NGUYỄN TRỌNG (CHỦ BIÊN)
TỐNG DANH ĐẠO - LÊ THỊ HOÀNG YẾN

Cơ học lý thuyết

TẬP 2. PHẦN ĐỘNG LỰC HỌC

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN TRỌNG (Chủ biên)
TỐNG DANH ĐẠO - LÊ THỊ HOÀNG YẾN

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

TẬP II

ĐỘNG LỰC HỌC

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2006

Chịu trách nhiệm xuất bản : **Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI**
Biên tập : ĐỖ PHÚ, HỒNG THỦY
Sửa bản in : HỒNG THỦY
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 1000 bản, khổ 16 x 24 cm, tại Nhà in KH&CN
Giấy phép xuất bản số: 136-2006/CXB/31.2-06/KHKT, Cục XB cấp ngày 12/4/2006
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2006.

Lời nói đầu

*Nhằm đáp ứng nhu cầu giảng dạy, học tập và nghiên cứu Cơ học lý thuyết, cuốn sách **"Cơ học cơ sở"** được xuất bản lần đầu tiên năm 1997 và đã được tái bản nhiều lần vào các năm tiếp theo.*

Bám sát chương trình của Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định cho khối các ngành Kỹ thuật: xây dựng dân dụng và công nghiệp, giao thông vận tải, thủy lợi và một số ngành khác, các tác giả đã tiến hành biên soạn lại cuốn sách và có nhiều bổ sung, sửa chữa với phương châm ngắn gọn và sát với trình độ chung của bạn đọc.

*Lần in này cuốn sách mang tên "**Cơ học lý thuyết**" và có ba phần được bố trí làm hai tập:*

- Tập I gồm hai phần: *Tĩnh học và động học.*
- Tập II: *Phần Động lực học.*

Để bạn đọc nắm được những kiến thức cơ bản về cơ học, sau phần lý thuyết có các câu hỏi ôn tập. Cuối mỗi phần có trình bày cách giải một số bài toán. Sau đó là các bài tập được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp.

Trong quá trình biên soạn, cuốn sách không tránh khỏi khiếm khuyết. Các tác giả vui mừng nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Phần ba

ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học là phần tổng quát nhất của Cơ học lý thuyết, trong đó nghiên cứu một cách toàn diện các quy luật chuyển động cơ học của vật rắn dưới tác dụng của các lực.

Nếu như tĩnh học nghiên cứu sự cân bằng của các vật rắn dưới tác dụng của lực, còn động học chỉ nghiên cứu về mặt hình học chuyển động của vật rắn thì động lực học nghiên cứu mối liên hệ giữa chuyển động của vật rắn và lực tác dụng lên nó.

Dựa trên hệ tiên đề của Niutơn, động lực học thiết lập mối liên hệ có tính chất quy luật giữa hai đại lượng: các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của vật rắn và các đại lượng đặc trưng cho sự tác động của các lực lên vật rắn ấy. Các mối liên hệ giữa lực và chuyển động được biểu diễn dưới dạng các phương trình vi phân chuyển động, các định lý tổng quát và các nguyên lý cơ học.

Để đảm bảo tính thống nhất của chương trình Cơ học lý thuyết, trong động lực học chúng ta vẫn sử dụng những khái niệm cơ bản của cơ học đã có trong tĩnh học, động học như vật rắn tuyệt đối, lực, các dạng chuyển động của vật thể.

Ngoài ra, trong động lực học ta còn gặp một khái niệm mới là tính quán tính của vật rắn. Như ở tĩnh học và động học, trong động lực học cũng được nghiên cứu theo hai dạng mô hình: động lực học chất điểm và động lực học cơ hệ.

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN – HỆ TIÊN ĐỀ ĐỘNG LỰC HỌC

§1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. **Chất điểm** là một điểm hình học mang khối lượng.

   Ta có thể coi một vật mang khối lượng nhưng kích thước không đáng kể hay rất nhỏ so với quãng đường mà nó di chuyển được là một chất điểm.

2. **Cơ hệ (hệ chất điểm)** là tập hợp các chất điểm mà trong đó vị trí và chuyển động của mỗi chất điểm lại phụ thuộc vào những chất điểm còn lại.

   Ta coi vật rắn tuyệt đối là một cơ hệ đặc biệt mà trong đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không đổi trong suốt quá trình chuyển động.

3. **Hệ quy chiếu quán tính** (hệ quy chiếu tuyệt đối)

   – Hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu mà trong đó các tiên đề Niutơn được nghiệm đúng.

   – Hệ quy chiếu quán tính còn gọi là hệ quy chiếu tuyệt đối hay hệ quy chiếu cố định.

- Ngược lại ta có hệ quy chiếu không quán tính.
- Trong kỹ thuật hệ quy chiếu gắn vào mặt đất được coi là hệ quy chiếu quán tính (vì ta đã bỏ qua sự chuyển động của quả đất)

4. **Cơ hệ không tự do** là tập hợp các chất điểm mà trong đó chuyển động của các chất điểm thuộc hệ không những chỉ phụ thuộc vào các lực tác dụng mà còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước. Ngược lại ta có cơ hệ tự do.

5. Lực và phân loại lực

Lực là một đại lượng đặc trưng cho tác dụng tương hỗ giữa các vật và là nguyên nhân gây ra biến đổi chuyển động của vật.

- Ngoài các lực không đổi mà ta đã biết trong tĩnh học, trong động lực ta còn gặp lực phụ thuộc vào thời gian (như áp lực của động cơ tác dụng lên móng máy), lực phụ thuộc vào vận tốc (như lực cản của môi trường tác dụng lên vật khi chuyển động), lực phụ thuộc vào vị trí (như lực đàn hồi, lực hấp dẫn tương hỗ).
- Tổng quát lực có thể phụ thuộc đồng thời vào thời gian, vận tốc và vị trí. Khi đó biểu thức tổng quát của lực là

$$\vec{F} = \vec{F}(t; \vec{v}, \vec{r}) . \quad (1.1)$$

Các lực trong động lực học được phân loại như sau:

- Phân loại lực tác dụng lên cơ hệ thành lực hoạt động và phản lực liên kết
  - Phản lực liên kết đặc trưng cho tác dụng cơ học của liên kết lên các chất điểm thuộc hệ. Phản lực liên kết ký hiệu $\vec{N}$.
  - Các lực không phải là phản lực liên kết gọi là lực hoạt động. Lực hoạt động ký hiệu $\vec{F}$.
- Phân loại lực tác dụng lên hệ thành ngoại lực và nội lực:
  - Ngoại lực là những lực do các vật bên ngoài hệ tác dụng lên các vật thuộc hệ. Ngoại lực ký hiệu $\vec{F^e}$.

– Nội lực là những lực do các vật thuộc hệ tác dụng lên nhau. Nội lực ký hiệu $\overrightarrow{F^i}$. Các tính chất cơ bản của nội lực:

+ Vectơ chính của tất cả nội lực tác dụng lên hệ bằng không:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k^i} = 0 .$$

+ Mômen chính của tất cả các nội lực đối với một tâm hay một trục nào đó bằng không:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}) = 0 \; ; \; \sum_{k=1}^{n} m_x(\overrightarrow{F_k^i}) = 0 .$$

Cần lưu ý rằng các cách phân loại lực như trên chỉ có tính chất tương đối.

§1.2. HỆ TIÊN ĐỀ ĐỘNG LỰC HỌC

Các tiên đề này do Niutơn trình bày lần đầu tiên vào năm 1687, đã đặt cơ sở cho cơ học cổ điển cho nên người ta còn gọi cơ học cổ điển là cơ học Niutơn. Các tiên đề Niutơn phát biểu cho một chất điểm.

1. Tiên đề 1 (tiên đề quán tính): Một chất điểm giữ nguyên trạng thái nghỉ hay chuyển động thẳng đều khi không có lực tác dụng lên nó.

Theo tiên đề này, khi không có lực tác dụng lên chất điểm thì nó sẽ chuyển động quán tính. Nghĩa là khi $\vec{F} = 0$ thì $\vec{V} = const$ hay $\vec{W} = 0$.

Tiên đề này chỉ cho ta biết nguyên nhân gây ra biến đổi chuyển động là lực. Nhưng lực làm thay đổi chuyển động như thế nào thì ta phải xét tiên đề 2.

2. **Tiên đề 2** (tiên đề cơ bản của động lực học): Gia tốc của một chất điểm chuyển động có cùng phương chiều với lực tác dụng lên nó và có giá trị tỷ lệ với lực ấy:

$$\vec{F} = m\vec{W} . \tag{1.2}$$

Hệ thức (1.2) gọi là phương trình cơ bản động lực học.

Thực nghiệm chứng tỏ rằng hệ số tỷ lệ m chỉ phụ thuộc vào vật đang xét. Trong cơ học cổ điển người ta coi m là hằng số và không phụ thuộc vào vận tốc chuyển động.

Từ đẳng thức (1.2) ta thấy:

– Với một vật nhất định (m = const) muốn gia tốc tăng lên thì lực tác dụng phải tăng.

– Nếu lực tác dụng không đổi, ta thấy m càng lớn thì $\vec{W}$ càng giảm và ngược lại.

Như vậy, m chính là số đo mức độ quán tính của chất điểm nghĩa là mức độ chống lại sự biến đổi chuyển động của chất điểm do lực tác dụng lên nó gây ra. Vì hằng số m biểu thị mức độ quán tính của chất điểm cho nên ta gọi m là khối lượng quán tính.

– Trọng lượng và khối lượng:

Dưới tác dụng của lực hút trái đất (trọng lượng) tất cả các vật khi rơi tự do đến gần mặt đất đều chuyển động với gia tốc trọng trường $\vec{g}$. Theo tiên đề 2 ta có:

$$\vec{P} = m\vec{g} \text{ hay } m = \frac{P}{g} .$$

Từ đây ta thấy khối lượng m của vật có thể tính qua trọng lượng của nó.

3. **Tiên đề 3** (tiên đề tác dụng và phản tác dụng): Lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm là những lực có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} . \tag{1.3}$$

Cần chú ý rằng hai lực này không phải là hệ lực cân bằng vì chúng đặt lên hai chất điểm khác nhau.

Tiên đề này là cơ sở để chuyển từ động lực học chất điểm sang động lực học cơ hệ và nó giữ vai trò rất quan trọng trong động lực học.

4. Tiên đề 4 (nguyên lý độc lập tác dụng): Một chất điểm chịu tác dụng đồng thời của nhiều lực có gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc của chất điểm ấy khi chịu tác dụng riêng rẽ của từng lực một.

Giả sử khối lượng của chất điểm là *m:*

$$m\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{F_1}\ ;\ m\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{F_2}\ ;\ m\overrightarrow{W_n} = \overrightarrow{F_n}\ ;$$

$$m(\overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2} + \ldots + \overrightarrow{W_n}) = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n}\ ;$$

$$m\overrightarrow{W} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{R},$$

trong đó $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2} + \ldots + \overrightarrow{W_n}$.

Hệ đơn vị cơ bản:

- Nước ta đã ban hành hệ đơn vị đo lường hợp pháp trên cơ sở hệ đơn vị quốc tế SI.
- Các đại lượng cơ bản trong cơ học của hệ đơn vị này là độ dài (m), khối lượng (kg) và thời gian (s). Đơn vị đo lực là Niutơn ký hiệu là N.
- Theo $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{W}$ với m = 1kg; W = 1m/s^2 thì lực là 1N.

  Vậy Niutơn là lực tác dụng lên chất điểm có khối lượng 1kg gây cho nó chuyển động với gia tốc 1m/s^2.
- Quan hệ giữa kG và N: 1kG = 9,8N ≈ 10N.

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

Chúng ta sẽ xuất phát từ phương trình cơ bản của động lực học để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động và tìm cách tích phân các phương trình ấy.

§2.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Xét một chất điểm tự do có khối lượng m chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính dưới tác dụng của lực $\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$. Ta lập phương trình vi phân chuyển động của điểm trong các hệ tọa độ khác nhau.

1. Dạng vectơ

Theo phương trình $\vec{F} = m\vec{W}$ và từ động học ta có $\vec{W} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ ta được biểu thức

$$\vec{F} = m\vec{W} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\ddot{\vec{r}}\,. \tag{2.1}$$

Đây là phương trình vi phân cấp hai mô tả chuyển động của điểm ở dạng vectơ.

2. Dạng tọa độ Đề-các

Chiếu cả hai vế của (2.1) lên các trục của hệ tọa độ *Oxyz* ta được:

$$\begin{aligned} mW_x &= m\ddot{x} = F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}); \\ mW_y &= m\ddot{y} = F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}); \\ mW_z &= m\ddot{z} = F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \end{aligned} \qquad (2.2)$$

trong đó: F_x, F_y, F_z – hình chiếu của lực $\vec{F}$;

W_x, W_y, W_z hay $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – hình chiếu của $\vec{W}$ lên các trục tọa độ Đề-các vuông góc *O*xyz.

Ta xét các dạng đặc biệt sau:

- Nếu chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng thì ta lấy mặt phẳng đó làm mặt phẳng tọa độ chứa hệ trục Oxy. Khi đó ta có các phương trình sau:

$$\begin{aligned} F_x &= mW_x = m\ddot{x}; \\ F_y &= mW_y = m\ddot{y}. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

- Nếu chất điểm chuyển động trên một đường thẳng thì ta chọn đường thẳng ấy làm trục *Ox* với chiều dương cùng chiều chuyển động. Lúc này phương trình vi phân chuyển động sẽ là

$$F_x = mW_x = m\ddot{x}. \qquad (2.4)$$

3. Dạng tọa độ tự nhiên

Nếu ta chọn hệ tọa độ tự nhiên $M\tau nb$ rồi chiếu phương trình (1.2) lên các trục tọa độ đó ta có:

$$\left.\begin{aligned} F_\tau &= mW_\tau = m\frac{dV}{dt}; \\ F_n &= mW_n = m\frac{V^2}{\rho}; \\ F_b &= mW_b = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

trong đó: F_τ, F_n, F_b – hình chiếu của lực $\vec{F}$ lên các trục tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến;

W_τ, W_n, W_b – hình chiếu của $\vec{W}$ lên các trục ấy, trong đó W_b luôn bằng không.

Các phương trình (2.5) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa độ tự nhiên.

Chú ý:

- Nếu chất điểm chịu tác dụng của nhiều lực thì vế trái của (1.2) sẽ là hợp lực của các lực ấy.
- Các lực tác dụng theo phương trùng pháp tuyến luôn ở trạng thái cân bằng.

§2.2. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Nội dung của động lực học nhằm giải quyết hai bài toán cơ bản sau đây:

2.2.1. BÀI TOÁN 1 (bài toán thuận)

Biết khối lượng của điểm và quy luật chuyển động của nó. Tìm lực tác dụng lên chất điểm ấy.

Giả sử quy luật chuyển động của điểm cho bởi các phương trình:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Muốn tìm lực $\vec{F}$ ta phải tìm hình chiếu của nó lên các trục tọa độ theo các phương trình (2.2). Nghĩa là trước tiên ta phải tìm $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$.

Sau đó ta xác định giá trị của lực F và các cosin chỉ phương của nó đối với các trục tọa độ.

Ví dụ 1: Người ta nâng một vật nặng A trọng lượng $\vec{P}$ lên nhanh dần đều nhờ một trục kéo. Hãy xác định sức căng $\vec{T}$ của dây.

Bài giải:

- Xét chuyển động tịnh tiến của vật A:

  Các lực tác dụng lên vật A là trọng lượng lượng $\vec{P}$ của vật A và lực căng $\vec{T}$ của dây.

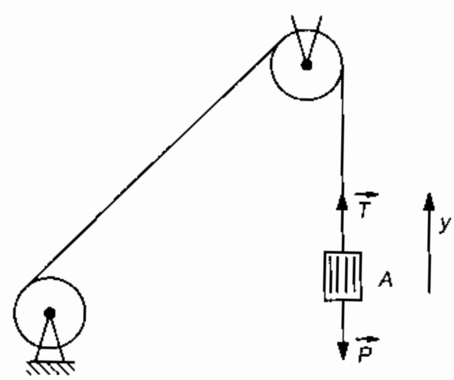
- Phương trình chuyển động của vật A (dưới dạng vectơ):

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{T}. \qquad \text{(a)}$$

Ta chọn trục y thẳng đứng hướng lên trên rồi chiếu phương trình (a) lên trục y ta có:

$$T - P = mW = \frac{P}{g}W;$$

$$T = P\left(1 + \frac{W}{g}\right).$$



Hình 2.1

Lúc này $T > P$.

Khi hạ vật xuống thì gia tốc $\vec{W}$ có chiều ngược lại nên lúc đó ta có:

$$T = P\left(1 - \frac{W}{g}\right).$$

Lúc này sức căng $T < P$.

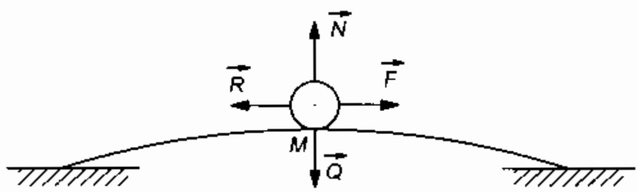
Khi vật chuyển động tịnh tiến thẳng đều thì $\vec{W} = 0$ cho nên khi đó $T = P$.

Ví dụ 2: Một xe ôtô trọng lượng $\vec{Q}$ chạy qua một chiếc cầu (vồng lên) với vận tốc V = const. Bán kính cong của cầu ở giữa nhịp là ρ. Tìm áp lực của ôtô lên đỉnh cầu. Cho Q = 10T, V = 10m/s và ρ = 50m.

Bài giải:

Ta xem ôtô như một chất điểm chuyển động đều trên quỹ đạo cong tại vị trí M.

Các lực tác dụng lên ôtô bao gồm: trọng lượng $\vec{Q}$, phản lực do mặt cầu tác dụng lên ôtô là $\vec{N}$, lực kéo $\vec{F}$ và lực cản $\vec{R}$.



Hình 2.2

Phương trình vi phân chuyển động (dưới dạng vectơ):

$$m\vec{W} = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}. \qquad (*)$$

Muốn tìm phản lực $\vec{N}$, ta chiếu phương trình vectơ (*) lên phương pháp tuyến chính tại M. Khi đó ta có:

$$mW_n = Q - N \text{ hay } m\frac{V^2}{\rho} = Q - N;$$

$$N = Q - \frac{QV^2}{g\rho} = Q\left(1 - \frac{V^2}{g\rho}\right).$$

Áp lực lên cầu là $N' = N = Q\left(1 - \frac{V^2}{g\rho}\right)$.

Như vậy tại đỉnh cầu áp lực của xe lên mặt cầu nhỏ hơn trọng lượng bản thân xe.

Thay trị số vào ta có:

$$N' = 10\left(1 - \frac{10^2}{9{,}8 \times 50}\right) = 7{,}96T \approx 8T.$$

Ví dụ 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật sau:

$$\begin{cases} x = a\cos kt \\ y = a\sin kt \\ z = ut \end{cases}$$

trong đó: a, k, u là các hằng số. Tìm lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm.

Bài giải:

Vì đề bài không cho biết dạng quỹ đạo nên ta sẽ tìm các hình chiếu của lực lên ba trục của hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$:

$$F_x = m\ddot{x} = -mk^2 a\cos kt = -mk^2 x;$$

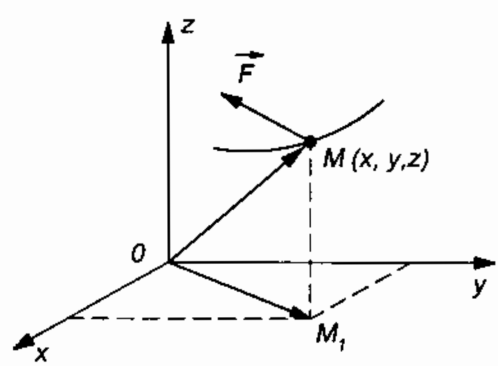
$$F_y = m\ddot{y} = -mk^2 a\sin kt = -mk^2 y;$$

$$F_z = m\ddot{z} = 0.$$

Ta nhận thấy rằng $F_z = 0$, $F_x \neq 0$ và $F_y \neq 0$ nên $\vec{F}$ nằm trên mặt phẳng song song với mặt phẳng xOy.

Mặt khác x và y là hình chiếu của $\overrightarrow{OM}$ lên hai trục Ox và Oy nên ta có thể viết:

$$\vec{F} = -mk^2\overrightarrow{OM_1}.$$



Hình 2.3

Như vậy lực $\vec{F}$ hướng vào trục Oz và song song với mặt phẳng xOy có cường độ tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến trục Oz.

2.2.2. BÀI TOÁN 2 (Bài toán ngược)

Biết khối lượng của chất điểm và lực tác dụng lên nó. Tìm quy luật chuyển động của chất điểm.

Chúng ta sẽ nghiên cứu việc giải bài toán này trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc. Trong trường hợp tổng quát lực $\vec{F}$ có thể phụ thuộc đồng thời vào thời gian, vận tốc và vị trí của điểm, nghĩa là $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$. Vì vậy phương trình vi phân chuyển động của điểm trong tọa độ Đề-các vuông góc có dạng:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Để tìm quy luật chuyển động của điểm ta phải tích phân hệ ba phương trình vi phân thường cấp 2 ở trên. Việc tích phân hệ phương trình vi phân này cơ bản phụ thuộc vào biểu thức của lực ở vế phải. Về mặt cơ học, nghiệm của bài toán trước hết do tính chất của lực tác dụng quyết định.

Từ lý thuyết phương trình vi phân ta biết rằng khi tích phân một phương trình vi phân thường cấp 2 bao giờ cũng có hai hằng số tích phân. Cho nên khi tích phân hệ ba phương trình vi phân cấp 2 ta có 6 hằng số tích phân. Như vậy sau khi tích phân thì mỗi tọa độ của điểm sẽ phụ thuộc vào thời gian và 6 hằng số tích phân. Nghĩa là:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Hệ phương trình (2.7) cho ta biết chuyển động của điểm xảy ra theo một họ đường cong nào đó, chứ chưa cho ta biết một cách hoàn toàn và duy nhất chuyển động của điểm. Muốn xác định được cụ thể chuyển động của điểm ta phải xác định được 6 hằng số tích phân theo các điều kiện ban đầu, nghĩa là khi $t = 0$ thì:

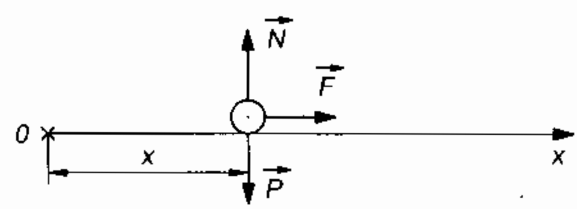
$$\begin{cases} x(0) = x_o \\ y(0) = y_o \\ z(0) = z_o \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}_o \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_o \\ \dot{z}(0) = \dot{z}_o \end{cases}.$$

Như vậy với bài toán thứ hai (tìm quy luật chuyển động) bao giờ cũng cần phải biết thêm điều kiện ban đầu.

Ta hãy xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 1: (Lực phụ thuộc vào thời gian)

Một vật trọng lượng $\vec{P}$ bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trên đường thẳng nhẵn nằm ngang dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ có giá trị tỷ lệ với thời gian theo quy luật $F = kt$. Tìm quy luật chuyển động của vật.



Hình 2.4

Bài giải:

Khảo sát chuyển động tịnh tiến trên đường thẳng.

Ta chọn vị trí bắt đầu chuyển động làm gốc tọa độ và chiều dương của hệ quy chiếu trùng với chiều chuyển động của vật.

Điều kiện ban đầu $t = 0$, $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = 0$.

Tại một vị trí bất kỳ trên vật có các lực tác dụng:

$\vec{N}$: phản lực pháp tuyến do đường thẳng tác dụng lên vật;

$\vec{P}$: trọng lượng của vật;

$\vec{F}$: lực tác dụng.

Phương trình vi phân chuyển động của vật (dưới dạng vectơ):

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}. \tag{a}$$

Chiếu đẳng thức (a) lên trục Ox ta được:

$$mW_x = m\ddot{x} = F = kt\,.$$

Mà $$W_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\,,$$

suy ra: $$m\frac{dV_x}{dt} = kt\,;$$

$$md\dot{x} = kt.dt\,.$$

Tích phân cả hai vế ta có:

$$m\dot{x} = k\frac{t^2}{2} + C_1\,. \tag{b}$$

Nhưng $V = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ nên:

$$mV = m\frac{dx}{dt} = k\frac{t^2}{2} + C_1 \rightarrow mdx = \left(k\frac{t^2}{2} + C_1\right)dt\,.$$

Tích phân hai vế lần nữa ta được:

$$mx = \frac{k}{2}\times\frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2\,. \tag{c}$$

Ta xác định các hằng số C_1 và C_2 theo điều kiện ban đầu. Thay $t = 0$ vào (b) ta có $\dot{x}(0) = V = 0$ ta được $C_1 = 0$ và thay $t = 0$ vào (c) ta có $x(0) = 0$ ta sẽ được $C_2 = 0$.

Vậy quy luật chuyển động của vật là

$$x = \frac{1}{6}\times\frac{kt^3}{m} = \frac{kgt^3}{6P}\,.$$

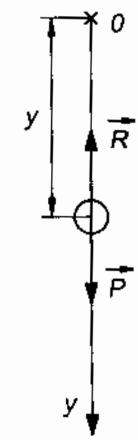
Như vậy quãng đường mà vật đi được tỷ lệ với lập phương thời gian.

Ví dụ 2: (Lực phụ thuộc vận tốc)

Một quả cầu trọng lượng $\vec{P}$ rơi xuống theo phương thẳng đứng không có vận tốc ban đầu. Lực cản của không khí tỷ lệ với khối lượng và vận tốc của quả cầu theo quy luật R = kmV. Tìm vận tốc giới hạn và phương trình chuyển động của quả cầu.

Bài giải:

Chọn gốc tọa độ tại vị trí quả cầu bắt đầu chuyển động và trục Oy hướng thẳng đứng xuống dưới.



Hình 2.5

Điều kiện ban đầu:

Tại $t = 0$: $y(0) = 0$ và $\dot{y} = V_y = V = 0$.

Các lực tác dụng lên quả cầu:

$\vec{P}$: trọng lượng quả cầu;

$\vec{R}$: lực cản của môi trường.

Phương trình vi phân chuyển động (dưới dạng vectơ):

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R}.$$

Chiếu đẳng thức này lên trục Oy ta có:

$$mW_y = m\ddot{y} = P - R = mg - kmV_y = m(g - k\dot{y}).$$

Ta có:

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = g - k\dot{y} \rightarrow \frac{d\dot{y}}{g - k\dot{y}} = dt;$$

$$\frac{d(g - k\dot{y})}{g - k\dot{y}} = -kdt;$$

$$\int\frac{d(g - k\dot{y})}{g - k\dot{y}} = -\int kdt = -k\int dt;$$

$$\ln|g - k\dot{y}| - \ln C_1 = \ln\frac{g - k\dot{y}}{C_1} = -kt;$$

$$\frac{g - k\dot{y}}{C_1} = e^{-kt} \rightarrow g - k\dot{y} = C_1e^{-kt}.$$

Từ điều kiện ban đầu $t = 0$ thì $\dot{y} = V = 0$ ta có $C_1 = g$. Cho nên:

$$g - k\dot{y} = ge^{-kt} \rightarrow g - ge^{-kt} = g(1 - e^{-kt}) = k\dot{y}.$$

Mà $$V = \dot{y} = \frac{g(1 - e^{-kt})}{k} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \qquad (*)$$

Từ (*) ta nhận thấy rằng khi $t \rightarrow \infty$ thì vận tốc V không tăng vô hạn mà $V \rightarrow g/k$ cho nên ta gọi $V_{gh} = g/k$. Nhưng hàm e^{-kt} giảm rất nhanh khi t tăng liên tục cho nên chỉ sau khi vật rơi độ mấy giây thì vận tốc đã xấp xỉ vận tốc giới hạn với sai số khá nhỏ.

Từ (*) ta có

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \text{ nên } dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt.$$

Tích phân hai vế một lần nữa ta có:

$$\int dy = \int \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt = \frac{g}{k}\int(1 - e^{-kt})dt;$$

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2.$$

Từ điều kiện ban đầu $t = 0$ thì $y = 0$ ta có

$$C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Vậy

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} - \frac{g}{k^2} = \frac{g}{k}\left(t + \frac{e^{-kt}}{k} - \frac{1}{k}\right).$$

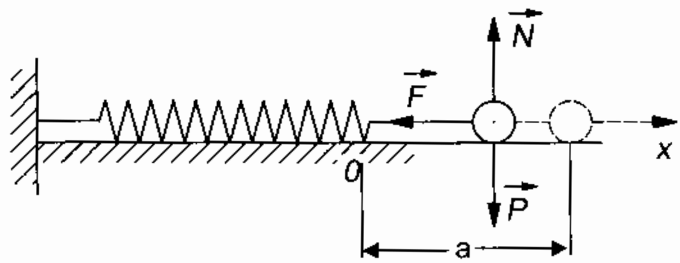
Đây là phương trình chuyển động của quả cầu đồng thời là phương trình chuyển động của vật nặng rơi tự do trong không khí có lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc.

Ví dụ 3: (Lực phụ thuộc vị trí)

Một quả cầu nhỏ khối lượng m được gắn vào đầu một lò xo có hệ số cứng là C. Đầu kia của lò xo gắn vào tường cố định. Người ta kéo quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn là a rồi nó tự chuyển động. Tìm quy luật chuyển động của quả cầu.

Bài giải:

Các lực tác dụng lên quả cầu là lực đàn hồi $\vec{F} = -C\vec{r}$, trong đó $\vec{r}$ là vectơ định vị của quả cầu và phản lực do nền tác dụng lên quả cầu là $\vec{N}$.



Hình 2.6

Phương trình vi phân chuyển động (dưới dạng vectơ):

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{P}. \qquad (*)$$

Chọn trục Ox có gốc O ở vị trí cân bằng tĩnh như hình 2.6. Chiếu đẳng thức (*) lên trục x ta có

$$mW_x = m\ddot{x} = -Cx,$$

hay $$\ddot{x} = -\frac{C}{m}x = -k^2x, \qquad (*)$$

với $$k^2 = \frac{C}{m}.$$

Điều kiện ban đầu $t = 0$ thì $x(0) = a$ và $\dot{x}(0) = 0$. Vì vế phải chứa x còn vế trái chứa $\ddot{x}$ nên ta thay $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \times \frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$ ta được

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -k^2x \rightarrow \dot{x}d\dot{x} = -k^2xdx.$$

Ta lấy tích phân hai vế:

$$\int \dot{x}d\dot{x} = -\int k^2 x dx \to \frac{\dot{x}^2}{2} = -k^2\frac{x^2}{2} + C_1',$$

hay

$$\dot{x}^2 = -k^2x^2 + C_1 \text{ với } C_1 = 2C_1'.$$

Ta xác định C_1 từ điều kiện ban đầu:

$$t = 0 \text{ thì } x(0) = a \text{ và } \dot{x}(0) = 0 \text{ ta có } C_1 = k^2a^2.$$

Do đó:

$$\dot{x}^2 = -k^2x^2 + k^2a^2 = k^2(a^2 - x^2);$$

$$\dot{x} = -k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ở đây phải lấy dấu (–) trước căn số vì điểm chuyển động về phía âm ($\dot{x} < 0$).

Ta thay $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ vào phương trình trên ta có:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -kdt.$$

Tích phân hai vế ta có:

$$\arcsin\frac{x}{a} = -kt + C_2.$$

Thay điều kiện ban đầu $t = 0$ thì $x(0) = a$ ta có :

$$C_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - kt \text{ hay } \frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - kt\right) = \cos kt.$$

Vậy: $x = a\cos kt$.

Ta thấy quả cầu thực hiện chuyển động dao động quanh vị trí cân bằng với biên độ a.

Ta cũng có thể giải phương trình (*) như sau:

$$\ddot{x} = -k^2 x \rightarrow \ddot{x} + k^2 x = 0 .$$

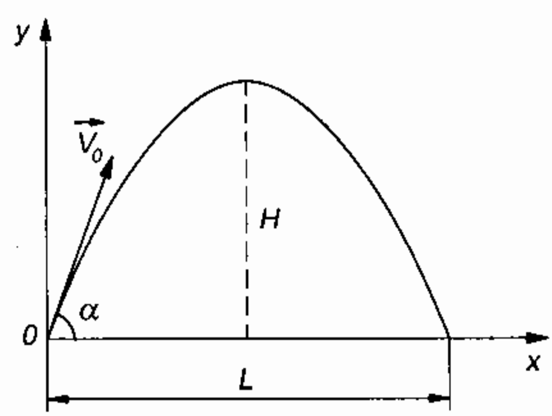
Từ lý thuyết phương trình vi phân thì nghiệm của phương trình trên có dạng $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$. Ta lấy đạo hàm bậc nhất theo thời gian cả hai vế ta có:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt .$$

Thay điều kiện ban đầu $t = 0$ thì $x(0) = a$ và $\dot{x}(0) = 0$ ta được $C_1 = a$ và $C_2 = 0$. Do đó x = acoskt (trở lại kết quả đã tìm được).

Chú ý: Qua các ví dụ vừa giải ta thấy bước hai của các bài toán đều giống nhau (thay $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ để tích phân).

Ví dụ 4: Một viên đạn được bắn lên với vận tốc ban đầu $\overrightarrow{V_o}$ hợp với phương ngang một góc α. Bỏ qua sức cản của không khí. Tìm chuyển động của viên đạn.



Hình 2.7

Bài giải:

Ta khảo sát chuyển động của viên đạn và xem nó như một chất điểm. Lực tác dụng lên viên đạn chỉ có trọng lực.

Chọn hệ tọa độ xOy có gốc O ứng với vị trí ban đầu của viên đạn. Trục Ox nằm ngang, trục Oy thẳng đứng hướng lên trên sao cho vận tốc ban đầu $\overrightarrow{V_0}$ nằm trong mặt phẳng xOy. Chọn gốc thời gian ứng với vị trí ban đầu. Ta có:

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P}. \qquad \text{(a)}$$

Chiếu đẳng thức (a) lên hai trục tọa độ ta có:

$$m\ddot{x} = 0 \text{ và } m\ddot{y} = -mg.$$

Từ đây ta có: $\ddot{x} = 0$ và $\ddot{y} = -g$.

Điều kiện ban đầu sẽ là, khi $t = 0$:

$$x(0) = x_o = 0;$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o = V_o \cos\alpha;$$
$$y(0) = y_o = 0;$$
$$\dot{y}(0) = \dot{y}_o = V_o \sin\alpha.$$

Khi tích phân các phương trình vi phân chuyển động trên ta có:

$$\dot{x} = C_1 \to x = C_1 t + C_2;$$
$$\dot{y} = -gt + C_3 \to y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4.$$

Các hằng số tích phân này được xác định từ điều kiện ban đầu. Ta có:

$$C_1 = V_o \cos\alpha;\ C_3 = V_o \sin\alpha;\ C_4 = 0;\ C_2 = 0.$$

Vậy phương trình chuyển động của viên đạn có dạng:

$$x = (V_o \cos\alpha)t;$$
$$y = (V_o \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Như vậy, ta thấy viên đạn chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng xOy có chứa vectơ vận tốc ban đầu $\overrightarrow{V_o}$. Dễ dàng thấy rằng quỹ đạo của viên đạn là một đường parabon đi qua gốc tọa độ có dạng:

$$y = xtg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_o}(1 + tg^2\alpha)x^2.$$

Muốn tìm độ cao H và tầm xa L của đường đạn thì tại đỉnh của parabon ta có:

$$V_y = \dot{y} = V_o \sin\alpha - gt = 0 \to t = \frac{V_o \sin\alpha}{g};$$

$$H = V_o \sin\alpha \frac{V_o \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_o^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{V_o^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2g} \times \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}V_o^2;$$

$$L = x = 2V_o \cos\alpha \frac{V_o \sin\alpha}{g} = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Từ kết quả này ta thấy nếu cho trước V_o thì khi $\alpha = 45°$ sẽ có:

$$L_{max} = \frac{V_o^2}{g}.$$

Khi $\alpha = 90°$ thì $H_{max} = \frac{1}{2g}V_o^2$.

Tùy theo dạng của lực đã cho mà ta phải thực hiện phép thay biến số khác nhau, ta thay

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ hay } \ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}.$$

Điều kiện ban đầu $(x_o, \dot{x}_o)$ giữ một vai trò rất quan trọng vì nó xác định dạng chuyển động cụ thể của chất điểm đã cho.

