{d}l = L\right)$, trong khi tích phân thứ hai triệt tiêu $\left(\oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{l} = \vec{0} \ (h.18)\right)$.





H.18a. *Đường cong $\mathscr{C}$ có chiều dài L:* $\oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}l = L$

b. *Đường cong $\mathscr{C}$ có định hướng:* $\oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{l} = \vec{0}$

H.19a. $\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S = S$ *(diện tích của mặt Σ).* **b.** $\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}\vec{S} = \vec{0}$.

<u>*Chú ý:*</u>

• *trong trường hợp của một mặt kín Σ, thì tích phân* $\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}\vec{S}$ *triệt tiêu, trong khi* $\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S$ *không triệt tiêu (h.19).*

• *Đối với một mặt không kín, thì vectơ diện tích $\vec{S}$ kết hợp với Σ, tì lên một đường chu vi $\mathscr{C}$ là duy nhất, và có thể tính được bằng cách dùng tích phân sau:*

$$\vec{S} = \oint_{\text{đường chu vi } \mathscr{C}} \frac{1}{2}\overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{M},$$

độc lập với việc chọn điểm P (h.20). Tính duy nhất có thể được chứng minh bằng cách sử dụng định lý GREEN–OSTROGRADSKI *(§**4.2**). Vectơ, mà sự định hướng tuân theo quy ước tương đối giữa pháp tuyến với mặt Σ và chiều lưu thông trên đường chu vi $\mathscr{C}$, cũng là vectơ diện tích của mọi mặt tì lên $\mathscr{C}$, điều này chứng tỏ rõ là ta không được nhầm lẫn nó với vô hướng, phụ thuộc vào việc chọn bề mặt:* $\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S$.

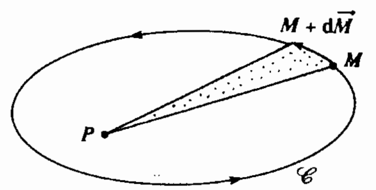
2.3.2. Tích phân của một trường vectơ $\vec{G}(M)$

Ta có thể xác định hai tích phân vô hướng, hình thành từ một trường vectơ $\vec{G}$, rất quan trọng trong vật lý: đó là *lưu thông* và *thông lượng*.

2.3.2.1. Lưu thông của một vectơ

Lưu thông C của một trường vectơ $\vec{G}$ trên một đường cong $\mathscr{C}$ có định hướng (kín hay không) được xác định bởi (*h*.21):

$$C = \int_{A\ (\text{đường cong } \mathscr{C})}^{B} \vec{G}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{M} \quad \text{hay} \quad C = \oint_{\text{đường cong kín } \mathscr{C}} \vec{G}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{M}.$$



H.20. *Diện tích của tam giác có gạch chéo bằng chuẩn của* $\frac{1}{2}\overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{M}$.

Như vậy diện tích $\vec{S}$ có thể được tính theo:

$$\vec{S} = \oint_{\text{đường chu vi } \mathscr{C}} \frac{1}{2}\overrightarrow{PM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{M}.$$

Chú ý:

Lưu thông của một vectơ dọc theo một đường cong kín gắn liền với toán tử rota (xem §5).

Lưu thông của một vectơ là một công cụ quan trọng trong điện từ học và trong cơ học chất lỏng.

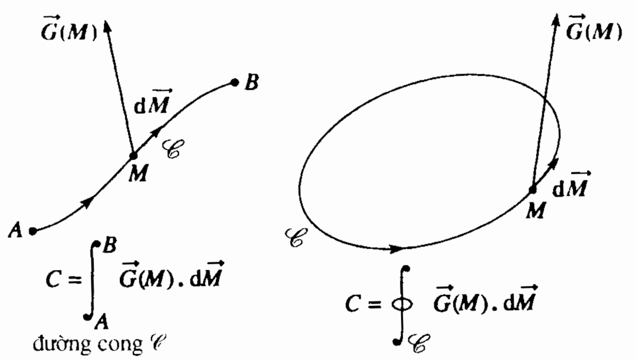
2.3.2.2. Thông lượng của một vectơ đi qua một mặt

Thông lượng Φ của một trường vectơ $\vec{G}$ đi qua một mặt Σ, mà mặt này phải có định hướng, được xác định bởi (*h*.22):

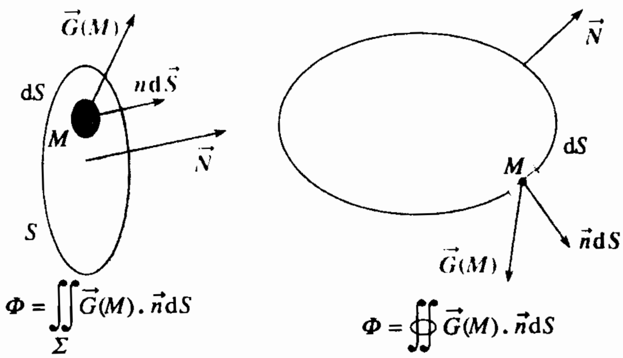
$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{G}(M).\mathrm{d}\vec{S} \ \text{ hay } \ \oiint_{\Sigma\,(\text{kín})} \vec{G}(M).\mathrm{d}\vec{S}.$$

Chú ý:

Thông lượng của một vectơ đi qua một mặt kín Σ được gắn với toán tử đive (xem §4).



H.21. *Định nghĩa lưu thông của một vectơ.*



H.22. *Định nghĩa thông lượng của một vectơ.*

Thông lượng của một vectơ đi qua một mặt kín hay không là một công cụ quan trọng trong:

- Điện học (vectơ mật độ dòng thể tích $\vec{j}_V$) ;
- Điện từ học (thông lượng của các vectơ trường $\vec{E}, \vec{B}, \vec{\Pi}, ...$) ;
- Cơ học chất lỏng (thông lượng của vectơ vận tốc).

Bây giờ hãy chú ý đến các toán tử mà khi tác dụng vào các trường vô hướng hay vectơ, thì biến đổi chúng thành các trường khác. Các toán tử này có một tính chất nội tại, nhưng có thể được biểu thị trong các tọa độ không gian khác nhau đã được định nghĩa trước đây, bằng cách dùng các đạo hàm riêng đối với các tọa độ không gian đó.

3 Toán tử građiên

3.1. Định nghĩa

Xét một trường vô hướng $g(M)$. Kết hợp với một độ chuyển dời nguyên tố $\mathrm{d}\vec{M}$ lại có một độ biến thiên nguyên tố $\mathrm{d}g$ của g : $\mathrm{d}g = g(M + \mathrm{d}\vec{M}) - g(M)$.

Toán tử gradiên (vi phân ở M) được xác định bởi:

$$dg = g(M + d\vec{M}) - g(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}_M(g).d\vec{M}.$$

Thường ta viết $dg = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(g).d\vec{M}$.

Toán tử gradiên tác dụng vào một trường vô hướng sẽ biến đổi nó thành một trường vectơ.

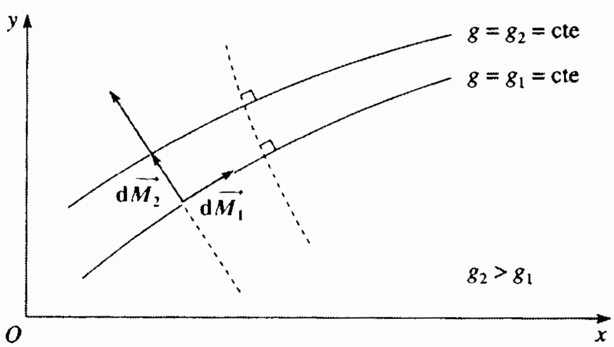
3.2. Tính chất

Gradiên là một đại lượng vi phân.

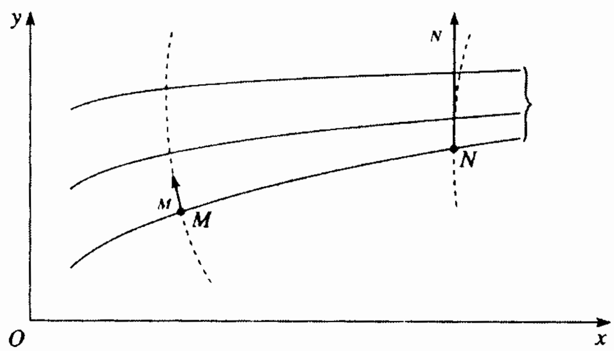
Tập hợp các điểm có g = cte xác định một mặt (*hình* 23).

• Nếu xuất phát từ một điểm của mặt đó, ta di chuyển một đoạn $d\vec{M}_1$ trên mặt này, nghĩa là trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt này ở điểm đang xét, thì $dg = 0$. Điều này hàm ý là vectơ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ trực giao với mọi $d\vec{M}$ trên bề mặt, vậy là trực giao với các mặt g = cte.

• Nếu bây giờ ta chuyển dời theo pháp tuyến thì dg là dương nếu $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ và $d\vec{M}_2$ cùng chiều: vậy $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ hướng về phía các g tăng.



H.23. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ *vuông góc với các mặt* g = cte *và hướng theo chiều các* g *tăng.*



H.24. *Các biến thiên không gian của* g *càng lớn thì gradiên sẽ có một giá trị càng lớn.*

Vectơ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ **:**

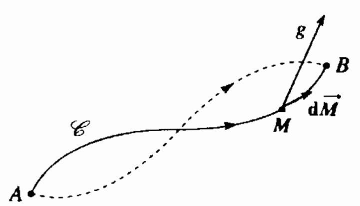
• **trực giao với các mặt** g **= cte ;**

• **hướng về phía các "g" tăng (như vậy, nó chỉ rõ đại lượng $g(M)$ biến thiên theo phương nào và theo chiều nào);**

• **chỉ rõ tầm mức lớn của độ biến thiên không gian của đại lượng "g" (*hình* 24).**

3.3. Lưu thông của một gradiên

3.3.1. Lưu thông của một gradiên từ A đến B không phụ thuộc đường đi.



H.25. *Tích phân:*

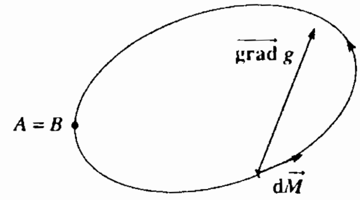
$$\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g(M).d\vec{M} = g(B) - g(A)$$

không phụ thuộc đường cong $\mathscr{C}$ *đi từ A đến B.*

Ta khảo sát lưu thông của một gradiên, nghĩa là đại lượng $\int_A^B \vec{G}.d\vec{M}$ với $\vec{G} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$. Biết rằng (theo định nghĩa của gradiên): $dg = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g.d\vec{M} = \vec{G}.d\vec{M}$, nên ta có thể viết (*h.*25) :

$$\int_A^B \vec{G}.\mathrm{d}\vec{M} = \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g.\mathrm{d}\vec{M} = \int_A^B \mathrm{d}g = g(B) - g(A)$$

Kết quả độc lập với đường cong đi từ A đến B.



H.26. $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g.\mathrm{d}\vec{M} = 0.$

3.3.2. Lưu thông của một gradiên trên một đường cong kín bằng không

Ta lại lấy biểu thức trước, nếu $B = A$, thì ta được (*hình* 26):

$$\int_A^B \vec{G}.\mathrm{d}\vec{M} = \oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g.\mathrm{d}\vec{M} = \oint \mathrm{d}g = 0.$$

Điều này có quan hệ với đồng nhất thức sau đây mà ta sẽ không chứng minh.

Nếu $\vec{G}$ là một gradiên $\vec{G} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$ thì khi đó $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{G} = \vec{0}$ tại mọi điểm của không gian (xem §5).

3.4. Gradiên trong vật lý

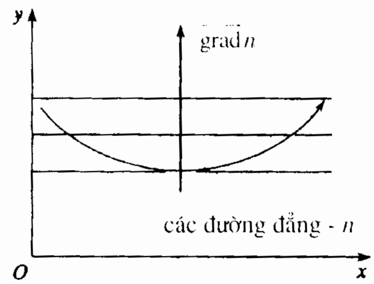
3.4.1. Gradiên điện thế: trường tĩnh điện

Ta đã thấy trong tĩnh điện là: một trường có bản chất tĩnh điện, xuất phát từ một điện thế V nhờ hệ thức $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ (*xem H–Prépa, điện từ học, năm thứ nhất*): thì trường phải vuông góc với các đường đẳng thế và hướng theo các điện thế giảm.

3.4.2. Gradiên nồng độ: sự khuếch tán của các hạt

Trong một môi trường mà mật độ hạt n không đồng đều (như vậy, lúc đó sẽ tồn tại một gradiên nồng độ), thì phải xuất hiện một hiện tượng khuếch tán hạt (*xem H–Prépa, Nhiệt động học, năm thứ nhất*), nghĩa là một mật độ thể tích của thông lượng hạt tỷ lệ với gradiên địa phương của nồng độ:

$$\vec{j}_n = -D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) \text{ (định luật FICK)}$$



H.27. *Đường đi của tia sáng trong một môi trường không đồng chất, trong đó tồn tại một gradiên chiết suất n (nguồn gốc của hiệu ứng ảo ảnh).*

3.4.3. Gradiên nhiệt độ: sự khuếch tán nhiệt

Trong một môi trường mà nhiệt độ không đồng đều (như vậy, lúc đó tồn tại một gradiên nhiệt độ), sẽ xuất hiện một hiện tượng khuếch tán nhiệt (*xem H–Prépa, Nhiệt động học, PC.PC, PSI và PSI, năm thứ hai*), nghĩa là một mật độ thể tích của thông lượng nhiệt tỷ lệ với gradiên địa phương của nhiệt độ:

$$\vec{j}_Q = -k\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T) \text{ (định luật FOURIER)}$$

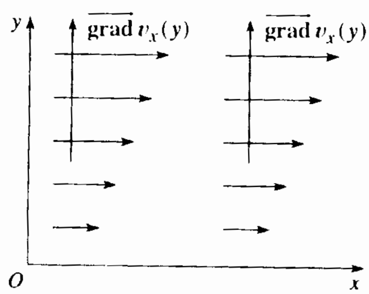
3.4.4. Gradiên chiết suất: độ lệch của một tia sáng

Ta đã biết rằng trong quang hình (*xem H–Prépa, Quang học, năm thứ nhất*) tồn tại một gradiên chiết suất n trong một môi trường không đồng nhất. Chiết suất này chịu trách nhiệm về độ lõm của một tia sáng (*hình* 27).

3.4.5. Gradiên vận tốc: sự khuếch tán động lượng

Trong một dòng chảy một chiều mà trường vận tốc theo hình thức luận Euler có dạng $\vec{v}(M,t) = v_x(y)\vec{e}_x$ chẳng hạn, thì sẽ tồn tại một gradiên của thành phần vận tốc $v_x(y)$: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}[v_x(y)]$ song song với (Oy) (*hình* 28). Gradiên này chịu trách nhiệm về một sự khuếch tán động lượng, do vậy chịu trách nhiệm về một lực bề mặt dạng (*xem chương* 5):

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta \left| \overrightarrow{\mathrm{grad}}[v_x(y)] \right| \mathrm{d}S\, \vec{e}_x.$$



H.28. *Trong dòng chảy này của chất lưu, thì gradiên vận tốc v_x khác không:*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v_x(y) \neq \vec{0}.$$

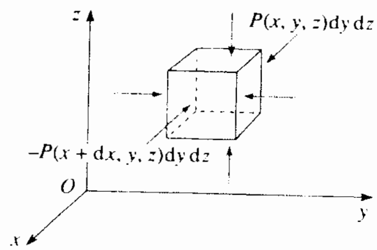
3.4.6. Đương lượng thể tích của các áp lực

Trường áp suất $P(M)$ trong một chất lưu có thể được mô tả dưới dạng một đương lượng thể tích (*hình* 29) (*xem chương* 4):

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau .$$

Đương lượng này xuất hiện trong phương trình EULER dưới dạng:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}}(P) \text{ (phương trình EULER).}$$



H.29. *Lực tổng hợp của các lực nén tác dụng lên một phần tử thể tích* $dx\,dy\,dz$ *bằng* $-(\overrightarrow{\text{grad}}P)dxdydz$.

3.5. Ví dụ về phép tính građiên

Ta hãy tính trực tiếp građiên của các trường vô hướng đơn giản và thường dùng trong vật lý.

3.5.1. Tính toán $\overrightarrow{\textbf{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right)$

Muốn tính $\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right)$, ta phải quan tâm tới độ biến thiên của đại lượng $\dfrac{1}{PM}$. Khi P cố định, thì $\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right)$ vuông góc với mặt $\dfrac{1}{PM} = \text{cte}$, do vậy vuông góc với một mặt cầu tâm P và bán kính PM.

Građiên được mang bởi $\overrightarrow{PM}$.

Građiên này hướng theo chiều của $\dfrac{1}{PM}$ tăng, vậy PM phải giảm, nghĩa là hướng từ M về P (*hình* 30), và nó sẽ càng lớn khi M càng gần P.

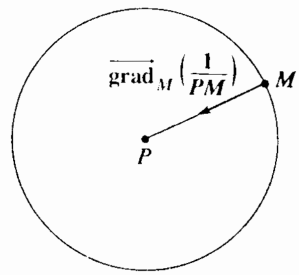
Ta đặt $\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right) = f(r)\vec{e}_r$ (với $\overrightarrow{PM} = r\vec{e}_r$ và $f(r) < 0$).

Biết rằng $\dfrac{1}{PM} = \dfrac{1}{r}$, $d\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{dr}{r^2} = f(r)dr$, hay $f(r) = -\dfrac{1}{r^2}$, vậy ta có:

$\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right) = -\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$, điều mà ta thường viết trong tọa độ cầu dưới dạng:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}_M\left(\frac{1}{PM}\right) = -\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}_P\left(\frac{1}{PM}\right).$$



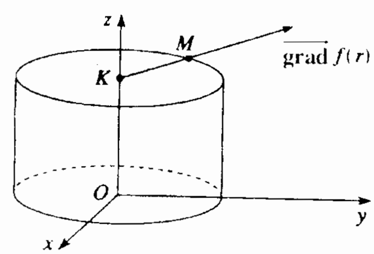
H.30. *Khuynh hướng của vectơ:* $\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right)$.

3.5.2. Trường vô hướng đối xứng trụ

Muốn tính $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r)$ (trong tọa độ trụ), ta phải xem xét độ biến thiên của đại lượng $f(r)$. Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r)$ vuông góc với mặt $f(r)$ = cte, do vậy vuông góc với một hình trụ có trục (Oz) và bán kính r. Građiên, được mang bởi $\overrightarrow{KM}$ (*hình* 31) có thể có dạng $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r) = g(r)\vec{e}_r$. Biết rằng $df(r) = g(r)dr$, nên ta được:

$$g(r) = \frac{df(r)}{dr}.$$

Trong tọa độ trụ, ta có $\overrightarrow{\textbf{grad}}f(r) = \dfrac{\mathbf{d}f(r)}{\mathbf{d}r}\vec{e}_r$.



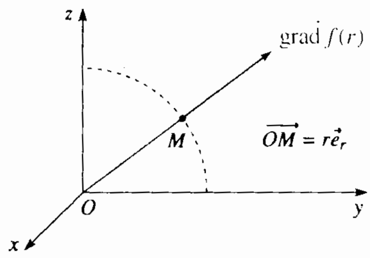
H.31. *Tọa độ trụ :* $\overrightarrow{\text{grad}}f(r) = \dfrac{df(r)}{dr}\vec{e}_r$.

3.5.3. Trường vô hướng đối xứng cầu

Muốn tính $\overrightarrow{\text{grad}}f(r)$ (trong tọa độ cầu), ta cần quan tâm tới độ biến thiên của đại lượng $f(r)$. Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r)$ vuông góc với mặt $f(r)$ = cte, do vậy vuông góc với mặt cầu tâm 0 và bán kính r. Građiên, được mang bởi OM (*hình* 32), có thể có dạng $\overrightarrow{\text{grad}}f(r) = g(r)\vec{e}_r$. Biết rằng $df(r) = g(r)dr$, nên ta có:

$$g(r) = \frac{df(r)}{dr}.$$

Trong toạ độ cầu, ta thu được $\overrightarrow{\textbf{grad}}\boldsymbol{f(r)} = \dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{f(r)}}{\mathbf{d}\boldsymbol{r}}\vec{e}_r$ **.**



H.32. *Tọa độ cầu:*

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(r) = \frac{df(r)}{dr}\vec{e}_r.$$

Ta lại tìm thấy đúng $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$ (*xem* §**3.5.1**).

3.5.4. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}(ab)$

Từ biểu thức của građiên trong tọa độ Descartes (*xem* §**3.6.1**) ta rút ra công thức đơn giản sau đây:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(ab) = a\,\overrightarrow{\text{grad}}\,b + b\,\overrightarrow{\text{grad}}\,a.$$

3.5.5. Trường hợp *g* cũng là hàm số của thời gian *t*

Nếu đại lượng g cũng phụ thuộc vào thời gian $g(M, t)$, thì ta phải viết hệ thức dưới đây:

Độ biến thiên toàn phần của $\boldsymbol{g}$ **là** $\mathbf{d}g = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,g\,.\mathbf{d}\overrightarrow{M} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\mathbf{d}t$ **.**

Điều này cho phép ta, khi biết trường vận tốc $\vec{v}(M,t)$ trong hình thức luận Euler, đưa vào cơ học chất lỏng khái niệm độ biến thiên toàn phần Dg trong trường hợp mà ta buộc phải có $d\overrightarrow{M} = \vec{v}(M,t)dt$.

Độ biến thiên toàn phần của $\boldsymbol{g}$ **được viết** $\mathbf{D}g = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,g\,.\mathbf{d}\overrightarrow{M} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\mathbf{d}t$ **với:**

$\mathbf{d}\overrightarrow{M}(\mathbf{d}x, \mathbf{d}y, \mathbf{d}z) = \vec{v}(M,t)\mathbf{d}t$ **.**

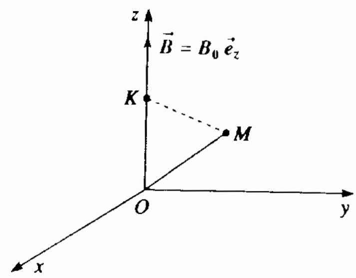
3.6. Các biểu thức giải tích

3.6.1. Tọa độ Descartes

Trong tọa độ Descartes, ta viết $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x}dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}dz$. Như vậy, trong hệ tọa độ này biểu thức građiên có dạng:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,g = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial z}\end{array}\right..$$

Từ hệ thức trên, ta có thể chứng minh rằng $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{B}.\overrightarrow{OM}) = \vec{B}$, nếu trường các vectơ $\vec{B}$ là đều: một phép tính thật đơn giản ở chỗ chỉ việc cho $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ và áp dụng hệ thức trên (*hình* 33).



H33. *Các mặt phải sao cho $\vec{B}.\overrightarrow{OM}$ không đổi, là các mặt phẳng trực giao với (Oz). Vậy $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{B}.\overrightarrow{OM})$ được mang bởi $\vec{B}$.*

3.6.2. Tọa độ trụ và cầu

Khi biểu thị rõ ràng các vi phân của g trong tọa độ trụ:

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial g}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

thì ta nhận được ngay biểu thức của gradiên trong hệ tọa độ này (chú ý: $\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$):

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,g = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{array}\right.,$$

và cũng thế, trong tọa độ cầu ta có:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,g = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial g}{\partial \varphi} \end{array}\right..$$

3.7. Toán tử "$\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}$"

3.7.1. Toán tử "$\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}$" áp dụng cho một vô hướng

Đối với một trường vô hướng g, ta có thể kết hợp biểu thức $\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\,g$, trong đó $\vec{A}$ là một trường vectơ. Ta biểu thị kết quả trong tọa độ Descartes:

$$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)g = \left(A_x\frac{\partial g}{\partial x} + A_y\frac{\partial g}{\partial y} + A_z\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Chú ý rằng biểu thức viết trong hệ tọa độ Descartes này cũng có thể được viết trong các hệ tọa độ khác. Ví dụ trong tọa độ trụ, ta có:

$$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)g = \left(A_r\frac{\partial}{\partial r} + A_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)g(r,\theta,z).$$

Ta gặp toán tử này trong cơ học chất lỏng khi phải tính đạo hàm toàn phần của một vô hướng, lúc mà $\vec{A}(M,t) = \vec{v}(M,t)$ là trường các vận tốc chất lưu trong hình thức luận Euler. Như vậy, đạo hàm toàn phần của khối lượng riêng có dạng:

$$\frac{\mathrm{D}\rho(M,t)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \vec{v}(M,t).\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho(M,t),$$

phương trình này dẫn tới phương trình bảo toàn khối lượng (*xem chương 1 và 2*):

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

3.7.2. Toán tử "$\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}$" áp dụng cho một vectơ

Xuất phát từ một trường vectơ $\vec{G}$, ta nghiên cứu biểu thức $(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}$, trong đó $\vec{A}$ là một trường vectơ. Trong hệ tọa độ Descartes, trường vectơ $\vec{G}$ có ba thành phần G_x, G_y và G_z. Nếu ta kết hợp với ba trường vô hướng mới này, các biểu thức, $\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\,G_x$, $\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\,G_y$ và $\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\,G_z$ thì lúc đó các biểu thức này cấu thành ba thành phần của một trường vectơ mới được ký hiệu theo định nghĩa $(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}$.