§2.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ

Cho một cơ hệ có n chất điểm, ta xét chất điểm thứ k của hệ. Tùy theo cách phân loại lực tác dụng lên hệ mà ta có những dạng khác nhau của phương trình vi phân chuyển động của hệ.

- Nếu ta phân các lực tác dụng lên hệ thành ngoại lực và nội lực (ta gọi $\overrightarrow{F_k^e}$ và $\overrightarrow{F_k^i}$ là hợp lực của ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k) thì theo tiên đề 2 ta có:

$$m_k\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}.$$

Tương tự với các chất điểm khác thuộc hệ ta có hệ phương trình vi phân chuyển động sau:

$$\left.\begin{aligned} &m_1\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{F_1^e} + \overrightarrow{F_1^i};\\ &m_2\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{F_2^e} + \overrightarrow{F_2^i};\\ &\dots\dots\dots\\ &m_n\overrightarrow{W_n} = \overrightarrow{F_n^e} + \overrightarrow{F_n^i}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

- Nếu ta phân các lực tác dụng lên hệ thành lực hoạt động (gọi tắt là hoạt lực) và phản lực liên kết. Ta gọi $\overrightarrow{F_k}$ và $\overrightarrow{N_k}$ là hợp lực của tất cả lực hoạt động và phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm thứ *k* ta có:

$$\left.\begin{aligned} &m_k\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k};\\ &m_1\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{N_1};\\ &m_2\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{N_2};\\ &\dots\dots\dots\\ &m_n\overrightarrow{W_n} = \overrightarrow{F_n} + \overrightarrow{N_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

Việc tìm nghiệm của (2.8) hay (2.9) rất phức tạp nếu số chất điểm của hệ càng nhiều. Mặt khác trong nhiều bài toán thực tế, ta không cần phải tìm quy luật chuyển động của từng chất điểm mà chỉ cần tìm một số thông số đặc trưng cho chuyển động của cơ hệ như chuyển động khối tâm của hệ hay ngoại lực tác dụng lên hệ, mà không cần dùng các phương trình vi phân ta có thể áp dụng các định lý các nguyên lý cơ học ở các chương sau.

Chương 3

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

§3.1 CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI

Ta nhận thấy chuyển động của một cơ hệ không những phụ thuộc vào lực tác dụng lên cơ hệ mà còn phụ thuộc vào tổng khối lượng và sự phân bố khối lượng của cơ hệ.

3.1.1. KHỐI TÂM CỦA CƠ HỆ

1. Khối lượng của cơ hệ

Định nghĩa: Khối lượng của cơ hệ bằng tổng khối lượng của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \, . \tag{3.1}$$

Để đặc trưng cho sự phân bố khối lượng của cơ hệ người ta đưa ra khái niệm khối tâm.

2. Khối tâm của cơ hệ

Giả sử cơ hệ có n chất điểm có khối lượng m_1, m_2, ..., m_n và vị trí của chúng được xác định bởi các vectơ định vị $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$, thì ta có định nghĩa sau:

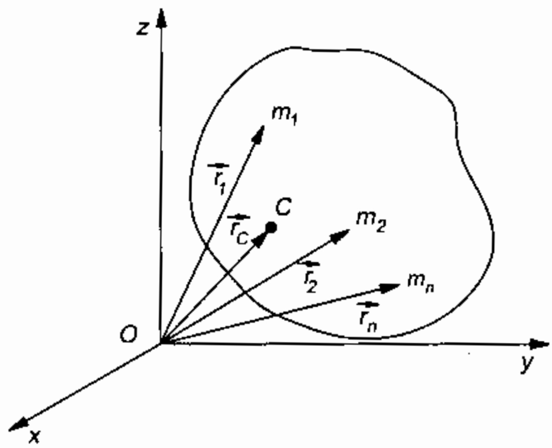
Định nghĩa: Khối tâm của cơ hệ là một điểm hình học C mà vị trí của nó được xác định bởi biểu thức sau:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{r_k}}{M}, \qquad (3.2)$$

trong đó: $m_k, \overrightarrow{r_k}$ – khối lượng và vectơ định vị của chất điểm thứ k;

$\overrightarrow{r_C}$ – vectơ định vị của khối tâm C;

$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – khối lượng của cơ hệ.



Hình 3.1

Chiếu biểu thức (3.2) lên các trục của hệ trục tọa độ Đề-các $Oxyz$ ta có:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

trong đó: x_k, y_k, z_k – tọa độ của chất điểm thứ k;

x_C, y_C, z_C – tọa độ của khối tâm C.

Nếu cơ hệ đặt trong trường trọng lực thì từ (3.3) ta có thể viết lại như sau:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k g x_k}{Mg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{Q}; \\ y_C &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k g y_k}{Mg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k y_k}{Q}; \\ z_C &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k g z_k}{Mg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k z_k}{Q}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

trong đó: p_k – trọng lượng của chất điểm thứ k;

Q – trọng lượng của cơ hệ.

Như vậy: nếu cơ hệ là vật rắn đặt trong trường trọng lực thì trọng tâm và khối tâm của cơ hệ trùng nhau. Nhưng khái niệm khối tâm tổng quát hơn khái niệm trọng tâm vì khối tâm luôn luôn tồn tại còn trọng tâm chỉ tồn tại khi hệ đặt trong trường trọng lực.

§3.2. MÔMEN QUÁN TÍNH

Mômen quán tính của vật là một đại lượng đặc trưng cho tính quán tính của vật trong chuyển động quay.

3.2.1. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT ĐỐI VỚI TRỤC QUAY *z*

Định nghĩa: Mômen quán tính của vật đối với trục z là một lượng vô hướng, được ký hiệu là J_z và bằng tổng các tích khối lượng mỗi chất điểm thuộc vật với bình phương khoảng cách từ chất điểm đó đến trục z.

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2. \qquad (5)$$

Từ định nghĩa này ta thấy J_z luôn luôn dương.

3.2.2. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT ĐỐI VỚI ĐIỂM O

Định nghĩa: Mômen quán tính của vật đối với điểm O ký hiệu là J_O và bằng tổng các tích khối lượng của mỗi chất điểm thuộc vật với bình phương khoảng cách từ chất điểm đó đến điểm O.

$$J_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2, \qquad (3.6)$$

trong đó: $\overrightarrow{r_k}$ – là vectơ định vị của chất điểm thứ k đối với điểm O.

Trong hệ SI mômen quán tính của vật có đơn vị là kgm^2.

Nếu ta gọi x_k, y_k, z_k là tọa độ của chất điểm thứ k đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì mômen quán tính của vật đối với các trục tọa độ và đối với điểm O sẽ là:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ J_y &= \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k^2 + x_k^2); \\ J_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Người ta còn định nghĩa các mômen quán tính tích J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} là những đại lượng được xác định theo các công thức sau:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k ;\; J_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k ;\; J_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k . \qquad (3.8)$$

Từ (3.8) ta dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

$$\left.\begin{aligned} & J_{xy} = J_{yx}; J_{yz} = J_{zy}; J_{zx} = J_{xz}; \\ & J_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

hay:

$$J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z). \tag{3.9a}$$

Trong tính toán kỹ thuật người ta thường biểu diễn mômen quán tính của vật đối với một trục bằng tích số khối lượng của vật đối với bình phương bán kính quán tính ρ:

$$J_z = M\rho^2. \tag{3.10}$$

Như vậy, bán kính quán tính ρ là khoảng cách từ trục z đến một điểm nào đó mà ta cần phải tập trung toàn bộ khối lượng của vật vào điểm đó sao cho có mômen quán tính bằng mômen quán tính của vật đối với trục z.

Mômen quán tính của vật rắn đối với một trục nào đó chính là giới hạn của (3.5):

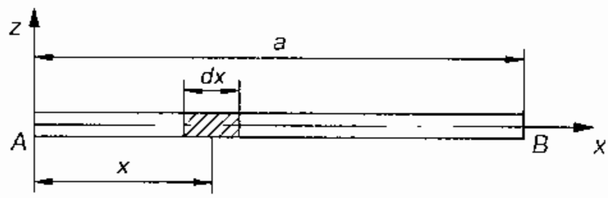
$$J_z = \lim_{\Delta m_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k h_k^2 = \int_{\Omega} h^2 dm. \tag{3.11}$$

Mômen quán tính của vật đối với một trục giữ một vai trò quan trọng trong chuyển động quay của vật. Cho nên ta có thể nói mômen quán tính của vật đặc trưng cho quán tính của vật trong chuyển động quay.

§3.3. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT SỐ VẬT ĐỒNG CHẤT ĐƠN GIẢN

3.3.1. THANH MẢNH ĐỒNG CHẤT

Giả sử thanh mảnh $AB = a$ có khối lượng M. Để tính mômen quán tính của nó đối với trục z đi qua đầu A và vuông góc với trục thanh, ta gọi dx là chiều dài một phân tố của thanh và cách trục z một đoạn là x, khối lượng của nó là $dm = \gamma dx$, trong đó $\gamma = \dfrac{M}{a}$ là khối lượng của một đơn vị chiều dài của thanh.



Hình 3.2

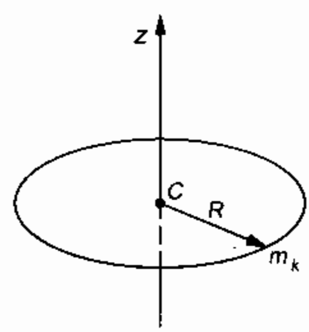
Theo (3.11) ta có:

$$J_z = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 \gamma dx = \gamma \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{Ma^2}{3};$$

$$J_z = \frac{1}{3} Ma^2. \qquad (3.12)$$

3.3.2. VÀNH TRÒN ĐỒNG CHẤT

Giả sử ta có vành tròn đồng chất khối lượng M bán kính R. Để tính mômen quán tính của nó đối với trục z đi qua tâm C và vuông góc với mặt phẳng của vành tròn, ta tưởng tượng chia vành tròn thành các đoạn nhỏ với mỗi đoạn có khối lượng m_k. Vì các đoạn này đều cách trục z một đoạn bằng bán kính R của nó và ta coi vành tròn là tập hợp các chất điểm có khối lượng m_k nên theo (3.5) ta có:



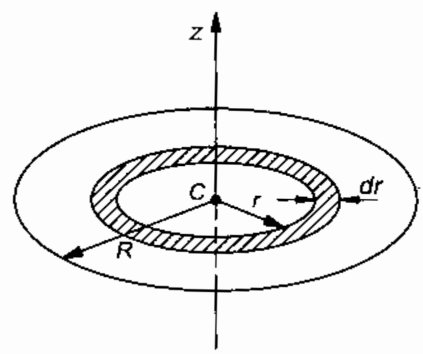
Hình 3.3

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k R^2 = MR^2;\ J_z = MR^2. \qquad (3.13)$$

Công thức này cũng dùng để tính mômen quán tính của vỏ trụ đồng chất đối với trục của nó.

3.3.3. TẤM TRÒN ĐỒNG CHẤT

Để tính mômen quán tính của tấm tròn đồng chất bán kính R khối lượng M đối với trục z đi qua tâm C và vuông góc với mặt phẳng của nó.



Hình 3.4

Ta chia tấm tròn thành những hình vành khăn nhỏ có bán kính r, bề rộng dr. Như vậy diện tích hình vành khăn là $2\pi r dr$ và khối lượng một đơn vị diện tích của tấm tròn đó là $\gamma = \dfrac{M}{2\pi R^2}$.

Theo công thức (3.11) thì :

$$J_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \gamma 2\pi r dr = 2\pi\gamma \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_z = \frac{1}{2}MR^2. \qquad (3.14)$$

Công thức này cũng dùng để tính mômen quán tính của khối trụ đặc đối với trục của nó.

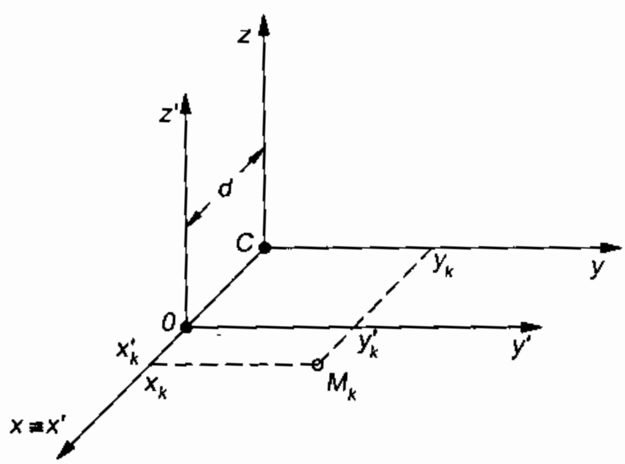
Bán kính quán tính của tấm tròn đồng chất là $\rho = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ còn bán kính quán tính của vành tròn đồng chất là $\rho = R$.

§3.4. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT ĐỐI VỚI CÁC TRỤC

3.4.1. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT ĐỐI VỚI CÁC TRỤC SONG SONG. ĐỊNH LÝ HUYGHEN

Định lý: Mômen quán tính của vật đối với một trục nào đó, bằng mômen quán tính của vật đối với trục đi qua khối tâm song song với trục ấy cộng với tích số giữa khối lượng của vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục:

$$J_{Oz'} = J_{Cz} + Md^2 . \tag{3.15}$$



Hình 3.5

Chứng minh:

Qua khối tâm C của vật ta lập hệ tọa độ Đề-các $Cxyz$ và qua O ta lập hệ tọa độ Đề-các $Ox'y'z'$ sao cho $Cx \equiv Ox'$; $Cy // Oy'$; $Cz // Oz'$ và cách nhau một khoảng d. Theo công thức tính mômen quán tính ta có:

$$J_{Cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) ; \tag{a}$$

$$J_{Oz'} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x'^2_k + y'^2_k) . \tag{b}$$

Xét chất điểm M_k bất kỳ có $y'_k = y_k$ và $x'_k = x_k - d$.

Do đó :

$$J_{Oz'} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x'^2_k + y'^2_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k [(x_k - d)^2 + y'^2_k];$$

$$J_{Oz'} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2 - 2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k d.$$

Vì $2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k d = 2Mx_C d = 0$, do $x_C = 0 \rightarrow J_{Oz'} = J_{Cz} + Md^2$. Điều phải chứng minh.

Từ định lý này ta thấy trong các trục có cùng một phương thì mômen quán tính của vật đối với trục đi qua khối tâm C có giá trị nhỏ nhất.

3.4.2. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT ĐỐI VỚI TRỤC ĐI QUA GỐC TỌA ĐỘ

Định lý: Mômen quán tính của vật đối với trục Δ bất kỳ đi qua gốc tọa độ có biểu thức sau:

$$\left.\begin{aligned} &J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma; \\ &-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

trong đó: α, β, γ – góc chỉ phương của trục Δ.

Chứng minh:

Theo định nghĩa ta có:

$$J_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (\overline{OM}_k^2 - \overline{OH}_k^2).$$

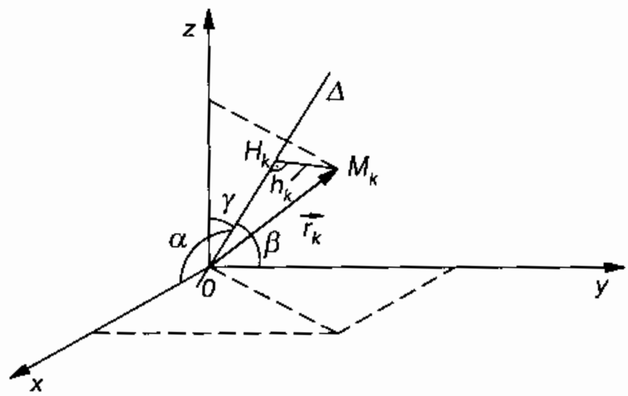
Ta cần chú ý đến các đẳng thức sau:

$$\overline{OM}_k^2 = (\overrightarrow{OM_k})^2 = (\vec{r}_k)^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)1$$

$$= (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma);$$

$$\overline{OH}_k^2 = (\vec{r}_k.\vec{u})^2 = (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2$$

($\vec{u}$: là vectơ đơn vị chỉ phương của trục Δ).



Hình 3.6

Vậy:

$$J_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k[(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$-(x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2].$$

Sau khi khai triển và sắp xếp lại các số hạng ta có:

$$J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$$
$$- 2J_{xy} \cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz} \cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma\cos\alpha.$$

Định lý được chứng minh.

3.4.3. TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH VÀ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM

1. ***Định nghĩa 1:*** Trục *Oz* được gọi là trục quán tính chính tại *O* nếu

$$J_{zx} = J_{zy} = 0\,.$$

Tương tự đối với trục *Ox:*

$$J_{xz} = J_{xy} = 0\,.$$

Đối với trục *Oy:*

$$J_{yx} = J_{yz} = 0 .$$

2. ***Định nghĩa 2:*** Trục quán tính chính đi qua khối tâm gọi là trục quán tính chính trung tâm.

Chú ý: Từ định nghĩa 1 suy ra: Nếu có 2 trục là trục quán tính chính tại *O* thì trục thứ 3 vuông góc với chúng cũng là trục quán tính chính tại O.

3. Các định lý về trục quán tính chính trung tâm

Định lý 1: Nếu vật có trục đối xứng thì trục đối xứng là trục quán tính chính trung tâm.

Định lý 2: Nếu vật có mặt phẳng đối xứng thì một trong các trục quán tính chính trung tâm vuông góc với mặt phẳng đối xứng, hai trục kia nằm trong mặt phẳng đối xứng.

Định lý 3: Nếu một trong các trục quán tính chính của vật tại điểm *O* nào đó đi qua trọng tâm của vật thì trục đó là trục quán tính chính trung tâm.

CHƯƠNG 4
CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Trong chương 2 ta đã nghiên cứu cách giải hai bài toán cơ bản của động lực học. Chương này ta thiết lập các định lý tổng quát của động lực học. Các định lý này phản ánh những mối liên hệ cụ thể khác nhau giữa lực với chuyển động và được sử dụng thuận tiện khi khảo sát các bài toán động lực học.

§4.1. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

4.1.1. ĐỘNG LƯỢNG VÀ XUNG LƯỢNG CỦA LỰC

a. Động lượng của chất điểm và cơ hệ

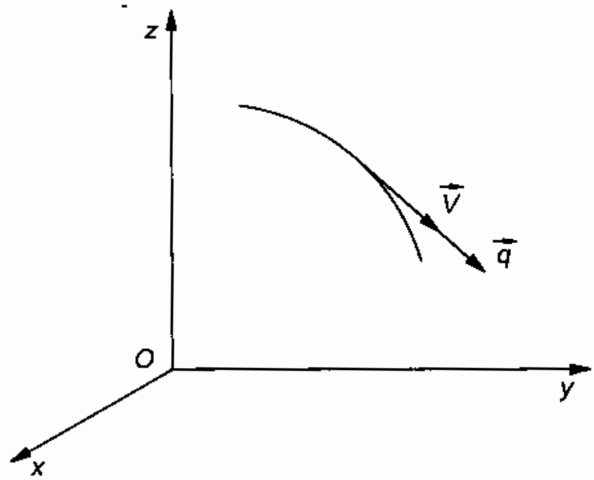
Định nghĩa 1: Động lượng của chất điểm là một đại lượng vectơ bằng tích số giữa khối lượng của chất điểm với vận tốc của nó. Ký hiệu $\vec{q}$:

$$\vec{q} = m\vec{V}. \tag{4.1}$$

Chiếu đẳng thức này lên các trục tọa độ Đề-các ta có:

$$\left.\begin{aligned} q_x &= mV_x = m\dot{x}; \\ q_y &= mV_y = m\dot{y}; \\ q_z &= mV_z = m\dot{z}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

trong đó: q_x, q_y, q_z – hình chiếu của $\vec{q}$ lên các trục tọa độ.



Hình 4.1

Định nghĩa 2: Động lượng của cơ hệ là một vectơ và bằng tổng hình học các vectơ động lượng của các chất điểm thuộc hệ. Ký hiệu $\vec{Q}$:

$$\vec{Q} = \sum \overrightarrow{q_k} = \sum m_k \overrightarrow{V_k}; \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \sum q_{kx} = \sum m_k \dot{x}_k \\ Q_y &= \sum q_{ky} = \sum m_k \dot{y}_k \\ Q_z &= \sum q_{kz} = \sum m_k \dot{z}_k \end{aligned}\right\}. \tag{4.3a}$$

Trong hệ SI đơn vị của động lượng là kg.m/s hay N.s.

Ta có thể tính động lượng của cơ hệ qua vận tốc khối tâm C. Từ công thức $M\overrightarrow{r_C} = \sum m_k \overrightarrow{r_k}$, nếu lấy đạo hàm bậc nhất theo thời gian cả hai vế ta có $M\dot{\vec{r}}_C = \sum m_k \dot{\vec{r}}_k$ hay $M\overrightarrow{V_C} = \sum m_k \overrightarrow{V_k}$. Thay vào đẳng thức (4.3) ta có:

$$\vec{Q} = \sum m_k \overrightarrow{V_k} = M\overrightarrow{V_C}. \tag{4.4}$$

Vậy động lượng của cơ hệ bằng tích khối lượng của cơ hệ với vận tốc khối tâm C của nó. Vectơ $\vec{Q}$ đặt tại khối tâm C.

Chú ý:

- Nếu cơ hệ chuyển động nhưng khối tâm của hệ đứng yên thì $\vec{Q} = 0$ vì $\vec{V_C} = 0$.
- Nếu hệ chuyển động phức hợp thì động lượng $\vec{Q}$ chỉ đặc trưng cho phần chuyển động tịnh tiến của hệ cùng với khối tâm.
- Công thức (4.4) rất thuận tiện cho việc tính động lượng của vật rắn. Nếu cơ hệ là tập hợp các vật rắn thì động lượng của cơ hệ bằng tổng hình học động lượng các vật rắn.

b. Xung lượng của lực

Xung lượng của lực là một đại lượng đặc trưng cho tác dụng của lực trong một khoảng thời gian nào đó.

Định nghĩa 1: Xung lượng nguyên tố của lực $\vec{F}$ là một đại lượng vectơ và bằng tích số giữa khoảng thời gian vô cùng bé dt với lực $\vec{F}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \tag{4.5}$$

Xung lượng nguyên tố $d\vec{S}$ bao giờ cũng hướng theo đường tác dụng của lực $\vec{F}$.

Định nghĩa 2: Xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_0 đến t_1 nào đó bằng tổng xung lượng nguyên tố trong khoảng thời gian ấy:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt. \tag{4.6}$$

Nếu $\vec{F} = const$ thì $\vec{S} = \vec{F}(t_1 - t_0)$.

Chiếu (4.6) lên các trục tọa độ Đề-các ta có:

$$S_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt;$$

$$S_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt; \qquad (4.7)$$

$$S_z = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt,$$

trong đó: S_x, S_y, S_z và F_x, F_y, F_z là hình chiếu của $\vec{S}$ và $\vec{F}$ lên các trục của hệ tọa độ Đề-các *Oxyz*.

Trong hệ SI xung lượng có đơn vị là N.s

4.1.2. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG CỦA CƠ HỆ

Giả sử hệ có *n* chất điểm. Ta xét chất điểm thứ *k* có khối lượng m_k chuyển động với gia tốc $\overrightarrow{W_k}$ do tác dụng của ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$ và nội lực $\overrightarrow{F_k^i}$. Theo tiên đề 2 ta có:

$$m_k \overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i},$$

hay

$$m_k \frac{d\overrightarrow{V_k}}{dt} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i};$$

$$\frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_k}) = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}.$$

Đối với toàn hệ ta có:

$$\sum \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_k}) = \sum \overrightarrow{F_k^e} + \sum \overrightarrow{F_k^i} \to \frac{d}{dt}(\sum m_k \overrightarrow{V_k}) = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_k^e} + \sum \overrightarrow{F_k^i}.$$

Nhưng $\sum \overrightarrow{F_k^i} = 0$ nên:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_k^e}. \qquad (4.7)$$

Định lý 1: Đạo hàm bậc nhất theo thời gian vectơ động lượng của cơ hệ bằng tổng hình học tất cả ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

Đẳng thức (4.7) biểu diễn định lý động lượng của cơ hệ ở dạng vi phân. Nhân cả hai vế của (4.7) với dt rồi tích phân với cận tương ứng ta có:

$$\int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}_1} d\vec{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \sum \overrightarrow{F_k^e} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F_k^e} dt = \sum \overrightarrow{S_k^e} ;$$

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \overrightarrow{S_k^e} . \tag{4.8}$$

ở đây: $\vec{Q}_0, \vec{Q}_1$ – động lượng của hệ tại thời điểm t_0 và t_1 ;

$\overrightarrow{S_k^e}$ – xung lượng của ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$ trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1.

Định lý 2: Biến thiên động lượng của cơ hệ trong khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng của tất cả ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

Chiếu hai vế của (4.8) lên các trục tọa độ Đề-các ta có:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^e \end{aligned}\right\}, \tag{4.8a}$$

trong đó: Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} và Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z} – hình chiếu của $\vec{Q}_0, \vec{Q}_1$ lên các trục của hệ tọa độ Đề-các;

$S_{kx}^e, S_{ky}^e, S_{kz}^e$ – hình chiếu của $\overrightarrow{S_k^e}$ lên các trục ấy.

Các đẳng thức (4.8) và (4.8a) biểu diễn định lý động lượng của cơ hệ ở dạng hữu hạn.

4.1.3. CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG

Từ các định lý động lượng ta suy ra:

a) Nếu tổng hình học của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không thì động lượng của cơ hệ không đổi.

Thật vậy, từ (4.7) ta thấy

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_k^e} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \text{ hay } \vec{Q} = \text{const}.$$

b) Nếu tổng hình chiếu các ngoại lực lên một trục nào đó bằng không thì hình chiếu động lượng của cơ hệ lên trục đó không đổi (chứng minh tương tự như trên).

Các kết luận này là nội dung của các định luật bảo toàn động lượng.

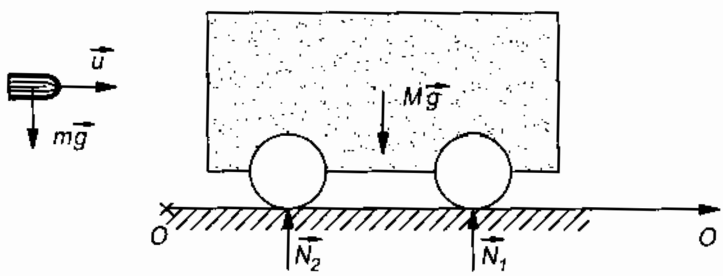
Ý nghĩa:

- Định lý động lượng cho ta mối liên hệ giữa vận tốc, lực với thời gian. Nó giúp ta xác định được một trong ba đại lượng khi biết hai đại lượng còn lại.
- Định lý động lượng còn cho ta tìm được các tích phân đầu của chất điểm và cơ hệ trong một số điều kiện của lực tác dụng. Nó cho phép ta xác định vectơ chính của áp lực dòng chất lỏng tác dụng lên thành ống và áp dụng trong nghiên cứu lý thuyết va chạm.

Chú ý:

- Vì nội lực không có mặt trong các định lý động lượng của cơ hệ. Cho nên nội lực không làm biến đổi động lượng của cơ hệ.
- Khi áp dụng định lý động lượng, vận tốc là vận tốc tuyệt đối.

Ví dụ 1: Một viên đạn khối lượng m bay ngang với vận tốc $\vec{u}$ đến đập vào một xe cát đang đứng yên. Xe cát sẽ chuyển động với vận tốc bao nhiêu sau khi va chạm nếu khối lượng của cả xe và cát là M.



Hình 4.2

Bài giải:

Hệ khảo sát gồm có xe cát và viên đạn cho nên ta khử được lực sinh ra khi viên đạn va chạm vào xe.

Các ngoại lực tác dụng lên hệ bao gồm: trọng lượng viên đạn $\vec{P} = m\vec{g}$, trọng lượng xe cát $\vec{Q} = M\vec{g}$ và phản lực do mặt đường tác dụng lên xe là $\overrightarrow{N_1}$ và $\overrightarrow{N_2}$.

Chọn trục Ox nằm ngang hướng sang phải.

Tổng hình chiếu các ngoại lực tác dụng lên trên trục Ox bằng không nên Q_x = const hay là $Q_{ox} = Q_{1x}$. Trong đó $Q_{ox} = mu$ là động lượng của hệ trước khi viên đạn chạm vào xe còn Q_{1x} là động lượng của hệ sau khi va chạm. Sau khi va chạm cả xe và viên đạn cùng chuyển động với vận tốc $\vec{V}$ và song song với mặt đường nên lúc này ta có:

$$Q_{1x} = (M+m)V.$$

Thay vào ta được $Q_{ox} = Q_{1x}$

hay: $$mu = (M+m)V;$$

$$V = \frac{mu}{M+m}.$$

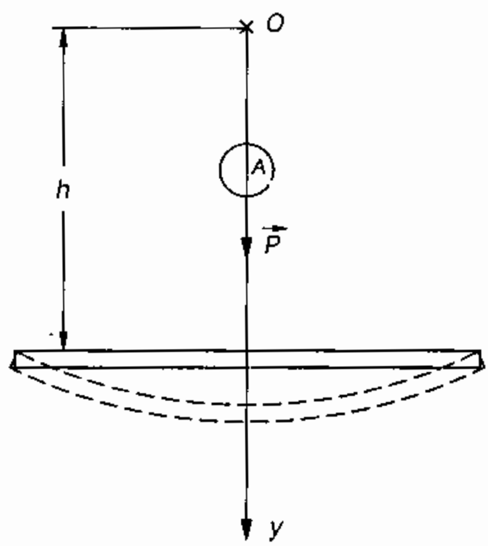
Ví dụ 2: Một vật nặng A trọng lượng P = 3kN rơi không vận tốc ban đầu xuống một tấm thép nằm ngang từ độ cao h = 1,5m. Khi bắt đầu chạm vào tấm thép vận tốc của vật là $V = \sqrt{2gh}$ và hướng xuống dưới theo phương thẳng đứng. Thời gian biến dạng của tấm thép là τ = 0,01s.

Tìm áp lực trung bình của tấm thép tác dụng lên vật.

Bài giải:

Ta coi chuyển động của vật như một chất điểm.

Các ngoại lực tác dụng lên vật là trọng lượng của vật $\vec{P}$ và phản lực $\vec{N}$ do tấm thép tác dụng lên vật.



Hình 4.3

Ta gọi t là thời gian rơi của vật, thời gian biến dạng của tấm thép là τ. Khi vật chạm vào tấm thép ngoài trọng lượng $\vec{P}$ nó còn chịu tác dụng của phản lực $\vec{N}$ do tấm thép tác dụng và hướng thẳng đứng lên trên. Vì phản lực này biến đổi rất nhanh trong khoảng thời gian rất nhỏ là τ cho nên ta coi như một lực không đổi (tính với giá trị trung bình) và ký hiệu là $\vec{N}$. Ta phải tìm $\vec{N}$.

Xung lượng của $\vec{P}$ trong thời gian $(t + \tau)$ là $\vec{P}(t + \tau)$ hướng thẳng đứng xuống dưới. Còn xung lượng của $\vec{N}$ là $\vec{N}\tau$ hướng thẳng đứng lên trên.

Vận tốc của vật lúc đầu và cuối bằng không. Chiếu lên phương thẳng đứng ta có:

$$P(t+\tau)-N\tau=0\rightarrow N=\frac{P(t+\tau)}{\tau}=P\left(1+\frac{t}{\tau}\right).$$

Ta phải tính thời gian t kể từ khi vật rơi đến khi chạm vào tấm thép. Ta có:

$$mV-mV_o=Pt=mgt.$$

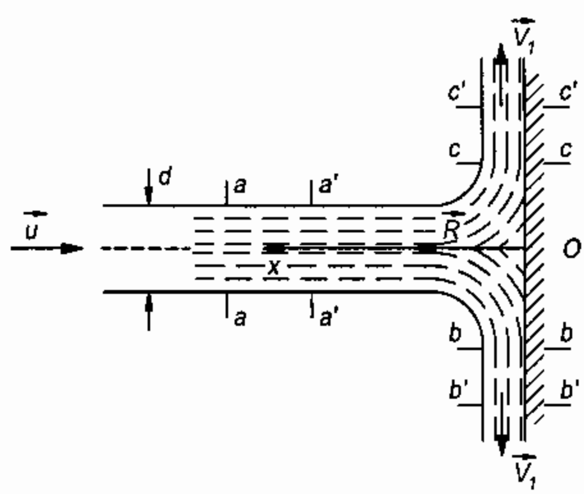
Nhưng $V_o=0$ còn $V=\sqrt{2gh}$ nên $t=\frac{V}{g}=\frac{\sqrt{2gh}}{g}$ hay $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ và ta có:

$$N=P\left(1+\frac{t}{\tau}\right)=P\left(1+\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Từ kết quả này ta nhận thấy N sẽ tăng khi h tăng hay τ giảm đi. Thay các giá trị của P, h, g, τ vào biểu thức tính N ta có: N = 167,8kN tức là áp lực lớn gấp gần 60 lần trọng lượng.

Ví dụ 3: Một tia nước bắn ra từ miệng ống cứu hỏa với vận tốc u = 10m/s đến đập vào tường thẳng đứng theo một góc vuông. Đường kính miệng ống là d = 4cm.

Tìm áp lực của tia nước lên tường nếu bỏ qua sự nén ép của nước.



Hình 4.4

Bài giải:

Để xác định áp lực do tia nước tác dụng lên tường, ta đi tìm phản lực do tường tác dụng.

Hệ khảo sát là khối nước giới hạn bởi các mặt cắt $\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{cc}$. Sau khoảng thời gian dt khối nước chuyển động đến vị trí $\overline{a'a'}, \overline{b'b'}, \overline{c'c'}$.

Ngoại lực tác dụng lên hệ chỉ có phản lực $\vec{R}$ do tường tác dụng lên khối nước.

Chọn trục Ox nằm ngang hướng từ phải sang trái. Áp dụng định lý động lượng theo phương Ox:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{e} = Rdt;$$

$$Q_{1x} = 0 \text{ vì } \vec{V_1} \perp Ox \text{ và } Q_{0x} = um,$$

trong đó $m = \rho \dfrac{\pi d^2}{4} udt$.

Do đó:

$$um = Rdt \rightarrow u\rho \frac{\pi d^2}{4} udt = Rdt \rightarrow R = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2,$$

trong đó ρ là khối lượng riêng của nước và bằng $1000 kg/m^3$.

Thay các giá trị vào ta có R = 125,6N. Áp lực của nước lên tường là:

$$\vec{R'} = \vec{R} \rightarrow R' = R = 125{,}6\text{N}.$$

§4.2. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM

Từ định lý động lượng của cơ hệ $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F_k^e}$, nếu ta thay $\vec{Q} = M\vec{V_C}$ thì ta có $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \dfrac{d(M\vec{V_C})}{dt} = M\vec{W_C}$ hay là:

$$M\vec{W_C} = \sum \vec{F_k^e}. \tag{4.9}$$

4.2.1. ĐỊNH LÝ

Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cơ hệ khi chịu tác dụng của tất cả ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

Chiếu hai vế của (4.9) lên các trục của hệ tọa độ Đề-các ta có:

$$\left.\begin{aligned} MW_{Cx} = M\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = \sum X^e_k \\ MW_{Cy} = M\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = \sum Y^e_k \\ MW_{Cz} = M\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz} = \sum Z^e_k \end{aligned}\right\}, \qquad (4.9a)$$

trong đó: W_{Cx}, W_{Cy}, W_{Cz} hay $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ – hình chiếu của $\overrightarrow{W_C}$ lên các trục tọa độ. $F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz}$ hay X^e_k, Y^e_k, Z^e_k là hình chiếu của $\overrightarrow{F^e_k}$ lên các trục tọa độ ấy.

Từ định lý này ta thấy nội lực không ảnh hưởng đến chuyển động khối tâm của cơ hệ nhưng lại ảnh hưởng đến chuyển động của từng chất điểm thuộc hệ. Vì vậy khi tìm chuyển động khối tâm của cơ hệ ta không cần quan tâm đến nội lực.

4.2.2. CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM

Từ định lý khối tâm ta suy ra:

a) Nếu tổng hình học các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không ($\sum \overrightarrow{F^e_k} = 0$) thì khối tâm của cơ hệ chuyển động quán tính.

Nếu lúc đầu cơ hệ đứng yên thì sẽ đứng yên mãi mãi.

Thật vậy, từ (4.9) ta thấy nếu $\sum \overrightarrow{F^e_k} = 0 \rightarrow M\overrightarrow{W_C} = 0$. $\quad \overrightarrow{W_C} = 0$

hay $\overrightarrow{V_C} = \text{const}$.