Trong thực tế, $(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}$ được viết trong hệ tọa độ Descartes:

$$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G} = \left| \begin{array}{l} A_x \dfrac{\partial G_x}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial G_x}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial G_x}{\partial z} \\ A_x \dfrac{\partial G_y}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial G_y}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial G_y}{\partial z} \\ A_x \dfrac{\partial G_z}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial G_z}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial G_z}{\partial z} \end{array} \right. ,$$

hay bằng:

$$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G} = \left| \begin{array}{l} \left(A_x \dfrac{\partial}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial}{\partial z}\right) G_x \\ \left(A_x \dfrac{\partial}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial}{\partial z}\right) G_y \\ \left(A_x \dfrac{\partial}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial}{\partial z}\right) G_z \end{array} \right. ,$$

hay: $$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G} = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \left| \begin{array}{l} G_x \\ G_y \\ G_z \end{array} \right. .$$

Trong tọa độ trụ ta có:

$$\left(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G} = \left(A_r \frac{\partial}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left[G_r \vec{e}_r + G_\theta \vec{e}_\theta + G_z \vec{e}_z\right],$$

và đừng quên rằng : $\dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$ và $\dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$.

Toán tử này gặp thấy trong:

- cơ học chất lỏng khi tính đạo hàm toàn phần của một vô hướng, lúc mà $\vec{A}(M,t) = \vec{v}(M,t)$, trường các vận tốc Euler của một chất lỏng.

Thành thứ gia tốc của một hạt chất lỏng được xác định bằng biểu thức (*xem chương 1*):

$$\vec{a}(M,t) = \frac{D\vec{v}(M,t)}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(M,t).\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(M,t);$$

- điện từ học khi tính tổng hợp lực của các lực tác dụng lên một lưỡng cực điện (hay từ) cứng, đặt trong một trường ngoài không đổi:

$$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$$

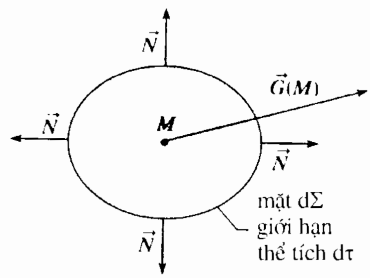
với $\vec{p} = \text{cte}$ (*xem H–Prépa, Điện từ học, năm thứ nhất*).

Chú ý : Trong trường hợp toán tử $(\vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}})$ *áp dụng vào vectơ* $\vec{A}$, *thì ta có đồng nhất thức sau:*

$$(\vec{A}.\overrightarrow{grad})\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{A^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \wedge \vec{A}\,.$$

Ta nhanh chóng thu được công thức này khi dùng các tọa độ Descartes. Công thức này có ích trong cơ học chất lỏng khi thay $\vec{A}$ *bằng* $\vec{v}$ *(xem* **§5.4.2**) :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v} \;\text{ với }\; \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}.$$



H.34. *Thông lượng đi ra* $d\Phi$ *của G, qua diện tích nguyên tố* $d\Sigma$ *giới hạn thể tích* $d\tau$ *tâm M, thì bằng:* $d\Phi = \text{div}\vec{G}d\tau$.

4 Toán tử đive

4.1. Định nghĩa - Giải thích

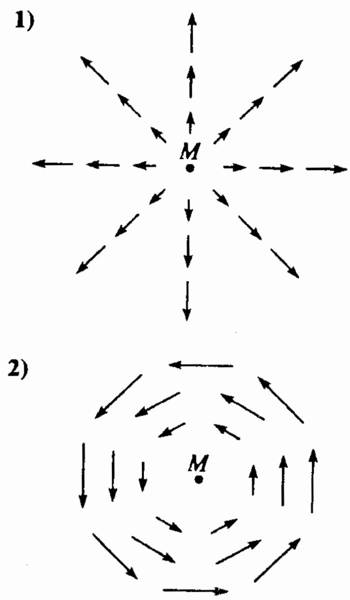
Xét một trường vectơ $\vec{G}$ và phần tử thể tích $d\tau$ kết hợp với một điểm M trong không gian. Thông lượng nguyên tố $d\Phi$ (theo quy ước đi ra) của trường $\vec{G}$ qua mặt kín nguyên tố $d\Sigma$, giới hạn thể tích $d\tau$, được biểu thị theo đive của trường vectơ $\vec{G}$ dưới dạng (*hình* 34) :

$$d\Phi = \text{div}(\vec{G})d\tau\ .$$

Toán tử đive ở M của trường $\vec{G}$ khi đó được xác định bởi hệ thức :

$$\mathbf{d\Phi = div\,\vec{G}\,d\tau\,.}$$

Toán tử đive, được xác định theo cách nội tại như vậy, sẽ biến đổi một trường vectơ thành một trường vô hướng. Ý nghĩa vật lý của toán tử đive có liên hệ mật thiết với khái niệm về thông lượng: một trường vectơ sẽ "phân kỳ" tại một điểm nếu thông lượng của nó đi qua một thể tích nguyên tố kết hợp với điểm đó là khác không. Rõ ràng là, tại M, trường (1) phân kỳ còn trường (2) không phân kỳ (*hình* 35).



H.35. • **Trường hợp 1 :** *trường vectơ phân kỳ xuất phát từ một "nguồn" ở M (chú ý : trường có thể có đive bằng không ở khắp mọi nơi, trừ tại M).*
• **Trường hợp 2 :** *Trường trực xuyên tâm này bao giờ cũng có đive bằng không.*

4.2. Định lý GREEN-OSTROGRADSKI

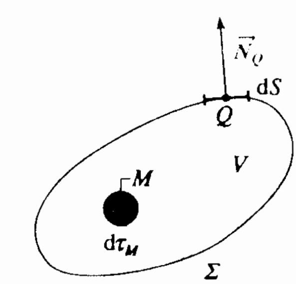
Việc xác định toán tử đive đưa vào đẳng thức:

$$d\Phi = \text{div}\,\vec{G}\,d\tau = "\vec{G}.d\vec{S}",$$

trong đó $d\vec{S}$ là mặt kín nguyên tố giới hạn thể tích nguyên tố $d\tau$. Khi tích phân đẳng thức này theo một thể tích V bất kỳ, thì ta được (với điều kiện là trường vectơ $\vec{G}$ không biểu hiện tính gián đoạn trên một mặt kín hay không, nằm bên trong thể tích V) định lý GREEN-OSTROGRASKI (*hình* 36).

Thông lượng đi ra của một trường vectơ $\vec{G}$ (không biểu hiện tính gián đoạn trên một mặt kín hay không, nằm bên trong thể tích V) qua một mặt kín Σ thì bằng tích phân đive của nó theo thể tích V giới hạn bởi mặt kín này

$$\oiint_{\text{mặt kín }\Sigma} \vec{G}(Q).\vec{N}_Q dS = \iiint_{\text{thể tích }V} \text{div}_M(\vec{G}(M))d\tau_M\,.$$

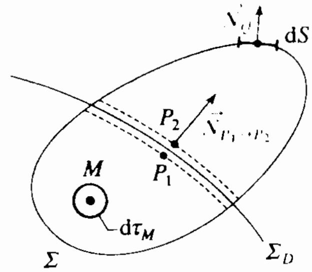


H.36. *Định lý GREEN–OSTROGRADSKI.*

Nếu tồn tại một mặt gián đoạn Σ_D, thì ta phải viết (*hình* 37) :

$$\underset{\text{mặt kín }\Sigma}{\oiint} \vec{G}(Q).\vec{N}_Q \mathrm{d}S = \underset{\text{thể tích }V}{\iiint} \mathrm{div}_M(\vec{G}(M))\mathrm{d}\tau_M$$

$$+ \underset{\substack{\text{mặt gián}\\ \text{đoạn }\Sigma_D}}{\iint} (\vec{G}(P_2) - \vec{G}(P_1)).\vec{N}_{P_1 \to P_2} \mathrm{d}S \,.$$



H.37. *Sự tồn tại của một mặt gián đoạn* Σ.

Điều quan trọng phải chú ý là, theo đẳng thức này, thì thông lượng của một trường vectơ đi qua một mặt kín bất kỳ, thoạt nhìn phụ thuộc vào các giá trị của trường này ở ngang tầm của mặt đó, có thể được tính toán xuất phát từ một tích phân thể tích mà chính nó phụ thuộc vào các giá trị của trường ở bên trong mặt kín.

4.3. Trường có thông lượng bảo toàn

4.3.1. Định nghĩa

Mọi trường có đive đồng nhất không, đều có thông lượng triệt tiêu qua mọi mặt kín: ta nói trường có thông lượng bảo toàn.

4.3.2. Một vectơ có thông lượng bảo toàn là một rota

Ta sẽ thấy rằng (nhưng ta sẽ không chứng minh) điều kiện cần và đủ để một trường có thông lượng bảo toàn: trường đó phải là một trường các rota.

$$\mathbf{div}(\vec{B}) = 0 \ \ \textbf{tương đương với} \ \ \vec{B} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{A})$$

4.3.3. Sự bảo toàn thông lượng dọc theo một ống trường

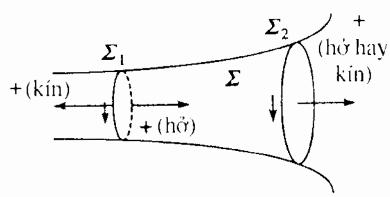
Ta hãy dựng một mặt kín Σ xuất phát từ một ống trường (tập hợp các đường sức trường tì lên một đường chu vi) và hai tiết diện Σ_1 và Σ_2 của ống này; một trường có thông lượng bảo toàn là trường có thông lượng triệt tiêu qua mặt Σ (*hình* 38). Thật vậy, thông lượng này bằng không khi đi qua mặt bên của Σ nhờ cách dựng hình. Hơn nữa, thông lượng qua Σ_1 đổi dấu tùy theo mặt này được coi như hở (và có định hướng như Σ_2) hay kín, nghĩa là thuộc về Σ. Kết quả là thông lượng của trường vectơ giống như nhau khi qua Σ_1 và Σ_2 là những mặt hở có định hướng đồng nhất.

4.3.4. Áp dụng

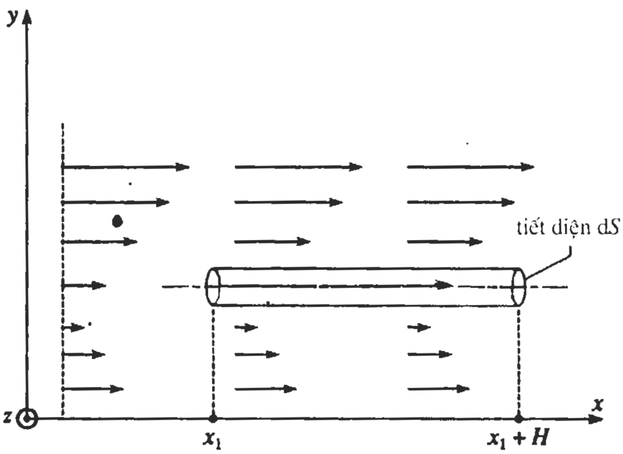
• Ta hãy khảo sát trường vectơ được biểu diễn trên *hình* 39, dạng $\vec{v}(M) = v_x(y)\vec{e}_x$ (trường vận tốc Euler của một chất lưu): trường này có đive triệt tiêu.

Ta xét một ống trường chiều dài H tiết diện không đổi dS. Biết rằng $\vec{v}(x_1) = \vec{v}(x_1 + H)$, nên thông lượng của $\vec{v}$ đi qua mặt dS ở x_1 bằng thông lượng của $\vec{v}$ đi qua cùng mặt dS ở $x_1 + H$, và điều này đúng với H bất kỳ. Như vậy, thông lượng là không đổi khi đi qua mọi ống trường, nghĩa là trường vận tốc có thông lượng bảo toàn, và ta lại tìm thấy đive của trường vectơ này triệt tiêu: $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$. Đây là một dòng chảy không thể nén được.

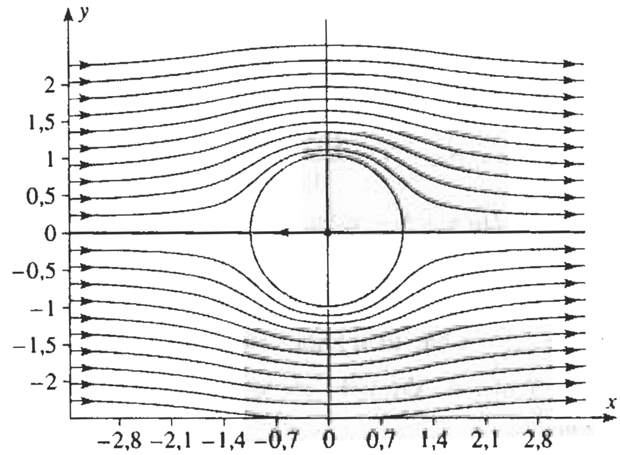
Bù lại, trường này không có rota triệt tiêu (*xem* §**5.5.1**).



H.38. *Trong một miền có thông lượng bảo toàn, thì thông lượng được bảo toàn dọc theo một ống trường :* $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$.

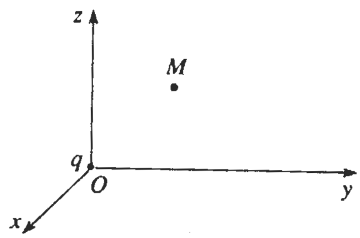


H.39. *Trường các vectơ dạng $v_x(y)\vec{e}_x$ có đive triệu tiêu, nhưng rota không triệt tiêu.*



H.40. *Trường vận tốc của chất lỏng này ở dòng chảy không thể nén, là trường đều khi ở xa nhiễu loạn (hình trụ). Vận tốc "lớn" trong miền có các đường trường sít lại nhau.*

• Trong một trường có thông lượng bảo toàn, thì các phần không gian mà ở đó các đường trường sít lại nhau (*hình* 40), chỉ rõ rằng, trong các miền này, trường mạnh hơn (nghĩa là có môđun lớn hơn).



H.41. *Cho một điện tích "điểm" trong không gian*
$\text{div}\vec{E} = +\infty$ ở O ($\rho = +\infty$);
$\text{div}\vec{E} = 0$ ở $M(\rho = 0)$.

4.4. Toán tử đive trong vật lý

4.4.1. Các nguồn điện trường

Trong tĩnh điện, các nguồn của trường là các điện tích; phương trình vi phân liên kết điện trường và các điện tích có mật độ khối ρ (*hình* 41) (*xem H–prépa, điện từ học, PC và PSI, năm thứ hai*) là: $\text{div}_M(\vec{E}(M)) = \dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$.

Các hệ quả của phương trình này là:

• trong một *miền không điện tích*, thì vectơ $\vec{E}$ có thông lượng bảo toàn;

• vectơ $\vec{E}$ tuân theo định lý GAUSS : thông lượng đi ra của $\vec{E}$ qua một mặt kín thì bằng tổng các điện tích ở bên trong mặt này chia cho ε_0 (*hình* 42).

4.4.2. Phương trình bảo toàn

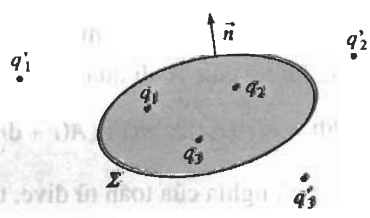
Trong vật lý, có nhiều phương trình bảo toàn:

• phương trình bảo toàn số hạt với mật độ khối n(M,t), khi có mặt một mật độ thể tích lưu lượng hạt $\vec{j}_n(M,t)$ **(xem H-Prépa, Nhiệt động học,** năm thứ nhất):

$$\text{div}(\vec{j}_n) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0\,;$$

• phương trình bảo toàn điện tích với mật độ khối $\rho(M,t)$, khi có mặt một mật độ dòng thể tích $\vec{j}(M,t)$ (*xem H–Prépa, Điện từ học, năm thứ hai*):

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,;$$



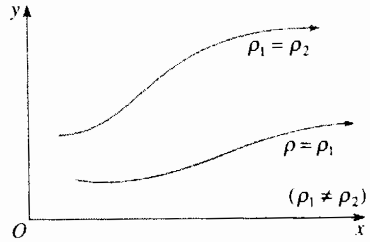
H.42. *Gọi $\vec{E}$ là trường tĩnh điện tổng cộng được tạo ra bởi các điện tích ở trong (q_i) và ở ngoài (q'_i) mặt Σ. Định lý Gauss cho:* $\displaystyle\oiint_{\Sigma} \vec{E}.\vec{n}\,dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$.

• phương trình bảo toàn năng lượng điện từ với mật độ thể tích $u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ khi có mặt một mật độ thể tích lưu lượng công suất $\vec{\Pi}$ (vectơ POYNTING: $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$) và một lưu lượng dòng thể tích $\vec{j}$ (*xem H–Prépa, Điện từ học, năm thứ hai*):

$$\mathrm{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j}\,.\vec{E}\,;$$

• phương trình bảo toàn khối lượng với khối lượng riêng $\rho(M,t)$, khi có mặt một mật độ thể tích lưu lượng khối $\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$ (*xem chương* 2):

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,.$$



H.43. *Cho một dòng chảy dừng, độc lập với thời gian. Nếu* $\rho = \mathrm{cte}$ *dọc theo một đường trường, thì dòng chảy là không thể nén được và nghiệm đúng* $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

4.4.3. Dòng chảy không thể nén được

Phương trình bảo toàn khối lượng cho ta $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; phương trình còn có thể được viết (bằng cách đưa vào phép lấy đạo hàm toàn phần) $\rho\,\mathrm{div}(\vec{v}) + \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$ (*xem chương* 2). Dòng chảy không thể nén, được xác định bởi hệ thức $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$, kéo theo $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$. Khi có một dòng chảy không thể nén được, trong một môi trường không nguồn, thì vectơ $\vec{v}$ có thông lượng bảo toàn (*h*.43).

4.5. Các ví dụ tính toán

Ta hãy tính đivc của các trường vectơ đơn giản và thường gặp trong vật lý.

4.5.1. Trường véc tơ đối xứng trụ

Cho một trường vec tơ (trong tọa độ trụ) dạng :

$$\vec{A}(r,t) = A(r,t)\vec{e}_r\,.$$

Muốn tính đivc của trường các vectơ đối xứng trụ này, ta hãy xét một thể tích nguyên tố ở giữa hai hình trụ chiều cao *h*, bán kính *r* và *r* + d*r* (*h*.44). Thông lượng của $\vec{A}$ đi qua mặt kín kết hợp với thể tích này thì bằng:

$$\mathrm{d}\Phi = -(A(r,t)2\pi rh) + (A(r+\mathrm{d}r,\,t)2\pi(r+\mathrm{d}r)h) = 2\pi h\frac{\partial[rA(r,t)]}{\partial r}\mathrm{d}r\,.$$

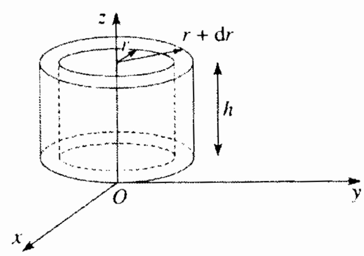
Theo định nghĩa của toán tử đivc, thì ta có :

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))\mathrm{d}\tau = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))2\pi r\,\mathrm{d}r\,h,$$

điều này cho bởi phép đồng nhất :

$$\mathrm{d}\Phi = 2\pi h\frac{\partial[rA(r,t)]}{\partial r}\mathrm{d}r = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))2\pi r\,\mathrm{d}r\,h\,,$$

nghĩa là : $\mathrm{div}(\vec{A}(r,t)) = \frac{1}{r}\frac{\partial[rA(r,t)]}{\partial r}$.



H.44. *Thông lượng* dΦ *của* $\vec{A}$ *đi qua mặt kín giới hạn thể tích ở giữa hai hình trụ bán kính r và r +* d*r, chiều cao h, thì bằng :*

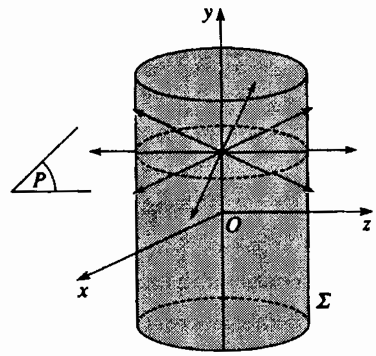
$$\mathrm{d}\Phi = 2\pi h\frac{\partial}{\partial r}(rA)\mathrm{d}r\,.$$

Trong tọa độ trụ, ta được :

• $\mathbf{div}(\vec{e}_r) = \frac{1}{r}$;

• $\mathbf{div}(\vec{r}) = \mathbf{div}(r\vec{e}_r) = 2$;

• $\mathbf{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r}\right) = \mathbf{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = 0$ (trừ tại $r = 0$ thì đive bằng vô cùng).



H.45. *Sự vẽ topo của trường* $\frac{\vec{e}_r}{r}$ *trong tọa độ trụ. Đive của vectơ này triệt tiêu* $\left(\mathrm{div}\frac{\vec{e}_r}{r} = 0\right)$ *mặc dù thông lượng đi ra qua một hình trụ bán kính r và chiều cao h lại khác không và bằng 2πh !*

Kết quả cuối cùng kể trên dẫn đến hai lời bình chú quan trọng như sau:

• Kết quả này là chủ yếu vì nó chứng tỏ rằng một trường đối xứng trụ ở $\frac{1}{r}$ sẽ có đive triệt tiêu : thực ra đó là trường hợp duy nhất của một trường xuyên tâm đối xứng trụ có đive triệt tiêu.

• Kết quả này có vẻ như trái ngược với sự vẽ topo của trường (*h*.45).

• Thật vậy, thông lượng của véc tơ $\frac{\vec{e}_r}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, đi qua một mặt hình trụ trục (Oz), chiều cao h và bán kính r, là khác không và bằng $2\pi h$, trong khi đive của vectơ này lại triệt tiêu ! Điều này là do tính kỳ dị ở $r = 0$, mà đối với nó thì $\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$ là vô hạn, và tích phân :

$$\oiint_{\text{mặt kín }\Sigma} \vec{G}(Q).\vec{N}_Q \mathrm{d}S = \iiint_{\text{thể tích } V} \mathrm{div}_M(\vec{G}(M))\mathrm{d}\tau_M.,$$

lúc đó sẽ khác không.

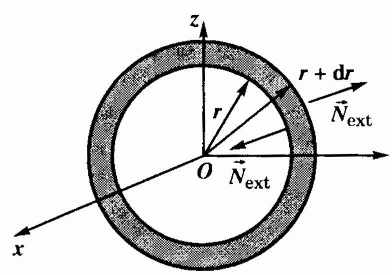
4.5.2. Trường vec tơ đối xứng cầu

Cho một trường vectơ (trong tọa độ cầu) có dạng :

$$\vec{A}(r,t) = A(r,t)\vec{e}_r.$$

Để tính đive của trường vectơ đối xứng cầu này, ta hãy xét một thể tích nguyên tố ở giữa hai mặt cầu bán kính r và $r + \mathrm{d}r$ (*hình* 46). Thông lượng của $\vec{A}$ đi qua mặt kín kết hợp với thể tích này thì bằng :

$$\mathrm{d}\Phi = -(A(r,t)4\pi r^2) + (A(r+\mathrm{d}r,t)4\pi(r+\mathrm{d}r)^2) = 4\pi \frac{\partial\left[r^2 A(r,t)\right]}{\partial r}\mathrm{d}r.$$



H.46. *Thông lượng đi ra* dΦ *của* $\vec{A}$ *qua mặt kín giới hạn thể tích ở giữa hai mặt cầu bán kính r và r + dr thì bằng*

$$\mathrm{d}\Phi = 4\pi\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A)\mathrm{d}r.$$

Theo định nghĩa của toán tử đive, ta có:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))\mathrm{d}\tau = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))4\pi r^2 \mathrm{d}r.$$

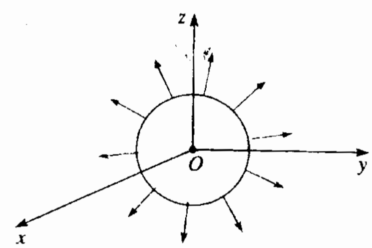
điều này sẽ cho bằng phép đồng nhất:

$$\mathrm{d}\Phi = 4\pi \frac{\partial\left[r^2 A(r,t)\right]}{\partial r}\mathrm{d}r = \mathrm{div}(\vec{A}(r,t))4\pi r^2 \mathrm{d}r.$$

nghĩa là: $\mathrm{div}(\vec{A}(r,t)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A(r,t)\right]}{\partial r}$.