Nếu lúc đầu hệ đứng yên thì $\overrightarrow{V_C} = 0$.

b) Nếu tổng hình chiếu ngoại lực lên một trục nào đó bằng không thì khối tâm của cơ hệ sẽ chuyển động quán tính theo trục đó.

Chứng minh tương tự như mục a ở trên.

Các kết luận này là nội dung các định luật bảo toàn chuyển động khối tâm.

***Áp dụng*:** Định lý khối tâm thường áp dụng để giải các bài toán sau:

- Biết chuyển động các bộ phận của cơ hệ, tìm chuyển động của bộ phận còn lại.
- Biết chuyển động của cơ hệ, tìm ngoại lực tác dụng lên cơ hệ (thường là tìm phản lực).

Ví dụ 1: Một chiếc thuyền chiều dài a trọng lượng Q. Hãy xác định đoạn dịch chuyển của thuyền khi một người có trọng lượng P bắt đầu đi từ tay lái đến mũi thuyền, trong đó lực cản của nước có thể bỏ qua và lúc đầu hệ đứng yên.

Bài giải:

Hệ được khảo sát bao gồm thuyền và người.

Ngoại lực: trọng lượng thuyền $\vec{Q}$, trọng lượng người $\vec{P}$ và lực đẩy Acsimet $\vec{N}$.

Theo định lý khối tâm ta có:

$$M\overrightarrow{W_C} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N}. \qquad \text{(a)}$$

Chiếu (a) lên trục Ox ta nhận được: $MW_{Cx} = 0$ vì các ngoại lực song song với Oy.

$W_{Cx} = \ddot{x}_C = 0$, do đó $\dot{x}_C = const$. Nhưng lúc đầu hệ đứng yên nên $\dot{x}_C = 0$. Vì vậy $x_C = const$, nghĩa là tọa độ khối tâm của hệ lúc đầu và lúc cuối bằng nhau: $x_C^o = x_C$,

ở đây: x_C^o – tọa độ khối tâm của hệ lúc người ở đầu lái của thuyền;
x_C – tọa độ khối tâm của hệ khi người đi đến mũi thuyền.

Ta có:

$$x_C^o = \frac{\sum p_k x_k^o}{\mathscr{P}} \text{ và } x_C = \frac{\sum p_k x_k}{\mathscr{P}} \text{ (với } \mathscr{P} = \sum p_k \text{)},$$

hay: $$\sum p_k x_k^o = \sum p_k x_k \,, \qquad (*)$$

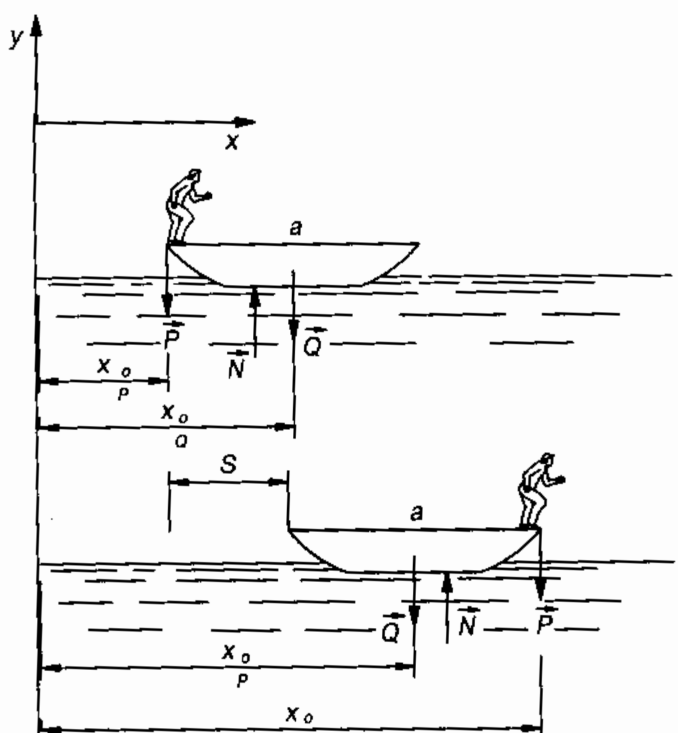
ở đây: x_P^o – tọa độ của người lúc đầu (ở vị trí tay lái)

$$x_Q^o = x_P^o + \frac{a}{2}.$$

Khi người đi đến mũi thuyền thì thuyền dịch chuyển một đoạn s, giả thiết sang phải. Ta có:

$x_P = x_P^o + s + a$ là tọa độ của người khi đến mũi thuyền;

$$x_Q = x_P - \frac{a}{2} = x_P^o + s + \frac{a}{2}.$$



Hình 4.5

Thay vào (*) ta có:

$$Px_P^o + Qx_Q^o = Px_P + Qx_Q;$$

$$Px_P^o + Q\left(x_P^o + \frac{a}{2}\right) = P\left(x_P^o + s + \frac{a}{2}\right) + Q\left(x_P^o + s + \frac{a}{2}\right)$$

$$= (P+Q)s + Pa = 0;$$

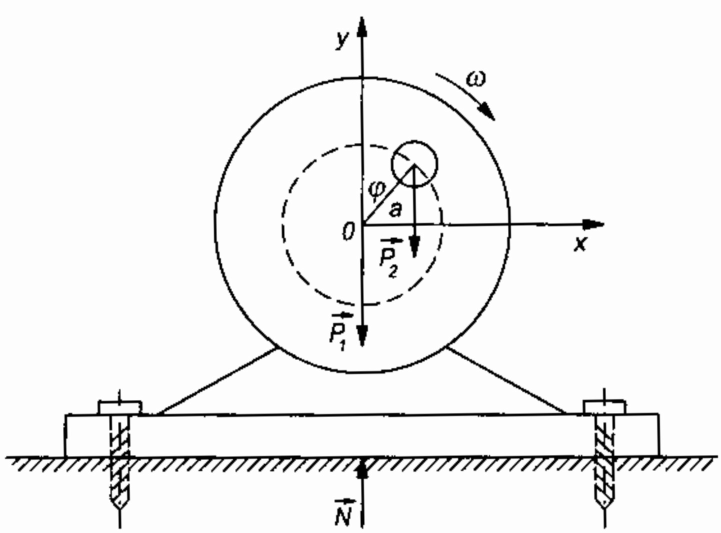
$$s = -\frac{Pa}{P+Q}.$$

Dấu (–) chứng tỏ chiều di chuyển của thuyền ngược với chiều giả thiết (đi sang trái).

Ví dụ 2: Một động cơ điện trọng lượng P_1 = 700N, rôto có trọng lượng P_2 = 300N quay với vận tốc góc n = 980 v/ph theo chiều kim đồng hồ. Trọng tâm của rôto không ở trên trục quay mà lại ở cách nó một đoạn là a = 5cm.

Tìm áp lực thẳng đứng của động cơ tác dụng lên nền ngang nhẵn và lực cắt ngang tác dụng lên bulông khi gắn động cơ vào sàn bằng các bulông.

Bài giải:



Hình 4.6

Hệ khảo sát là động cơ.

Ngoại lực tác dụng lên hệ là trọng lượng động cơ $\overrightarrow{P_1}$, trọng lượng rôto $\overrightarrow{P_2}$ và phản lực do nền tác dụng lên động cơ $\overrightarrow{N}$.

Tổng các lực cắt ngang các bulông khi gắn động cơ vào sàn bằng các bulông là $\overrightarrow{F}$..

Sẽ không mất tính tổng quát nếu ta coi lúc đầu khi $t = 0$ khối tâm của rôto ở trên trục Oy. Tại thời điểm t khối tâm của rôto có tọa độ là x_2, y_2.

Lúc này:

$$x_2 = a\sin\varphi = a\sin\omega t;$$
$$y_2 = a\cos\varphi = a\cos\omega t,$$

với $$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 980}{60} \text{ rad/s}$$

Từ định lý khối tâm ta có:

$$M\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}. \quad \text{(a)}$$

Chiếu đẳng thức (a) lên các trục tọa độ ta có:

$$MW_{Cx} = F; \quad \text{(b)}$$

$$MW_{Cy} = N - P_1 - P_2. \quad \text{(c)}$$

Ta có:

$$MW_{Cx} = M\ddot{x}_C = \sum m_k\ddot{x}_k = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2;$$
$$MW_{Cy} = M\ddot{y}_C = \sum m_k\ddot{y}_k = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2,$$

trong đó: m_1, m_2 – khối lượng của động cơ và của rôto;
$M = m_1 + m_2$ – khối lượng của toàn hệ;
x_1, x_2 và y_1, y_2 – tọa độ các khối tâm của chúng.

Theo đầu bài thì khối tâm của động cơ là một điểm cố định và trùng với gốc tọa độ nên $x_1 = 0$ và $y_1 = 0$. Do đó:

$$MW_{Cx} = m_2\ddot{x}_2 = -\frac{P_2}{g}a\omega^2 \sin\omega t;$$

$$MW_{Cy} = m_2\ddot{y}_2 = -\frac{P_2}{g}a\omega^2 \cos\omega t.$$

Thay vào (b) ta có:

$$F = MW_{Cx} = -\frac{P_2}{g}a\omega^2 \sin\omega t\,;$$

$$F_{\max} = \frac{P_2}{g}a\omega^2 \text{ khi } \sin\omega t = -1.$$

Thay trị số ta có:

$$F_{\max} = \frac{300}{980}5\frac{98^2}{9}\pi^2 = 16200N = 16{,}2kN\,;$$

$$F_{\min} \text{ khi } \sin\omega t = 1.$$

Từ (c) ta có:

$$\mathrm{N} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{MW}_{\mathrm{Cy}} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 - \frac{P_2}{g}a\omega^2 \cos\omega t\,;$$

$$\mathrm{N}_{\max} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 - \frac{P_2}{g}a\omega^2 \cos\omega t \text{ khi } \cos\omega t = -1.$$

Áp lực của động cơ lên sàn là

$$\overrightarrow{N'} = -\overrightarrow{N} \rightarrow N' = N\,.$$

§4.3. ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

4.3.1. MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM VÀ CƠ HỆ

a. Đối với chất điểm

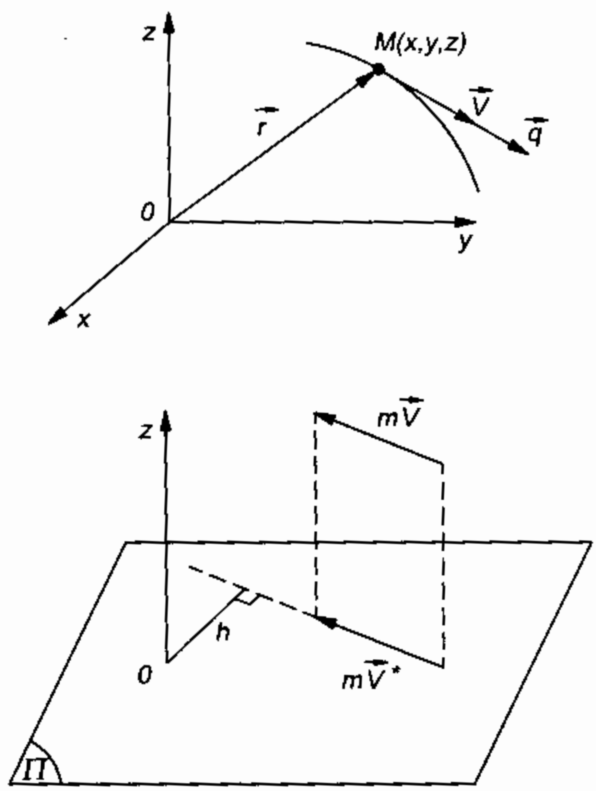
Định nghĩa 1: Mômen động lượng của chất điểm đối với một tâm O nào đó là một vectơ. Ký hiệu $\overrightarrow{l_O}$:

$$\overrightarrow{l_O} = \overrightarrow{m_O}(\vec{q}) = \overrightarrow{m_O}(m\vec{V}) = \vec{r} \wedge m\vec{V} . \qquad (4.10)$$

Định nghĩa 2: Mômen động lượng của chất điểm đối với trục z là một lượng đại số. Ký hiệu l_z.

$$l_z = m_z(\vec{q}) = \pm mV^* h . \qquad (4.11)$$

trong đó: mV^* – hình chiếu của vectơ $m\vec{V}$ lên mặt phẳng (π) vuông góc với trục z (hình 4.7); h là khoảng cách từ giao điểm O của mặt phẳng (π) với trục z đến đường thẳng mang vectơ $m\overrightarrow{V^*}$.



Hình 4.7

Mômen động lượng mang dấu (+) nếu từ điểm ngọn của trục z ta thấy $m\overrightarrow{V^*}$ quay quanh trục z ngược chiều kim đồng hồ và mang dấu (–) nếu ngược lại.

b. Đối với cơ hệ

Định nghĩa 1: Mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm O nào đó là một vectơ và bằng tổng hình học các vectơ mômen động lượng của các chất điểm thuộc cơ hệ đối với tâm đó.

$$\overrightarrow{L_O} = \sum \overrightarrow{l_{Ok}} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge m_k \overrightarrow{V_k}. \quad (4.12)$$

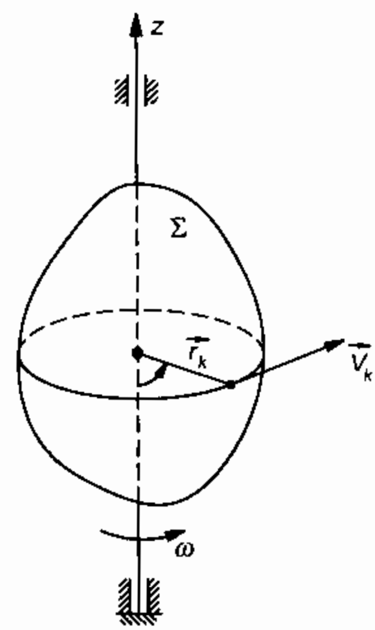
Định nghĩa 2: Mômen động lượng của cơ hệ đối với trục z là một lượng đại số và bằng tổng đại số mômen động lượng của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ đối với trục ấy.

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zk}. \quad (4.13)$$

Trong hệ SI đơn vị của mômen động lượng là kgm^2/s.

Tính mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định

Giả sử vật rắn (Σ) quay quanh trục z cố định với vận tốc góc ω. Xét chất điểm thứ k bất kỳ thuộc vật. Theo định nghĩa ta có:



Hình 4.8

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zk} = \sum m_z(m_k \overrightarrow{V_k}).$$

Khi vật quay quanh trục z thì giá trị của vận tốc $V_k = r_k\omega$. Mặt khác vectơ động lượng $m_k\overrightarrow{V_k}$ lại vuông góc với $\overrightarrow{r_k}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay z cho nên:

$$\left.\begin{aligned} L_z &= \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k\overrightarrow{V_k}) = \sum_{k=1}^{n} r_k m_k V_k = \sum_{k=1}^{n} r_k m_k r_k \omega\,; \\ L_z &= \sum_{k=1}^{n} r_k m_k r_k \omega = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k \omega = J_z\omega\,; \\ L_z &= J_z\omega\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

Vậy, mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định bằng tích số vận tốc góc của vật với mômen quán tính của vật đối với trục quay.

Nếu cơ hệ gồm nhiều vật cùng quay quanh một trục z thì:

$$L_z = J_{z1}\omega_1 + J_{z2}\omega_2 + \ldots + J_{zn}\omega_n\,. \qquad (4.15)$$

Chú ý: Ta so sánh các công thức:

$$\vec{Q} = M\overrightarrow{V_C};$$
$$L_z = J_z\omega,$$

trong đó: M– đặc trưng cho quán tính của vật trong chuyển động thẳng;
J_z– đặc trưng cho quán tính của vật trong chuyển động quay.

4.3.2. ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA CƠ HỆ

Giả sử cơ hệ có n chất điểm. Xét chất điểm thứ k có khối lượng m_k chuyển động với gia tốc $\overrightarrow{W_k}$ do ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$ và nội lực $\overrightarrow{F_k^i}$ tác dụng. Theo tiên đề 2 ta có:

$$m_k\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}\,,$$

hay
$$m_k\frac{d\overrightarrow{V_k}}{dt} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}\,.$$

Nhân vectơ cả hai vế với $\overrightarrow{r_k}$ ta có:

$$\overrightarrow{r_k}\Lambda m_k\frac{d\overrightarrow{V_k}}{dt} = \overrightarrow{r_k}\Lambda\left(\overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}\right) = \overrightarrow{r_k}\Lambda\overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{r_k}\Lambda\overrightarrow{F_k^i}\,. \qquad (a)$$

Theo phép tính đạo hàm một tích vectơ ta có:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{V}).$$

Nhưng $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ cho nên $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{V} = 0$.

Do đó:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{V}) = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ok}}). \tag{b}$$

Còn $\overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^e} = \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e})$ và $\overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^i} = \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i})$. (c)

Thay (b), (c) vào (a) ta có:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ok}}) = \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}) + \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}).$$

Đối với cả cơ hệ ta có:

$$\sum \frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ok}}) = \sum \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}).$$

Vì $\sum \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}) = 0$ và $\sum \frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ok}}) = \frac{d}{dt}\sum \overrightarrow{l_{Ok}} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$

nên kết quả:

$$\frac{d(\overrightarrow{L_O})}{dt} = \sum \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}). \tag{4.16}$$

Chiếu cả hai vế của (4.16) lên các trục của hệ tọa độ Đề-các, ta được:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(L_x)}{dt} &= \sum m_x(\overrightarrow{F_k^e}) \\ \frac{d(L_y)}{dt} &= \sum m_y(\overrightarrow{F_k^e}) \\ \frac{d(L_z)}{dt} &= \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) \end{aligned}\right\}. \tag{4.17}$$

Định lý: Đạo hàm bậc nhất theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm (hay một trục) nào đó bằng tổng mômen của tất cả ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm (hay trục) đó.

4.3.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

Theo định lý ta có $\frac{d(L_z)}{dt} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e})$ mà $L_z = J_z\omega$ cho nên:

$$\frac{d(L_z)}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z\omega) = J_z\frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}).$$

Vậy:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}). \tag{4.18}$$

4.3.4. CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Từ các định lý trên ta rút ra các kết luận sau:

a. Nếu tổng mômen tất cả các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm O bất kỳ nào đó bằng không thì mômen động lượng của cơ hệ đối với tâm đó không đổi (về hướng và giá trị).

Thật vậy từ (4.16) ta thấy

$$\sum m_O(\overrightarrow{F_k^e}) = 0 \rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 0 \text{ do đó } \overrightarrow{L_O} = \text{const}.$$

b. Nếu tổng mômen các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với một trục nào đó bằng không thì mômen động lượng của cơ hệ đối với trục đó không đổi.

Chứng minh tương tự như mục a ở trên.

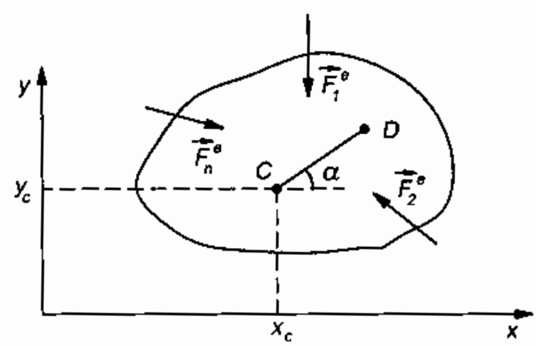
Áp dụng:

– Các định lý mômen động lượng thường được áp dụng để nghiên cứu chuyển động quay của vật hay chuyển động của cơ hệ bao gồm cả chuyển động quay và chuyển động tịnh tiến.

– Các định luật bảo toàn mômen động lượng cho phép ta xác định vận tốc góc hay góc quay của một bộ phận nào đó của cơ hệ theo vận tốc góc hay góc quay của các bộ phận còn lại.

4.3.5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

Có thể áp dụng đồng thời định lý chuyển động khối tâm và định lý mômen động lượng để giải bài toán vật rắn chuyển động song phẳng. Trong mặt phẳng chuyển động của vật ta lập hệ tọa độ Oxy, khi đó phương trình chuyển động của khối tâm C được tính theo định lý chuyển động khối tâm



Hình 4.9

$$M\overrightarrow{W_C} = \sum \overrightarrow{F_k^e} = \overrightarrow{F^e} . \quad (4.19)$$

Chuyển động quay của vật rắn quanh trục z đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng chuyển động được tính theo:

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\overrightarrow{F_k^e}). \quad (4.19')$$

Lúc này các phương trình vi phân của vật chuyển động song phẳng:

a. Dạng tọa độ Đề-các:

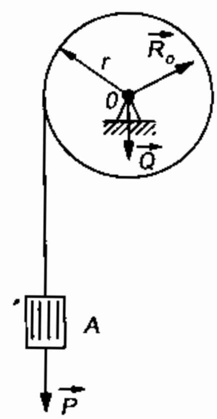
$$\left.\begin{aligned} MW_{Cx} &= \sum F_{kx}^e = F_x^e \\ MW_{Cy} &= \sum F_{ky}^e = F_y^e \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum m_{Cz}(\overrightarrow{F_k^e}) \end{aligned}\right\} . \quad (4.19a)$$

b. Dạng tọa độ tự nhiên:

$$\left.\begin{aligned} &MW_{C\tau}^{\tau} = \sum F_{\tau}^{e} = F_{\tau}^{e} \\ &MW_{C}^{n} = M\frac{V_C^2}{\rho_C} = \sum F_{n}^{e} = F_{n}^{e} \\ &J_{Cz}\varepsilon = \sum m_{Cz}(\overrightarrow{F_k^e}) \end{aligned}\right\}. \tag{4.19b}$$

Ví dụ 1: Người ta cuốn đầu một sợi dây không giãn không trọng lượng vào một ròng rọc cố định có trọng lượng $\vec{Q}$ bán kính r. Đầu kia của dây buộc vào vật nặng A trọng lượng $\vec{P}$.

Tìm gia tốc góc của ròng rọc khi vật A chuyển động thẳng đứng xuống dưới. Coi ròng rọc là vành tròn đồng chất.



Hình 4.10

Bài giải:

Hệ khảo sát bao gồm ròng rọc và vật A.

Ngoại lực tác dụng lên hệ: $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_o}$.

Áp dụng định lý mômen động lượng đối với Oz đi qua O và vuông góc với mặt phẳng.

Ta có:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_k(\overrightarrow{F_k^e});$$

$$L_z^{hệ} = L_z^A + L_z^B = r(mV) + J_z\omega = r\frac{P}{g}r\omega + \frac{Q}{g}r^2\omega;$$

$$L_z^{hệ} = \frac{P}{g}r^2\omega + \frac{Q}{g}r^2\omega = \frac{(P+Q)}{g}r^2\omega.$$

$\sum m_k(\overrightarrow{F_k^e}) = \text{Pr}$ cho nên:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_k(\overrightarrow{F_k^e}),$$

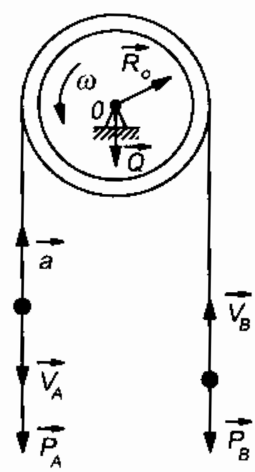
hay: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{P+Q}{g}r^2\omega\right) = \text{Pr};$$

$$\frac{P+Q}{g}r^2\dot{\omega} = \text{Pr};$$

$$\varepsilon = \frac{Pg}{(P+Q)r}.$$

Ví dụ 2: Một sợi dây vắt qua ròng rọc O có trọng lượng $\vec{Q}$ bằng 1/4 trọng lượng $\vec{P}$ của người. Khi đó một người trọng lượng $\vec{P}$ nắm vào dây tại điểm A còn ở điểm B treo vật nặng có cùng trọng lượng với người. Nếu người leo lên dây với vận tốc a tương đối với dây thì tải trọng B sẽ chuyển động như thế nào.

Chú ý: Khi tính mômen quán tính của ròng rọc ta giả thiết khối lượng của nó phân bố đều theo vành.



Hình 4.11

Bài giải:

Áp dụng định lý mômen động lượng đối với trục Oz đi qua O và vuông góc với mặt phẳng của ròng rọc:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}).$$

Hệ khảo sát: người A, vật nặng B và ròng rọc O.

Ngoại lực $\overrightarrow{P_A}$ và $\overrightarrow{P_B}$ là trọng lượng của người A và trọng lượng vật B, còn $\overrightarrow{R_O}$ là phản lực của trục O và $\vec{Q}$.

Ta có: $\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = P_A R - P_B R = 0$ (vì $P_A = P_B$);

$$L_z^{hệ} = L_z^A + L_z^B + L_z^C,$$

trong đó: $L_z^C = J_z\omega$ mà $J_z = mR^2 = \frac{1}{4}\times\frac{P}{g}R^2$;

$$L_z^A = \frac{P_A}{g}RV_A^a = \frac{P_A}{g}R(a - V_B) \text{ (vì } \vec{V}_A^a = \vec{a} + \vec{V_B}\text{)},$$

ở đây: V_B là vận tốc đi lên của dây và là vận tốc của vật B;

$$L_z^B = \frac{P_B}{g}RV_B;$$

$$L_z^{hệ} = L_z^A + L_z^B + L_z^C;$$

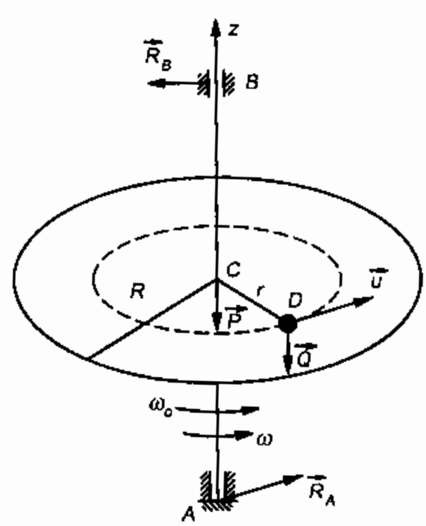
$$L_z^{hệ} = -\frac{P_A}{g}R(a - V_B) + \frac{P_B}{g}RV_B + \frac{P}{4g}R^2\omega = 0.$$

Mà $R\omega = V_B$ nên:

$$V_B + \frac{1}{4}V_B - a + V_B = 0 \rightarrow \frac{9}{4}V_B = a;$$

$$V_B = \frac{4}{9}a.$$

Ví dụ 3: Một tấm tròn đồng chất trọng lượng $\vec{P}$, bán kính R có thể quay không ma sát xung quanh trục AB thẳng đứng đi qua tâm C của tấm. Hỏi vận tốc góc của tấm sẽ biến đổi thế nào nếu có một người trọng lượng $\vec{Q}$ bắt đầu đi từ một điểm cách trục quay một đoạn r theo một đường tròn bán kính r với vận tốc u.



Hình 4.12

Bài giải:

Hệ khảo sát bao gồm tấm tròn gắn vào trục AB và người D.

Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng tấm tròn $\vec{P}$, trọng lượng người $\vec{Q}$ và các phản lực tại A và B là $\overrightarrow{R_A}$ và $\overrightarrow{R_B}$.

Chọn trục $Az \equiv AB$ ta nhận thấy

$$\sum m_k(\overrightarrow{F_k^e}) = 0$$

(vì các ngoại lực đều song song hoặc cắt Az).

Cho nên L_z = const. Nghĩa là $L_z^o = L_z$, trong đó L_z^o là mômen động lượng của hệ khi người đứng yên và vận tốc góc của tấm lúc đó là ω_o.

Cần nhớ rằng khi tính mômen động lượng của người đối với trục z thì vận tốc của người phải là vận tốc tuyệt đối. Theo định lý hợp vận tốc thì:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e},$$

trong đó: $\overrightarrow{V_r} = \vec{u}$ là vận tốc tương đối của người còn vận tốc theo của người là $\overrightarrow{V_e}$ có phương vuông góc với r và giá trị là $r\omega$ và có chiều theo chiều của ω. Giả sử chiều của vận tốc góc ω cùng chiều với u ta sẽ có:

$$V_a = u + r\omega.$$

Khi người đứng yên thì $u = 0$ và vận tốc góc của tấm lúc đó là ω_o cho nên $V_a = r\omega_o$.

Ta có:

$$L_z^{hệ} = L_z^t + L_z^{ng} = J_z\omega_o + \frac{Q}{g}r(r\omega_o);$$

$$L_z^{hệ} = \left(J_z + \frac{Q}{g}r^2\right)\omega_o.$$

Khi người đi với vận tốc $\vec{u}$ thì:

$$L_z^{hệ} = L_z^t + L_z^{ng} = J_z\omega + \frac{Q}{g}r(u + r\omega) = \left(J_z + \frac{Q}{g}r^2\right)\omega + \frac{Q}{g}ru\,.$$

Thay $L_z = L_z^o$ ta được:

$$\left(J_z + \frac{Q}{g}r^2\right)\omega_o = \left(J_z + \frac{Q}{g}r^2\right)\omega + \frac{Q}{g}ru\,;$$

$$\to \omega = \frac{J_z g + Qr^2 - Qru}{J_z g + Qr^2} = \omega_o - \frac{Qru}{J_z g + Qr^2}\,.$$

Vậy khi người đứng yên ($u = 0$) thì $\omega = \omega_0$.

vận tốc góc sẽ giảm khi người đi cùng chiều quay của ω. Ngược lại vận tốc góc sẽ tăng khi người đi ngược với chiều quay của ω.

§4.4. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

4.4.1. ĐỘNG NĂNG

a. Động năng của chất điểm và cơ hệ

Định nghĩa 1: Động năng của chất điểm là một đại lượng vô hướng và bằng một nửa tích số giữa khối lượng của điểm với bình phương vận tốc của nó. Nghĩa là:

$$T = \frac{1}{2}mV^2\,. \qquad (4.20)$$

Định nghĩa 2: Động năng của cơ hệ n chất điểm bằng tổng động năng của các chất điểm thuộc hệ.

$$T = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k V_k^2\,. \qquad (4.21)$$

Nếu cơ hệ gồm các vật chuyển động thì động năng của cơ hệ bằng tổng động năng của các vật chuyển động.

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k .$$

Trong hệ SI động năng có đơn vị là kgm^2/s^2.

b. Động năng của một số vật rắn chuyển động

- ***Vật rắn chuyển động tịnh tiến***

Ta coi vật rắn chuyển động tịnh tiến là tập hợp n chất điểm. Khi đó:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_k^2 .$$

Nhưng vì vật chuyển động tịnh tiến nên vận tốc mọi điểm đều bằng vận tốc khối tâm C. Tức là $\overrightarrow{V_k} = \overrightarrow{V_C}$ do đó:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_C^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{2} M V_C^2 ;$$

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 . \tag{4.22}$$

Vậy: động năng của vật chuyển động tịnh tiến bằng một nửa tích số khối lượng của vật với bình phương vận tốc khối tâm C.

- ***Vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định***

Khi vật quay quanh trục z cố định thì vận tốc của điểm M_k bất kỳ thuộc vật là $V_k = r_k\omega$. Trong đó r_k là khoảng cách từ trục z đến điểm M_k và ω là vận tốc góc của vật. Do đó ta có:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 .$$

Nhưng $\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = J_z$ là mômen quán tính của vật đối với trục z.

Do đó: $$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \qquad (4.23)$$

Vậy: động năng của vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định bằng một nửa tích số mômen quán tính của vật đối với trục quay và bình phương vận tốc góc của nó.

- ***Vật rắn chuyển động song phẳng***

Khi vật chuyển động song phẳng thì tại mỗi thời điểm vận tốc các điểm thuộc vật phân bố như là chuyển động quay tức thời quanh trục đi qua tâm vận tốc tức thời P và vuông góc với mặt phẳng chuyển động. Khi đó áp dụng công thức (4.23) ta có:

$$T = \frac{1}{2} J_{Pz} \omega^2, \qquad (*)$$

trong đó: J_{Pz} là mômen quán tính của vật đối với trục z đi qua tâm vận tốc tức thời P và vuông góc với mặt phẳng chuyển động của vật còn ω là vận tốc góc của vật.

Theo định lý Huyghen ta có:

$$J_{Pz} = J_{Cz} + Md^2, \qquad (**)$$

trong đó: d – khoảng cách giữa hai trục song song đi qua khối tâm C và tâm vận tốc tức thời P.

Thay (**) vào (*) ta được:

$$T = \frac{1}{2} J_{Pz} \omega^2 = \frac{1}{2}(J_{Cz} + Md^2)\omega^2 = \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2} Md^2\omega^2.$$

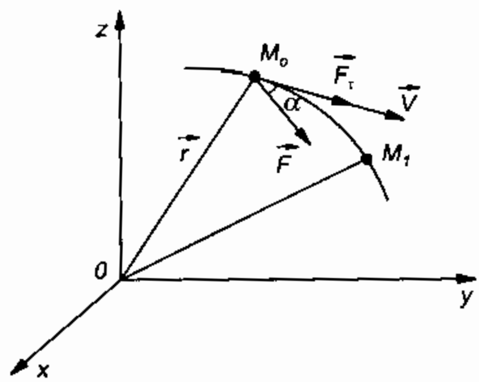
Nhưng $\omega d = \omega.P.C = V_C$ nên:

$$T = \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_C^2. \qquad (4.24)$$

Vậy: động năng của vật chuyển động song phẳng bằng động năng của vật trong chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm C cộng với động năng của vật trong chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng chuyển động của vật.

4.4.2. CÔNG CỦA LỰC

Công của lực trên một đoạn dịch chuyển nào đó là một đặc trưng cơ bản để đánh giá tác dụng của lực trên đoạn dịch chuyển đó.



Hình 4.13

a. Công nguyên tố

Định nghĩa: Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ trên một đoạn dịch chuyển vô cùng bé ds là một đại lượng vô hướng và được xác định:

$$dA = F_\tau . ds, \tag{4.25}$$

trong đó: $F_\tau = F.\cos\alpha$ – hình chiếu của lực $\vec{F}$ lên phương vectơ vận tốc $\vec{V}$ điểm đặt M của lực $\vec{F}$. Do đó $dA = F.\cos\alpha.ds$.

Từ đẳng thức này ta thấy F và ds đều dương nên dấu của dA phụ thuộc vào độ lớn của góc α.

- Nếu $\alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $dA > 0$: lực làm tăng chuyển động.
- Nếu $\alpha > \frac{\pi}{2}$ thì $dA < 0$: lực cản trở chuyển động.
- Nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì $dA = 0$: lực $\perp$ với phương chuyển động nên không sinh công.

Mặt khác từ động học ta có $ds = Vdt$ cho nên:

$$dA = F.\cos\alpha.ds = F.\cos\alpha.Vdt = \vec{F}.\vec{V}dt = \vec{F}.d\vec{r} ;$$

$$dA = \vec{F}.d\vec{r} . \tag{4.26}$$

Đẳng thức này biểu diễn công nguyên tố ở dạng vectơ. Ta có thể biểu diễn (4.26) ở dạng giải tích:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = Xdx + Ydy + Zdz, \tag{4.27}$$

trong đó: F_x, F_y, F_z hay X, Y, Z là hình chiếu của lực $\vec{F}$ lên các trục tọa độ;
dx, dy, dz – hình chiếu của $d\vec{r}$ lên các trục ấy.

b. Công hữu hạn của lực $\vec{F}$

Định nghĩa: Công của lực $\vec{F}$ trên một đoạn dịch chuyển hữu hạn từ vị trí M_0 đến M_1 nào đó do điểm đặt của lực $\vec{F}$ vạch ra bằng tích phân xác định của công nguyên tố dA trên đoạn dịch chuyển ấy.

$$A_{\overline{M_o M_1}} = \int_{M_O}^{M_1} F_\tau ds = \int_{M_O}^{M_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_O}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz . \tag{4.28}$$

Đơn vị tính công trong hệ SI là Nm hay Jun

Công suất:

Định nghĩa: Công suất là công do lực sinh ra trong một đơn vị thời gian. Ký hiệu công suất là N:

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau V = F\cos\alpha V ;$$

$$N = \vec{F}.\vec{V} . \tag{4.29}$$

Đơn vị tính công suất là J/s.

c. Biểu thức tính công trong một số trường hợp thường gặp

- **Công của trọng lực**

Một chất điểm có khối lượng m khi ở gần mặt đất có trọng lượng $\vec{P}$ hướng thẳng đứng xuống dưới.

Nếu ta chọn hệ tọa độ *Oxyz* có trục *Oz* hướng thẳng đứng lên trên thì ta có: $P_x = 0$; $P_y = 0$; $P_z = -P$.