Trong tọa độ cầu, ta được:

- $\mathbf{div}(\vec{e}_r) = \dfrac{2}{r}$;
- $\mathbf{div}(\vec{r}) = \mathbf{div}(r\vec{e}_r) = 3$;
- $\mathbf{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \mathbf{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ **(trừ tại $r = 0$ mà ở đó đive là vô hạn).**



H.47. *Sự vẽ topo của trường* $\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$ *trong tọa độ cầu. Đive của vectơ này triệt tiêu* $\left(\mathrm{div}\dfrac{\vec{e}_r}{r^2} = 0\right)$, *mặc dù thông lượng đi ra qua một mặt cầu bán kính r lại khác không và bằng* 4π.

Kết quả cuối cùng này lại dẫn đến hai lời bình chú rất quan trọng:

- Nó chứng tỏ rằng một trường đối xứng cầu ở $\dfrac{1}{r^2}$ có đive triệt tiêu; thực ra đây là trường hợp duy nhất của một trường xuyên tâm đối xứng cầu có đive triệt tiêu.
- Kết quả này có thể dường như mâu thuẫn với sự vẽ bản đồ topo của trường (*h*.47). Thật vậy, thông lượng đi ra của vectơ $\dfrac{\vec{e}_r}{r^2} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, qua một mặt cầu tâm O, bán kính r, thì khác không và bằng 4π, trong khi đive của vectơ này triệt tiêu! Điều này là do tính kỳ dị ở $r = 0$, mà đối với nó thì $\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$ là vô hạn, và tích phân:

$$\oiint_{\text{mặt kín } \Sigma} \vec{G}(Q).\vec{N}_Q \mathrm{d}S = \iiint_{\text{thể tích } V} \mathrm{div}_M(\vec{G}(M))\mathrm{d}\tau_M$$

lúc đó sẽ khác không.

4.5.3. Tính $\mathrm{div}(u\vec{A})$

Từ biểu thức đive trong tọa độ Descartes (*xem* §**4.6.1**), ta có thể thiết lập một công thức quan trọng mới (vì rất tiện lợi).

$$\mathbf{div}(u\vec{A}) = u\,\mathbf{div}\vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,u.\vec{A}$$

Công thức này cho phép thấy được một cách tính khả dĩ khác đối với đive của một trường đối xứng cầu dạng $f(r,t)\vec{e}_r$. Thật vậy:

$$\mathrm{div}\left[f(r,t)\vec{e}_r\right] = f(r,t)\mathrm{div}\vec{e}_r + \overrightarrow{\mathrm{grad}}[f(r,t)].\vec{e}_r = \frac{2f(r,t)}{r} + \frac{\partial f(r,t)}{\partial r},$$

hay :

$$\mathrm{div}\left[f(r,t)\vec{e}_r\right] = \mathrm{div}\left[r^2 f(r,t)\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right]$$

$$= r^2 f(r,t)\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[r^2 f(r,t)\right].\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 f(r,t)\right]}{\partial r}.$$

Trong trường hợp của một trường Newton dạng $\vec{A} = \dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$, thì trong tọa độ cầu, ta được:

$$\mathrm{div}\left(\frac{k}{r^2}\vec{e}_r\right) = \frac{2k}{r^3} - \frac{2k}{r^3} = 0,$$

điều này phù hợp với kết quả trước đây.

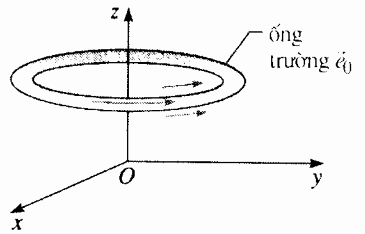
4.5.4. Tính $\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B})$

Đive của một tích vectơ được xác định bởi công thức sau:

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A}.\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}.\operatorname{rot}\vec{A}$$

Có thể kiểm nghiệm công thức này bằng cách dùng các kết quả ở các mục §**4.6.1** và §**5.5.1**.

4.5.5. Trường trực xuyên tâm



H.48. *Ống trường của vectơ $\vec{e}_\theta$ được cấu thành từ các hình xuyến trục (Oz). Biết rằng $|\vec{e}_\theta| = 1$, nên điều này có nghĩa là $\operatorname{div}\vec{e}_\theta = 0$.*

Một ví dụ hấp dẫn khác là ví dụ về vectơ $\vec{e}_\theta$ của các tọa độ trụ. Các đường trường của $\vec{e}_\theta$ là các vòng tròn trục (Oz). Các ống trường, do vậy, là các hình xuyến (có tiết diện không đổi) trục (Oz) (*h*.48). Chuẩn của $\vec{e}_\theta$ là không đổi và bằng 1, điều này có nghĩa là thông lượng của vectơ này được bảo toàn, như vậy đive của trường vectơ này bằng không.

Sự chứng minh đơn giản này có thể được mở rộng cho mọi trường vectơ:

$$\vec{A}(r) = f(r)\vec{e}_\theta .$$

Trong tọa độ trụ, $\operatorname{div}\left[f(r)\vec{e}_\theta\right] = 0$: trường các vectơ $f(r)\vec{e}_\theta$ có thông lượng bảo toàn.

Đặc biệt, $\vec{e}_\theta$ là một trường vectơ có thông lượng bảo toàn.

4.6. Biểu thức giải tích

4.6.1. Tọa độ Descartes

Trong tọa độ Descartes, xuất phát từ định nghĩa, ta có thể nhận được biểu thức giải tích của đive. Lấy một thể tích $d\tau = dxdydz$ và ta nói rõ cách tính thông lượng của $d\Phi$ của trường $\vec{G}$ đi qua sáu mặt của hình lập phương nguyên tố này. Như vậy ta được (*h*.49):

$$d\Phi_1 = -G_x(x,y,z)dydz + G_x(x+dx,y,z)dydz \text{ (mặt 1 và 2)}$$

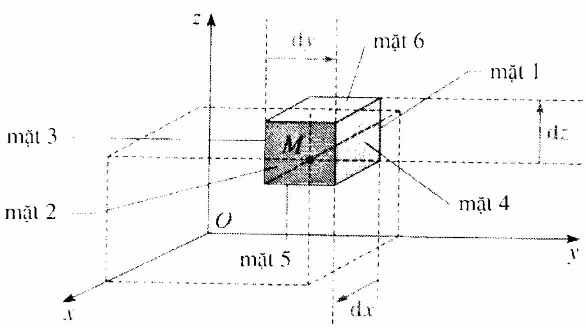
$$d\Phi_2 = -G_y(x,y,z)dxdz + G_y(x,y+dy,z)dxdz \text{ (mặt 3 và 4)}$$

$$d\Phi_3 = -G_z(x,y,z)dxdy + G_z(x,y,z+dz)dxdy \text{ (mặt 5 và 6)},$$

nghĩa là:

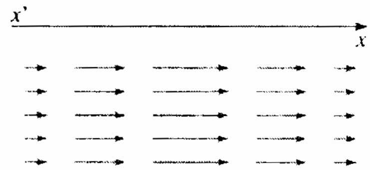
$$d\Phi = \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)dxdydz = \operatorname{div}\vec{G}\,d\tau = \operatorname{div}\vec{G}\,dx\,dy\,dz .$$

do đó: $\operatorname{div}\vec{G} = \dfrac{\partial g_x}{\partial x} + \dfrac{\partial g_y}{\partial y} + \dfrac{\partial g_z}{\partial z}$.



H.49. *Sự thể hiện sáu mặt cho phép tính toán thông lượng nguyên tố.*

*Chú ý : Với hai thí dụ trên (xem §**4.1**) ta đã thấy rằng sự nghiên cứu một bản đồ trường có thể cho những điều chỉ dẫn về đive tại một điểm của trường vectơ. Cần phải thận trọng và tránh một sự giải thích quá vội vã. Thành thử, trường trên hình 50 không có đive triệt tiêu, mặc dù các đường trường, tất cả đều song song nhau: vậy trường có dạng $f(x)\vec{e}_x$ và đive của nó tại mọi điểm có giá trị $f'(x)$.*



H.50. *Trường này không có đive triệt tiêu.*

4.6.2. Tọa độ trụ

Trong tọa độ trụ, ta cũng sẽ nhận được biểu thức giải tích của đive đi từ định nghĩa bằng cách tính thông lượng $d\Phi$ của trường $\vec{G}$ đi qua sáu mặt của hình "lập phương" nguyên tố có thể tích $d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$. Như vậy ta được (*h*.51):

$$d\Phi_1 = -G_r(r,\theta,z)(rd\theta\,dz) + G_r(r+dr,\theta,z)((r+dr)d\theta\,dz) \text{ (mặt 1 và 2)}$$

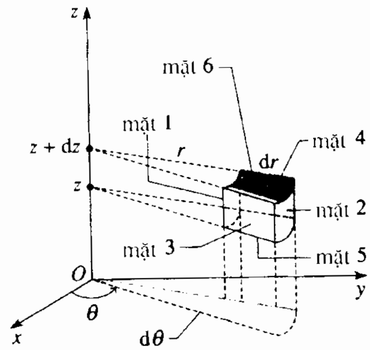
$$d\Phi_2 = -G_\theta(r,\theta,z)(drdz) + G_\theta(r,\theta+d\theta,z)(drdz) \text{ (mặt 3 và 4)}$$

$$d\Phi_3 = -G_z(r,\theta,z)(rd\theta\,dz) + G_z(r,\theta,z+dr)(rd\theta\,dr) \text{ (mặt 5 và 6)}$$

hay:

$$d\Phi = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)(r\,dr\,d\theta\,dz) = \mathrm{div}\vec{G}d\tau = \mathrm{div}\vec{G}(rdrd\theta\,dz)$$

vậy: $$\mathrm{div}\vec{G} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}.$$



H.51. *Thông lượng* $d\Phi$ *của* $\vec{G}$ *đi qua mặt kín nguyên tố này bằng :*

$$d\Phi = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)r\,dr\,d\theta\,dz.$$

4.6.3. Tọa độ cầu

Biểu thức đive trong tọa độ cầu lại tinh tế hơn, nhưng ta sẽ đưa nó ra mà không chứng minh. Ta có:

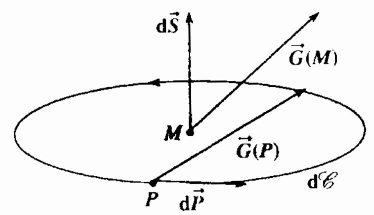
$$\mathrm{div}\vec{G} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,G_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial G_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Chú ý: Nếu ta lại xét, trong tọa độ cầu, trường xuyên tâm $\vec{A}(r) = \dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$, *thì thông lượng của nó đi qua toàn mặt cầu bán kính r và tâm ở gốc tọa độ sẽ có giá trị* $4\pi k$*: như vậy thông lượng này độc lập với r, không đổi và khác không. Ta có thể ngạc nhiên khi thấy thông lượng này đi qua mặt kín (mặt cầu bán kính r) khác không, mặc dù đive lại triệt tiêu. Nhưng ta đã thấy rõ điều này, và đừng quên rằng trường không được xác định ở gốc tọa độ vì lúc này nó là một điểm kỳ dị mà tại đó không thể tính toán được cả trường lẫn đive của nó. Nghịch lý hiển nhiên như vậy đã được loại trừ.*

5 Toán tử rota

5.1. Định nghĩa - Giải thích

Cho một trường vectơ $\vec{G}$ và một mặt nguyên tố $d\Sigma$ có diện tích $d\vec{S}$ kết hợp với một điểm M trong không gian: Giả sử dC là lưu thông nguyên tố của trường dọc theo đường chu vi nguyên tố tự nó kết hợp với $d\vec{S}$ (*h*.52). Các định hướng tương đối của dC và $d\vec{S}$ tuân theo các quy ước về sự định hướng của mục §**2.2.**



H.52. *Lưu thông nguyên tố* dC *của* $\vec{G}$ *trên đường cong* $d\mathscr{C}$ *thì bằng:*

$$dC = \overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\vec{G}(M).d\vec{S}$$

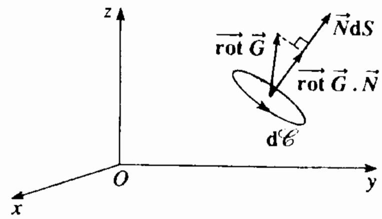
$$(dC = \oint_{d\mathscr{C}}\vec{G}(P).d\vec{P})$$

Toán tử rota tại M của trường $\vec{G}(M)$ sẽ được xác định bởi hệ thức:

$$\mathbf{dC = \overrightarrow{rot}(\vec{G}).d\vec{S}}$$

Như vậy, toán tử rota biến đổi một trường vectơ thành một trường vectơ khác. Có sự tương quan giữa rota của một trường vectơ với lưu thông của nó dọc theo một đường cong kín: hình chiếu trên pháp tuyến với một diện tích nguyên tố của rota của một trường vectơ thì bằng lưu thông, trên đơn vị diện tích, của trường này dọc theo đường chu vi kết hợp (với đơn vị diện tích đó)

Vậy hệ thức này xác định, xuất phát từ lưu thông nguyên tố $\mathrm{d}C$, thành phần $\mathrm{rot}(\vec{G})$ trên phương của pháp tuyến $\vec{N}$ (được xác định hướng theo chiều thuận đối với chiều của lưu thông) với phần tử $\mathrm{d}\Sigma$ (*h*.53).



H.53. *Thành phần* $\mathrm{rot}_M(\vec{G})$ *đi theo* $\vec{N}$ *bằng:*

$$\mathrm{d}C = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}.\vec{N}\,\mathrm{d}S.$$

Khi lấy ba mặt trực giao mà các pháp tuyến tự nó cũng tạo thành một hệ trực giao, thì có thể từ đó suy ra ba thành phần của rota này. Ở đây, lại một lần nữa, ta nói về một định nghĩa nội tại.

Thành thử, rõ ràng là một trường vectơ, mà rota khác không tại một điểm, sẽ "thực hiện một phép quay" xung quanh điểm đó, vì lưu thông của nó dọc theo toàn đường chu vi kết hợp với điểm này là khác không. Cũng như đối với đive, sự vẽ bản đồ topo của một trường vectơ cho phép hiểu được nguồn gốc tên đặt "rota". Các trường (1) và (2) được biểu diễn trên *hình* 54 là: trường (1) có rota triệt tiêu ở M và trường (2) có rota khác không.

H.54. • Trường hợp 1 : *trường vectơ này có rota luôn bằng không.*
• Trường hợp 2 : *Trường vectơ này đang quay xung quanh điểm M (chú ý: trường này có thể có rota triệt tiêu khắp nơi, trừ ở M).*

5.2. Định lý Stokes - Ampère

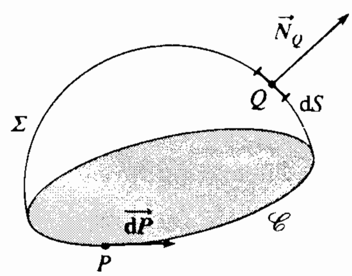
Cho một đường cong kín $\mathscr{C}$ có định hướng, giới hạn một mặt Σ không khép kín và có định hướng. Do định nghĩa của lưu thông nguyên tố $\mathrm{d}C$ mà lưu thông của một trường vectơ dọc theo một đường cong kín bằng thông lượng của rota của nó đi qua mọi mặt tì lên đường cong kín này (ta giả thiết $\vec{G}$ liên tục khắp nơi).

Định lý Stokes-Ampère được phát biểu như sau:

Lưu thông của một trường vectơ $\vec{G}$ dọc theo một đường cong kín thì bằng thông lượng của rota của nó đi qua mọi mặt tì lên đường cong kín này ($\vec{G}$ giả thiết là liên tục) (*hình* 55):

$$\oint_{\text{đường cong }\mathscr{C}} \vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{P} = \iint_{\text{mặt}\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}(Q)).\vec{N}_Q \mathrm{d}S\,.$$

<u>*Chú ý :*</u> *Theo định lý Stokes, thì kết quả là độc lập với việc lựa chọn mặt Σ tì lên đường cong kín $\mathscr{C}$.*



H.55. *Định lý Stokes–Ampère*

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{P} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}(Q)).\vec{N}_Q \mathrm{d}S.$$

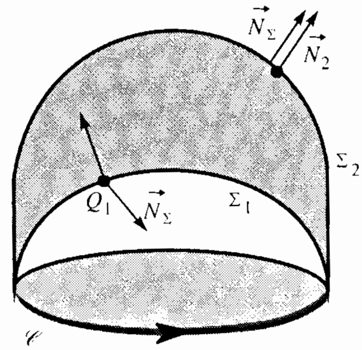
Ta hãy lấy hai mặt Σ_1 và Σ_2 tì lên cùng một đường cong kín $\mathscr{C}$; ta hãy kết hợp hai mặt đó để tạo thành một mặt kín Σ.

Thông lượng của $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G})$ đi qua Σ sẽ đồng nhất không (*hình* 56), vì các thông lượng của $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G})$ đi qua Σ_1 và Σ_2 đều giống hệt nhau khi các mặt đó là không kín (và được định hướng đúng đối với $\mathscr{C}$), và trái ngược nhau khi Σ_1 và Σ_2 tạo thành mặt kín Σ. Vậy rota là một vectơ có đive bằng không.

Thực tế là ở đây ta có sự tương đương mà ta sẽ không chứng minh.

- **$\vec{R} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G})$ tương đương với div$\vec{R}$ = 0 ở mọi điểm trong không gian.**

- **Điều kiện cần và đủ để một trường có thông lượng bảo toàn là: nó phải là trường các rota.**



H.56. *Cho dù các mặt Σ_1 và Σ_2 giới hạn một thể tích V như thế nào, thì ta vẫn có:*

$$0 = \iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}_{Q_1}.d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}_{Q_2}.d\vec{S}_2$$

$$= \iiint_V \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G})d\tau,$$

vậy $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}) = \vec{0}$.

5.3. Trường có lưu thông bảo toàn

Một trường có rota khắp nơi triệt tiêu, sẽ nhìn thấy lưu thông của nó dọc theo mọi đường cong kín đều đồng nhất không: trường vectơ này được gọi là trường có *lưu thông bảo toàn*.

Điều này cũng có thể được phát biểu là: lưu thông của trường vectơ từ một điểm này sang điểm khác thì độc lập với đường đi. Điều này dễ hiểu, vì theo một đồng nhất thức đã đưa ra trước đây, thì mọi trường vectơ có rota triệt tiêu đều được viết dưới dạng một gradiên. Vậy:

$$C = \int_A^B \vec{G}(M).\vec{M} = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,g.d\vec{M} = \int_A^B dg = g(B) - g(A).$$

Mọi trường vectơ có rota triệt tiêu đều có lưu thông được bảo toàn: lưu thông của nó dọc theo mọi đường cong kín đều bằng không và lưu thông của nó giữa hai điểm thì độc lập với đường đi.

Điều kiện cần và đủ để một trường vectơ có lưu thông bảo toàn là nó phải được đặt dưới dạng một gradiên: lúc đó ta nói về trường gradiên.

Ta nhắc lại đồng nhất thức đã được nêu ra trước đây.

$\vec{G}$ là một gradiên : $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\,g$ tương đương với $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G} = \vec{0}$ tại mọi điểm trong không gian.

Điều kiện cần và đủ để một trường vectơ có lưu thông bảo toàn là nó phải được đặt dưới dạng một gradiên.

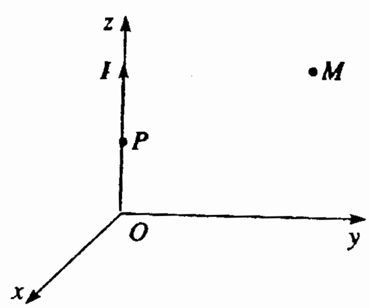
5.4. Toán tử rota trong vật lý

5.4.1. Các nguồn của trường từ tĩnh

Trong từ tĩnh học, các nguồn của trường là các dòng điện; phương trình vi phân gắn từ trường với các dòng điện (có mật độ dòng thể tích $\vec{j}$) là (*h*.57) (*xem H–Prépa, Điện từ học, PC–PSI, năm thứ hai*) $\overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$.

Các hệ quả của phương trình này là:

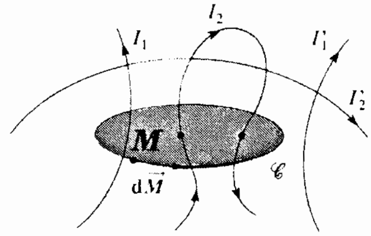
- trong một miền không có dòng điện, thì vectơ $\vec{B}$ có lưu thông được bảo toàn ;



H.57. *Cho một dòng điện I chạy trong một dây dẫn trùng với (Oz)*

- $\overrightarrow{\text{rot}}_P \vec{B}_P = +\infty$, vì $j = +\infty$
- $\overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{B}_M = \vec{0}$, vì $\vec{j} = \vec{0}$.

• vectơ $\vec{B}$ tuân theo định lý AMPÈRE. Lưu thông của $\vec{B}$ trên một đường cong kín bằng tổng các dòng điện, đi qua mọi mặt (theo chiều thuận) tì lên đường cong lưu thông, nhân với μ_0 (*hình* 58).



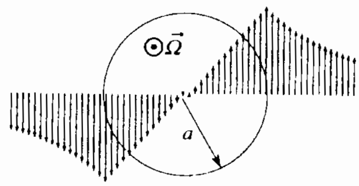
H.58. *Cho $\vec{B}$ là từ trường tổng cộng tạo ra bởi tập hợp các dòng điện I_i, đi qua một mặt tì lên $\mathscr{C}$, và các dòng điện I'_i không đi qua mặt này.*
Định lý AMPÈRE cho ta:

$$\oint \vec{B}.\mathrm{d}\vec{M} = \mu_0 \Sigma I_i$$
$$= \mu_0(I_1 + I_2 - I_2 = I_1)$$

5.4.2. Vectơ xoáy của một chất lưu

Vectơ xoáy của một chất lưu được xác định bởi hệ thức (*hình* 59):

$$\vec{\Omega}(M) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\left(\vec{v}(M)\right).$$



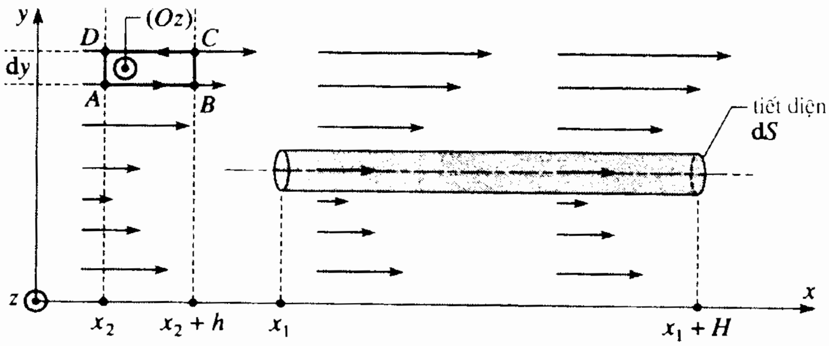
H.59. *Trường các vận tốc ở trong và ngoài một vùng xoáy đều bán kính a.*

5.5. Các ví dụ tính toán

5.5.1. Tọa độ Descartes

Ta hãy xét trường vectơ được biểu diễn trên *hình* 60 dưới dạng:

$$\vec{v}(M) = v_x(y)\vec{e}_x.$$



H.60. *Trường vectơ dưới dạng $v_x(y)\vec{e}_x$ này có đive triệt tiêu, nhưng có rota khác không. Lưu thông của nó dọc theo đường cong kín ABCDA thì khác không.*

• Trường này có đive triệt tiêu (*xem* §**4.3.4**).