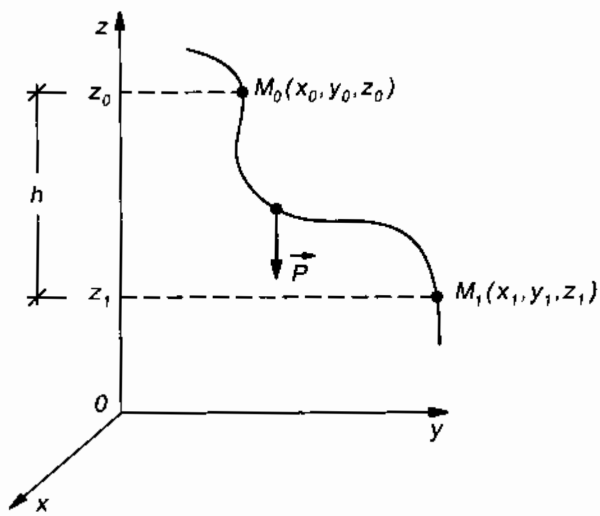
Khi đó công của trọng lực $\vec{P}$ sẽ là:

$$A_{\overset{\frown}{M_O M_1}} = \int_{M_O}^{M_1} P_x dx + P_y dy + P_z dz = -\int_{z_O}^{z_1} P dz = -P\int_{z_O}^{z_1} dz\ ;$$

$$A_{\overset{\frown}{M_O M_1}} = -P(z_1 - z_O).$$

Nếu ta gọi $h = |z_O - z_1|$ thì ta có:

$$A_P = \pm Ph\ . \qquad (4.30)$$



Hình 4.14

Từ (4.30) ta thấy công của trọng lực mang dấu (+) khi điểm đặt của lực đi xuống và mang dấu (–) nếu ngược lại. Ta nhận thấy công của trọng lực không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt của lực mà chỉ phụ thuộc vào hiệu số độ cao *h*.

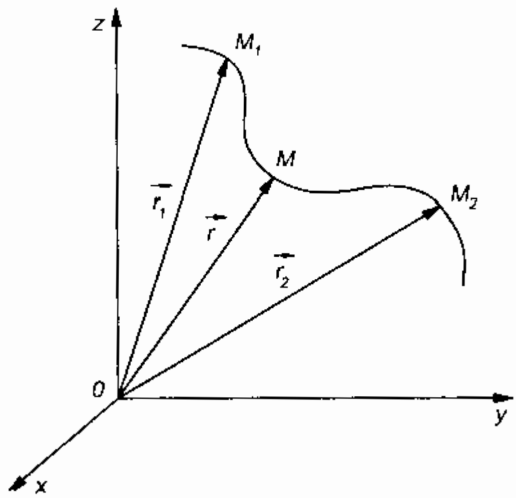
- **Công của lực đàn hồi tuyến tính**

Lực đàn hồi tuyến tính tuân theo định luật Húc, nghĩa là:

$$\vec{F} = -c\vec{r}\ ,$$

trong đó: c– hệ số cứng;

$\vec{r}$ – vectơ định vị điểm đặt của $\vec{F} = -c\vec{r}$ đối với gốc O.



Hình 4.15

Công của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt của nó di chuyển từ vị trí M_1 đến vị trí M_2 là:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} c\vec{r} d\vec{r} = -\frac{1}{2} c \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d(\vec{r})^2;$$

$$A = -\frac{c}{2} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d(\overrightarrow{r^2}) = -\frac{c}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right). \quad (4.31)$$

Trong trường hợp lò xo, công của lực đàn hồi lò xo khi đầu mút của nó biến dạng một đoạn δ so với trạng thái không biến dạng (trạng thái tự nhiên) của nó bằng:

$$A = -\frac{c}{2}\delta^2.$$

Cũng như công của trọng lực, công của lực đàn hồi tuyến tính không phụ thuộc dạng quỹ đạo điểm đặt của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của nó.

• **Công của lực đặt trên vật rắn chuyển động quay**

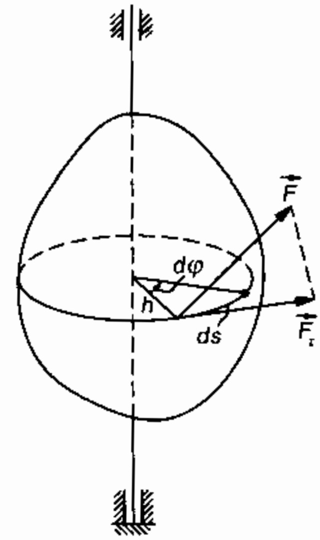
Xét lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn quay quanh trục cố định. Khi đó công nguyên tố của lực $\vec{F}$ sẽ là: $dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi$, vì $ds = hd\varphi$ và $d\varphi$ là góc quay nguyên tố của vật. Mặt khác ta thấy $F_\tau h$ lại là mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục quay z, nghĩa là $M_z = F_\tau h$.

Do đó:

$$dA = F_\tau h d\varphi = M_z d\varphi.$$

Nếu vật quay một góc hữu hạn φ_1 thì công là:

$$A = \int_0^{\varphi_1} dA = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi.$$



Hình 4.16

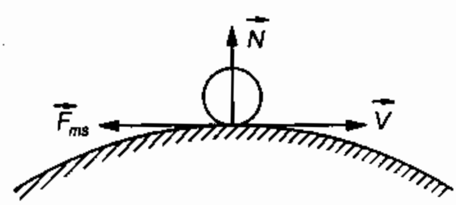
Nếu $M_z = \text{const}$ thì $A = M_z \varphi_1$. (4.33)

Nếu vật chịu tác dụng của một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục z thì M_z chính là mômen của ngẫu lực ấy.

• **Công của lực ma sát trượt**

Xét vật chuyển động trên một mặt không nhẵn. Khi đó có lực ma sát trượt. Do đó:

$$A_{\overset{\frown}{M_O M_1}} = -\int_{M_O}^{M_1} F_{ms} ds = -\int_{M_O}^{M_1} fN ds. \quad (4.34)$$



Hình 4.17

Công của lực ma sát trượt luôn âm.

• Công của lực ma sát tác dụng lên vật chuyển động song phẳng lăn không trượt

Giả sử bánh xe trọng lượng $\vec{P}$ bán kính R chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng không nhẵn.

Các lực ma sát tác dụng lên bánh xe là ngẫu lực ma sát lăn M_1 và và lực ma sát trượt $\overrightarrow{F_{ms}}$.

• Công nguyên tố của ngẫu lực ma sát lăn

$$dA = -M_l d\varphi = -kNd\varphi$$

(vì $M_l = kN$ với k là hệ số ma sát lăn còn N là phản lực pháp tuyến).

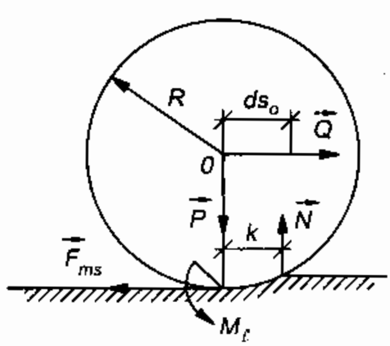
Do bánh xe lăn không trượt nên $d\varphi = \dfrac{ds_O}{R}$, trong đó ds_O là dịch chuyển nguyên tố tâm O của bánh xe.

$$dA = -kN\frac{ds_O}{R} = -\frac{k}{R}Nds_O;$$

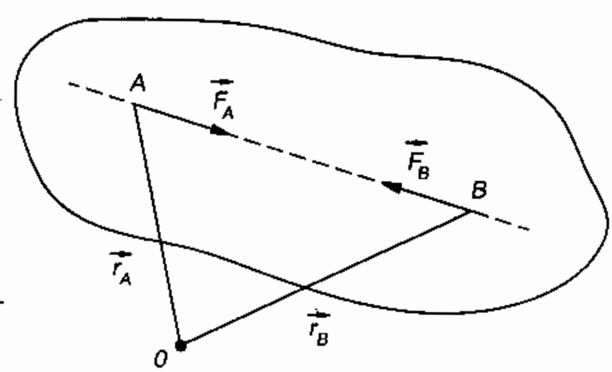
$$\rightarrow A = -\int_{S_1}^{S_2} dA = -\int_{S_1}^{S_2}\frac{k}{R}Nds_O = -\frac{k}{R}\int_{S_1}^{S_2}Nds_O.$$

Nếu N là hằng số và chọn $S_1 = 0$ thì

$$A = -\frac{k}{R}NS_2.$$



Hình 4.18



Hình 4.19

• **Công của lực ma sát trượt**

$$dA = -F_{ms}ds = -F_{ms}V_B dt\ ,$$

trong đó: V_B – vận tốc điểm đặt B của $\overrightarrow{F_{ms}}$ (vì bánh xe lăn không trượt nên điểm đặt của $\overrightarrow{F_{ms}}$ là tâm vận tốc tức thời B). Do $V_B = 0$ nên $dA = 0$.

Khi vật chuyển động song phẳng lăn không trượt thì công của lực ma sát trượt trong dịch chuyển luôn luôn bằng không còn công của ngẫu lực ma sát lăn khác không. Trong nhiều trường hợp ta có thể bỏ qua sức cản lăn vì tỷ số $\dfrac{k}{R}$ rất nhỏ.

• **Công của nội lực**

Xét hai điểm A và B thuộc vật, theo tính chất nội lực thì $\overrightarrow{F_B} = -\overrightarrow{F_A}$ và có cùng đường tác dụng

$$dA = dA_{\overline{F_A}} + dA_{\overline{F_B}} = \overrightarrow{F_A}d\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{F_B}d\overrightarrow{r_B}$$

$$= \overrightarrow{F_A}d\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{F_A}d\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{F_A}d(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}) = \overrightarrow{F_A}d\overrightarrow{BA}\ .$$

– Nếu là vật rắn thì

$$\overrightarrow{BA} = const \rightarrow d\overrightarrow{BA} = 0 \rightarrow dA = 0$$

– Nếu là vật biến dạng thì

$$d\overrightarrow{BA} \neq 0 \rightarrow dA \neq 0.$$

4.4.3. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG ĐỐI VỚI CƠ HỆ

Giả sử cơ hệ có n chất điểm. Ta xét chất điểm thứ k chịu tác dụng của ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$ và nội lực $\overrightarrow{F_k^i}$. Theo phương trình cơ bản của động lực học:

$$m_k\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}\ ,$$

hay $$m_k \frac{d\overrightarrow{V_k}}{dt} = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}.$$

Nhân vô hướng cả hai vế với $d\overrightarrow{r_k}$ ta có:

$$m_k \frac{d\overrightarrow{V_k}}{dt} d\overrightarrow{r_k} = \left(\overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}\right) d\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{F_k^e} d\overrightarrow{r_k} + \overrightarrow{F_k^i} d\overrightarrow{r_k},$$

hay $$m_k \overrightarrow{V_k} d\overrightarrow{V_k} = \frac{1}{2} m_k d(\overrightarrow{V_k^2}) = d\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right) = dA_k^e + dA_k^i.$$

Đối với toàn hệ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{1}{2} m_k V_k^2\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i;$$

$$d\left(\sum \frac{1}{2} m_k V_k^2\right) = dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i;$$

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \tag{4.35}$$

Định lý 1: Vi phân động năng của cơ hệ bằng tổng công nguyên tố của tất cả các ngoại lực và nội lực tác dụng lên hệ.

Nếu tại vị trí M_0 cơ hệ có động năng T_0 và tại vị trí M_1 cơ hệ có động năng T_1, ta lấy tích phân xác định cả hai vế của (4.35) theo cận tương ứng. Ta có:

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{M_0}^{M_1} \sum dA_k^e + \int_{M_0}^{M_1} \sum dA_k^i = \sum \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e + \sum \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i;$$

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{4.36}$$

Định lý 2: Biến thiên động năng của cơ hệ trên một đoạn dịch chuyển nào đó bằng tổng công của tất cả ngoại lực và nội lực tác dụng lên hệ trên đoạn dịch chuyển ấy.

Đẳng thức (4.35) biểu diễn định lý động năng ở dạng vi phân còn đẳng thức (4.36) biểu diễn định lý động năng ở dạng hữu hạn.

Từ các dạng khác nhau của định lý này ta thấy: khác với các định lý tổng quát mà ta đã xét ở trên, trong định lý động năng nói chung có mặt cả nội lực. Nói cách khác nội lực có thể làm biến đổi động năng của cơ hệ.

- Trường hợp đặc biệt khi cơ hệ là vật rắn có liên kết dây mềm không giãn hay liên kết cứng với nhau thì $\sum A_k^i = 0$. Khi đó

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e .$$

- Nếu lúc đầu hệ đứng yên thì $T_0 = 0$ nên $T_1 = \sum A_k^e$.

  Áp dụng:

  - Định lý động năng cho ta quan hệ giữa vận tốc, lực và dịch chuyển. Nó giúp ta xác định được một trong ba đại lượng khi biết các đại lượng còn lại.
  - Định lý động năng ở dạng hữu hạn thường được áp dụng để tính vận tốc theo dịch chuyển, từ đó ta tính được gia tốc.

Chú ý: Khi tính động năng thì vận tốc là vận tốc tuyệt đối.

§4.5. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

4.5.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

a. Trường lực

Trường lực là một phần không gian vật lý mà trong đó mỗi chất điểm chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí của chất điểm ấy.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) .$$

Ví dụ: trường trọng lực, trường lực đàn hồi.

b. Trường lực thế

Trường lực thế là trường lực mà công của lực tác dụng lên chất điểm chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối chứ không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt của lực.

Lực do trường lực thế tác dụng được gọi là lực thế.

Ví dụ: trường trọng lực, trường lực đàn hồi tuyến tính.

c. Thế năng

Thế năng của cơ hệ tại vị trí M nào đó bằng tổng công của các lực có thế tác dụng lên cơ hệ khi nó di chuyển từ vị trí M đến vị trí O.

$$\pi(M) = \sum A_{k\widehat{MM_O}} . \tag{4.37}$$

Vị trí O được chọn tùy ý gọi là gốc thế năng cho nên thế năng của cơ hệ tại một vị trí nào đó sẽ sai khác nhau một hằng số công.

Rõ ràng thế năng của cơ hệ tại vị trí (O) bằng không. Nghĩa là $\pi(M_O) = 0$.

Vì lực thế chỉ phụ thuộc vào vị trí các chất điểm của cơ hệ cho nên công của nó cũng chỉ phụ thuộc vào vị trí các chất điểm của cơ hệ. Do đó thế năng của cơ hệ cũng chỉ phụ thuộc vào vị trí các chất điểm của cơ hệ. Nghĩa là:

$$\pi = \pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) .$$

4.5.2. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

Giả sử cơ hệ chuyển động trong trường lực thế từ vị trí M_1 đến M_2 nào đó. Theo định lý động năng:

$$T_2 - T_1 = \sum A_{M_1M_2} = \sum A_{M_1M_O} + \sum A_{M_OM_2}$$
$$= \sum A_{M_1M_O} - \sum A_{M_2M_O} = \pi_1 - \pi_2;$$

$$T_2 - T_1 = \pi_1 - \pi_2 \rightarrow T_2 + \pi_2 = T_1 + \pi_1 = \text{const} .$$

Đặt $E = T + \pi$ gọi là cơ năng của hệ và bằng tổng động năng và thế năng của hệ thì ta có:

$$E_1 = E_2 = \text{const}. \tag{4.38}$$

Định luật bảo toàn cơ năng

Khi cơ hệ chuyển động trong trường thế thì tổng động năng và thế năng của cơ hệ không đổi.

Hệ cơ học nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng được gọi là hệ bảo toàn. Hệ thức (4.38) còn được gọi là tích phân năng lượng.

Nếu E = const thì cơ hệ gọi là hệ bảo toàn;

Nếu $E \neq$ const thì cơ hệ gọi là hệ không bảo toàn.

4.5.3. CÁC VÍ DỤ

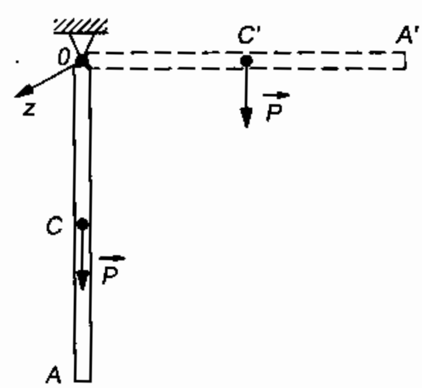
Ví dụ 1: Một thanh đồng chất $OA = 2l$ trọng lượng $\vec{P}$ quay quanh trục O trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh cần có vận tốc góc bằng bao nhiêu để chuyển động từ vị trí thẳng đứng đến vị trí nằm ngang.

Bài giải:

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng từ vị trí OA thẳng đứng đến khi OA nằm ngang $T_C + \pi_C = T_{C'} + \pi_{C'}$. Lấy điểm C làm gốc thế năng nên $\pi_C = 0$, khi chuyển động đến vị trí nằm ngang thì $T_{C'} = 0$.

Động năng:

$$T_C = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2,$$



Hình 4.20

mà $$J_{oz} = \frac{1}{3} 4l^2 \frac{P}{g},$$

nên $$T_C = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} 4l^2 \frac{P}{g} \omega^2.$$

Thế năng tại vị trí nằm ngang:

$$\pi_{C'} = Pl.$$

Ta có: $$\frac{2}{3} \times \frac{P}{g} l^2 \omega^2 = Pl \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{l}{g} \omega^2 = 1;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

Ví dụ 2: Một vật có trọng lượng $\vec{Q}$ được buộc vào đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng vắt qua một ròng rọc cố định B. Đầu kia của dây buộc vào trục con lăn *E*. Con lăn *E* lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang cố định. Ròng rọc *B* và con lăn *E* có cùng trọng lượng $\vec{P}$, bán kính *R* và được coi là đĩa tròn đồng chất.

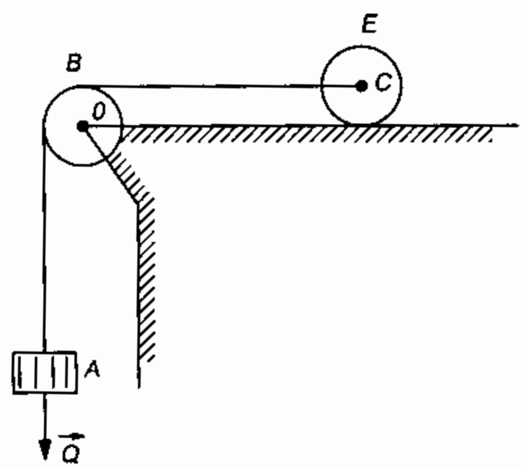
Tính động năng của hệ khi vật *A* rơi xuống với vận tốc V_A. Lúc đầu hệ đứng yên.

Bài giải:

Hệ khảo sát gồm các vật *A*, *B* và *E*.

Phân tích chuyển động: vật *A* chuyển động tịnh tiến, vật *B* chuyển động quay quanh trục cố định đi qua *O*. Vật *E* chuyển động song phẳng. Ta có động năng của hệ:

$$T_{hệ} = T_A + T_B + T_E;$$



Hình 4.21

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 = \frac{1}{2} \times \frac{Q}{g} V_A^2;$$

$$T_B = \frac{1}{2} J_o \omega_B^2.$$

Mà ta có

$$J_o = \frac{1}{2} m_B R^2 = \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} R^2 ,$$

còn $\omega_B = \frac{V_A}{R},$

nên: $T_B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} R^2 \frac{V_A^2}{R^2};$

$$T_E = \frac{1}{2} J_C \omega_E^2 + \frac{1}{2} M V_C^2.$$

Vì dây không giãn nên

$$V_A = V_C \text{ và } \omega_E = \frac{V_A}{R}.$$

Cho nên

$$T_E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} R^2 \frac{V_A^2}{R^2} + \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} V_A^2 = \frac{3}{4} \times \frac{P}{g} V_A^2;$$

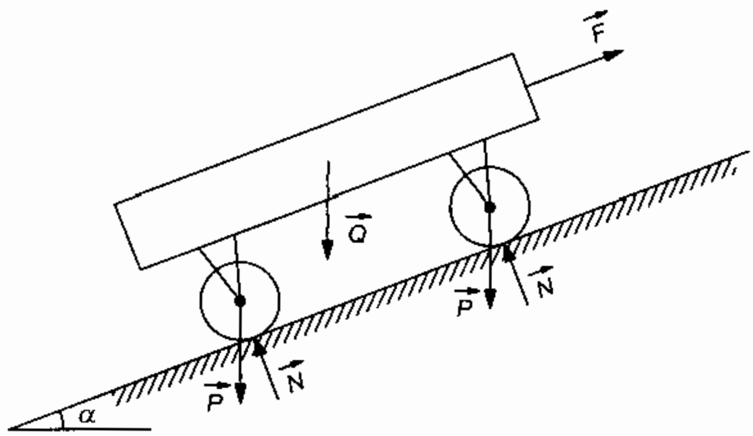
$$T_{hệ} = T_A + T_B + T_E = \frac{1}{2} \times \frac{Q}{g} V_A^2 + \frac{1}{4} \times \frac{P}{g} V_A^2 + \frac{3}{4} \times \frac{P}{g} V_A^2;$$

$$T_{hệ} = \frac{Q + 2P}{2g} V_A^2.$$

Ví dụ 3: Một xe trọng lượng $\vec{Q}$ được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng một góc α nhờ lực kéo $\vec{F}$ hướng song song với mặt phẳng đó. Xe được đặt trên 4 bánh có bán kính R, trọng lượng mỗi bánh xe là $\vec{P}$ và được coi là đĩa tròn đồng chất.

Tìm vận tốc của thùng xe khi xe được kéo lên một đoạn s và gia tốc của nó. Bỏ quả lực cản lăn và coi như bánh xe lăn không trượt trên mặt phẳng. Lúc đầu hệ đứng yên.

Bài giải:



Hình 4.22

Hệ khảo sát gồm thùng xe và bốn bánh xe.

Phân tích chuyển động:

- Thùng xe chuyển động tịnh tiến
- Các bánh xe chuyển động song phẳng.

Lúc đầu hệ đứng yên $T_o = 0$ vì hệ là vật rắn nên $\sum A_k^i = 0$.

Áp dụng định lý động năng:

$$T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

Do đó $\quad T_1 = \sum A_k^e$;

$$T = T_{th} + 4T_{bx}, \qquad (*)$$

trong đó: T_{th} – động năng của thùng xe;

T_{bx} – động năng của bánh xe

$$T_{th} = \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}V^2$$

và $$T_{bx} = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mV_C^2 .$$

Ta có

$$V_C = V \text{ và } \omega = \frac{V_C}{R} = \frac{V}{R};\ J_z = \frac{1}{2}\times\frac{P}{g}R^2;$$

$$T = \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}V^2 + 4\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{P}{g}R^2\frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2}\times\frac{P}{g}V^2\right);$$

$$T = \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}V^2 + 4\frac{3}{4}\times\frac{P}{g}V^2 = \frac{Q+6P}{2g}V^2.$$

Các ngoại lực tác dụng lên hệ: $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$.

Ta có

$$\sum A_k^e = A_P + A_Q + 4A_P + A_N.$$

Vì N có phương vuông góc với dịch chuyển của xe nên $A_N = 0$ còn

$$A_p = -Ps\times\sin\alpha;$$

$$\sum A_k^e = Fs - Qs\times\sin\alpha - 4Ps\times\sin\alpha = [F-(Q+4P)\sin\alpha]s,$$

trong đó: s – quãng đường dịch chuyển của xe theo mặt phẳng nghiêng.

Thay các giá trị vào biểu thức (*) ta có:

$$\frac{1}{2g}(Q+6P)V^2 = [F-(Q+4P)\sin\alpha]s \qquad (**)$$

Từ đây ta có:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{Q+6P}[F-(Q+4P)\sin\alpha]s}$$

Khi tìm gia tốc, để đơn giản, ta tính đạo hàm bậc nhất theo thời gian cả hai vế của (**) và chú ý rằng

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = V.$$

Ta được:

$$\frac{1}{2g}(Q+6P)2V\dot{V}=[F-(Q+4P)\sin\alpha]\dot{s}\,.$$

Vậy

$$W=\dot{V}=\frac{[F-(Q+4P)\sin\alpha]}{Q+6P}g\,.$$

Muốn cho xe đi lên được thì W > 0 hay

$$F-(Q+4P)\sin\alpha>0\,,$$

hay $$F>(Q+4P)\sin\alpha\,.$$

Chương 5

NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

Các phương pháp giải bài toán động lực học mà ta đã xét: các phương trình vi phân chuyển động và các định lý tổng quát động lực học đều dựa trên cơ sở tiên đề 2 của Niutơn. Nguyên lý Đalămbe sẽ cho phép ta sử dụng phương pháp cân bằng tĩnh học để giải bài toán động lực học.

§5.1. LỰC QUÁN TÍNH

5.1.1. LỰC QUÁN TÍNH CỦA CHẤT ĐIỂM

Xét chất điểm khối lượng m chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính với gia tốc $\overrightarrow{W}$ dưới tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$. Theo tiên đề 2 của Niutơn ta có:

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{W} \text{ hay } \overrightarrow{F} + (-m\overrightarrow{W}) = 0.$$

Ta thấy các số hạng ở vế trái của đẳng thức này đều có cùng đơn vị là đơn vị của lực. Đặt $\overrightarrow{F^{qt}} = -m\overrightarrow{W}$ và gọi là lực quán tính của chất điểm.

Định nghĩa: Lực quán tính của chất điểm là một đại lượng vectơ cùng phương ngược chiều với vectơ gia tốc của điểm và có trị số bằng tích số khối lượng của điểm với gia tốc của nó. Nghĩa là:

$$\overrightarrow{F^{qt}} = -m\overrightarrow{W}. \tag{5.1}$$

Chiếu biểu thức (5.1) lên các trục của hệ tọa độ Đề-các ta có:

$$\left.\begin{aligned} F_x^{qt} &= -mW_x = -m\ddot{x} \\ F_y^{qt} &= -mW_y = -m\ddot{y} \\ F_z^{qt} &= -mW_z = -m\ddot{z} \end{aligned}\right\}. \tag{5.2}$$

Nếu ta chiếu biểu thức (5.1) lên các trục của hệ tọa độ tự nhiên Mτnb ta có:

$$\left.\begin{aligned} {}^{qt}_{\tau} &= -mW_\tau = -m\frac{dV}{dt} \\ F\,F_n^{qt} &= -mW_n = -m\frac{V^2}{\rho} \\ F_b^{qt} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5.3}$$

$F_b^{qt} = 0$ vì $W_b = 0$ do $\overrightarrow{W}$ nằm trong mặt phẳng mật tiếp.

5.1.2. HỆ LỰC QUÁN TÍNH CỦA CƠ HỆ (Hệ chất điểm)

Xét cơ hệ có n chất điểm, khi đó mỗi chất điểm có một lực quán tính $\overrightarrow{F_k^{qt}} = -m_k\overrightarrow{W_k}$. Cơ hệ n chất điểm nên có n lực quán tính.

Tập hợp tất cả n lực quán tính tác dụng lên cơ hệ được gọi là hệ lực quán tính tác dụng lên cơ hệ.

Khi thu gọn hệ lực quán tính này về tâm thu gọn O bất kỳ bao giờ ta cũng được một lực quán tính chính $\overrightarrow{R_O^{qt}}$ và một ngẫu lực quán tính chính có vectơ mômen chính của các lực quán tính là $\overrightarrow{M_O^{qt}}$ mà:

$$\overrightarrow{R_O^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}}\ ;\ \overrightarrow{M_O^{qt}} = \sum \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^{qt}}).$$

Ta có thể tính $\overrightarrow{R_O^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}}$ qua gia tốc khối tâm C. Khi đó:

$$\overrightarrow{R_O^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} = -\sum m_k \overrightarrow{W_k} = -M\overrightarrow{W_C}.$$

Hãy xét một số chuyển động thường gặp.

a. Vật chuyển động tịnh tiến

Vì vật rắn chuyển động tịnh tiến nên $\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{W_C}$. Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta có:

$$\left.\begin{aligned}
&\overrightarrow{R_C^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} = -\sum m_k \overrightarrow{W_k} = -\sum m_k \overrightarrow{W_C} = -M\overrightarrow{W_C}\\
&\overrightarrow{R_C^{qt}} = -M\overrightarrow{W_C}\\
&\overrightarrow{M_C^{qt}} = \sum \overrightarrow{m_C}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = \sum \overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{F_k^{qt}} = -\sum \overrightarrow{r_k}\wedge m_k\overrightarrow{W_k} = \sum m_k \overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{W_C}\\
&\overrightarrow{M_C^{qt}} = -M\overrightarrow{r_C}\wedge\overrightarrow{W_C} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

Do ta lấy khối tâm C làm tâm thu gọn nên $\overrightarrow{r_C} = 0$ nên

$$\overrightarrow{M_C^{qt}} = -M\overrightarrow{r_C}\wedge\overrightarrow{W_C} = 0.$$

b. Vật quay quanh trục cố định

Xét vật rắn có mặt phẳng đối xứng và quay quanh trục Oz vuông góc với mặt phẳng đối xứng tại O. Khi thu gọn hệ lực quán tính về O thì tại O ta được một lực quán tính chính, xác định bởi $\overrightarrow{R_O^{qt}} = -M\overrightarrow{W_C}$ và một ngẫu lực quán tính có mômen bằng mômen chính của các lực quán tính đối với tâm O.

$$M_{Oz}^{qt} = \sum m_{Oz}(\overline{F_k^{qt}}) = \sum m_{Oz}(\overline{F_{k\tau}^{qt}})$$
$$= -\sum h_k m_k W_{k\tau} = -\sum m_k h_k^2 \varepsilon;$$

$$M_{Oz}^{qt} = -J_{Oz}\varepsilon . \tag{5.5}$$

Vì các lực quán tính theo phương pháp tuyến có mômen đối với trục z đi qua O bằng không.

Dấu (–) cho ta biết chiều của M_O^{qt} ngược với chiều của ε

Chú ý:

- Nếu trục z đi qua khối tâm C thì $\overrightarrow{R^{qt}} = 0$ vì $\overrightarrow{W_C} = 0$. Khi đó hệ lực quán tính thu về ngẫu lực với $M_{Cz}^{qt} = -J_{Cz}\varepsilon$.
- Nếu vật quay đều thì $M_O^{qt} = 0$ vì $\varepsilon = 0$ khi đó hệ lực quán tính thu về một lực.

c. Vật chuyển động song phẳng

Vật có mặt phẳng đối xứng và chuyển động trong mặt phẳng đối xứng ấy. Lấy khối tâm C làm tâm thu gọn. Thu gọn hệ các lực quán tính về khối tâm C ta được một lực quán tính đặt tại C và lực đó được xác định bởi công thức $\overrightarrow{R_C^{qt}} = -M\overrightarrow{W_C}$ và một ngẫu lực có mômen quán tính chính $M_C^{qt} = -J_{Cz}\varepsilon$.

$$\left.\begin{aligned} \overline{R_C^{qt}} &= -M\overrightarrow{W_C} \\ M_{Cz}^{qt} &= -J_{Cz}\varepsilon \end{aligned}\right\}. \tag{5.6}$$

Dấu (–) chứng tỏ $\overrightarrow{R_C^{qt}}$ và M_{Cz}^{qt} có chiều ngược với chiều của $\overrightarrow{W_C}$ và ε còn J_{Cz} là mômen quán tính của vật đối với trục z đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng đối xứng.

§5.2. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

5.2.1. ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

Xét một chất điểm khối lượng m chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Khi đó ta có $(\vec{F},\overrightarrow{F^{qt}})\sim 0$. Đây là hệ lực đồng quy (cùng đặt vào một chất điểm) nên:

$$(\vec{F},\overrightarrow{F^{qt}})\sim 0 \text{ hay } \vec{F}+\overrightarrow{F^{qt}}=0.$$

Nguyên lý: Tại mỗi thời điểm các lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính của nó lập thành một hệ lực cân bằng.

Chú ý: Nếu chất điểm không tự do thì lực tác dụng lên chất điểm bao gồm cả phản lực liên kết $\vec{N}$. Khi đó:

$$\vec{F}+\vec{N}+\overrightarrow{F^{qt}}=0.$$

5.2.2. ĐỐI VỚI CƠ HỆ

Giả sử cơ hệ có n chất điểm có khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính với gia tốc $\overrightarrow{W_1},\overrightarrow{W_2},\ldots,\overrightarrow{W_n}$ dưới tác dụng của hệ lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\ldots,\overrightarrow{F_n}$. Xét chất điểm thứ k có khối lượng m_k, gia tốc $\overrightarrow{W_k}$ dưới tác dụng của lực $\overrightarrow{F_k}$. Theo nguyên lý Đalămbe đối với chất điểm này ta có:

$$(\overrightarrow{F_k},\overrightarrow{F_k^{qt}})\sim 0 \text{ hay } \overrightarrow{F_k}+\overrightarrow{F_k^{qt}}=0.$$

Đối với toàn hệ thì

$$\sum(\overrightarrow{F_k},\overrightarrow{F_k^{qt}})\sim 0$$

hay $$(\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}\ldots\overrightarrow{F_n},\overrightarrow{F_1^{qt}}\overrightarrow{F_2^{qt}}\ldots\overrightarrow{F_n^{qt}})\sim 0. \qquad \text{(a)}$$

Nguyên lý: Tại mỗi thời điểm các lực tác dụng lên các chất điểm của cơ hệ và các lực quán tính của chúng lập thành một hệ lực cân bằng.

Chú ý: Lực $\overrightarrow{F_k}$ tác dụng lên chất điểm thứ k là hợp lực của lực hoạt động và phản lực liên kết nếu là cơ hệ không tự do và $\overrightarrow{F_k}$ là hợp lực của ngoại lực và nội lực nếu cơ hệ là tự do.

§5.3. PHƯƠNG PHÁP TĨNH ĐỘNG

Từ điều kiện $(\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}...\overrightarrow{F_n},\overrightarrow{F_1^{qt}}\overrightarrow{F_2^{qt}}...\overrightarrow{F_n^{qt}}) \sim 0$. Ta lấy một điểm O bất kỳ làm tâm thu gọn thì:

$$(\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2}...\overrightarrow{F_n},\overrightarrow{F_1^{qt}}\overrightarrow{F_2^{qt}}...\overrightarrow{F_n^{qt}}) \sim (\overrightarrow{R_O} \text{ và } \overrightarrow{M_O}) \sim 0. \tag{b}$$

trong đó:

$$\overrightarrow{R_O} = \sum\overrightarrow{F_k} + \sum\overrightarrow{F_k^{qt}} = \sum\overrightarrow{F_k^e} + \sum\overrightarrow{F_k^i} + \sum\overrightarrow{F_k^{qt}} = \sum\overrightarrow{F_k^e} + \sum\overrightarrow{F_k^q} = 0 \text{ (c)}$$

$$\overrightarrow{M_O} = \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k}) + \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}) + \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) \tag{5.7}$$

$$= \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0. \tag{d}$$

Do tính chất nội lực $\sum\overrightarrow{F_k^i} = 0$ và $\sum\overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^i}) = 0$. Khi chiếu (c) và (d) lên các trục của hệ tọa độ $Oxyz$ ta được:

$$\left.\begin{aligned}
R_{Ox} &= \sum F_{kx}^e + \sum F_{kx}^{qt} = 0 \\
R_{Oy} &= \sum F_{ky}^e + \sum F_{ky}^{qt} = 0 \\
R_{Oz} &= \sum F_{kz}^e + \sum F_{kz}^{qt} = 0 \\
M_{Ox} &= \sum m_{Ox}(\overrightarrow{F_k}) + \sum m_{Ox}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0 \\
M_{Oy} &= \sum m_{Oy}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum m_{Oy}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0 \\
M_{Oz} &= \sum m_{Oz}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum m_{Oz}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0
\end{aligned}\right\} . \tag{5.8}$$

Các phương trình này gọi là phương trình cân bằng tĩnh động.

Chú ý:

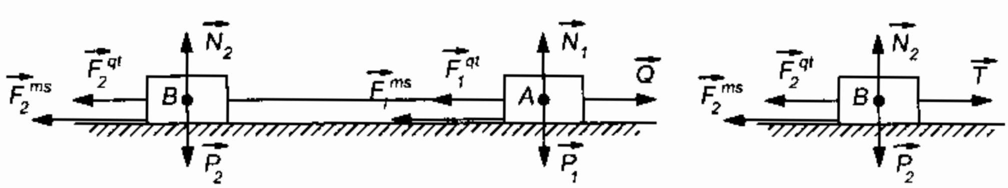
- Nếu (b) là hệ lực không gian thì khi chiếu lên các trục tọa độ ta có 6 phương trình cân bằng (5.8) ở trên.
- Nếu (b) là hệ lực phẳng thì ta chỉ có 3 phương trình cân bằng.