• Ngược lại, trường này không có rota triệt tiêu. Ta hãy xét lưu thông $\mathrm{d}C$ của $\vec{v}$ trên đường cong kín ABCDA; biểu thức của nó bằng:

$$\mathrm{d}C = h\left(v_x(y) - v_x(y+\mathrm{d}y)\right) = -h\frac{\mathrm{d}\left[v_x(y)\right]}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y,$$

biểu thức này sẽ khác không kể từ khi $\vec{v}$ phụ thuộc rõ ràng vào y. Biết rằng $\mathrm{d}C = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.h\mathrm{d}y\vec{e}_z$, điều này cho $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{e}_z$ (duy nhất chỉ thành phần này là khác không, *xem* § **5.6**).

5.5.2. Tọa độ trụ

5.5.2.1. Trường dạng $f(r)\vec{e}_r$

Cho một trường vectơ dạng $f(r)\vec{e}_r$.

Đặt $g(r)$ sao cho $g(r) = \int_a^r f(r)\mathrm{d}r + g(a)$ nghĩa là $f(r) = \frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r}$.

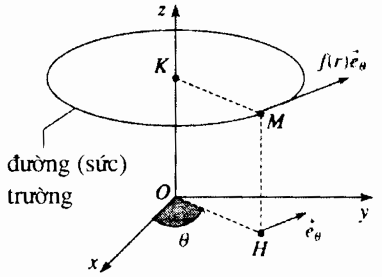
Điều này có nghĩa $f(r)\vec{e}_r$ là một gradiên: $f(r)\vec{e}_r = \vec{\mathrm{grad}}\left(g(r)\right)$. Rota của một gradiên bằng không, nên rota của $f(r)\vec{e}_r$ bằng không.

Trong tọa độ trụ, ta có:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[f(r)\vec{e}_r\right]=\vec{0} \text{ và do vậy } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{e}_r=\vec{0}.$$

Sự chứng minh không có tính tổng quát, nhưng kết quả bao giờ cũng đúng.

5.5.2.2. Trường ở dạng $f(r)\vec{e}_\theta$



H.61a. *Sự nghiên cứu một trường trục xuyên tâm dạng $f(r)\vec{e}_\theta$.*

Thành phần duy nhất khác không của rota của một trường vectơ dạng $f(r)\vec{e}_\theta$ thì hướng theo trục (Oz). Muốn tính trường này, ta hãy nghiên cứu thông lượng $\mathrm{d}\Phi$ của nó đi qua một hình vành khăn nằm ở giữa hai vòng tròn bán kính r và $r + \mathrm{d}r$ (*hình* 61) :

$$\mathrm{d}\Phi=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[f(r)\vec{e}_\theta\right].2\pi r\,\mathrm{d}r\vec{e}_z=f(r+\mathrm{d}r)2\pi(r+\mathrm{d}r)-f(r)2\pi r$$

$$=2\pi\frac{\mathrm{d}\left[rf(r)\right]}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r=\left\{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\,f(r))}{\mathrm{d}r}\right\}2\pi r\,\mathrm{d}r\,.$$

Trong tọa độ trụ, ta được:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[f(r)\vec{e}_\theta\right]=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\,f(r))}{\mathrm{d}r}\vec{e}_z,$$

do đó:

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{e}_\theta)=\dfrac{\vec{e}_z}{r}$;
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(r\vec{e}_\theta)=2\vec{e}_z$ **(có nghĩa đây là một vectơ đều. Thành thử mọi vectơ đều $\overrightarrow{\Omega}$ đều có thể được đặt dưới dạng $\overrightarrow{\Omega}=\Omega\vec{e}_z$, và ta sẽ có $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\Omega}\wedge\vec{r})=2\overrightarrow{\Omega}$ với $\overrightarrow{\Omega}$ là đều);**
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right)=\vec{0}$ **(trừ $r = 0$, thì rota bằng vô cực).**

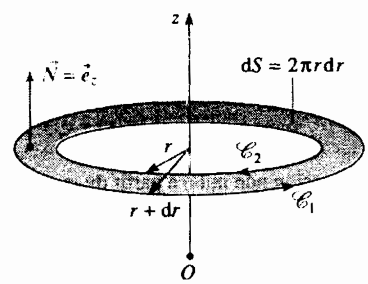
Kết quả cuối cùng này dẫn đến hai lời bình quan trọng.

- Nó chứng tỏ rằng một trường $\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}$ bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Oz), sẽ có rota triệt tiêu: thực ra, đó là trường hợp duy nhất của trường trực xuyên tâm có rota bằng không.

- Kết quả này có thể có vẻ kỳ dị. Thật vậy, lưu thông của $\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}$ trên một vòng tròn bán kính r (trục (Oz)) thì bằng 2π, vậy là không đổi và khác không, trong khi rota của nó triệt tiêu. Điều này là do tính kỳ dị ở $r = 0$ (Vậy là trên trục (Oz) !) mà tại đó $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right)$ là vô hạn, và tích phân:

$$\oint_{\text{đường cong } \mathscr{C}}\vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{P}=\iint_{\text{mặt } S}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}(Q)).\vec{N}_Q\mathrm{d}S\,,$$

lúc đó khác không khi trục (Oz) "đi qua" đường cong $\mathscr{C}$.



H.61b. *Thông lượng của* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}$ *đi qua diện tích* $\mathrm{d}\vec{S}=\vec{N}\mathrm{d}S$ *giới hạn bởi hai vòng tròn* $\mathscr{C}_1$ *và* $\mathscr{C}_2$ *thì bằng tổng các lưu thông của* $\vec{G}$ *trên hai đường cong kín :*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}[f(r)\vec{e}_\theta]2\pi r\,\mathrm{d}r\,\vec{N}$$
$$=\oint_{\mathscr{C}_1}\vec{G}_1\,\mathrm{d}\vec{M}_1+\oint_{\mathscr{C}_2}\vec{G}_2\,\mathrm{d}\vec{M}_2$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rf)2\pi r\,\mathrm{d}r.$$

5.5.3. Tính $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(u\vec{A})$

Từ biểu thức của rota trong toạ độ Descartes (*xem* §**5.6**), ta có thể thiết lập một công thức quan trọng mới (vì rất tiện lợi)

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(u\vec{A}) = u\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,u \wedge \vec{A}$$

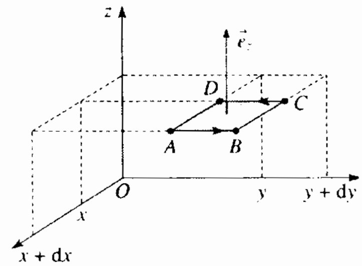
Công thức này cho phép có được một cách tính khả dĩ khác về rota của một trường trục xuyên tâm trong tọa độ trụ: $f(r,t)\vec{e}_\theta$ Thật vậy:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}[f(r,t)\vec{e}_\theta] = f(r,t)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{e}_\theta + \overrightarrow{\mathrm{grad}}[f(r,t) \wedge \vec{e}_\theta = \left[\frac{f(r,t)}{r} + \frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right]\vec{e}_z$$

hay :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}[f(r,t)\vec{e}_\theta] = \overrightarrow{\mathrm{rot}}[rf(r,t)\frac{\vec{e}_\theta}{r}] = r\,f(r,t)\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r}\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}[r\,f(r,t)] \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial[r\,f(r,t)]}{\partial r}\vec{e}_z,$$ điều này phù hợp với các kết quả trước đây.



H.62. *Sự lựa chọn diện tích để có thể tính toán thành phần của* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{G}$ *hướng theo trục* (Oz).

5.6. Biểu thức giải thích

Ta có được biểu thức giải tích trong toạ độ Descartes bằng cách chỉ rõ các lưu thông của $\vec{G}$ trên các đường chu vi kết hợp với các mặt của hình lập phương có diện tích dxdy, dydz và dxdz (*hình* 62):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial G_x}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial G_y}{\partial x} - \dfrac{\partial G_x}{\partial y} \end{array}\right..$$

Thật vậy, ta hãy áp dụng định nghĩa của rota để tính thành phần của nó trên trục (Oz) bằng cách khảo sát lưu thông nguyên tố dC của vectơ $\vec{G}$ trên đường chu vi $ABCDA$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C &= G_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y - G_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x - G_y(x,y,z)\mathrm{d}y + G_x(x,y,z)\mathrm{d}x \\ &= G_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y - G_y(x,y,z)\mathrm{d}y + G_x(x,y,z)\mathrm{d}x - G_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\partial G_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial G_x(x,y,z)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}_z(\vec{G})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z, \end{aligned}$$

điều này cho ta đúng (trong tọa độ Descartes):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_z\vec{G} = \frac{\partial G_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial G_x(x,y,z)}{\partial y}.$$

Cũng như đối với đive, biểu thức của rota trong tọa độ trụ và cầu phức tạp hơn. Để thông báo, ta đưa ra hai biểu thức đầy đủ sau:

Trong tọa độ trụ: $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial G_\theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial G_r}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rG_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial G_r}{\partial \theta}\right) \end{array}\right.$$

Ta hãy áp dụng định nghĩa của rota để tính thành phần của nó trên trục (Oz) bằng cách khảo sát lưu thông nguyên tố dC của vectơ $\vec{G}$ trên đường chu vi $ABCDA$ (*hình* 63):

$$dC = G_r(r,\theta,z)dr + G_\theta(r+dr,\theta,z)(r+dr)d\theta - G_r(r,\theta+d\theta,z)dr - G_\theta(r,\theta,z)rd\theta$$

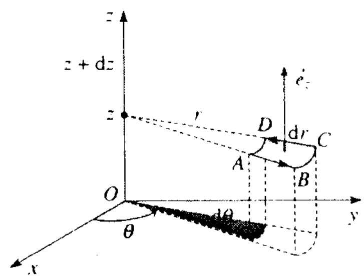
$$= G_r(r,\theta,z)dr - G_r(r,\theta+d\theta,z)dr + G_\theta(r+dr,\theta,z)(r+dr)d\theta - G_\theta(r,\theta,z)rd\theta$$

$$= -\frac{\partial G_r(r,\theta,z)}{\partial\theta}dr\,d\theta + \frac{\partial[rG_\theta(r,\theta+d\theta,z)]}{\partial r}dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial[rG_\theta(r,\theta,z)}{\partial r} - \frac{\partial G_r(r,\theta,z)}{\partial\theta}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$= \mathrm{rot}_z(\vec{G}).r\,dr\,d\theta\,\vec{e}_z,$$

điều này cho ta đúng $\mathrm{rot}_z(\vec{G}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial[rG_\theta(r,\theta,z)]}{\partial r} - \frac{\partial G_r(r,\theta,z)}{\partial\theta}\right)$.



H.63. *Sự lựa chọn diện tích nguyên tố để có thể tính thành phần của* $\mathrm{rot}\vec{G}$ *hướng theo* (Oz) *trong tọa độ trụ.*

• Trong tọa độ cầu: $$\mathrm{rot}(\vec{G}) = \left|\begin{array}{l} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta G_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial G_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rG_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rG_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial\theta}\right) \end{array}\right. .$$

6 Toán tử LAPLACE

6.1. Laplaxiên vô hướng

6.1.1. Định nghĩa

Laplaxiên vô hướng được áp dụng cho một trường vô hướng g; nó được ký hiệu theo quy ước bằng Δ và thực chất được xác định bởi hệ thức:

$$\Delta g = \mathbf{div}(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,g)$$

Vậy nó biến đổi một vô hướng thành một vô hướng.

6.1.2. Laplaxiên trong vật lý: phương trình LAPLACE

Phương trình LAPLACE là $\Delta g = 0$: phương trình này có mặt trong nhiều lĩnh vực vật lý:

• tĩnh điện : điện thế V nghiệm đúng phương trình $\Delta V = 0$ trong một miền không có điện tích;

• khuếch tán nhiệt: nhiệt độ T nghiệm đúng phương trình $\Delta T = 0$ khi có sự truyền nhiệt bằng khuếch tán, độc lập với thời gian;

• cơ học chất lỏng: $\Delta\varphi = 0$, trong đó φ biểu diễn thế mà từ đó phát sinh trường vận tốc ($\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi$) trong một dòng chảy không xoáy.