Ý nghĩa của nguyên lý:

- Cho phép ta sử dụng phương pháp tĩnh học để giải bài toán động lực học sau khi đặt thêm các lực quán tính.
- Cho ta xác định các phản lực liên kết xuất hiện khi hệ chuyển động. Các phản lực liên kết trong bài toán động lực có chứa yếu tố chuyển động gọi là phản lực động lực.

Ví dụ 1: Hai vật nặng *A* và *B* có trọng lượng là $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}$ được nối với nhau bằng sợi dây không giãn, không trọng lượng. Một lực $\vec{Q}$ song song với mặt tựa tác dụng lên vật *A*. Hệ số ma sát trượt giữa các vật với mặt tựa nằm ngang là *f*. Tìm gia tốc các vật và sức căng của dây.

Bài giải:



Hình 5.1

Hệ khảo sát: các vật A, *B* và dây.

Các lực tác dụng lên hệ: $\vec{Q}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{F_1^{ms}}, \overrightarrow{F_2^{ms}}, \overrightarrow{F_1^{qt}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}$

Ta có hệ lực cân bằng: $(\vec{Q}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{F_1^{ms}}, \overrightarrow{F_2^{ms}}, \overrightarrow{F_1^{qt}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}) \sim 0$, với $F_1^{ms} = fN_1 = fP_1$; $F_2^{ms} = fN_2 = fP_2$.

Vì dây không giãn nên hai vật chuyển động với gia tốc bằng nhau:

$$\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{W}$$

cho nên:

$$F_1^{qt} = \frac{P_1}{g}W_1 = \frac{P_1}{g}W\,;$$

$$F_2^{qt} = \frac{P_2}{g}W_2 = \frac{P_2}{g}W\,.$$

Theo nguyên lý Đalămbe và chiếu lên phương ngang ta được:

$$Q - F_1^{qt} - F_2^{qt} - fP_1 - fP_2 = 0$$

$$\rightarrow Q - \frac{P_1}{g}W - \frac{P_2}{g}W - fP_1 - fP_2 = 0;$$

$$W = \frac{Q - f(P_1 + P_2)}{P_1 + P_2}g\,.$$

Từ kết quả này ta thấy điều kiện để các vật chuyển động được nếu:

$$\frac{Q}{P_1 + P_2} > f\,.$$

Để tính sức căng T ta xét riêng vật B. Lúc này các lực tác dụng lên vật B gồm có: $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{F_2^{ms}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}$. Theo nguyên lý Đalămbe thì hệ các lực này cân bằng:

$$(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{F_2^{ms}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}) \sim 0.$$

Chiếu lên phương ngang ta có:

$$T - F_2^{ms} - F_2^{qt} = 0 \text{ hay } T = fP_2 + \frac{P_2}{g}W\,.$$

Thay giá trị W đã tính được ở trên ta được:

$$T = \frac{QP_2}{P_1 + P_2}.$$

Kết quả này cho ta thấy sức căng T không phụ thuộc vào ma sát.

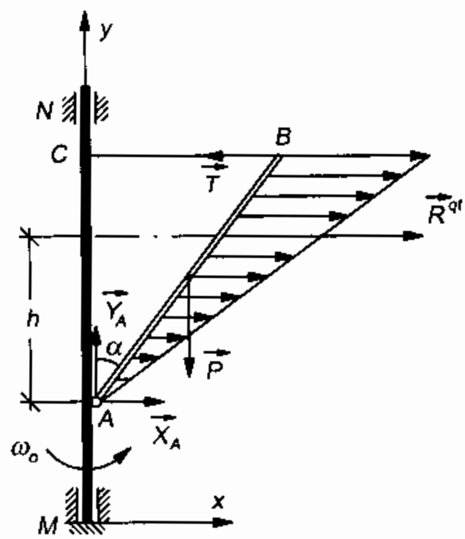
Nếu giữ cho trọng lượng của hệ $P_1 + P_2$ = const thì T sẽ nhỏ khi P_2 nhỏ. Do đó trong vận tải đường sắt hay đường sông khi kéo nhiều toa hay nhiều xà lan thì các toa đầu thường nặng còn các toa sau nhẹ dần.

Ví dụ 2: Một thanh đồng chất $AB = b$ trọng lượng P được nối với trục thẳng đứng MN bằng bản lề tại A. Trục quay với vận tốc góc ω_o không đổi.

Tìm phản lực liên kết tại A và sức căng T của dây BC để giữ cho thanh nghiêng với trục quay góc α không đổi.

Bài giải:

Xét thanh AB (hình 5.2).



Hình 5.2

Các lực tác dụng gồm: trọng lượng $\vec{P}$, sức căng $\vec{T}$ của dây BC, các phản lực tại A là $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}$ và lực quán tính của các điểm thuộc thanh AB.

Vì hệ các lực quán tính của thanh AB phân bố tuyến tính nên $\overrightarrow{R^{qt}} = -M\overrightarrow{W_C}$ đặt tại điểm cách A một đoạn bằng $\frac{2}{3}AB$.

$$h = \frac{2}{3}b\cos\alpha \text{ và } R^{qt} = MW_{Cn} = \frac{P}{g}\frac{b}{2}\omega_o^2\sin\alpha.$$

Theo nguyên lý Đalămbe thì:

$$(\vec{P}, \vec{T}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{R^{qt}}) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X = X_A - T + R^{qt} = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = Y_A - P = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = Tb\cos\alpha - hR^{qt} - P\frac{b}{2}\sin\alpha = 0. \quad (3)$$

Từ (3) có:

$$T = P\left(\frac{b\omega_o^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right).$$

Từ (2) có:

$$Y_A = P.$$

Từ (1) có:

$$X_A = T - R^{qt} = P\left(\frac{b\omega_o^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right) - \frac{P}{g}\frac{b}{2}\omega_o^2\sin\alpha;$$

$$X_A = \frac{1}{2}Ptg\alpha - \frac{1}{6}Pb\omega_o^2\sin\alpha.$$

Phản lực liên kết X_A gồm có phản lực tĩnh là $\frac{1}{2}Ptg\alpha$ và phản lực động lực có trị số $\frac{1}{6}Pb\omega_o^2\sin\alpha$.

Ví dụ 3: Hai thanh *CD* = *EF* = *b* được gắn vào trục quay *AB* = 4*a*. Thanh *CD* gắn trực giao với *AB* còn thanh *EF* gắn nghiêng với *AB* một góc α. Các thanh *CD, EF* nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Đầu mỗi thanh gắn quả cầu trọng lượng *P*. Bỏ qua trọng lượng các thanh.

Xác định phản lực động lực tại các liên kết *A* và *B*. Kích thước xem hình vẽ.

Bài giải:

Xét trục quay *AB*, thanh *CD*, thanh *EF* và 2 quả cầu:

$$F_D^{qt} = \frac{P}{g} b\omega_o^2;$$

$$F_E^{qt} = \frac{P}{g} b\omega_o^2 \sin\alpha.$$

Các lực tác dụng:

$(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{F_D^{qt}}, \overrightarrow{F_E^{qt}}) \sim 0.$

Các phương trình cân bằng:

$\sum X = X_A + X_B + F_D^{qt} = 0;$ (1)

$\sum Y = Y_A + Y_B + F_E^{qt} = 0;$ (2)

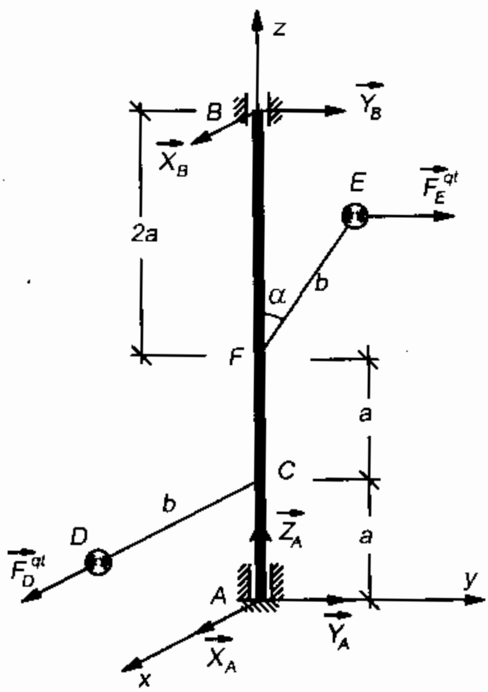
$\sum Z = Z_A = 0;$ (3)

$\sum m_{Ax}(\overrightarrow{F_k}) =$

$= -4aY_B - (2a + b\cos\alpha)F_E^{qt} = 0$ (4)

$\sum m_{Ay}(\overrightarrow{F_k}) = 4aX_B + aF_D^{qt} = 0$ (5)

$\sum m_{Az}(\overrightarrow{F_k}) = 0.$



Hình 5.3

Từ (4) có:

$$Y_B = -\frac{(2a + b\cos\alpha)F_E^{qt}}{4a} = -\frac{(2a + b\cos\alpha)}{4a} \times \frac{P}{g} b\omega_o^2 \sin\alpha;$$

$$Y_B = -\frac{(2a + b\cos\alpha)Pb\omega_o^2 \sin\alpha}{4ag}.$$

Từ (5) có:

$$X_B = -\frac{F_D^{qt}}{4} = -\frac{1}{4g} Pb\omega_o^2.$$

Từ (2) có:

$$Y_A = -Y_B - F_E^{qt} = \frac{(2a + b\cos\alpha)F_E^{qt}}{4a} - F_E^{qt};$$

$$Y_A = -Y_B - F_E^{qt} = \frac{(b\cos\alpha - 2a)F_E^{qt}}{4a} = \frac{(b\cos\alpha - 2a)}{4ag}Pb\omega_o^2 \sin\alpha .$$

Từ (1) có:

$$X_A = F_D^{qt} - X_B = F_D^{qt} + \frac{1}{4}F_D^{qt} = \frac{5}{4}F_D^{qt} = \frac{5}{4}\times\frac{P}{g}b\omega_o^2 .$$

Từ (3) có:

$$Z_A = 0 .$$

Ta thấy các phản lực X_B, Y_B mang dấu (–) nên chiều của nó ngược chiều giả định.

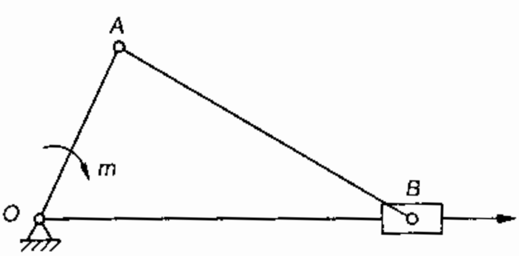
Chương 6

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

§6.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

6.1.1. CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

Cơ hệ không tự do là tập hợp các chất điểm mà trong đó chuyển động của các chất điểm thuộc cơ hệ không những chỉ phụ thuộc vào lực tác dụng mà còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.



Hình 6.1

Ví dụ: Cơ cấu thanh truyền tay quay (hình 6.1) là cơ hệ không tự do. Ở đây ngoài ngẫu lực m tác dụng lên khâu OA, trọng lượng các khâu còn có các điều kiện ràng buộc về mặt hình học và động học. Điểm A chỉ có thể chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính OA. Điểm B chuyển động trên trục Ox nằm ngang. Khoảng cách giữa hai điểm A và B là không đổi. Các điều kiện này độc lập với các lực tác dụng lên cơ hệ và điều kiện ban đầu của chuyển động.

6.1.2. LIÊN KẾT

a. Định nghĩa: Liên kết là những điều kiện ràng buộc chuyển động về mặt hình học và động học của cơ hệ. Những điều kiện này không phụ thuộc vào lực tác dụng và điều kiện ban đầu.

b. Phương trình liên kết: Các phương trình hay bất phương trình biểu thị về mặt toán học sự ràng buộc về mặt hình học và động học của các chất điểm thuộc cơ hệ. Chúng có dạng như sau:

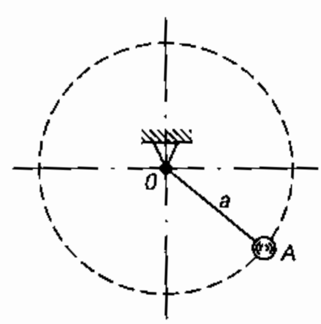
$$f_i(t, \overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{V_k}) \geq 0\,, \tag{6.1}$$

trong đó: k từ 1 đến n ($\overline{1,n}$), còn i từ 1 đến s ($\overline{1,s}$). Trong đó s là số phương trình liên kết.

Các phương trình liên kết còn có thể viết ở dạng sau:

$$f_i(t, x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) \geq 0\,. \tag{6.2}$$

Ví dụ: Xét chuyển động của chất điểm A khối lượng m buộc vào đầu một sợi dây không giãn chiều dài a còn đầu kia buộc vào điểm O cố định (hình 6.2). Điều kiện ràng buộc với chất điểm A luôn luôn cách O một khoảng không lớn hơn a. Về mặt toán học điều kiện này được biểu diễn như sau:



Hình 6.2

$$f(t, x_A, y_A) \equiv x_A^2 + y_A^2 - a^2 \leq 0\,. \tag{6.3}$$

Nghĩa là điểm A luôn luôn chuyển động bên trong (kể cả biên) của mặt tròn tâm O bán kính a. Số phương trình liên kết ở đây là 1.

Nếu giả thiết dây luôn ở trạng thái căng (coi OA là một thanh cứng) thì phương trình liên kết có dạng

$$f(t, x, y) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0\,. \tag{6.4}$$

Tức là trong quá trình chuyển động điểm A không thể rời khỏi đường tròn tâm O bán kính a.

Nếu chiều dài của dây biến đổi theo thời gian tức là $a = a(t)$ và coi như dây luôn luôn bị căng thì phương trình liên kết là:

$$f(t,x,y) \equiv x^2 + y^2 - a^2(t) = 0 . \qquad (6.5)$$

c. Phân loại liên kết: Dựa vào dạng của các phương trình liên kết mà ta phân loại các liên kết.

- Liên kết giữ: là liên kết mà các điều kiện ràng buộc được mô tả bằng các phương trình. Liên kết giữ còn gọi là liên kết hai phía
- Liên kết không giữ là liên kết được mô tả bởi các bất phương trình, hay còn gọi là liên kết một phía. Ví dụ: Con lắc (hình 6.2) sẽ là liên kết giữ khi OA là thanh cứng và là liên kết không giữ khi OA là dây mềm.
- Liên kết dừng là liên kết mà trong phương trình liên kết không chứa rõ biến số thời gian t. Ngược lại là liên kết không dừng. Ví dụ: Con lắc có độ dài dây thay đổi theo thời gian $t\{a(t)\}$ là liên kết không dừng.
- Liên kết hình học (hay liên kết hôlônôm) là liên kết mà trong phương trình liên kết không chứa các yếu tố vận tốc hoặc có chứa các yếu tố vận tốc nhưng nhờ các phép tính tích phân ta có thể đưa về dạng không chứa các yếu tố vận tốc.

Nếu trong phương trình liên kết có chứa các yếu tố vận tốc thì liên kết đó được gọi là liên kết động học hay liên kết không hôlônôm.

Trong các phần tiếp sau đây chúng ta giới hạn chỉ nghiên cứu cơ hệ chịu các liên kết hình học giữ và dừng. Nghĩa là phương trình liên kết có dạng:

$$f_i(\overrightarrow{r_k}) = 0 \text{ hay } f_i(x_k, y_k, z_k) = 0 .$$

6.1.3. DI CHUYỂN KHẢ DĨ VÀ SỐ BẬC TỰ DO

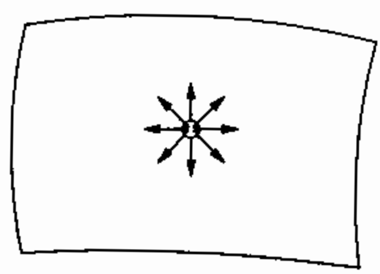
a. Định nghĩa: Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là tập hợp các di chuyển vô cùng bé mà mỗi chất điểm của cơ hệ có thể thực hiện được để sao cho phù hợp với liên kết tại vị trí đang xét.

- Di chuyển khả dĩ của chất điểm được ký hiệu $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ với $\vec{r}$ là vectơ định vị của chất điểm, còn di chuyển thực được ký hiệu là $d\vec{r}(dx, dy, dz)$.
- Di chuyển khả dĩ chỉ có ý nghĩa về mặt hình học nó không phụ thuộc vào lực tác dụng và thời gian t.

Ví dụ: Quả cầu A đặt trên mặt tựa nào đó thì liên kết giữa quả cầu với mặt tựa là liên kết tựa. Di chuyển khả dĩ của quả cầu là vô số các di chuyển vô cùng bé tại vị trí đang xét.

b. Số bậc tự do

Tổng quát mà nói thì đối với các chất điểm hay các vật thuộc cơ hệ có thể tồn tại những di chuyển khả dĩ khác nhau. Nhưng đối với mỗi cơ hệ, tùy thuộc ở các liên kết, ta có thể chỉ ra một số xác định các di chuyển khả dĩ độc lập nhau mà các di chuyển khả dĩ khác sẽ phụ thuộc vào các di chuyển khả dĩ độc lập ấy.



Hình 6.3

Chẳng hạn quả cầu nằm trên mặt tựa có vô số di chuyển khả dĩ. Nhưng chỉ có hai di chuyển độc lập theo hai phương vuông góc nhau là $\delta\overrightarrow{r_1}$ và $\delta\overrightarrow{r_2}$ còn tất cả các di chuyển khác đều có thể biểu diễn qua hai di chuyển khả dĩ độc lập ấy. Nghĩa là:

$$\delta\vec{r} = \lambda_1\delta\overrightarrow{r_1} + \lambda_2\delta\overrightarrow{r_2}\,.$$

Định nghĩa số bậc tự do:

Giả sử hệ có n chất điểm thì có $3n$ di chuyển khả dĩ độc lập nhưng hệ lại có m phương trình liên kết. Do đó số bậc tự do của hệ sẽ là $S = 3n - m$

Định nghĩa: Số bậc tự do của cơ hệ bằng số di chuyển khả dĩ độc lập của hệ đó.

Ví dụ:

– Một chất điểm ở trên đường thẳng có 1 bậc tự do.
– Một chất điểm tự do trong không gian có 3 bậc tự do.
– Một vật rắn tự do trong không gian có 6 bậc tự do.

§6.2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

6.2.1. CÔNG KHẢ DĨ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi lực tác dụng lên chất điểm trên di chuyển trùng với di chuyển khả dĩ của chất điểm đó.

Ta ký hiệu công khả dĩ của lực hoạt động $\overrightarrow{F}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^F. Công khả dĩ của phản lực liên kết $\overrightarrow{N}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^N.

6.2.2. LIÊN KẾT LÝ TƯỞNG

Định nghĩa: Liên kết của cơ hệ được gọi là liên kết lý tưởng nếu tổng công nguyên tố của các phản lực liên kết tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không. Nghĩa là:

$$\sum \delta A_k^N = \sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0. \qquad (6.6)$$

Chú ý: Liên kết không ma sát là liên kết lý tưởng. Nhưng liên kết lý tưởng lại có thể là liên kết có ma sát (như lực ma sát trượt trong chuyển động lăn không trượt).

Ví dụ:

- Nếu bỏ qua ma sát khi vật chuyển động trượt trên đường cong (hay mặt cong) cố định thì công của phản lực liên kết bằng không.
- Nếu bỏ qua biến dạng ở miền tiếp xúc thì khi vật chuyển động lăn không trượt, công của phản lực liên kết $\vec{N}$ và lực ma sát trượt bằng không.

6.2.3. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Nguyên lý: điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k} \delta \overrightarrow{r_k} = 0. \tag{6.7}$$

Chứng minh:

+ Điều kiện cần:

gt: – hệ có liên kết lý tưởng,

– cân bằng;

kl: $\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k} \delta \overrightarrow{r_k} = 0$.

Theo giả thiết hệ cân bằng nên mọi chất điểm thuộc hệ cân bằng. Xét chất điểm thứ k thuộc hệ chịu tác dụng của lực hoạt động $\overrightarrow{F_k}$ và phản lực liên kết $\overrightarrow{N_k}$ ở trạng thái cân bằng, nghĩa là $\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k} = 0$. Cho hệ một di chuyển khả dĩ thì chất điểm thứ k có di chuyển khả dĩ $\delta \overrightarrow{r_k}$. Do đó $\delta A_k = (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k}) \delta \overrightarrow{r_k} = 0$. Đối với toàn hệ ta có:

$$\sum \delta A_k = \sum (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k})\delta\overrightarrow{r_k} = 0 \text{ hay } \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0 .$$

Vì hệ có liên kết lý tưởng nên

$$\sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0 \rightarrow \sum \delta A^F = \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0 .$$

+ Điều kiện đủ: gt: – liên kết lý tưởng,

$$- \sum \delta A^F = \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0 ;$$

kl: hệ cân bằng.

Theo giả thiết hệ có liên kết lý tưởng và $\sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$ thì ta sẽ phải chứng minh hệ ở trạng thái cân bằng.

Giả sử hệ cân bằng (động năng $T = 0$) mà trên hệ có các lực hoạt động tác dụng thỏa mãn điều kiện $\sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$. Ta sẽ chỉ ra cơ hệ sẽ cân bằng mãi mãi. Nếu tại thời điểm nào đó cơ hệ bắt đầu chuyển động thì biến thiên động năng $\delta T \neq 0$. Theo định lý động năng:

$$\delta T = \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} \neq 0 .$$

Vì hệ có liên kết lý tưởng $\sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$ nên $\sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} \neq 0$. Điều này trái với giả thiết. Vậy hệ phải cân bằng mãi mãi.

Biểu thức của nguyên lý di chuyển khả dĩ có thể viết ở dạng giải tích:

$$\left.\begin{aligned} \sum \delta A_k^F &= \sum \left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k\right) = 0 \\ \sum \delta A_k^F &= \sum \left(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k\right) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (6.8)$$

với F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} hay X_k, Y_k, Z_k là hình chiếu của lực $\overrightarrow{F_k}$ và $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ là hình chiếu của $\delta\overrightarrow{r_k}$ lên các trục của hệ tọa độ Đề-các.

Ý nghĩa: nguyên lý này thiết lập được điều kiện cân bằng ở dạng tổng quát của cơ hệ bất kỳ. Nó cho phép ta sử dụng phương pháp tĩnh học để giải bài toán động lực một cách tổng quát.

Chú ý:

– Nếu hệ có liên kết lý tưởng thì chỉ cần tính đến các lực hoạt động còn phản lực liên kết có thể bỏ qua

– Có thể vận dụng nguyên lý này để giải bài toán có ma sát. Lúc đó lực ma sát coi như là lực hoạt động. Tương tự như vậy, có thể tính được các phản lực liên kết bằng cách chuyển nó thành lực hoạt động.

– Hệ có bao nhiêu bậc tự do phải có bấy nhiêu điều kiện cân bằng (6.7) hay (6.8).

§6.3. TRÌNH TỰ GIẢI BÀI TOÁN

– Xác định số bậc tự do của hệ, kiểm tra điều kiện liên kết lý tưởng.

– Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên hệ.

– Cho hệ một di chuyển khả dĩ nào đó và biểu diễn các vectơ di chuyển nguyên tố của điểm đặt các lực là $\delta\vec{r_k}$.

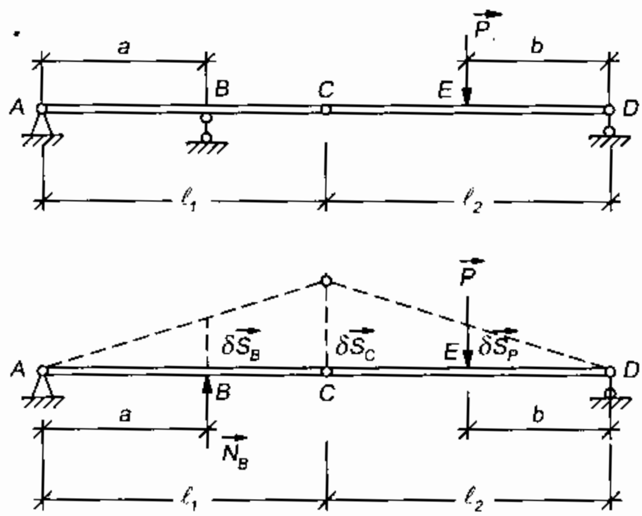
– Tính công của các lực hoạt động theo công thức $\delta A_k^F = \vec{F_k}\delta\vec{r_k}$.

– Lập các điều kiện cân bằng (6.7) hay (6.8) rồi giải để tìm kết quả.

Ví dụ 1: Hai dầm AC và CD nối với nhau bằng bản lề tại C và chịu tác dụng của lực P đặt tại E. Kích thước cho trên hình 6.4. Tìm phản lực tại gối tựa B, bỏ quả trọng lượng các dầm.

Bài giải: Để xác định phản lực ở B ta thay gối di động B bằng phản lực liên kết $\vec{N_B}$. Cho hệ một di chuyển khả dĩ, ta có điều kiện cân bằng:

$$\delta A_k^F = N_B\delta s_B - P\delta s_P = 0. \tag{a}$$



Hình 6.4

Vì hệ có một bậc tự do mà lại có hai di chuyển khả dĩ δs_B và δs_P nên ta phải tìm liên hệ giữa chúng. Ta có:

$$\frac{\delta s_C}{l_1} = \frac{\delta s_B}{a} \to \delta s_C = \frac{l_1}{a}\delta s_B;$$

$$\frac{\delta s_C}{l_2} = \frac{\delta s_P}{b} \to \delta s_C = \frac{l_2}{b}\delta s_P = \frac{l_1}{a}\delta s_B.$$

Do đó

$$\delta s_P = \frac{b}{a} \times \frac{l_1}{l_2}\delta s_B.$$

Thay vào (a) ta có:

$$N_B\delta s_B - P\delta s_P = N_B\delta s_B - P\frac{b}{a} \times \frac{l_1}{l_2}\delta s_B = 0;$$

$$\left(N_B - P\frac{b}{a} \times \frac{l_1}{l_2}\right)\delta s_B = 0 \to N_B - P\frac{b}{a} \times \frac{l_1}{l_2} = 0$$

$$\to N_B = P\frac{b}{a} \times \frac{l_1}{l_2}.$$

Ví dụ 2: Cho sơ đồ một máy nén như hình 6.5. Tìm liên hệ giữa các lực $\overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{P_3}$ khi hệ cân bằng ($Q_1 = Q_2 = Q$ và $P_3 = P$). Góc α và β cho trước. Bỏ quả trọng lượng các thanh.

Bài giải:

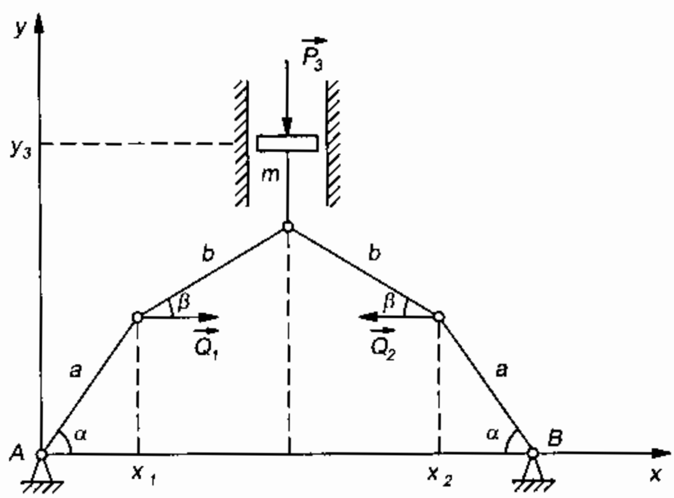
Hệ khảo sát: máy nén.

Áp dụng điều kiện cân bằng giải tích

$$Q_{1x}\delta x_1 + Q_{2x}\delta x_2 + P_{3y}\delta y_3 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Ta có:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos\alpha \\ x_2 &= a\cos\alpha + 2b\cos\beta \\ y_3 &= a\sin\alpha + b\sin\beta + m \end{aligned}\right\}.$$



Hình 6.5

Tính:

$$\delta x_1 = -a\sin\alpha\delta\alpha;$$
$$\delta x_2 = -a\sin\alpha\delta\alpha - 2b\sin\beta\delta\beta = -(a\sin\alpha\delta\alpha + 2b\sin\beta\delta\beta);$$
$$\delta y_3 = a\cos\alpha\delta\alpha + b\cos\beta\delta\beta + 0.$$

Vì hệ có một bậc tự do nên ta phải tìm liên hệ giữa $\delta\alpha$ và $\delta\beta$. Do A và B cố định nên:

$$AB = 2a\cos\alpha + 2b\cos\beta = const\ ;$$

$$-2a\sin\alpha\delta\alpha - 2b\sin\beta\delta\beta = 0$$

$$\rightarrow \delta\alpha = -\frac{b}{a}\times\frac{\sin\beta\delta\beta}{\sin\alpha}.$$

Ta tính $Q_{1x} = Q$;

$$Q_{2x} = -Q\ ;$$

$$P_{3y} = -P.$$

Thay vào (a) ta có:

$$Q_{1x}\delta x_1 + Q_{2x}\delta x_2 + P_{3y}\delta y_3 = 0\ ;$$

$$Q(-a\sin\alpha\delta\alpha) - Q(-)(a\sin\alpha\delta\alpha + 2b\sin\beta\delta\beta) - P(a\cos\alpha\delta\alpha + b\cos\beta\delta\beta) = 0\ ;$$

$$-Qa\sin\alpha\delta\alpha + Qa\sin\alpha\delta\alpha + 2Qb\sin\beta\delta\beta - Pa\cos\alpha\delta\alpha - Pb\cos\beta\delta\beta = 0.$$

hay $$+2Qb\sin\beta\delta\beta - Pa\cos\alpha\left(-\frac{b}{a}\times\frac{\sin\beta\delta\beta}{\sin\alpha}\right) - Pb\cos\beta\delta\beta = 0\ ;$$

$$(+2Qb\sin\beta + Pb\sin\beta\cot g\alpha - Pb\cos\beta)\delta\beta = 0.$$

Do đó:

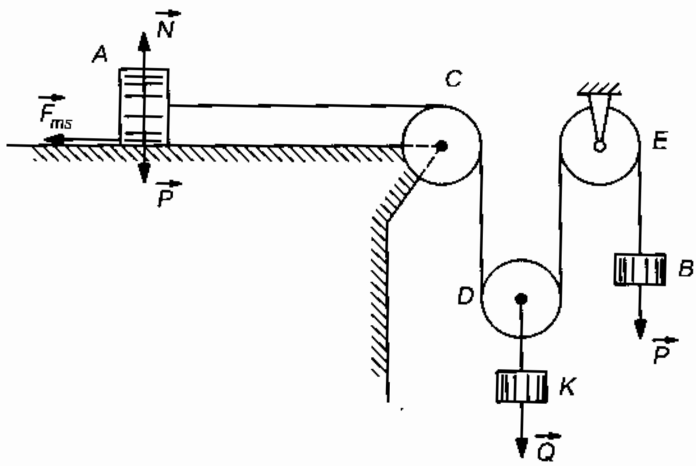
$$+2Qb\sin\beta + Pb\sin\beta\cot g\alpha - Pb\cos\beta = 0\ ;$$

$$2Qb\sin\beta = Pb(\cos\beta - \sin\beta\cot g\alpha)\ ;$$

$$P = \frac{2Q}{\cot g\beta - \cot g\alpha}.$$

Ví dụ 3: Người ta buộc hai vật nặng A và B có cùng trọng lượng vào hai đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng. Dây đi từ vật A song song với mặt phẳng ngang không nhẵn, vắt qua ròng rọc cố định C rồi lồng vào ròng rọc động D, sau đó lại vắt qua ròng rọc cố định E và buộc vào vật nặng B. Vật nặng K có trọng lượng Q treo vào trục ròng rọc động D.

Xác định trọng lượng P của mỗi vật A và B cũng như hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng ngang, biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng. Bỏ qua trọng lượng các ròng rọc.



Hình 6.6

Bài giải:

Hệ khảo sát gồm các vật A, B, ròng rọc D và vật K.

Hệ có hai bậc tự do nên có hai điều kiện cân bằng.

Ta cố định vật A, cho vật B rơi xuống một đoạn δs_B, khi đó vật K đi lên một đoạn δs_Q.

Ta có:

$$-Q\delta s_Q + P\delta s_B = 0. \qquad (*)$$

Mặt khác $\delta s_B = 2\delta s_Q$ nên thay vào (*) ta có:

$$-Q\delta s_Q + 2P\delta s_Q = (-Q + 2P)\delta s_Q = 0,$$

hay

$$-Q + 2P = 0 \text{ và ta có } P = \frac{Q}{2}.$$

Ta cố định vật B, cho vật K rơi xuống một đoạn δs_Q thì vật A di chuyển một đoạn δs_A. Khi đó các lực sinh công là:

$$Q\delta s_Q - F_{ms}\delta s_A = 0 \text{ mà } \delta s_A = 2\delta s_Q$$

$$\rightarrow Q\delta s_Q - 2F_{ms}\delta s_Q = (Q - 2fP)\delta s_Q = 0\,.$$

hay $\qquad Q - 2fP = 0$ và ta có $f = \dfrac{Q}{2P} = 1$.

§6.4. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC (Nguyên lý đalămbe — Lagrăng)

Nguyên lý Đalămbe cho ta áp dụng phương pháp tĩnh học để giải bài toán động lực học, còn nguyên lý di chuyển khả dĩ cho phép ta sử dụng phương pháp tổng quát để giải bài toán cân bằng tĩnh học. Kết hợp đồng thời hai nguyên lý này, cho ta phương pháp tổng quát để giải bài toán động lực học.

Xét cơ hệ n chất điểm có liên kết lý tưởng, hình học, giữ, dừng và đang chuyển động. Ngoài lực hoạt động $\overrightarrow{F_k}$ và phản lực liên kết $\overrightarrow{N_k}$ ta thêm vào chất điểm thứ k lực $\overrightarrow{F_k^{qt}} = -m_k\overrightarrow{W_k}$. Theo nguyên lý Đalămbe ta nhận được hệ lực cân bằng. Nghĩa là $(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}} + \overrightarrow{N_k}) \sim 0$.

Cho hệ một di chuyển khả dĩ rồi áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có:

$$\sum(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}} + \overrightarrow{N_k})\delta\overrightarrow{r_k} = 0\,;$$

$$\sum(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}})\delta\overrightarrow{r_k} + \sum\overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0\,.$$

Nhưng hệ có liên kết lý tưởng nên $\sum\overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$. Do đó:

$$\sum(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}})\delta\overrightarrow{r_k} = 0 . \qquad (6.9)$$

Đẳng thức (6.9) gọi là phương trình tổng quát động lực học hay còn gọi là nguyên lý Đalămbe – Lagrăng và có thể phát biểu như sau:

Nguyên lý: nếu cơ hệ có liên kết lý tưởng thì tại mỗi thời điểm, tổng công nguyên tố của các lực hoạt động và lực quán tính đặt vào cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không.

Ta có thể viết biểu thức (6.9) ở dạng giải tích như sau:

$$\sum\left[(F_{kx} + F_{kx}^{qt})\delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^{qt})\delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^{qt})\delta z_k\right] = 0 . \qquad (6.10)$$

trong đó: F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – hình chiếu của lực hoạt động $\overrightarrow{F_k}$;

$F_{kx}^{qt}, F_{ky}^{qt}, F_{kz}^{qt}$ – hình chiếu của lực quán tính $\overrightarrow{F_k^{qt}}$;

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – hình chiếu của $\delta\overrightarrow{r_k}$ lên các trục của hệ tọa độ Đề-các.

Đẳng thức (6.9) biểu diễn nguyên lý ở dạng vectơ còn đẳng thức (6.10) biểu diễn nguyên lý ở dạng giải tích.

Ví dụ 1: Một con lăn *A* trọng lượng *Q* trong khi lăn không trượt xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α, đã nâng vật *C* trọng lượng *P* nhờ một sợi dây không giãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc cố định *B*. Khi đó ròng rọc *B* quay quanh trục cố định đi qua tâm *O* của nó và trực giao với mặt phẳng của ròng rọc. Con lăn *A* và ròng rọc *B* là những đĩa tròn đồng chất có cùng bán kính và trọng lượng.

Tìm gia tốc của trục con lăn.

Bài giải: Hệ khảo sát: con lăn *A*, ròng rọc *B*, vật nặng *C* và dây.