6.1.3. Các ví dụ tính toán

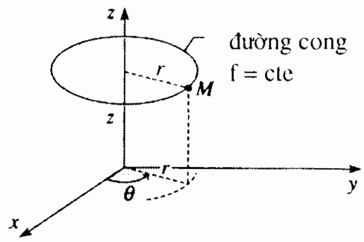
6.1.3.1. Tọa độ trụ

Cho một trường vô hướng $f(r)$ trong tọa độ trụ (*hình* 64).

Ta hãy tính $\Delta f(r)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(r)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \text{ và } \mathrm{div}(g(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rg(r))}{\mathrm{d}r}.$$

Trong tọa độ trụ, ta có $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$**, đặc biệt với** $\Delta(\ln(r)) = 0$.



H.64. *Trong tọa độ trụ :*

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right).$$

6.1.3.2. Tọa độ cầu

Cho một trường vô hướng trong tọa độ cầu $f(r)$ (*h*.65); ta hãy tính $\Delta f(r)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f(r)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$$

$$\text{và } \mathrm{div}(g(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2 g(r))}{\mathrm{d}r}.$$

Trong tọa độ cầu, ta có:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rf)}{\mathrm{d}r^2}$$

với đặc biệt là $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

6.1.4. Các biểu thức

• Tọa độ Descartes

Biểu thức giải tích của laplaxiên trong tọa độ Descartes có dạng:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

• Tọa độ trụ

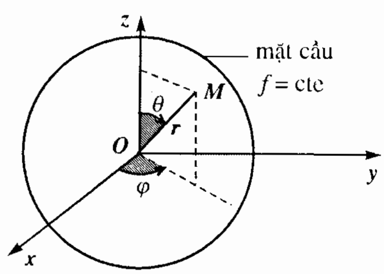
$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1\partial g}{r\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2};$$

chú ý rằng : $\Delta g(r) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1\partial g}{r\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right).$

• Tọa độ cầu

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2};$$

chú ý rằng : $\Delta g(r) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rg)}{\partial r^2}.$



H.65. *Trong tọa độ cầu :*

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right).$$

6.2. Laplaxiên vectơ

6.2.1. Định nghĩa

Laplaxiên vectơ, theo quy ước, được ký hiệu Δ, biến đổi một vectơ thành một vectơ. Biểu thức của nó, *trong tọa độ Descartes*, có dạng:

$$\Delta\vec{G} = \Delta G_x\,\vec{e}_x + \Delta\vec{G}_y\,\vec{e}_y + \Delta G_z\vec{e}_z$$

Trong loại tọa độ này (và duy nhất chỉ trong tọa độ này), chỉ cần áp dụng laplaxiên vô hướng cho từng thành phần của trường vectơ xuất phát là đủ.

Trái với các toán tử khác có tên gọi hình tượng hơn (như "đive", "rota"), toán tử laplaxiên, do tên nhà toán học LAPLACE, lại không có một ý nghĩa vật lý trực tiếp. Đồng nhất thức, liên kết nó với các toán tử khác đã được xác định trước đây, cho phép từ đó rút ra một định nghĩa thực chất:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

6.2.2. Laplaxiên vectơ trong vật lý

6.2.2.1. Sự lan truyền sóng

Các phương trình về sự lan truyền của các đại lượng vectơ thường tuân theo phương trình d' ALEMBERT. Thành thử phương trình lan truyền điện trường trong chân không, chân không các điện tích và dòng điện, có dạng:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

6.2.2.2. Tương đương của phương trình LAPLACE trong từ tĩnh

Trong từ tĩnh, từ trường $\vec{B}$ là một vectơ có thông lượng bảo toàn; như vậy, nó có thể được viết dưới dạng $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})$, trong đó $\vec{A}$ được gọi là thế vectơ. Vectơ này, trong một miền không có dòng điện, nghiệm đúng phương trình:

$$\Delta\vec{A} = \vec{0}.$$

6.2.3. Các biểu thức

Đây là các biểu thức của các laplaxiên vectơ (mà ta sẽ không bao giờ sử dụng!) trong tọa độ trụ:

$$\Delta\vec{A} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_r)\right] + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right] + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array}\right.$$

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

• Trong tọa độ trụ : $d\overrightarrow{M} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$.

• Trong tọa độ cầu : $d\overrightarrow{M} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$.

■ ĐƯỜNG CHU VI VÀ BỀ MẶT

• Lưu thông C của một trường vectơ $\vec{G}$ trên một đường cong $\mathscr{C}$ có định hướng (kín hay không) được xác định bởi :

$$C = \int_{\substack{A \\ \text{đường cong } \mathscr{C}}}^{B} \vec{G}(M).d\vec{M} \quad \text{hay} \quad C = \oint_{\text{đường chu vi } \mathscr{C}} \vec{G}(M).d\vec{M}\ .$$

Lưu thông của một vectơ dọc theo một đường chu vi được gắn với toán tử rota.

• Thông lượng Φ của một trường vectơ $\vec{G}$ đi qua một mặt Σ, mà mặt này phải được định hướng, được xác định bởi:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{G}(M).d\vec{S} \quad \text{và} \quad \oiint_{\Sigma(\text{kín})} \vec{G}(M).d\vec{S}\,.$$

Thông lượng của một vectơ đi qua một mặt kín Σ được gắn với toán tử dive

■ TOÁN TỬ GRAĐIÊN

• Toán tử gradiên (vi phân ở M) được xác định bởi :

$$dg = g(M + d\overrightarrow{M}) - g(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M(g).d\overrightarrow{M}\,.$$

Thường ta viết: $dg = \overrightarrow{\text{grad}}(g).d\overrightarrow{M}$.

• Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\,g$ trực giao với các mặt g = cte; nó được định hướng về các "g" tăng (nó chỉ rõ đại lượng $g(M)$ biến đổi theo phương nào và theo chiều nào) ; nó cũng chỉ rõ độ lớn của độ biến thiên không gian của đại lượng "g".

• Nếu $\vec{G}$ là một gradiên $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\,g$, thì lúc đó $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G} = \vec{0}$ tại mọi điểm trong không gian.

■ TÍNH GRAĐIÊN

• $\overrightarrow{\text{grad}}_M\left(\dfrac{1}{PM}\right) = -\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}_P\left(\dfrac{1}{PM}\right)$.

• Trong tọa độ trụ, ta có $\overrightarrow{\text{grad}}f(r) = \dfrac{df(r)}{dr}\vec{e}_r$.

Trong tọa độ cầu, ta có $\overrightarrow{\text{grad}}f(r) = \dfrac{df(r)}{dr}\vec{e}_r$

• Độ biến thiên toàn phần của g là $dg = \overrightarrow{\text{grad}}\,g.d\overrightarrow{M} + \dfrac{\partial g}{\partial t}dt$.

Độ biến thiên toàn phần của g được viết :

$$Dg = \overrightarrow{\text{grad}}\, g.\mathrm{d}\overrightarrow{M} + \frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t \text{ với } \mathrm{d}\overrightarrow{M}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \vec{v}(M,t)\mathrm{d}t.$$

■ TOÁN TỬ ĐIVE

• Toán tử dive tại M của trường $\overrightarrow{G}$ lúc đó được xác định bởi hệ thức :

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\,\overrightarrow{G}\,\mathrm{d}\tau.$$

• Thông lượng đi ra của một trường vectơ $\overrightarrow{G}$ (không biểu hiện tính gián đoạn trên một mặt kín hay không, ở bên trong thể tích V) qua một mặt kín Σ thì bằng tích phân dive của nó theo thể tích V giới hạn bởi mặt này :

$$\oiint_{\text{mặt kín }\Sigma} \vec{G}(Q).\vec{N}_Q dS = \iiint_{\text{thể tích }V} \mathrm{div}_M(\vec{G}(M))\mathrm{d}\tau_M.$$

• *Trường có thông lượng bảo toàn*

$\mathrm{div}(\vec{B}) = \vec{0}$ tương đương với $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})$.

• Trong tọa độ trụ, ta có $\mathrm{div}(\vec{e}_r) = \dfrac{1}{r}$, $\mathrm{div}(\vec{r}) = \mathrm{div}(r\vec{e}_r) = 2$ và $\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r}\right) = \mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^2}\right) = 0$ (trừ tại $r = 0$ thì dive là vô hạn).

• Trong tọa độ cầu, ta có $\mathrm{div}(\vec{e}_r) = \dfrac{2}{r}$, $\mathrm{div}(\vec{r}) = \mathrm{div}(r\vec{e}_r) = 3$ và $\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ (trừ tại $r = 0$ thì dive là vô hạn).

• $\mathrm{div}(u\vec{A}) = u\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u.\vec{A}$.

• $\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

• Trong tọa độ trụ, $\mathrm{div}(f(r)\vec{e}_\theta) = \vec{0}$: trường vectơ $f(r)\vec{e}_\theta$ có thông lượng bảo toàn. Đặc biệt, $\vec{e}_\theta$ là một trường vectơ có thông lượng bảo toàn.

■ TOÁN TỬ ROTA

• $\mathrm{d}C = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}).\mathrm{d}\vec{S}$.

• *Định lý* STOKES-AMPÈRE

Lưu thông của một trường vectơ $\vec{G}$ dọc theo một đường cong kín thì bằng thông lượng rota của nó đi qua mọi mặt tì lên đường cong này ($\vec{G}$ giả thiết là liên tục) :

$$\oint_{\text{đường cong }\mathscr{C}} \vec{G}(P).\mathrm{d}\vec{P} = \iint_{\text{mặt }\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{G}(Q)).\vec{N}_Q\,\mathrm{d}S.$$

• $\vec{R} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}$ tương đương với $\mathrm{div}\,\vec{R} = 0$ tại mọi điểm trong không gian.

• Điều kiện cần và đủ để một trường có thông lượng bảo toàn là nó phải là trường các rota.

• Mọi trường vectơ có rota triệt tiêu đều có lưu thông bảo toàn: lưu thông của nó dọc theo mọi đường cong kín đều bằng không và lưu thông của nó giữa hai điểm thì độc lập với đường đi.

• $\vec{G}$ là một gradiên : $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\, g$ tương đương với $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{G} = \vec{0}$ tại mọi điểm trong không gian. Điều kiện cần và đủ để một trường vectơ có lưu thông bảo toàn là nó phải được đặt dưới dạng một gradiên.

• Trong tọa độ trụ, ta có :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,[f(r)\vec{e}_r] = \vec{0}\text{, và do đó } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{e}_r = \vec{0}.$$

• Trong tọa độ trụ, ta được :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,[f(r)\vec{e}_\theta] = \frac{1}{r}\frac{\text{d}(rf(r))}{\text{d}r}\vec{e}_z,$$

do đó $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_\theta) = \dfrac{\vec{e}_z}{r}$, $\overrightarrow{\text{rot}}(r\vec{e}_\theta) = 2\vec{e}_z$ (có nghĩa, đây là một vectơ đều).

Thành thử mọi vectơ đều $\vec{\Omega}$ có thể được viết dưới dạng $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$, và ta có :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = 2\vec{\Omega}$$

với $\vec{\Omega}$ là đều và $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$ (trừ ở $r = 0$, thì rota là vô hạn).

• $\overrightarrow{\text{rot}}(u\vec{A}) = u\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,u \wedge \vec{A}$.

■ TOÁN TỬ LAPLAXIÊN

• $\Delta g = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, g)$.

• Trong tọa độ trụ, ta có :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\frac{\text{d}f}{\text{d}r}\right)$$

đặc biệt với $\Delta(\ln(r)) = 0$.

• Trong tọa độ cầu, ta có :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r^2\frac{\text{d}f}{\text{d}r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\text{d}^2(rf)}{\text{d}r^2}$$

đặc biệt với $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$.

• *Laplaxiên vectơ*

$\Delta\vec{G} = \Delta G_x\vec{e}_x + \Delta G_y\vec{e}_y + \Delta G_z\vec{e}_z$

• $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
LÊ HÙNG
Biên tập tái bản :
PHẠM THỊ NGỌC THẮNG
Trình bày bìa :
LÊ HOÀNG HẢI
Sửa bản in :
LÊ HÙNG
Chế bản :
ĐOÀN VIỆT QUÂN

CƠ HỌC CHẤT LỎNG

In 1000 bản, khổ 19x27cm, tại Trung tâm Công nghệ Thông tin Chế bản và In Nhà xuất bản Thế Giới. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản: 194-2006/CXB/8-323/GD cấp ngày 22-3-2006. In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.

PFIEV

CƠ HỌC CHẤT LỎNG

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

8934980640043

Giá: 34.000đ