Hệ có một bậc tự do.

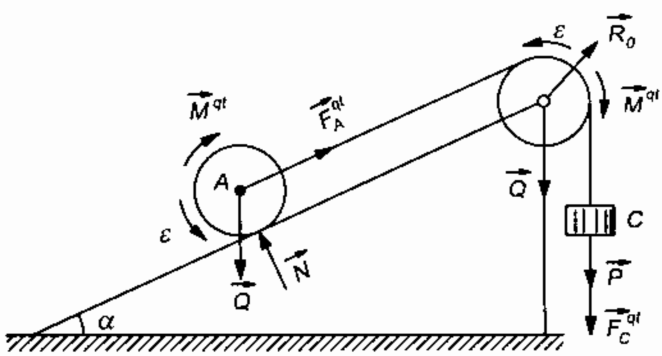
Các lực chủ động: $\vec{Q}, \vec{P}$.

Phản lực liên kết: $\vec{N}, \vec{R}_o$.

Các lực quán tính:

$$F_C^{qt} = \frac{P}{g}W_C\,;\ F_A^{qt} = \frac{Q}{g}W_A \text{ và } W_C = W_A\,;$$

$$M^{qt} = J_z\varepsilon = \frac{Q}{2g}R^2\varepsilon\,.$$



Hình 6.7

Áp dụng phương trình tổng quát động lực học:

$$(Q\sin\alpha - F_A^{qt})\delta s - 2M^{qt}\delta\varphi - (P + F_C^{qt})\delta s = 0\,.$$

Vì $\delta s = R\delta\varphi$ nên:

$$\left(Q\sin\alpha - \frac{Q}{g}W\right)\delta s - 2\frac{Q}{2g}R^2\varepsilon\frac{\delta s}{R} - \left(P + \frac{P}{g}W\right)\delta s = 0\,;$$

$$Q\sin\alpha - P - \frac{Q}{g}W - \frac{Q}{g}R\varepsilon - \frac{P}{g}W = 0 \text{ mà } R\varepsilon = W\,;$$

$$\rightarrow Q\sin\alpha - P - \frac{2Q+P}{g}W = 0\,,$$

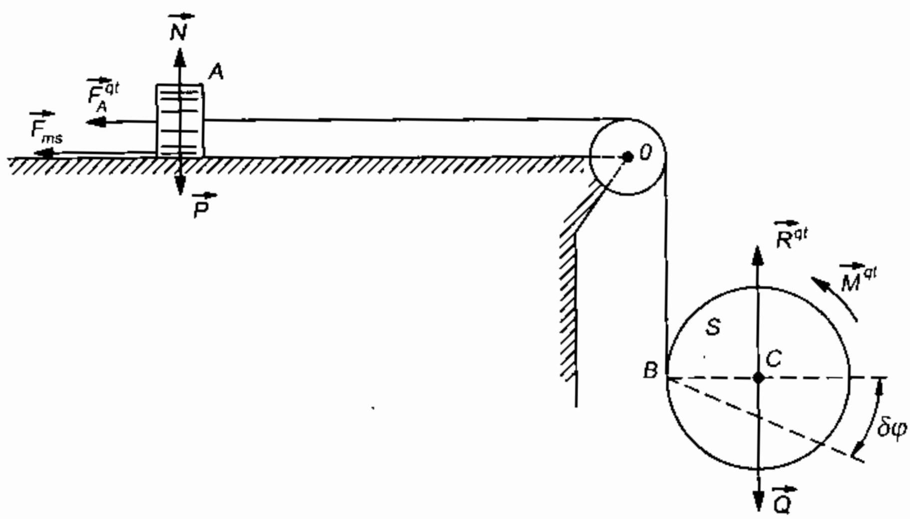
hay

$$W = \frac{Q\sin\alpha - P}{2Q+P}g\,.$$

Ví dụ 2: Một vật A trọng lượng P được buộc vào đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng. Dây vắt qua ròng rọc cố định O, đầu kia của dây cuốn vào khối trụ S có trọng lượng Q, bán kính R. Vật A có thể trượt trên mặt phẳng ngang, hệ số ma sát giữa vật A và mặt phẳng ngang là f.

Tìm gia tốc vật A và gia tốc tâm C của khối trụ khi hệ chuyển động, bỏ qua khối lượng của ròng rọc.

Bài giải:



Hình 6.8

Hệ khảo sát: vật nặng A, khối trụ S và dây.

Hệ có hai bậc tự do. Khi giữ khối trụ S không quay thì vật A vẫn chuyển động. Giữ vật A không chuyển động thì khối trụ quay đối với sợi dây.

Các lực chủ động tác dụng lên hệ gồm có $\vec{P}, \vec{Q}, \overrightarrow{F_{ms}}$. Đặt thêm các lực quán tính $\overrightarrow{F_A^{qt}}, \overrightarrow{R^{qt}}, M_C^{qt}$.

Ta có trị số các lực quán tính

$$F_A^{qt} = \frac{P}{g}W_A\,;\ R^{qt} = \frac{Q}{g}W_C\,;$$

$$M^{qt} = J_C\varepsilon = \frac{Q}{2g}R^2\varepsilon \text{ (R là bán kính khối trụ).}$$

Ta cần tính ε qua W_A và W_C.

Gọi vận tốc tâm *C* của khối trụ là $\overrightarrow{V_C}$ còn vận tốc vật *A* là $\overrightarrow{V_A}$ và bằng vận tốc tiếp điểm *B* của dây và mặt trụ.

Do đó

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B}\,.$$

Từ động học ta có:

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_{CB}}\,;$$

$$V_{CB} = R\omega = V_C - V_B = V_C - V_A\,;$$

$$\omega = \frac{V_C - V_A}{R} \to \varepsilon = \frac{W_C - W_A}{R}\,.$$

Ta thiết lập các điều kiện cân bằng sau:

– Giữ cho khối trụ không quay và cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_A. Lúc này M_C^{qt} sẽ không sinh công. Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$(Q - R^{qt} - F_A^{qt} - F_{ms})\delta s_A = 0\,.$$

Thay $F_{ms} = fN = fP$ ta có:

$$Q - \frac{Q}{g}W_C - \frac{P}{g}W_A - fP = 0\,;$$

$$Q - fP = \frac{P}{g}W_A + \frac{Q}{g}W_C\,. \qquad \text{(a)}$$

– Giữ cho vật *A* đứng yên, lúc này khối trụ sẽ quay quanh điểm *B* một góc δφ (*B* là tâm vận tốc tức thời). Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$(Q - R^{qt})\delta s_C - M_C^{qt}\delta\varphi = 0 \text{ mà } \delta s_C = R\delta\varphi ;$$

$$\left(Q - \frac{Q}{g}W_C\right)R\delta\varphi - \frac{Q}{2g}R^2\frac{W_C - W_A}{R}\delta\varphi = 0 ;$$

$$3W_C - W_A = 2g . \qquad \text{(b)}$$

Giải hai phương trình (a) và (b) ta có:

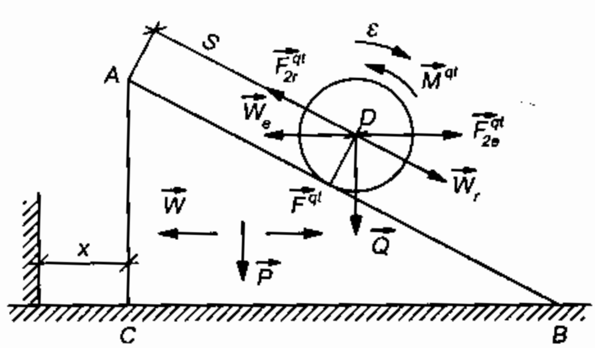
$$W_A = \frac{Q - 3fP}{Q + 3P}g \text{ và } W_C = \frac{Q + (2 - f)P}{Q + 3P}g$$

Các kết quả này cho ta thấy:

Nếu $f < \dfrac{Q}{3P}$ thì vật sẽ chuyển động với gia tốc W_A.

Nếu $f > \dfrac{Q}{3P}$ thì vật A sẽ đứng yên ($W_A = 0$). Khi đó khối trụ sẽ chuyển động với $W_C = \dfrac{2}{3}g$.

Ví dụ 3: Trên một mặt phẳng nằm ngang trơn ta đặt một lăng trụ tam giác ABC có trọng lượng P, nó có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng đó. Hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q lăn không trượt trên mặt nghiêng AB của lăng trụ.



Hình 6.9

Tìm gia tốc của lăng trụ ABC.

Bài giải: Hệ khảo sát gồm lăng trụ ABC và con lăn D.

Hệ có hai bậc tự do: khi giữ cho x không đổi $\delta x = 0$ và cho $\delta s_r \neq 0$. Giữ cho s_r không đổi $\delta s_r = 0$ và $\delta x \neq 0$.

Các lực chủ động tác dụng lên hệ: $\vec{Q}, \vec{P}$.

Đặt thêm các lực quán tính $\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e}$ mà $\overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W}$ là gia tốc lăng trụ ABC. Vì lăng trụ ABC chuyển động tịnh tiến nên:

$$\overrightarrow{F_D^{qt}} = -m_D\overrightarrow{W_a} = (-m_D\overrightarrow{W_r}) + (-m_D\overrightarrow{W_e}) = \left(-\frac{Q}{g}\overrightarrow{W_r}\right) + \left(-\frac{Q}{g}\overrightarrow{W_e}\right);$$

$$\overrightarrow{F_2^{qt}} = \overrightarrow{F_{2r}^{qt}} + \overrightarrow{F_{2e}^{qt}}.$$

Các lực quán tính của con lăn $\overrightarrow{F_{2r}^{qt}}$ và $\overrightarrow{F_{2e}^{qt}}$.

Lực quán tính của lăng trụ $\overrightarrow{F_1^{qt}} = -\dfrac{P}{g}\overrightarrow{W}$.

Cho $\delta x = 0$ còn $\delta s_r \neq 0$ ta có:

$$-F_{2r}^{qt}\delta s_r - M^{qt}\delta\varphi + F_{2e}^{qt}\cos\alpha\delta s_r + Q\sin\alpha\delta s_r = 0.$$

Ta thay $\delta\varphi = \dfrac{\delta s_r}{R}$ và $M^{qt} = J_z\varepsilon = \dfrac{1}{2g}QR^2\dfrac{W_r}{R}$:

$$-\frac{Q}{g}W_r\delta s_r - \frac{1}{2g}QR^2\frac{W_r}{R}\times\frac{\delta s_r}{R} + \frac{Q}{g}W_e\cos\alpha\delta s_r + Q\sin\alpha\delta s_r = 0;$$

$$\frac{3}{2}W_r = W_e\cos\alpha + g\sin\alpha. \tag{a}$$

Cho $\delta s_r = 0$ còn $\delta x \neq 0$ ta có:

$$-F_{1e}^{qt}\delta x - F_{2e}^{qt}\delta x + F_{2r}^{qt}\cos\alpha\delta x = 0;$$

$$\left(-\frac{P}{g}W_e - \frac{Q}{g}W_e + \frac{Q}{g}W_r\cos\alpha\right)\delta x = 0;$$

$$-(P+Q)W_e + QW_r\cos\alpha = 0. \tag{b}$$

Để tìm được W_e thì từ (b) ta có:

$$W_r = \frac{P+Q}{Q\cos\alpha}W_e.$$

Thay vào (a) ta được:

$$\frac{3}{2}W_r = \frac{3}{2}\times\frac{P+Q}{Q\cos\alpha}W_e = W_e\cos\alpha + g\sin\alpha\,;$$

$$3(P+Q)W_e = 2Q\cos\alpha W_e\cos\alpha + 2Qg\cos\alpha\sin\alpha\,;$$

$$3(P+Q)W_e - 2Q\cos^2\alpha W_e = gQ\sin 2\alpha\,;$$

$$[3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha]W_e = gQ\sin 2\alpha\,;$$

$$W_e = W = g\frac{Q\sin 2\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha}\,.$$

§6.5. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI II

6.5.1. TỌA ĐỘ SUY RỘNG VÀ LỰC SUY RỘNG

Định nghĩa: Tọa độ suy rộng là số thông số độc lập, đủ để xác định vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định.

Các tọa độ suy rộng được ký hiệu là q_1, q_2, ..., q_s. Đơn vị của tọa độ suy rộng có thể là độ dài, góc quay hay tọa độ cong...

Như ta đã biết đối với cơ hệ có liên kết hình học, giữ, dừng thì số tọa độ suy rộng bằng số bậc tự do và bằng số di chuyển khả dĩ độc lập của cơ hệ.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Đề-các của các chất điểm thuộc cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, ..., q_s) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, ..., q_s) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, ..., q_s) \end{aligned}\right\}$$

hay $\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_k}(q_1, q_2, ..., q_s) = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} + z_k\vec{k}$.

Khi hệ chuyển động thì các tọa độ suy rộng biến đổi liên tục theo thời gian t. Nghĩa là:

$$q_1 = q_1(t);\ q_2 = q_2(t);\ \ldots\ q_s = q_s(t).$$

Các biểu thức trên gọi là phương trình chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian các tọa độ suy rộng, ta có vận tốc suy rộng tương ứng của cơ hệ. Ký hiệu vận tốc suy rộng là $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Ta có:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt};\ \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt};\ \ldots\ \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}.$$

Đơn vị của vận tốc suy rộng phụ thuộc vào đơn vị của tọa độ suy rộng.

6.5.2. LỰC SUY RỘNG

Xét cơ hệ có n chất điểm chịu tác dụng của các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots \overrightarrow{F_n}$. Vì hệ có liên kết hình học nên số tọa độ suy rộng đủ để xác định vị trí của cơ hệ bằng số bậc tự do của cơ hệ đó, nghĩa là cơ hệ có các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ, trong đó chỉ có tọa độ suy rộng q_1 biến đổi với gia số δq_1, còn các tọa độ suy rộng khác không đổi thì vectơ định vị $\overrightarrow{r_k}(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ của các chất điểm nhận được một di chuyển nguyên tố là $\delta(\overrightarrow{r_k})_1 = \dfrac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\delta q_1$.

Tổng công nguyên tố của các lực tác dụng lên hệ trên di chuyển $\delta(\overrightarrow{r_k})_1$ sẽ là:

$$\delta A_1 = \overrightarrow{F_1}\delta(\overrightarrow{r_1})_1 + \overrightarrow{F_2}\delta(\overrightarrow{r_2})_1 + \ldots + \overrightarrow{F_n}\delta(\overrightarrow{r_n})_1;$$

$$\delta A_1 = \overrightarrow{F_1}\frac{\partial \overrightarrow{r_1}}{\partial q_1}\delta q_1 + \overrightarrow{F_2}\frac{\partial \overrightarrow{r_2}}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \overrightarrow{F_n}\frac{\partial \overrightarrow{r_n}}{\partial q_1}\delta q_1;$$

$$\delta A_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\right)\delta q_1 = Q_1 \delta q_1 ,$$

trong đó: $Q_1 = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}$;

Q_1 gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_1;

Tương tự ta có các lực suy rộng khác Q_2, Q_3, ..., Q_s. Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ mà tất cả các tọa độ suy rộng đồng thời biến đổi, khi đó tổng công của các lực tác dụng lên cơ hệ trên di chuyển khả dĩ đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j .$$

Nếu các lực tác dụng lên cơ hệ là lực có thế. Khi đó:

$$\sum \delta A_k = -\delta\pi = -\left(\frac{\partial \pi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \pi}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial \pi}{\partial q_s}\delta q_s\right).$$

Ta có:

$$Q_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_1};\ Q_2 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_2};\ Q_s = -\frac{\partial \pi}{\partial q_s}.$$

Vậy nếu các lực tác dụng lên cơ hệ là lực có thế thì lực suy rộng bằng đạo hàm riêng của thế năng (với dấu "–") theo tọa độ suy rộng tương ứng.

6.5.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG TRONG TỌA ĐỘ SUY RỘNG

Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ, thì điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không. Trong tọa độ suy rộng điều kiện đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s = 0 .$$

Vì các $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ độc lập nhau nên đẳng thức trên chỉ thỏa mãn *khi và chỉ khi:*

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_s = 0 . \tag{6.11}$$

Định lý: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng trong tọa độ suy rộng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng của cơ hệ đều bằng không.

Số các điều kiện cân bằng, bằng số tọa độ suy rộng hay số bậc tự do của cơ hệ.

Trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên hệ là những lực có thế và hàm thế năng có dạng $\pi = \pi(q_1, q_2, ..., q_s)$ ta có định lý sau:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ bảo toàn có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng (tại một vị trí nào đó) là hàm thế năng đạt cực trị tại vị trí đó:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_j} = 0 \;\; (j = 1...s)$$

6.5.4. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI II

Từ phương trình tổng quát động lực học ta đi tìm phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng

$$\sum(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}})\delta\overrightarrow{r_k} = \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{F_k^{qt}}\delta\overrightarrow{r_k} = \sum \delta A_k^F + \sum \delta A_k^{qt} = 0 . \qquad \text{(a)}$$

Giả sử hệ có s bậc tự do và vị trí của cơ hệ được xác định bởi các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_s$. Theo công thức đã biết:

$$\sum \delta A_k^F = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s .$$

Tương tự với các lực quán tính ta có:

$$\sum \delta A_k^{qt} = Q_1^{qt} \delta q_1 + Q_2^{qt} \delta q_2 + ... + Q_s^{qt} \delta q_s ,$$

ở đây: $Q_1^{qt}, Q_2^{qt}, .., Q_s^{qt}$ là lực quán tính suy rộng;

$$Q_1^{qt} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1};\; Q_2^{qt} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_2} \;...\; Q_s^{qt} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_s} .$$

Thay vào (a):

$$(Q_1 + Q_1^{qt})\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{qt})\delta q_2 + ... + (Q_s + Q_s^{qt})\delta q_s = 0 . \qquad \text{(b)}$$

Vì $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ độc lập nhau nên đẳng thức (b) chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi:

$$Q_1 + Q_1^{qt} = 0;\ Q_2 + Q_2^{qt} = 0; ...; Q_s + Q_s^{qt} = 0.$$

Ta có thể dùng các phương trình này để giải các bài toán động lực học:

$$Q_1 = -Q_1^{qt};\ Q_2 = -Q_2^{qt};\ ...\ Q_s = -Q_s^{qt}.$$

Nếu ta biểu diễn lực quán tính suy rộng qua động năng T của hệ thì ta sẽ nhận được các phương trình trên ở dạng đơn giản hơn.

$$Q_1^{qt} = -\sum m_k \overrightarrow{W_k} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} = -\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} \right) - m_k \dot{\vec{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} \right) \right]. \qquad (*)$$

Vì hệ có liên kết dừng với s bậc tự do nên $\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_k}(q_1, q_2, ..., q_s)$ nên:

$$\overrightarrow{V_k} = \frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} \times \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_2} \times \frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_s} \times \frac{dq_s}{dt};$$

$$\overrightarrow{V_k} = \frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_s}\dot{q}_s, \qquad (c)$$

trong đó: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$ là vận tốc suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_s$.

Từ biểu thức (a) ta thấy vận tốc $\overrightarrow{V_k}$ được biểu diễn tuyến tính qua các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$. Do đó nếu đạo hàm biểu thức (a) theo vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$ ta có:

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_k}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}. \qquad (d)$$

Khi thay đổi thứ tự lấy đạo hàm ta được:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{V_k}}{\partial q_i}. \qquad (e)$$

Thay (d) và (e) vào (*) và sau khi thực hiện một số phép biến đổi ta có:

$$Q_1^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k V_k^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k V_k^2\right)\right].$$

Theo định nghĩa động năng của cơ hệ $\sum \frac{1}{2} m_k V_k^2 = T$ nên ta có thể viết lại như sau:

$$Q_1^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right] \rightarrow Q_1 = -Q_1^{qt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right].$$

Đối với các lực quán tính suy rộng khác, ta có các biểu thức tương tự. Vậy:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \end{array}\right\}. \qquad (6.12)$$

Đây là hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng, hay còn gọi là phương trình Lagrăng loại II.

Nếu các lực tác dụng lên hệ là lực có thế thì:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial q_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial q_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial q_s} \end{array}\right\}. \qquad (6.13)$$

Do $\pi(q_1, q_2, ..., q_s)$ không phụ thuộc các vận tốc quy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$ nên các phương trình có thể viết:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial q_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial(T-\pi)}{\partial q_s} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (6.14)$$

Ta gọi $L = T - \pi$ là hàm Lagrăng thì phương trình Lagrăng loại II có dạng:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (6.15)$$

Phương trình Lagrăng loại II cho ta phương pháp tổng quát để giải bài toán động lực học, đặc biệt là bài toán thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ có s bậc tự do.

6.5.5. CÁC TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA CHUYỂN ĐỘNG

a. Tích phân năng lượng

Xét hệ có n chất điểm chịu liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng. Các lực hoạt động đều là lực có thế. Giả sử vị trí của cơ hệ được xác định bởi s tọa độ suy rộng độc lập và đủ $q_1, q_2, ..., q_s$. Khi đó phương trình Lagrăng loại II sẽ là:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \pi}{\partial q_i} \text{ với } i = 1, 2, \ldots, s.$$

Trong đó T và π là động năng và thế năng của hệ được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng độc lập, đủ.

Ta có:

$$\overrightarrow{V_k}=\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt}=\sum\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i .$$

Và động năng T được tính theo các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$:

$$T=\sum\frac{1}{2}m_kV_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k\overrightarrow{V_k}\overrightarrow{V_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}\dot{q}_j ;$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j .$$

Nếu ký hiệu $\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}=a_{ij}$ và được gọi là hệ số quán tính của cơ hệ với $a_{ij}=a_{ji}$ thì động năng của hệ là:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j .$$

Vậy động năng của cơ hệ là hàm đẳng cấp bậc hai đối với các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$. Do đó ta có hệ thức sau:

$$\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=2T . \qquad \text{(a)}$$

Ta nhân cả hai vế của phương trình Lagrăng (6.13) với vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$, rồi lấy tổng cả hai vế theo chỉ số i ta có:

$$\sum\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\sum\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\sum\frac{\partial\pi}{\partial q_i}\dot{q}_i .$$

Vì $\pi(q_1,q_2,\ldots,q_s)$ nên:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial\pi}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\pi}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\pi}{\partial q_s}\dot{q}_s = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\pi}{\partial q_i}\dot{q}_i .$$

Mặt khác:

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i ;$$

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum \frac{d}{dt}(2\dot{T}) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2\frac{dT}{dt} - \left(\frac{dT}{dt} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right);$$

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i ;$$

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i ;$$

$$\rightarrow -\sum \frac{\partial\pi}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dT}{dt} ;$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\pi}{dt} \rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{d\pi}{dt} = \frac{d}{dt}(T + \pi) = 0 ;$$

$$T + \pi = E = h = const . \qquad \text{(b)}$$

Vậy cơ năng của hệ được bảo toàn. Đẳng thức trên gọi là tích phân năng lượng còn h được gọi là hằng số năng lượng. Nó được xác định từ điều kiện ban đầu của chuyển động.

b. Tích phân xyclic

- **Tọa độ Xyclic:**

Định nghĩa: Tọa độ suy rộng q_k nào đó được gọi là tọa độ Xyclic nếu

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0 ; \ \frac{\partial\pi}{\partial q_k} = 0 \ \text{ và } \ Q_k \equiv 0 .$$

Nói cách khác: tọa độ q_k được gọi là tọa độ Xyclic nếu nó không có mặt trong biểu thức động năng, thế năng của cơ hệ còn lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với nó bằng không.

Vậy nếu q_k là tọa độ Xyclic thì phương trình Lagrăng loại II ứng với tọa độ này có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \text{ do đó } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = const. \tag{c}$$

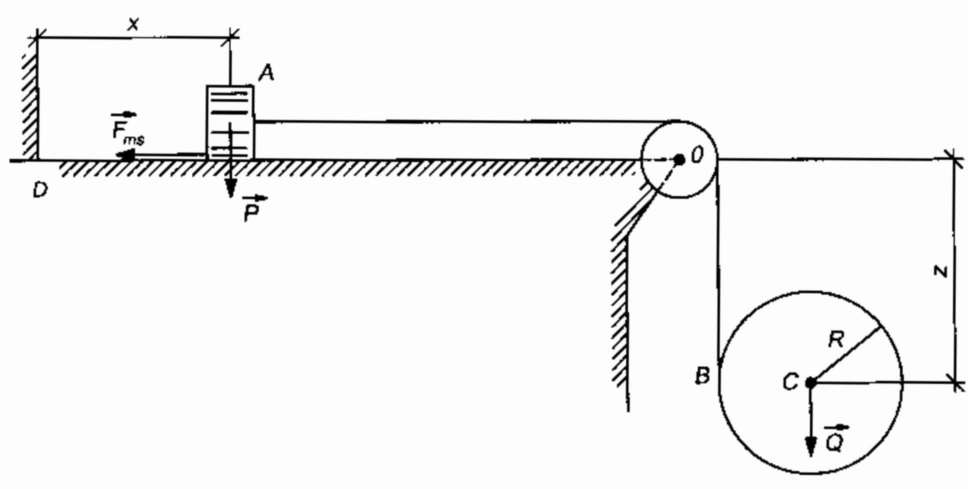
Đẳng thức (c) biểu diễn một tích phân đầu của cơ hệ và gọi là tích phân Xyclic.

Cần lưu ý rằng hệ có bao nhiêu tọa độ Xyclic thì phải có bấy nhiêu tích phân Xyclic.

Ví dụ 1: Giải bài toán ví dụ 2 trong chương này bằng cách áp dụng phương trình Lagrăng loại II.

Bài giải: Chọn tọa độ suy rộng $q_1 = x$ là khoảng cách từ vật A đến điểm D cố định nào đó.

$q_2 = z$ là khoảng cách từ C đến điểm O cố định.



Hình 6.10

Cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho x biến đổi còn z không đổi (lúc này khối trụ đồng thời quay để cuộn dây vào giữ cho z không đổi). Nghĩa là $\delta x > 0$. Khi đó:

$$\delta A_1 = -fP\delta x \text{ do đó } Q_1 = fP.$$

Tương tự:

$$\delta A_2 = Q\delta z \text{ do đó } Q_2 = Q.$$

Động năng của hệ:

$$T = T_A + T_C;$$

$$T_A = \frac{1}{2}\times\frac{P}{g}\dot{x}^2;$$

$$T_C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}\right)r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}V_C^2,$$

trong đó: $V_C = \dot{z}$; $V_e = \dot{x}$; $V_r = r\omega$.

Ta tính ω qua các vận tốc trên:

$$\omega = \frac{V_C - V_e}{r} = \frac{\dot{z}-\dot{x}}{r};$$

$$T = \frac{1}{2}\times\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}\left[\frac{1}{2}(\dot{z}-\dot{x})^2 + \dot{z}^2\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}\dot{x} - \frac{Q}{2g}(\dot{z}-\dot{x});$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \frac{Q}{g}\left(\frac{\dot{z}-\dot{x}}{2} + \dot{z}\right) = \frac{Q}{2g}(3\dot{z}-\dot{x}).$$

Ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \rightarrow Q\ddot{z} - (2P+Q)\ddot{x} = 2fPg;$$

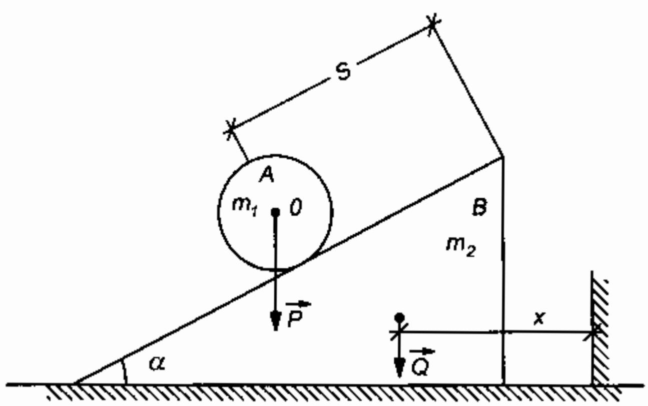
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_2 \rightarrow 3\ddot{z} - \ddot{x} = 2g.$$

Giải hai phương trình trên đây ta được:

$$\ddot{x} = \frac{Q-3fP}{Q+3P}g \text{ và } \ddot{z} = \frac{Q+P(2-f)}{Q+3P}g.$$

Ví dụ 2: Một con lăn A hình trụ đồng chất khối lượng m_1 bán kính R, lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ tam giác B khối lượng m_2 và có góc nghiêng với mặt phẳng ngang góc α = const. Lăng trụ có thể trượt trên mặt phẳng ngang nhẵn.

Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ và tìm các tích phân đầu của chuyển động.



Hình 6.11

Bài giải: Xét cơ hệ gồm con lăn A và lăng trụ B. Cơ hệ có liên kết hình học, giữ, dừng và lý tưởng. Hệ có hai bậc tự do.

Chọn các tọa độ suy rộng đủ là $q_1 = x$ và $q_2 = S$. Với x là hoành độ khối tâm của lăng trụ đối với hệ tọa độ cố định, còn S là tọa độ khối tâm của trụ tròn theo mặt phẳng nghiêng.

Các lực hoạt động là trọng lượng $\vec{Q}$ của lăng trụ và trọng lượng $\vec{P}$ của trụ tròn.

Động năng: $T_{hệ} = T_A + T_B$.

Mà $T_B = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$ còn $T_A = \frac{1}{2}m_1V_o^2 + \frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2$.

Trong đó V_o là vận tốc khối tâm O của con lăn, còn ω là vận tốc góc tuyệt đối của con lăn đối với khối tâm của nó. Vì tâm O tham gia hai chuyển động: chuyển động tương đối với lăng trụ và chuyển động theo cùng với lăng trụ, nên:

$$\overrightarrow{V_o} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e},$$

trong đó: $V_r = \dot{S}$ và $V_e = \dot{x}$.

Từ hình vẽ ta có:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{V_r}{R} = \frac{\dot{S}}{R};$$

$$V_o^2 = V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\alpha = \dot{x}^2 + \dot{S}^2 + 2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha;$$

$$T_{\text{hệ}} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{S}^2 + 2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}m_1R^2\frac{\dot{S}^2}{R^2};$$

$$T_{\text{hệ}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m_1\dot{S}^2 + m_1\dot{x}\dot{S}\cos\alpha.$$

Các lực hoạt động là lực thế và thế năng:

$$\pi = -m_1 gS\sin\alpha;$$

$$Q_x = -\frac{\partial\pi}{\partial x} = 0;\ Q_S = -\frac{\partial\pi}{\partial S} = m_1 g\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial T}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_1\dot{S}\cos\alpha;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1\ddot{S}\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{S}} = \frac{3}{2}m_1\dot{S} + m_1\dot{x}\cos\alpha;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{S}}\right) = \frac{3}{2}m_1\ddot{S} + m_1\ddot{x}\cos\alpha.$$

Thay vào các phương trình Lagrăng II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{S}}\right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S \text{ có } \frac{3}{2}m_1\ddot{S} + m_1\ddot{x}\cos\alpha = m_1 g\sin\alpha;\quad \text{(a)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x \text{ có } (m_1+m_2)\ddot{x}+m_1\ddot{S}\cos\alpha=0\,. \qquad \text{(b)}$$

Ta thấy $x = q_1$ là tọa độ Xyclic nên có một tích phân Xyclic là:

$$(m_1+m_2)\dot{x}+m_1\dot{S}\cos\alpha=h_1=const\,.$$

Tích phân năng lượng là:

$$E=T+\pi=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{3}{4}m_1\dot{S}^2+m_1\dot{x}\dot{S}\cos\alpha-m_2gS\sin\alpha=const=h_2$$

Từ các phương trình (a) và (b) ta giải ra sẽ có:

$$\ddot{x}=-\frac{m_1 g\sin 2\alpha}{3(m_1+m_2)-2m_1\cos^2\alpha}<0;$$

$$\ddot{S}=\frac{2(m_1+m_2)g\sin 2\alpha}{3(m_1+m_2)-2m_1\cos^2\alpha}>0.$$

Vậy cơ hệ chuyển động biến đổi đều.

CHƯƠNG 7

ĐỘNG LỰC HỌC TRONG CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Trong các chương trước chúng ta đã nghiên cứu các định lý, các nguyên lý của động lực học trong chuyển động tuyệt đối. Nghĩa là chuyển động đối với hệ quy chiếu quán tính (hệ cố định). Chương này ta sẽ nghiên cứu chuyển động của điểm đối với hệ quy chiếu không quán tính (hệ động) khi chịu tác dụng của các lực.

§7.1. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Xét chất điểm M khối lượng m chuyển động trong hệ quy chiếu động $Oxyz$ do tác dụng của lực $\vec{F}$, đồng thời $Oxyz$ lại chuyển động so với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$. Ta cần tìm sự liên hệ giữa gia tốc tương đối $\overrightarrow{W_r}$ với các lực tác dụng.

Trong chuyển động tuyệt đối, thì theo tiên đề 2 của Niutơn, ta có:

$$m\overrightarrow{W_a} = \vec{F} \qquad \text{(a)}$$

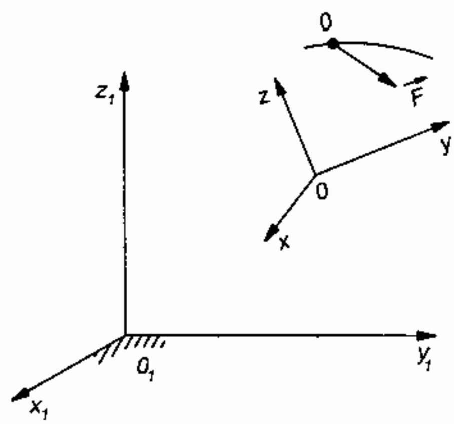
Từ động học ta có:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_{kor}}. \qquad \text{(b)}$$

Vậy:

$$m\overrightarrow{W_a} = m(\overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_{kor}}) = \vec{F} \;;$$

$$m\overrightarrow{W_r} = \vec{F} + (-m\overrightarrow{W_e}) + (-m\overrightarrow{W_{kor}}).$$



Hình 7.1

Gọi: $\overrightarrow{F_e^{qt}} = -m\overrightarrow{W_e}$ là lực quán tính theo;

$\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = -m\overrightarrow{W_{kor}}$ là lực quán tính Kôriôlit.

Ta có:

$$m\overrightarrow{W_r} = \vec{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}}. \tag{7.1}$$

Phương trình (7.1) là phương trình cơ bản của chất điểm trong chuyển động tương đối.

So sánh (a) với (7.1) ta rút ra kết luận:

- Tất cả các phương trình và định lý của cơ học trong chuyển động tương đối của chất điểm được thiết lập như trong chuyển động tuyệt đối, nếu ta thêm vào các lực quán tính theo $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$. Ta phải cộng thêm vào $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ là do ảnh hưởng chuyển động của hệ động đối với hệ cố định.

– Các trường hợp đặc biệt:

+ Nếu hệ động *Oxyz* chuyển động tịnh tiến thì $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = 0$ vì $\overrightarrow{\omega_e} = 0$ nên $\overrightarrow{W_{kor}} = 0$. Khi đó (7.1) sẽ là:

$$m\overrightarrow{W_r} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} . \qquad (7.2)$$

+ Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thẳng đều thì $\overrightarrow{F_e^{qt}} = 0$ và $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = 0$ nên:

$$m\overrightarrow{W_r} = \overrightarrow{F} . \qquad (7.3)$$

Phương trình (7.3) giống như phương trình (a).

Vậy: khi hệ động chuyển động tịnh tiến thẳng đều thì phương trình cơ bản của chất điểm trong chuyển động tương đối giống hệt như phương trình cơ bản của chất điểm trong chuyển động tuyệt đối.

Ta xét các trường hợp xảy ra khi $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} \neq 0$:

Vì $$\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = -m\overrightarrow{W_{kor}} = -2m\overrightarrow{\omega_e} \Lambda \overrightarrow{V_r} . \qquad (c)$$

Từ (c) ta thấy $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} \perp \overrightarrow{V_r}$ nên cũng vuông góc với tiếp tuyến quỹ đạo tương đối do đó:

a. Hình chiếu của $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ lên tiếp tuyến $M\tau$ của quỹ đạo tương đối hay lên phương của $\overrightarrow{V_r}$ luôn luôn bằng không. Do đó khi chiếu (7.1) lên $M\tau$ của quỹ đạo tương đối sẽ là:

$$mW_{r\tau} = m\frac{dV_r}{dt} = F_\tau + F_{e\tau}^{qt} . \qquad (7.4)$$

b. Công của lực $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ trên dịch chuyển tương đối bất kỳ bằng không.

§7.2. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Nếu chất điểm không có chuyển động tương đối $\overrightarrow{V_r} = 0$ và $\overrightarrow{W_r} = 0$ thì $\overrightarrow{F^{qt}_{kor}} = 0$. Khi đó:

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F^{qt}_e} = 0. \tag{7.5}$$

Phương trình (7.5) là điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm.

Định lý: Điều kiện cần và đủ để chất điểm cân bằng trong chuyển động tương đối là tổng hình học các lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính trong chuyển động theo của chất điểm bằng không.

§7.3. ẢNH HƯỞNG CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA TRÁI ĐẤT ĐẾN CÂN BẰNG VÀ CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT

Khi giải phần lớn các bài toán kỹ thuật, chúng ta coi hệ quy chiếu gắn vào mặt đất là hệ cố định (quán tính). Như vậy, ta đã bỏ qua chuyển động của trái đất quay quanh trục của nó và chuyển động của trái đất quanh mặt trời. Tương ứng với các chuyển động này, ta có các lực quán tính theo mà ta cần phải đưa vào phương trình (7.1).

Ta biết rằng chuyển động quay của trái đất quanh trục của nó một vòng hết 23 giờ 56 phút 04 giây. Nên vận tốc góc:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729 \text{ rad/s}.$$

1. Sự cân bằng tương đối trên mặt đất – Trọng lực

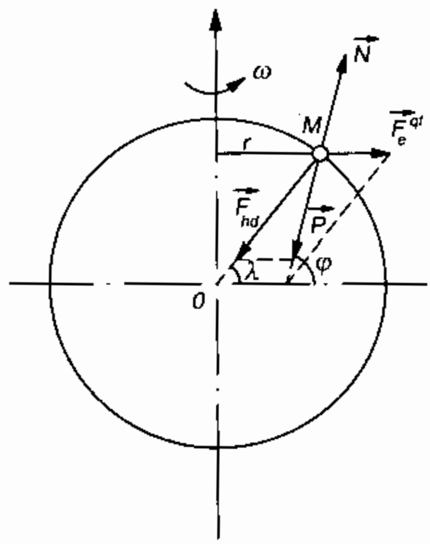
Xét một chất điểm M cân bằng trên mặt đất. Các lực tác dụng lên chất điểm là lực hấp dẫn $\overrightarrow{F_{hd}}$, lực quán tính theo $\overrightarrow{F^{qt}_e}$ và phản lực $\overrightarrow{N}$.

Điều kiện cân bằng đối với mặt đất là:

$$\overrightarrow{F_{hd}} + \overrightarrow{F_e^{qt}} + \overrightarrow{N} = 0.$$

Vì ω = const nên $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ chỉ có thành phần pháp tuyến hướng thẳng góc với trục quay của trái đất. Hợp $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và $\overrightarrow{F_{hd}}$ ta được một lực gọi là $\vec{P}$.

$$\overrightarrow{F_{hd}} + \overrightarrow{F_e^{qt}} = \vec{P}. \qquad (*)$$



Hình 7.2

Như vậy chất điểm chịu tác dụng của hai lực $\vec{P}$ và $\vec{N}$ cân bằng nhau nên chúng cùng trên một đường thẳng. Lực $\vec{P}$ gọi là trọng lực và hướng thẳng đứng tại một điểm của mặt đất, còn mặt phẳng vuông góc với $\vec{P}$ gọi là mặt phẳng nằm ngang.

Về trị số thì $F_e^{qt} = mr\omega^2$ với r là khoảng cách từ điểm M đến trục quay của trái đất. Trị số của F_e^{qt} rất nhỏ so với $\overrightarrow{F_{hd}}$ vì ω^2 rất nhỏ. Cho nên hướng của lực $\vec{P}$ rất gần với hướng của $\overrightarrow{F_{hd}}$.

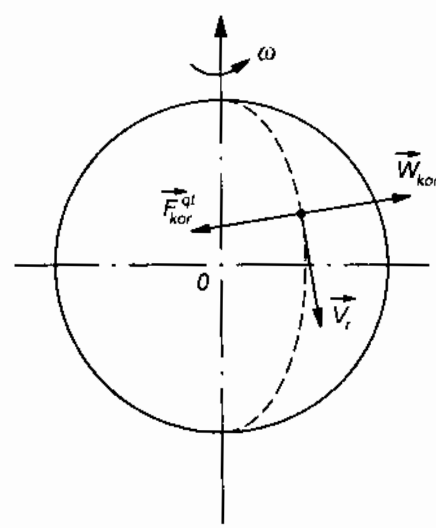
Do đã đưa $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ vào trọng lực $\vec{P}$, nghĩa là đã kể tới ảnh hưởng của chuyển động quay của quả đất. Vì vậy khi thiết lập các điều kiện cân bằng của vật đối với mặt đất ta không cần xét tới ảnh hưởng chuyển động quay của trái đất nữa. Với ý nghĩa đó thì cân bằng tương đối với trái đất có thể coi là cân bằng tuyệt đối.

2. Chuyển động tương đối gần mặt đất

Khi tính đến ảnh hưởng chuyển động quay của trái đất, chúng ta cần phải đặt thêm các lực $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ tác dụng lên chất điểm.

Nhưng lực $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ lại chứa trong trọng lực $\vec{P}$ (theo *). Mặt khác $F_{kor}^{qt} = 2m\omega V_r \sin\alpha$ mà ω là vận tốc góc của trái đất khi quay quanh trục của nó, còn α là góc giữa vận tốc tương đối V_r với trục quay của trái đất. Nhưng trị số của ω rất bé và khi V_r không đủ lớn thì F_{kor}^{qt} rất nhỏ so với trọng lực P nên có thể bỏ qua.

Ví dụ: Khi $V_r = 700$ m/s và $\alpha = 90°$ thì F_{kor}^{qt} chỉ gần bằng 1% trọng lượng của vật.



Hình 7.3

Vì vậy, trong phần lớn các tính toán kỹ thuật khi nghiên cứu chuyển động của vật đối với hệ quy chiếu gắn vào trái đất, ta có thể coi hệ quy chiếu đó là hệ quán tính (cố định).

Sau đây chúng ta sẽ xét đến ảnh hưởng chuyển động quay của trái đất đến một vài chuyển động cụ thể:

a. Chuyển động trên mặt đất:

Xét một chất điểm chuyển động ở Bắc bán cầu dọc kinh tuyến theo hướng từ Bắc đến Nam với vận tốc $\overrightarrow{V_r}$ thì $\overrightarrow{W_{kor}}$ sẽ hướng sang phía Đông còn $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ sẽ hướng sang phía Tây. Chính lực quán tính này đã gây ra áp lực phụ làm mòn nhanh hơn đường ray phía bên phải của đường xe lửa một chiều.

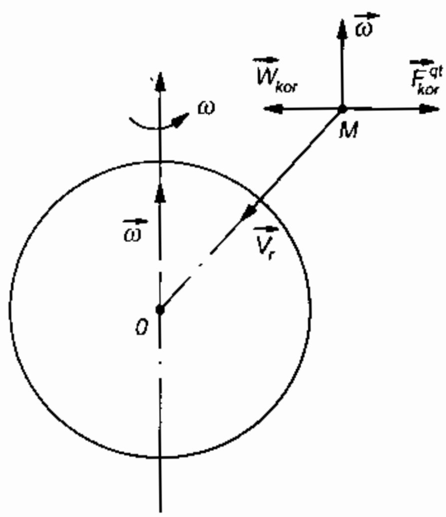
Lực quán tính $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ cũng là một nguyên nhân làm lở bờ sông bên phải của các dòng sông ở Bắc bán cầu khi chảy theo hướng Bắc – Nam.

Khi chuyển động tương đối theo hướng từ Nam lên Bắc thì hiện tượng xảy ra ngược lại.

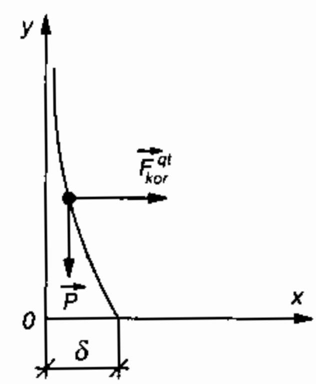
Hiện tượng lệch hướng khi vật rơi thẳng đứng (hay bắn lên cao).

Giả sử xét một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng xuống mặt đất. Vì vận tốc góc của quả đất ω rất nhỏ nên lực quán tính $\overline{F_{kor}^{qt}}$ và $\overline{F_e^{qt}}$ cũng rất nhỏ so với trọng lực $\vec{P}$. Ta coi vận tốc tương đối $\overline{V_r}$ hướng thẳng đứng (theo $\overrightarrow{MO}$). Khi đó $\overrightarrow{W_{kor}}$ hướng về phía Tây và $\overline{F_{kor}^{qt}}$ hướng về phía Đông. Cho nên khi vật rơi tự do, lực $\overline{F_{kor}^{qt}}$ đã làm cho vật rơi bị lệch về phía Đông so với đường thẳng đứng.

Khi bắn vật lên cao hiện tượng sẽ xảy ra ngược lại. Tuy nhiên độ lệch này sẽ rất nhỏ và ta chỉ nhận thấy khi độ cao khá lớn.



Hình 7.4



Hình 7.5

Ví dụ: Tại vĩ độ 55°47' với $g = 9{,}816 \text{m/s}^2$ khi vật rơi từ độ cao $H = 100\text{m}$ thì độ lệch $\delta = 1{,}2\text{cm}$.

§7.4. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC TRONG CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

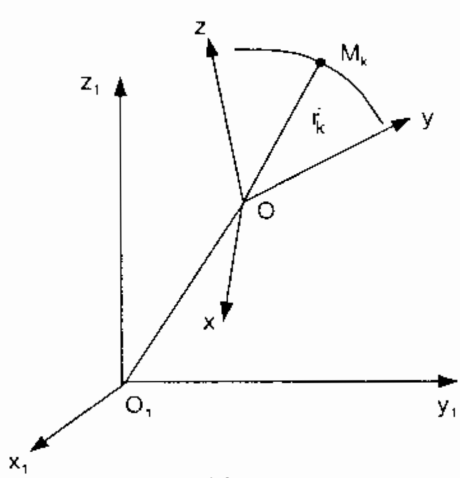
Các định lý tổng quát của động lực học trong chuyển động tương đối được thiết lập trên cơ sở phương trình cơ bản (7.1). Nghĩa là phải đặt thêm vào chất điểm các lực quán tính theo $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$. Cần lưu ý rằng:

- Khi áp dụng định lý động năng trong chuyển động tương đối thì công của lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ luôn luôn bằng không vì $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} \perp \overrightarrow{V_r}$.
- Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến mà gốc hệ động trùng với khối tâm C của cơ hệ thì khi áp dụng định lý mômen động và định lý động năng trong chuyển động tương đối được phát biểu tương tự như trong chuyển động tuyệt đối.

1. Định lý mômen động lượng trong chuyển động tương đối

Giả sử hệ có n chất điểm, chuyển động đối với hệ động $Cxyz$. Hệ động này chuyển động tịnh tiến và gốc ở tại khối tâm C của cơ hệ.

Xét chất điểm thứ k có khối lượng m_k chuyển động trong hệ động với gia tốc tương đối $\overrightarrow{W_{rk}}$ do các lực $\overrightarrow{F_{ak}}$, $\overrightarrow{F_{ek}^{qt}}$, $\overrightarrow{F_{kor.k}^{qt}}$. Theo (7.1) ta có:



Hình 7.6

$$m_k \overrightarrow{W_{rk}} = m_k \frac{d\overrightarrow{V_{rk}}}{dt} = \overrightarrow{F_{ak}} + \overrightarrow{F_{ek}^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor,k}^{qt}}.$$

Vì hệ động chuyển động tịnh tiến nên $\overrightarrow{F_{kor,k}^{qt}} = 0$ nên:

$$m_k \frac{d\overrightarrow{V_{rk}}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_{rk}}) = \overrightarrow{F_{ak}} + \overrightarrow{F_{ek}^{qt}}.$$

Nhân vectơ cả hai vế với $\overrightarrow{r_k}$:

$$\overrightarrow{r_k} \Lambda \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_{rk}}) = \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ak}} + \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ek}^{qt}}.$$

Theo phép tính đạo hàm của tích vectơ:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_k} \Lambda m_k \overrightarrow{V_{rk}}) = \frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} \Lambda m_k \overrightarrow{V_{rk}} + \overrightarrow{r_k} \Lambda \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_{rk}}).$$

Nhưng:

$$\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} \Lambda m_k \overrightarrow{V_{rk}} = \overrightarrow{V_{rk}} \Lambda m_k \overrightarrow{V_{rk}} = 0.$$

Do đó:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_k} \Lambda m_k \overrightarrow{V_{rk}}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ck}}) = \overrightarrow{r_k} \Lambda \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{V_{rk}}) = \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ak}} + \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ek}^{qt}}.$$

Đối với toàn hệ:

$$\sum \frac{d}{dt}(\overrightarrow{l_{Ck}}) = \frac{d}{dt}(\sum \overrightarrow{l_{Ck}}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{L_C}) = \sum \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ak}} + \sum \overrightarrow{r_k} \Lambda m_k \overrightarrow{W_{ek}}.$$

Ta có:

$$\sum \overrightarrow{r_k} \Lambda m_k \overrightarrow{W_{ek}} = \sum m_k \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{W_{ek}} = -M \overrightarrow{r_C} \Lambda \overrightarrow{W_{ek}} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{r_C} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{L_C}) = \sum \overrightarrow{r_k} \Lambda \overrightarrow{F_{ak}} = \sum \overrightarrow{m_C}(\overrightarrow{F_{ak}}).$$

Vậy:

$$\frac{d(\overrightarrow{L_C})}{dt} = \sum \overrightarrow{m_C}(\overrightarrow{F_{ak}}). \tag{7.7}$$

Định lý: Trong chuyển động tương đối của cơ hệ, nếu hệ động chuyển động tịnh tiến và gốc của hệ động trùng với khối tâm C của cơ hệ, thì đạo hàm bậc nhất theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với khối tâm C bằng tổng mômen của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ đối với khối tâm đó.

Khi chiếu (7.7) lên các trục của $Cxyz$ ta có:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(L_{Cx})}{dt} &= \sum m_{Cx}(\overrightarrow{F_{ak}})\\ \frac{d(L_{Cy})}{dt} &= \sum m_{Cy}(\overrightarrow{F_{ak}})\\ \frac{d(L_{Cz})}{dt} &= \sum m_{Cz}(\overrightarrow{F_{ak}})\end{aligned}\right\}. \tag{7.8}$$

2. Định lý động năng trong chuyển động tương đối của chất điểm

Xét một chất điểm khối lượng m chuyển động với $\overrightarrow{W_r}$ trên quỹ đạo tương đối do tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$ và các lực quán tính theo $\overrightarrow{F_{ek}^{qt}}$, lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$. Theo (7.1) ta có:

$$m\overrightarrow{W_r} = m\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}}.$$

Nhân vô hướng cả hai vế với $\overrightarrow{dr_r}$:

$$m\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\overrightarrow{dr_r} = (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}})\overrightarrow{dr_r} = \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr_r} + \overrightarrow{F_e^{qt}}\overrightarrow{dr_r} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}}\overrightarrow{dr_r};$$

$$\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}\overrightarrow{dr_r} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{F_{kor}^{qt}} \perp \overrightarrow{dr_r};$$

$$m\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\overrightarrow{dr_r} = \frac{1}{2}md(\overrightarrow{V_r})^2 = d\left(\frac{1}{2}mV_r^2\right) = dA^F + dA_e^{qt};$$

$$\int_{T_{or}}^{T_{1r}} d\left(\frac{1}{2}mV_r^2\right) = \int_{\overset{\frown}{M_0M_1}} dA^F + \int_{\overset{\frown}{M_0M_1}} dA_e^{qt};$$

$$\frac{1}{2}mV_{1r}^2 - \frac{1}{2}mV_{or}^2 = A^F + A_e^{qt};$$

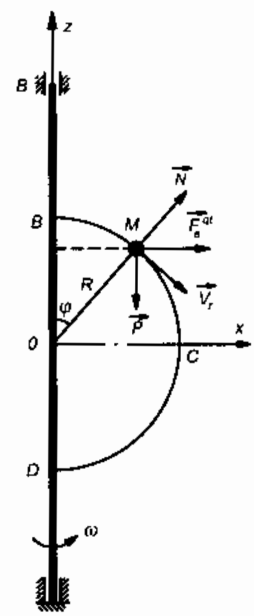
$$T_{1r} - T_{or} = A^F_{\overset{\frown}{M_OM_1}} + A^{qt}_{e\overset{\frown}{M_OM_1}}, \tag{7.9}$$

trong đó: T_{or} và T_{1r} là động năng của chất điểm tại vị trí đầu M_o có vận tốc V_{or} và vị trí cuối M_1 có vận tốc V_{1r} trên quỹ đạo tương đối.

Định lý: Biến thiên động năng tương đối của chất điểm từ vị trí M_o đến vị trí M_1 trên quỹ đạo tương đối thì bằng tổng công của các lực tác dụng và lực quán tính theo trên đoạn dịch chuyển ấy.

Ví dụ 1: Nửa vòng tròn BCD bán kính R quay quanh đường kính BD với vận tốc góc ω. Một nhẫn M trọng lượng P trượt không ma sát từ điểm B sát trục quay theo nửa vòng tròn với vận tốc ban đầu $V_o = 0$.

Tìm vận tốc tương đối V_r tại điểm C.



Hình 7.7

Bài giải: Xét chuyển động tương đối của nhẫn M trên cung tròn BCD. Vận tốc của M khi chuyển động từ B đến D là vận tốc tương đối V_r.

Các lực tác dụng lên M là: trọng lượng $\vec{P}$ của nhẫn M, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ hướng vuông góc với trục quay BD, lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ hướng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Do đó chỉ có lực $\vec{P}$ và $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ sinh công.

Theo định lý động năng:

$$T_{1r} - T_{or} = A^P + A_e^{qt}.$$

Nhưng $V_{or} = 0$ nên $T_{or} = 0 \rightarrow T_{1r} = \frac{1}{2}mV_{1r}^2 = A^P + A_e^{qt}$.

Mà $A^P = PR$. Ta phải tính:

$$A^{qt}_{e\overset{\frown}{BC}} = \int_B^C F^{qt}_{ex} dx.$$

Ta có:

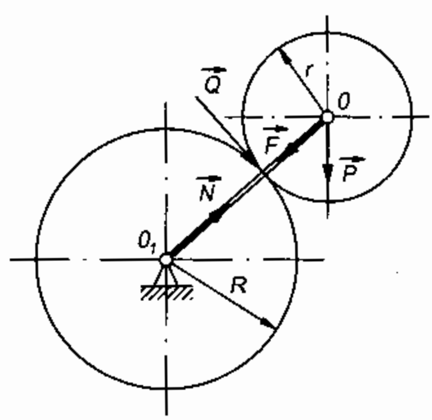
$$F^{qt}_{ex} = mW_n = m\frac{V_e^2}{x} = mx\omega^2 \rightarrow A^{qt}_{e\overset{\frown}{BC}} = \int_O^R mx\omega^2 dx = \frac{1}{2}m\omega^2R^2.$$

Do đó:

$$\frac{1}{2}mV_{1r}^2 = PR + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \rightarrow V_{1r} = \sqrt{2gR + \omega^2R^2}.$$

Ví dụ 2: Trong cơ cấu hành tinh tay quay, bánh răng động bán kính r khối lượng M. Tay quay $O_1O = b$ quay quanh O_1 theo luật $\varphi = at^2$ trong đó a = const.

Xác định lực tiếp tuyến $\vec{Q}$ tại điểm tiếp xúc giữa các bánh răng.



Hình 7.8

Bài giải:

Xét chuyển động tương đối của bánh răng động đối với hệ động Oxy có gốc O tại khối tâm của bánh răng động.

Các lực tác dụng $\vec{P}, \vec{N}, \vec{Q}, \vec{F}$ do O_1O tác dụng vào O.

Áp dụng định lý mômen động đối với O:

$$\frac{d(L_o^r)}{dt} = \sum m_O(\vec{F}). \qquad (1)$$

Mà $L_o^r = J_{Oz}\omega_r$ với ω_r là vận tốc góc của bánh răng động quay quanh O còn $J_{Oz} = \frac{1}{2}Mr^2$.

Bánh răng động chuyển động song phẳng nên :

$$\omega_r = \frac{V_O}{r} = \frac{b\dot{\varphi}}{r} = \frac{b2at}{r};$$

$$L_o^r = \frac{1}{2}Mr^2\frac{b2at}{r} = Mabrt \rightarrow \frac{dL_o^r}{dt} = \sum m_O(\vec{F}); \qquad (*)$$

$$\frac{dL_o^r}{dt} = Mabr \text{ và } \sum m_O(\vec{F}) = rQ.$$

Thay vào (*) ta có:

$$rQ = Mabr \rightarrow Q = Mab.$$

Chương 8

LÝ THUYẾT VA CHẠM

§8.1. ĐỊNH NGHĨA, ĐẶC ĐIỂM VÀ CÁC GIẢ THIẾT CỦA LÝ THUYẾT VA CHẠM

8.1.1. ĐỊNH NGHĨA

Va chạm là hiện tượng các vật chuyển động đến va vào nhau làm cho vận tốc của chúng biến đổi một lượng hữu hạn (cả về hướng và độ lớn) trong một khoảng thời gian rất nhỏ (từ 10^{-2}s đến 10^{-3}s). Khoảng thời gian đó gọi là thời gian va chạm. Ký hiệu là τ.

Hiện tượng va chạm gặp rất nhiều trong thực tế như khi đóng cọc, rèn, dập, nghiền quặng...

8.1.2. CÁC ĐẶC ĐIỂM CỦA QUÁ TRÌNH VA CHẠM

a. Đặc điểm thứ nhất

Va chạm xảy ra trong khoảng thời gian rất bé (từ 10^{-2}s đến 10^{-3}s) nhưng vận tốc lại biến đổi hữu hạn nên gia tốc va chạm rất lớn. Vì vậy khi nghiên cứu va chạm người ta dựa vào xung lực va chạm.

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{N} dt . \tag{8.1}$$

trong đó: $\vec{N}$ – lực va chạm còn τ là thời gian va chạm.

b. Đặc điểm thứ hai

Thời gian va chạm rất nhỏ nên trong quá trình va chạm các vật (hay chất điểm) của hệ di chuyển không đáng kể.

c. Đặc điểm thứ ba

Mặc dù thời gian va chạm rất nhỏ. Nhưng quá trình va chạm lại diễn ra theo hai giai đoạn:

- Giai đoạn biến dạng: xảy ra trong thời gian τ_1 kể từ lúc hai vật có vận tốc khác nhau bắt đầu tiếp xúc nhau cho đến khi các vật bị biến dạng lớn nhất và lúc này các vật có vận tốc như nhau:
- Giai đoạn phục hồi: kéo dài trong thời gian τ_2 kể từ khi hai vật có vận tốc bằng nhau cho đến khi chúng có vận tốc khác nhau và tách rời nhau.

  Căn cứ vào mức độ khôi phục hình dạng cũ của các vật khi va chạm, người ta phân loại va chạm thành va chạm mềm và va chạm đàn hồi:

- Va chạm mềm là quá trình va chạm không có giai đoạn phục hồi. Đặc điểm của loại va chạm này là khi kết thúc va chạm những phần tử của hai vật ở miền tiếp xúc có cùng vận tốc pháp.
- Va chạm đàn hồi là quá trình va chạm mà sau khi va chạm, các vật khôi phục lại một phần hay toàn bộ hình dạng trước khi va chạm.

Nếu hình dạng của vật được khôi phục lại hoàn toàn thì va chạm đó được gọi là va chạm hoàn toàn đàn hồi.

Đặc điểm của va chạm đàn hồi là khi kết thúc va chạm vận tốc pháp tuyến của các phần tử tại miền tiếp xúc là khác nhau.

8.1.3. CÁC GIẢ THIẾT CỦA LÝ THUYẾT VA CHẠM

Va chạm là hiện tượng xảy ra rất phức tạp. Trên cơ sở các đặc điểm của va chạm, ta đưa ra các giả thiết sau đây nhằm đơn giản hóa quá trình tính toán:

a. Giả thiết 1

Vì lực va chạm rất lớn nên khi nghiên cứu va chạm người ta bỏ qua các lực thông thường như: trọng lực, áp lực... mà ta chỉ quan tâm đến lực va chạm.

b. Giả thiết 2

Trong quá trình va chạm các vật (chất điểm) di chuyển không đáng kể, nên giả thiết rằng: trong quá trình va chạm các vật đứng yên tại chỗ.

c. Giả thiết 3

Do quá trình va chạm xảy ra theo hai giai đoạn: biến dạng và phục hồi nên để tiện so sánh hai giai đoạn đó ta tính các xung lượng va chạm trong từng giai đoạn:

$$\overrightarrow{S_1} = \int_0^{\tau_1} \overrightarrow{N_1} dt \; ; \; \overrightarrow{S_2} = \int_0^{\tau_2} \overrightarrow{N_2} dt . \qquad (8.2)$$

trong đó: $\overrightarrow{N_1}$ và $\overrightarrow{N_2}$ là lực va chạm trong giai đoạn biến dạng và giai đoạn phục hồi.

Ta gọi k là hệ số phục hồi thì:

$$k = \frac{S_1}{S_2} . \qquad (8.3)$$

Hệ số phục hồi k phụ thuộc vào nhiều yếu tố và được coi là hằng số trong suốt quá trình va chạm.

Dựa vào hệ số phục hồi k mà ta có thể phân loại va chạm:

$0 < k < 1$: va chạm đàn hồi;

$k = 1$: va chạm hoàn toàn đàn hồi;

$k = 0$: va chạm mềm.

8.1.4. CÁC NỘI DUNG CẦN GIẢI QUYẾT KHI NGHIÊN CỨU VA CHẠM

Khi nghiên cứu va chạm ta cần xác định các đại lượng sau:

a. Vận tốc các vật của cơ hệ sau va chạm.

b. Xung lượng của các lực trong khi va chạm.

c. Sự tiêu hao năng lượng khi va chạm.

§8.2. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC TRONG LÝ THUYẾT VA CHẠM

Nói chung có thể áp dụng các định lý tổng quát của động lực học trong va chạm. Nhưng do đặc điểm của hiện tượng va chạm và do có sự tiêu hao năng lượng khi va chạm nên ta không thể áp dụng định lý động năng được.

8.2.1. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

Ta có

$$\overrightarrow{Q_2} - \overrightarrow{Q_1} = \sum \overrightarrow{S_k^e}.$$

trong đó: $\overrightarrow{S_k^e}$ – tổng xung lượng va chạm ngoài.

Do cơ hệ va chạm thường là vật rắn hay hệ vật rắn nên $\vec{Q} = M\overrightarrow{V_C}$. Cho nên:

$$\overrightarrow{Q_2} = M\overrightarrow{U_C} \text{ và } \overrightarrow{Q_1} = M\overrightarrow{V_C}.$$

Do đó:

$$M\overrightarrow{U_C} - M\overrightarrow{V_C} = \sum \overrightarrow{S_k^e}. \tag{8.4}$$

trong đó: M là khối lượng của cơ hệ còn $\overrightarrow{U_C}$ và $\overrightarrow{V_C}$ là vận tốc khối tâm của cơ hệ sau và trước va chạm.

Định lý: Biến thiên động lượng của cơ hệ trong va chạm bằng tổng hình học xung lượng các lực va chạm ngoài.

8.2.2. ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Theo định lý mômen động lượng đối với cơ hệ:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k^e}),$$

$\overrightarrow{L_o}$ mômen động lượng của cơ hệ đối với điểm O cố định còn $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k^e}) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^e}$ là tổng mômen của các lực va chạm ngoài tác dụng lên hệ đối với điểm O:

$$d\overrightarrow{L_o} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k^e})dt = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^e} dt \rightarrow \int_{\overrightarrow{L_o^1}}^{\overrightarrow{L_o^2}} d\overrightarrow{L_o} = \int_0^{\tau} \sum \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^e} dt;$$

$$\overrightarrow{L_o^2} - \overrightarrow{L_o^1} = \sum \overrightarrow{r_k} \wedge \int_0^{\tau} \overrightarrow{F_k^e} dt = \sum \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{S_k^e} = \sum \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{S_k^e});$$

$$\overrightarrow{L_o^2} - \overrightarrow{L_o^1} = \sum \overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{S_k^e}). \tag{8.5}$$

Chiếu (8.5) lên các trục tọa độ Đề-các ta có:

$$\left.\begin{aligned} L_{ox}^2 - L_{ox}^1 &= \sum m_{ox}(\overrightarrow{S_k^e}) \\ L_{oy}^2 - L_{oy}^1 &= \sum m_{oy}(\overrightarrow{S_k^e}) \\ L_{oz}^2 - L_{oz}^1 &= \sum m_{oz}(\overrightarrow{S_k^e}) \end{aligned}\right\}. \tag{8.6}$$

Định lý: Biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm (hay một trục) trong thời gian va chạm bằng tổng mômen xung lượng của các lực va chạm ngoài đối với tâm (hay trục) đó.

Nếu vật quay quanh một trục cố định ta có:

$$J_z\omega_2 - J_z\omega_1 = \sum m_z(\overrightarrow{S_k^e})\,, \tag{8.7}$$

trong đó: ω_2 và ω_1 là vận tốc góc của vật quay quanh trục z tại thời điểm sau và trước va chạm. J_z là mômen quán tính của vật đối với trục quay.

8.2.3. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Trong va chạm luôn xảy ra sự tiêu hao năng lượng, do một phần động năng biến thành nhiệt năng và một phần động năng chuyển thành năng lượng gây ra biến dạng. Vì vậy thông thường người ta không sử dụng định lý động năng để nghiên cứu va chạm mà thường chỉ sử dụng định lý động lượng và định lý mômen động lượng.

Trong va chạm người ta quan tâm đến lượng động năng bị tiêu hao ΔT. Nếu với mục đích là gây biến dạng (ví dụ trong rèn, dập) thì phải tìm cách tăng lượng động năng bị tiêu hao. Ngược lại nếu nhằm mục đích làm dịch chuyển như đóng cọc, đóng đinh thì phải làm giảm lượng động năng bị tiêu hao khi va chạm. Chính nhờ lượng động năng còn lại sau va chạm này sẽ làm cho cơ hệ di chuyển.

§8.3. VA CHẠM THẲNG XUYÊN TÂM CỦA HAI VẬT CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

Xét hai vật có khối lượng m_1 và m_2 chuyển động tịnh tiến đến va vào nhau với vận tốc $\overrightarrow{V_1}$ và $\overrightarrow{V_2}$ hướng dọc theo đường thẳng nối khối tâm hai vật. Biết hệ số phục hồi k.

Hãy xác định:

– Vận tốc khối tâm hai vật sau va chạm là $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$;

– Xung lượng của các lực va chạm trong từng giai đoạn;

– Lượng mất động năng trong va chạm.

Chúng ta dựa vào định lý động lượng trong va chạm và viết phương trình va chạm cho từng vật trong các giai đoạn va chạm.

– Trong giai đoạn biến dạng:

+ Phương trình va chạm của vật thứ nhất:

$$m_1u - m_1V_1 = -S_1. \tag{8.8}$$

+ Phương trình va chạm của vật thứ hai:

$$m_2u - m_2V_2 = S_1. \tag{8.9}$$

– Trong giai đoạn phục hồi:

+ Phương trình va chạm của vật thứ nhất:

$$m_1u_1 - m_1u = -S_2. \tag{8.10}$$

+ Phương trình va chạm của vật thứ hai:

$$m_2u_2 - m_2u = S_2. \tag{8.11}$$

Theo (8.3) ta có

$$S_2 = kS_1. \tag{8.12}$$

Với năm phương trình (8.8); (8.9); (8.10); (8.11); (8.12) ta xác định được 5 ẩn số u, u_1, u_2, S_1, S_2.

Từ (8.8) và (8.9) ta được:

$$u = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.13}$$

Thay (8.13) chứa u vào (8.8) và (8.9) ta có:

$$S_1 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \tag{8.14}$$

Từ (8.12) ta tính được:

$$S_2 = kS_1 = k\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)\,. \tag{8.15}$$

Thay (8.13) và (8.15) vào (8.10) và (8.11) ta có:

$$u_1 = V_1 - (1+k)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)\,; \tag{8.16}$$

$$u_2 = V_2 - (1+k)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V_1)\,. \tag{8.17}$$

Từ (8.16) và (8.17) ta tính được:

$$k = -\frac{u_2 - u_1}{V_2 - V_1} = -\frac{u_r}{V_r}\,. \tag{8.18}$$

Trong đó V_r và u_r là vận tốc tương tối của vật thứ hai đối với vật thứ nhất sau và trước khi va chạm.

Tính lượng mất động năng trong va chạm. Gọi T_1 và T_2 là động năng của cơ hệ trước và sau va chạm:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2\,;$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\,.$$

Lượng động năng bị tiêu hao:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_1\left(V_1^2 - u_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(V_2^2 - u_2^2\right). \tag{8.19}$$

Sau khi biến đổi lượng động năng bị tiêu hao là ΔT tính được theo công thức:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)(V_1 - V_2)^2\,. \tag{8.20}$$

Ta xét các trường hợp xảy ra:

– Trường hợp va chạm mềm $k = 0$ thì:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)^2 . \qquad (8.21)$$

– Trường hợp va chạm hoàn toàn đàn hồi $k = 1$ thì:

$$\Delta T = 0 . \qquad (8.22)$$

Nghĩa là trong va chạm hoàn toàn đàn hồi động năng của hệ không bị tiêu hao.

– Trường hợp vật thứ nhất va vào vật thứ hai ban đầu đứng yên $V_2 = 0$. Khi đó:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)V_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2)T_o , \qquad (8.23)$$

với $$T_o = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 . \qquad (8.24)$$

T_o là động năng của hệ trước khi va chạm.

Để biết tỷ lệ giữa động năng bị mất đi trong va chạm so với động năng của cơ hệ trước khi va chạm ta tính tỷ số:

$$\frac{\Delta T}{T_o} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2) . \qquad (8.25)$$

Trong rèn, dập: nhằm mục đích làm cho vật biến dạng càng nhiều càng tốt nên động năng bị mất đi càng nhiều càng lợi. Ta gọi hiệu suất của quá trình rèn, dập là η_1 :

$$\eta_1 = \frac{\Delta T}{T_o} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 - k^2) = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}(1 - k^2) . \qquad (8.26)$$

Như vậy khi η_1 càng lớn thì càng lợi cho công việc rèn, dập. Nghĩa là $\frac{m_1}{m_2}$ càng nhỏ. Muốn vậy thì m_2 phải lớn hơn m_1 rất nhiều lần.

Do đó khối lượng của đe phải lớn hơn khối lượng của búa nhiều lần. Để tăng khối lượng đe người ta thường gắn chặt đe vào nền.

Trong đóng cọc: nhằm mục đích làm cho cọc di chuyển càng lún sâu vào đất càng tốt. Muốn vậy thì động năng bị tiêu hao trong va chạm càng ít càng tốt. Khi đó hiệu suất của đóng cọc sẽ là:

$$\eta_2 = \frac{T_o - \Delta T}{T_o} = 1 - \frac{\Delta T}{T_o} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 - k^2) = \frac{1}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}(1 - k^2)\,. \qquad (8.27)$$

Để hiệu suất đóng cọc η_2 lớn thì $\dfrac{m_2}{m_1}$ càng bé càng lợi. Nghĩa là khối lượng búa m_1 phải lớn hơn khối lượng cọc m_2 nhiều lần.

Ví dụ: Búa đóng cọc có khối lượng m_1 rơi tự do từ độ cao h so với đầu cọc. Khối lượng của cọc là m_2. Sau một lần va đập cọc đi xuống một đoạn S. Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc. Giả thiết là va chạm mềm $k = 0$.

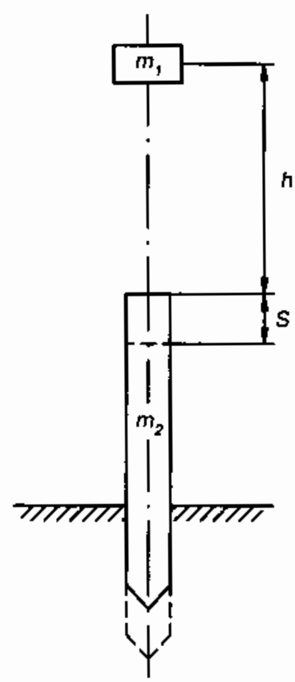
Bài giải: Đây là bài toán va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến.

Hiện tượng va chạm này xảy ra theo ba giai đoạn:

– Giai đoạn 1: kể từ khi búa rơi tự do từ độ cao h đến chạm vào đầu cọc với vận tốc V_1.

– Giai đoạn 2: là quá trình va đập giữa búa và cọc kể từ lúc búa đập vào đầu cọc với vận tốc V_1 và cọc có vận tốc $V_2 = 0$ cho đến khi kết thúc quá trình va đập buá và cọc có cùng vận tốc u.

– Giai đoạn 3: kể từ khi búa và cọc có cùng vận tốc u cùng lún sâu một đoạn S rồi dừng lại.



Hình 8.1

Trong giai đoạn 1: xác định vận tốc V_1 của búa khi bắt đầu chạm vào đầu cọc nhờ định lý động năng:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 - 0 = m_1gh \rightarrow V_1 = \sqrt{2gh}\,.$$

Quá trình va đập thẳng xuyên tâm của búa và cọc khi va chạm mềm $k = 0$ thì vận tốc u lúc kết thúc va chạm:

$$u = u_1 = u_2 = \frac{m_1V_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}\,.$$

Ta gọi F_{tb} là lực cản trung bình do nền đất tác dụng lên cọc và coi là hằng số. Áp dụng định lý động năng cho giai đoạn này:

$$0 - \frac{m_1 + m_2}{2}u^2 = -\int_0^S F_{tb}ds = -F_{tb}S \rightarrow F_{tb} = \frac{m_1 + m_2}{2S}u^2;$$

$$F_{tb} = g\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \times \frac{h}{S}.$$

§8.4. VA CHẠM CỦA VẬT QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Xét một tấm phẳng khối lượng M có khối tâm C nằm trong mặt phẳng đối xứng Oxy và quay quanh Oz cố định vuông góc với mặt phẳng xy. Xung lực va chạm S tác dụng nằm trong mặt phẳng đối xứng tại điểm K và nghiêng với trục OC góc α. Giả thiết ban đầu OC = a nằm trên đường thẳng đứng và vận tốc góc của tấm phẳng là ω_o.

Xác định vận tốc ω của tấm sau va đập và xung lực của phản lực ở tại trục quay Oz.

Ta xét chuyển động quay của vật.

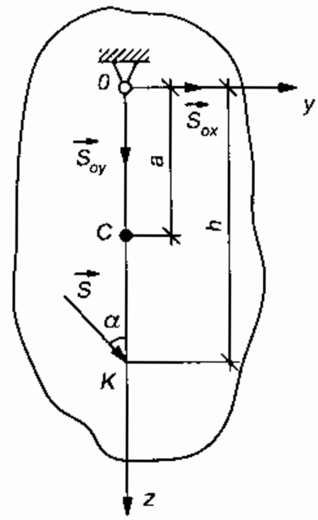
Các xung lực va chạm ngoài là $\vec{S}$ và $\vec{S_o}$.

Áp dụng định lý động lượng (8.4) và phương trình vật quay (8.7):

$$M\overrightarrow{u_C} - M\overrightarrow{V_C} = \vec{S} + \vec{S_o}\,; \qquad \text{(a)}$$

$$J_{Oz}\omega - J_{Oz}\omega_o = \sum m_{Oz}(\vec{S_k^e})\,, \qquad \text{(b)}$$

với: $\overrightarrow{V_C}$ và $\overrightarrow{U_C}$ là vận tốc khối tâm C của tấm trước và sau va chạm; J_{Oz} là mômen quán tính của tấm đối với trục Oz; ω_o và ω là vận tốc góc của tấm trước và sau va chạm.



Hình 8.2

Chiếu hai vế của đẳng thức (a) lên các trục Ox và Oy ta có:

$$Mu_C - MV_C = S\sin\alpha + S_{ox}\,; \qquad \text{(c)}$$

$$0 = S\cos\alpha + S_{oy}\,. \qquad \text{(d)}$$

Từ (b) ta viết:

$$J_{Oz}(\omega - \omega_o) = hS\sin\alpha\,. \qquad \text{(e)}$$

Với $V_C = a\omega_o$ và $u_C = a\omega$. Thay vào (c) ta có:

$$Ma(\omega - \omega_o) = S\sin\alpha + S_{ox}\,. \qquad \text{(f)}$$

Và từ (d) ta có:

$$S_{oy} = -S\cos\alpha\,.$$

Từ phương trình (f) và (e) ta tìm được:

$$S_{ox} = S\left(\frac{Mah}{J_{Oz}} - 1\right)\sin\alpha\,;$$

$$S_{oy} = -S\cos\alpha\,.$$

Từ (e) ta có:

$$\omega = \omega_o + \frac{h}{J_{Oz}}S\sin\alpha\,.$$

Như vậy dưới tác dụng của xung va chạm $\vec{S}$ thì tại trục quay Oz xuất hiện hai thành phần của xung $\vec{S_o}$ là S_{ox} và S_{oy}.

Hai xung này có tác dụng phá hoại rất lớn đối với ổ trục. Ta hãy tìm điều kiện để ổ trục không xuất hiện hai thành phần của xung này khi vật chịu tác dụng của xung va chạm S có giá trị tùy ý. Muốn vậy:

$$S_{oy} = -S\cos\alpha = 0\,;$$

$$S_{ox} = S\left(\frac{Mah}{J_{Oz}} - 1\right)\sin\alpha = 0\,. \qquad (*)$$

Từ (*) ta suy ra:

$$\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ và } \frac{Mah}{J_{Oz}} - 1 = 0 \rightarrow h = \frac{J_{Oz}}{Ma}.$$

Từ các kết quả này ta thấy điều kiện để không xuất hiện các xung phản lực tại các ổ trục khi vật rắn chịu tác dụng của xung va chạm có giá trị bất kỳ là khối tâm C phải nằm trên mặt phẳng đối xứng vuông góc với trục quay. Xung lực $\vec{S}$ phải nằm trong mặt phẳng đối xứng vuông góc với trục quay và đi qua điểm K nằm trên OC thỏa mãn điều kiện $OK = h = \dfrac{J_{Oz}}{Ma}$.

Điểm K xác định như trên được gọi là tâm va chạm.

Ví dụ: Xác định tâm va chạm của một thanh đồng chất AB = b, quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh điểm O cố định (hình 8.3)

Bài giải: Giả sử trục quay O cách đầu A một đoạn $AO = x$. Gọi K là tâm va chạm cách đầu B một đoạn $KB = y$. Đặt $OK = h$ và OC = a.

Theo biểu thức

$$OK = h = \frac{J_{Oz}}{Ma}.$$

Ta biết $\quad J_{Oz} = J_{Cz} + Ma^2\,;$

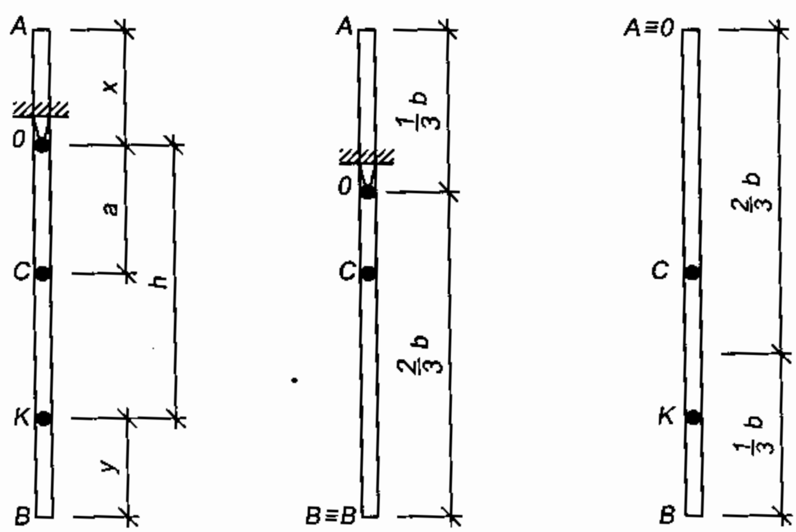
$$\rightarrow h = \frac{J_{Cz} + Ma^2}{Ma} = \frac{J_{Cz}}{Ma} + a. \qquad (*)$$

Thay: $\quad h = a + \frac{b}{2} - y\,;\ a = \frac{b}{2} - x\,;\ J_{Cz} = \frac{1}{12}Mb^2$

vào biểu thức (*) và qua một số biến đổi ta có:

$$12\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = b^2. \qquad (**)$$

Từ (**) ta thấy khi cho biết x thì xác định được y và ngược lại. Hai thông số này có thể hoán vị được cho nhau. Điều này có nghĩa là tâm va chạm và trục quay có thể thay đổi vị trí cho nhau.



a) b) c)

Hình 8.3

* Nếu giả sử cho $y = 0$ thì $x = \frac{1}{3}b$ tức là khi tâm va chạm K nằm tại một đầu B của thanh thì trục quay O ở cách đầu kia một đoạn bằng $\frac{1}{3}b$. Với b là chiều dài thanh (hình 8.3b).

Điều này được xác nhận trong các trường hợp: khi cầm búa, cầm rìu, cầm cuốc để chỗ tay cầm không bị đau (không xuất hiện xung phản lực) thì điểm cầm của tay (trục quay O) phải cách đầu kia một đoạn bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài cán búa.

* Nếu cho $x = 0$ thì $y = \frac{b}{3}$, nghĩa là trục quay O nằm tại một đầu thanh thì tâm va chạm K nằm cách trục quay O một đoạn $OK = \frac{2}{3}b$. Trường hợp này thấy rõ trong máy nghiền búa để nghiền vật liệu. Muốn trục quay của búa không xuất hiện xung phản lực ta cần phải cho vật liệu nghiền va chạm với búa tại điểm cách trục quay bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài cán búa (hình 8.3c).

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Các khái niệm: chất điểm, hệ chất điểm (cơ hệ), cơ hệ tự do và không tự do.
2. Vật rắn tuyệt đối, hệ quy chiếu quán tính và không quán tính.
3. Lực và cách phân loại lực.
4. Các tiên đề động lực học – ý nghĩa từng tiên đề
5. Hai bài toán cơ bản của động lực học.
6. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong các dạng: vectơ, tọa độ Đề-các, tọa độ tự nhiên.
7. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
8. Định nghĩa khối tâm của cơ hệ, trọng tâm của vật rắn. Định nghĩa mômen quán tính của vật rắn đối với một trục và một điểm
9. Công thức mômen quán tính của một số vật đồng chất đơn giản. Định lý mômen quán tính của vật đối với các trục song song (định lý Huyghen)
10. Định nghĩa động lượng của chất điểm và cơ hệ. Công thức tính động lượng của hệ qua vận tốc khối tâm. Định nghĩa xung lượng nguyên tố và xung lượng hữu hạn của lực.
11. Phát biểu và chứng minh định lý động lượng của cơ hệ. Nêu các trường hợp bảo toàn động lượng của cơ hệ. Vai trò của nội lực và ngoại lực đối với sự biến đổi động lượng của cơ hệ.
12. Phát biểu và chứng minh định lý khối tâm. Nếu các trường hợp bảo toàn chuyển động khối tâm. Ảnh hưởng của nội lực và ngoại lực đến chuyển động khối tâm của cơ hệ.

13. Định nghĩa mômen động lượng của chất điểm và cơ hệ đối với một điểm và một trục. Tính mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục. Phát biểu và chứng minh định lý mômen động lượng của cơ hệ đối với một điểm và một trục.

14. Viết phương trình vi phân chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định và phương trình vi phân chuyển động song phẳng của vật rắn. Các dịnh luật bảo toàn mômen động lượng.

15. Định nghĩa động năng của chất điểm và cơ hệ. Công thức tính động năng của vật chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay quanh một trục cố định và chuyển động song phẳng.

16. Định nghĩa công nguyên tố, công hữu hạn và công của lực đàn hồi tuyến tính, lực đặt lên vật rắn quay, lực ma sát trượt và lực ma sát tác dụng lên vật chuyển động song phẳng lăn không trượt. Khi nào tổng công của nội lực bằng không.

17. Phát biểu và chứng minh định lý động năng của cơ hệ. Ảnh hưởng của nội lực và ngoại lực đối với sự biến đổi động năng của cơ hệ. Trường hợp nào tổng công của nội lực khác không.

18. Định nghĩa trường lực thế, thế năng. Công thức tính thế năng của trọng lực và lực đàn hồi tuyến tính. Phát biểu và chứng minh định luật bảo toàn cơ năng.

19. Định nghĩa cơ hệ không tự do. Định nghĩa liên kết và phân loại các liên kết, phương trình liên kết và phản lực liên kết. Cho ví dụ.

20. Định nghĩa di chuyển khả dĩ. Cho ví dụ. Định nghĩa số bậc tự do, số bậc tự do của vật rắn chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay quanh một trục cố định và chuyển động song phẳng.

21. Định nghĩa tọa độ suy rộng của cơ hệ không tự do, so sánh với cơ hệ tự do. Cho ví dụ minh hoạ. Định nghĩa lực suy rộng và cách tính lực suy rộng. Cho ví dụ.

22. Định nghĩa liên kết lý tưởng. Cho ví dụ.

23. Phát biểu và chứng minh nguyên lý di chuyển khả dĩ.

24. Điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ.

25. Định nghĩa lực quán tính của chất điểm. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay quanh một trục cố định thẳng góc với mặt phẳng của tấm, của tấm phẳng chuyển động song phẳng.

26. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Đalămbe cho chất điểm và cơ hệ.

27. Nội dung của phương pháp tĩnh động. áp dụng phương pháp này để nghiên cứu chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định (phản lực ở trục quay, phản lực động lực và phương pháp triệt tiêu phản lực động lực) chuyển động song phẳng của tấm phẳng.

28. Phương trình tổng quát động lực học.

29. Viết phương trình Lagrăng loại II và trình bày cơ sở của phương pháp thiết lập nó. Phương trình Lagrăng loại II cho hệ bảo toàn.

30. Các tích phân đầu của chuyển động, tích phân năng lượng, tọa độ Xyclic và tích phân Xyclic.

31. Thiết lập phương trình cơ bản của chuyển động tương đối. Các trường hợp đặc biệt.

32. Điều kiện cân bằng trong chuyển động tương đối.

33. Các định lý tổng quát trong chuyển động tương đối.

34. Định nghĩa va chạm, các đặc điểm và giả thiết về va chạm.

35. Các định lý tổng quát của động lực học áp dụng cho va chạm. Sự mất động năng trong va chạm.

36. Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến. Nội dung bài toán và nêu kết quả.

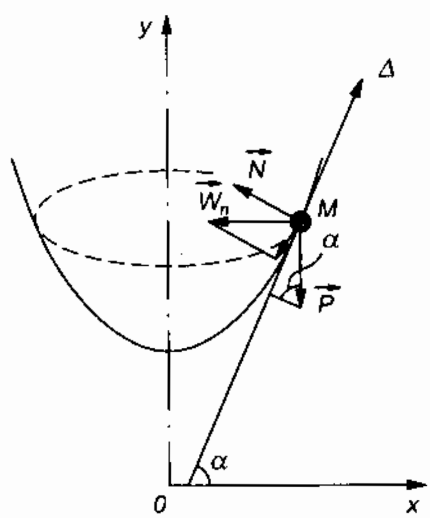
37. Va chạm của tấm phẳng quay quanh trục cố định thẳng góc với mặt phẳng của tấm. Tâm va chạm. Nêu một vài áp dụng.

VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN ĐỘNG HỌC

I. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

Ví dụ I.1: Ta phải uốn ống theo đường cong phẳng nào để qủa cầu nhỏ *M* đặt tại một điểm bất kỳ trong ống vẫn nằm yên so với ống khi ống quay quanh trục *Oy* với vận tốc góc ω không đổi (hình I.1)



Hình I.1

Bài giải: Xét chuyển động của qủa cầu M.

Các lực tác dụng $\vec{P}, \vec{N}$. Ta có:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} \qquad (*)$$

Chiếu (*) lên trục Δ ta có:

$$-mW_n \cos\alpha = -P\sin\alpha = -mg\sin\alpha, \text{ với } W_n = x\omega^2;$$

$$x\omega^2 \cos\alpha = g\sin\alpha;$$

$$\frac{\omega^2}{g}x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{dy}{dx};$$

$$dy = \frac{\omega^2}{g}xdx \rightarrow \int dy = \int \frac{\omega^2}{g}xdx;$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C.$$

Vậy ống phải uốn theo một đường cong phẳng Parabol

Ví dụ I.2: Một chất điểm khối lượng m chuyển động trên mặt nhẵn nằm ngang Oxy dưới tác dụng của lực $\vec{F}(t)$ song song với trục Ox. Giá trị của lực thay đổi theo quy luật $F(t) = bt^2$, trong đó b = const > 0. Vận tốc ban đầu $\vec{V_o}$ lệch góc $\alpha < \frac{\pi}{2}$ đối với đường tác dụng của lực $\vec{F}$.

Tìm phương trình quỹ đạo chuyển động của điểm.

Bài giải: Xét chuyển động của chất điểm. Ta có:

$$m\vec{W} = \vec{F}. \qquad (*)$$

Chiếu (*) lên các trục toạ độ ta có:

$$mW_x = m\ddot{x} = F = bt^2 \qquad (a)$$

$$mW_y = m\ddot{y} = 0 \qquad (b)$$

$$\rightarrow m\frac{d\dot{x}}{dt} = bt^2$$

$$md\dot{x} = bt^2dt$$

$$\int md\dot{x} = \int bt^2dt \rightarrow m\dot{x} = \frac{bt^3}{3} + C_1.$$

Điều kiện ban đầu $t = 0$: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_o \cos\alpha$.

Thay vào ta có

$$mV_o \cos\alpha = C_1$$

và: $$m\dot{x} = m\frac{dx}{dt} = \frac{bt^3}{3} + mV_o \cos\alpha ;$$

$$mdx = \left(\frac{bt^3}{3} + mV_o \cos\alpha\right)dt ;$$

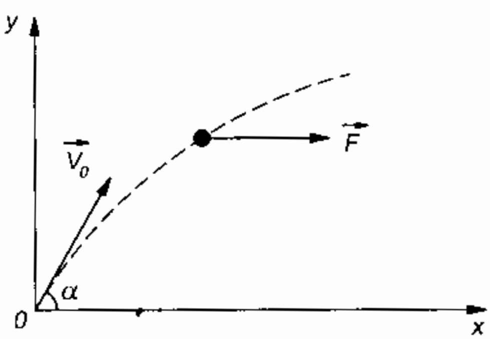
$$\int mdx = \int\left(\frac{bt^3}{3} + mV_o \cos\alpha\right)dt ;$$

$$mx = \frac{bt^4}{12} + mtV_o \cos\alpha + C_2 .$$

Thay điều kiện đầu ta có $C_2 = 0$ và

$$mx = \frac{bt^4}{12} + mtV_o \cos\alpha .$$

Từ (b) $\ddot{y} = 0 \to \dot{y} = C_3$.



Hình I.2

Điều kiện ban đầu $t = 0$: $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = V_o \sin\alpha$:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = C_3 \to dy = C_3 dt = V_o \sin\alpha dt ;$$

$$\int dy = \int V_o \sin\alpha dt \to y = tV_o \sin\alpha + C_4 .$$

Từ điều kiện ban đầu có $C_4 = 0$:

$$y = tV_o \sin\alpha \to t = \frac{y}{V_o \sin\alpha} \text{ thay vào (c)}$$

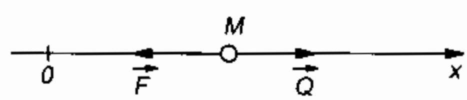
$$mx = \frac{b}{12}\left(\frac{y}{V_o \sin\alpha}\right)^4 + mV_o \cos\alpha \frac{y}{V_o \sin\alpha}$$

$$\to x = \frac{b}{12m}\left(\frac{y}{V_o \sin\alpha}\right)^4 + y\cot g\alpha$$

Ví dụ I.3: Chất điểm khối lượng m chuyển động từ trạng thái đứng yên và vị trí $x_o = a$ theo đường thẳng dưới tác dụng của lực kéo tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đến gốc toạ độ $F_x = -C_1 mx$ và khoảng cách $Q_x = C_2 mx^3$.

Tìm quan hệ giữa C_1, C_2 và a để chất điểm chuyển động đến gốc tọa độ thì dừng lại.

Bài giải: Xét chuyển động của điểm M.



Hình I.3

Các lực tác dụng $\vec{Q}, \vec{F}$. Ta có:

$$m\overline{W} = \vec{Q} + \vec{F};$$

$$mW_x = m\ddot{x} = Q_x - F_x = C_2 mx^3 - C_1 mx$$

$$\to \ddot{x} = C_2 x^3 - C_1 x.$$

Mặt khác ta có:

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = C_2 x^3 - C_1 x.$$

Từ đây:

$$\dot{x}d\dot{x} = (C_2x^3 - C_1x)dx \to \frac{\dot{x}^2}{2} = C_2\frac{x^4}{4} - C_1\frac{x^2}{2} + B.$$

Điều kiện ban đầu $t = 0$: $x(0) = a$; $\dot{x}(0) = 0$

nên: $$B = C_1\frac{a^2}{2} - C_2\frac{a^4}{4};$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = C_2\frac{x^4}{4} - C_1\frac{x^2}{2} + C_1\frac{a^2}{2} - C_2\frac{a^4}{4};$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = C_2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + C_1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).$$

Khi dừng lại tại gốc toạ độ thì $x = 0$ và $\dot{x} = 0$ nên

$$C_1\frac{a^2}{2} - C_2\frac{a^4}{4} = 0,$$

hay $$C_1 - C_2\frac{a^2}{2} = 0 \to C_1 = C_2\frac{a^2}{2}.$$

ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

Ví dụ I.4: Người ta cho nước chảy vào một kênh đào có tiết diện thay đổi nhưng đối xứng qua mặt phẳng thẳng đứng. Vận tốc $V_o = 2$m/s có phương hợp với phương ngang một góc 90°. Diện tích tiết diện chỗ nước chảy vào là 0,02m^2. Vận tốc khi nước chảy ra khỏi kênh là $V_1 = 4$m/s và tạo với phương ngang góc $\alpha = 30°$.

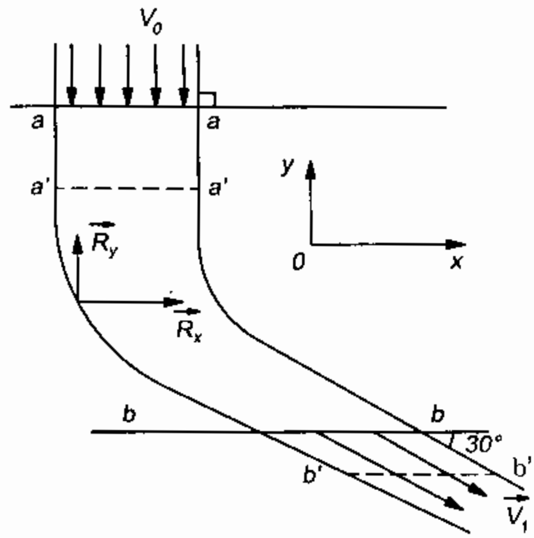
Xác định thành phần phản lực ngang của thành kênh.

Bài giải: Xét khối nước giới hạn bởi các tiết diện *aa, bb*.

Ngoại lực tác dụng lên khối nước là phản lực do thành kênh tác dụng lên gồm hai thành phần thẳng đứng $\overrightarrow{R_y}$ và thành phần nằm ngang $\overrightarrow{R_x}$.

Sau khoảng thời gian dt, tiết diện aa dịch chuyển đến a'a' và bb dịch chuyển đến b'b'. Biến thiên động lượng trong khoảng thời gian dt là:

$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_o} = (\overrightarrow{R_y} + \overrightarrow{R_x})dt .$$



Hình I.4

Vì chỉ cần tính thành phần nằm ngang R_x nên khi chiếu lên trục *Ox* ta được:

$$Q_{1x} = R_x dt \text{ mà } Q_{1x} = V_{1x} dm = V_1 \cos\alpha dm .$$

Ta cần tính dm. Ta thấy:

$$dm = \gamma s V_o dt \rightarrow \gamma s V_o dt V_1 \cos\alpha = R_x dt ,$$

hay $$R_x = \gamma s V_o V_1 \cos\alpha .$$

Vì $\gamma = 1000 kg/m^3$ là khối lượng riêng của nước nên khi thay các trị số ta được:

$$R_x = 1000 \times 0{,}02 \times 2 \times 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000 \times 0{,}02 \times 4\sqrt{3} = 138{,}56N .$$

ĐỊNH LÝ KHỐI TÂM

Ví dụ I.5: Động cơ điện trọng lượng P đặt tự do trên sàn nhẵn nằm ngang. Người ta gắn một đầu của thanh đồng chất dài $2l$ và nặng p vào trục của động cơ dưới một góc vuông, còn đầu kia gắn vào tải trọng Q; vận tốc góc của trục bằng ω (hình I.5).

Hãy xác định:

1. Chuyển động ngang của động cơ

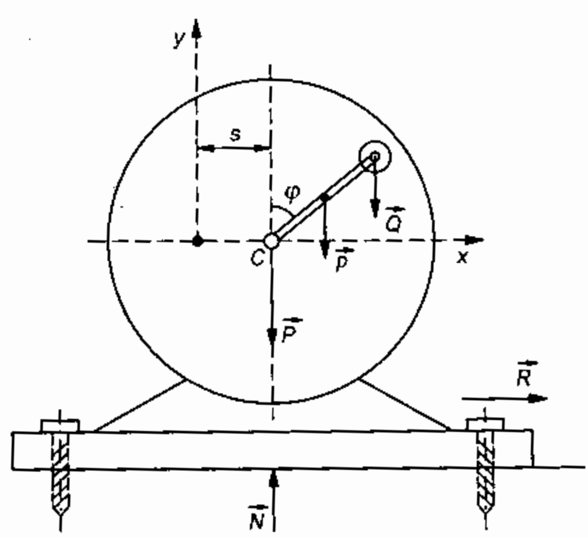
2. Lực cắt ngang lớn nhất R tác dụng lên các bulông nếu ta gắn vỏ động cơ vào nền bằng các bulông.

Bài giải:

1. Khi không gắn động cơ với nền bằng bulông:

$$MW_{Cx} = 0 \rightarrow V_{Cx} = const.$$

Lúc đầu hệ đứng yên $V_{Cx} = 0 \rightarrow x_C = const$. Lúc đầu $OA \equiv Cy$ nên $x_C^o = 0$; $x_Q^o = 0$; $x_p^o = 0$; $x_P^o = 0$.



Hình I.5

Khi OA quay một góc $\varphi = \omega t$ thì động cơ dịch chuyển sang phải một đoạn s. Khi đó

$$x_P = s\,;\; x_p = s + l\sin\omega t\,;\; x_Q = s + 2l\sin\omega t\,;$$

$$Ps + p(s + l\sin\omega t) + Q(s + 2l\sin\omega t) = 0\,;$$

$$s = -\frac{(p+2Q)l}{P+p+Q}\sin\omega t\,.$$

Động cơ dịch chuyển theo chiều ngược lại

Biên độ $\dfrac{(p+2Q)l}{P+p+Q}$

Chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

2. Khi gắn động cơ với nền bằng các bulông thì lực tác dụng lên bulông hướng theo trục x là:

$$R_x = MW_{Cx} = \sum m_k \ddot{x}_k\,;$$

$$R = R_x = \frac{P}{g}\ddot{x}_P + \frac{p}{g}\ddot{x}_p + \frac{Q}{g}\ddot{x}_Q\,;$$

$$x_P = 0\,;\; x_p = l\sin\varphi = l\sin\omega t\,;$$

$$x_Q = 2l\sin\varphi = 2l\sin\omega t\,;$$

$$\ddot{x}_P = 0\,;\quad \ddot{x}_p = -l\omega^2\sin\omega t\,;$$

$$\ddot{x}_Q = -2l\omega^2\sin\omega t\,;$$

$$R = \frac{P}{g}\ddot{x}_P + \frac{p}{g}\ddot{x}_p + \frac{Q}{g}\ddot{x}_Q = -\frac{p}{g}l\omega^2\sin\omega t\,;$$

$$-\frac{Q}{g}2l\omega^2\sin\omega t = -\left(\frac{p+2Q}{g}\right)l\omega^2\sin\omega t\,;$$

$$R_{\max} = \frac{p+2Q}{g}l\omega^2\text{, với } \sin\omega t = -1\,.$$

ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

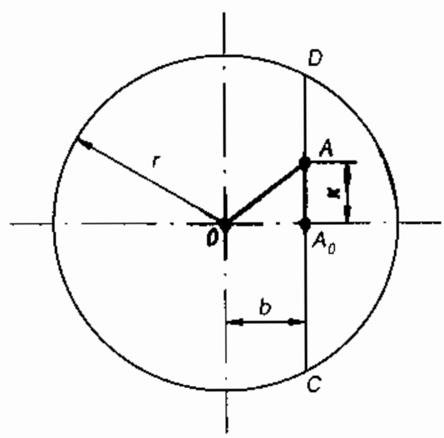
Ví dụ I.6: Chất điểm A khối lượng m_1 chuyển động trên mặt tấm tròn nằm ngang khối lượng m_2 bán kính r, dọc theo dây cung CD với phương trình $A_0A = x = b\sin kt$, trong đó k là hằng số và b được cho trên hình I.6. Tấm có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng đi qua tâm O.

Xác định vận tốc góc của tấm tại thời điểm t, biết rằng khi $t = 0$ thì tấm đứng yên.

Bài giải: Hệ khảo sát gồm tấm tròn và chất điểm A.

Áp dụng định lý mômen động lượng đối với trục Oz đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của tấm:

$$dL_z = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}).$$



Hình I.6

Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng tấm tròn là P_2 và trọng lượng chất điểm là P_1. Ta thấy $\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = 0$ vì các ngoại lực đều cắt hay song song với trục quay Oz. Vì lúc đầu hệ đứng yên nên:

$$L_z = L_z^o = 0;$$

$$L_z^{hệ} = L_z^t + L_z^A,$$

trong đó $L_z^t = J_z\omega$ mà $J_z = \frac{1}{2}m_2r^2$;

$$L_z^A = OAm_1V_a^A \text{ mà } \overrightarrow{V_a^A} = \overrightarrow{V_r^A} + \overrightarrow{V_e^A}.$$

Ta có $V_r^A = \dot{x} = bk\cos kt$ còn $V_e^A = OA\omega$ với ω là vận tốc góc của tấm tại thời điểm t.

Vậy:

$$L_z^A = OAm_1V_a^A = OAm_1V_e^A + bm_1V_r^A;$$

$$L_z^A = OAm_1OA\omega + bm_1\dot{x} = OA^2m_1\omega + bm_1bk\cos kt;$$

$$L_z^A = OA^2m_1\omega + b^2m_1k\cos kt.$$

Nhưng :

$$OA^2 = b^2 + x^2 \text{ hay } OA^2 = b^2 + x^2 = b^2 + b^2\sin^2 kt;$$

$$L_z^A = b^2(1+\sin^2 kt)m_1\omega + b^2m_1k\cos kt = 0;$$

$$L_z^{hệ} = \frac{1}{2}m_2r^2\omega + b^2(1+\sin^2 kt)m_1\omega + b^2m_1k\cos kt = 0.$$

Giải ra ta có:

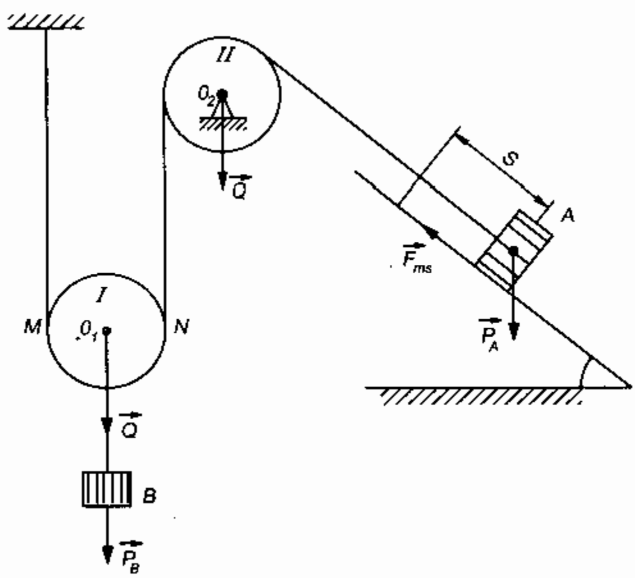
$$\omega = \frac{-kb^2m_1\cos kt}{\frac{1}{2}m_2r^2 + m_1b^2(1+\sin^2 kt)}.$$

Dấu (-) chứng tỏ chiều của ω ngược với chiều chuyển động của chất điểm A.

ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Ví dụ I.7: Đầu một sợi dây không dãn, không trọng lượng được buộc vào điểm O cố định, dây vòng qua ròng rọc động O_1 rồi vắt qua ròng rọc cố định O_2. Đầu kia của dây buộc vào vật A khối lượng m_2. Vật B khối lượng m_1 được treo vào trục ròng rọc động O_1. Các ròng rọc được coi là đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính R. Hệ số ma sát giữa vật A và mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α là f.

Tìm vận tốc góc của ròng rọc O_1 khi vật A chuyển động được một đoạn s.



Hình I.7

Bài giải: Hệ khảo sát gồm các ròng rọc O_1, O_2 và các vật *A, B*: ròng rọc O_1 chuyển động song phẳng, ròng rọc O_2 chuyển động quay quanh trục cố định đi qua tâm ròng rọc, các vật *A, B* chuyển động tịnh tiến.

Áp dụng định lý động năng:

$$T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

Do ban đầu hệ đứng yên nên $T_o = 0$ và do dây không dãn nên $\sum A_k^i = 0$. Do đó:

$$T_1 = \sum A_k^e . \qquad (*)$$

Ngoại lực tác dụng: $\overrightarrow{P_A}, \overrightarrow{P_B}, \vec{Q}, \overrightarrow{F_{ms}}, \vec{N}$.

Giả sử vật *A* trượt xuống một đoạn là *s* thì ròng rọc O_1 đi lên một đoạn là s_o:

$$\sum A_k^e = P_A s \sin\alpha - F_{ms} s - (P_B + Q)s_o ;$$

$$s_o = \frac{s}{2} \text{ và } F_{ms} = fN = fP_A \cos\alpha ;$$

$$P_A = m_2 g ; \; P_B = m_1 g ; \; Q = mg .$$

nên:

$$\sum A_k^e = m_2 gs \sin\alpha - fm_2 gs \cos\alpha - (m_1 g + mg)\frac{s}{2} ;$$

$$\sum A_k^e = \frac{g}{2}[2m_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - (m_1 + m)]s .$$

Động năng của hệ:

$$T = T_A + T_B + T_I + T_{II} ;$$

$$T_A = \frac{1}{2}m_2 V_A^2 ; \quad T_B = \frac{1}{2}m_1 V_B^2 ; \quad T_{II} = \frac{1}{2}J_{O_2}\omega_{II}^2 ;$$

$$T_I = \frac{1}{2}mV_{O_1}^2 + \frac{1}{2}J_{O_1}\omega_I^2 = \frac{1}{2}mV_{O_1}^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_I^2 .$$

Ta phải tìm vận tốc góc của ròng rọc O_1 là ω_I nên ta đổi V_A, V_B, V_{O_1} và ω_{II} theo ω_1.

Do ròng rọc O_1 chuyển động song phẳng có điểm M là tâm vận tốc tức thời nên:

$$V_{O_1} = R\omega_I ; \quad V_A = V_N = 2R\omega_I ; \quad V_B = V_{O_1} = R\omega_I ;$$

$$T_A = \frac{1}{2}m_2 4R^2\omega_I^2 ; \quad T_B = \frac{1}{2}m_1 R^2\omega_I^2 ;$$

$$T_I = \frac{1}{2}mV_{O_1}^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_I^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_I^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_I^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_I^2 ;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2}J_{O_2}\omega_{II}^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega_{II}^2 = \frac{1}{4}mR^2 4\omega_I^2 = mR^2\omega_I^2 ,$$

vì: $$\omega_{II} = \frac{V_A}{R} = \frac{2R\omega_I}{R} = 2\omega_I ;$$

$$T = T_A + T_B + T_I + T_{II} ;$$

$$T = 2m_2R^2\omega_I^2 + \frac{1}{2}m_1R^2\omega_I^2 + \frac{3}{4}mR^2\omega_I^2 + mR^2\omega_I^2;$$

$$T = \frac{R^2\omega_I^2}{4}(7m + 2m_1 + 8m_2);$$

$$\sum A_k^e = \frac{g}{2}[2m_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - (m_1 + m)]s.$$

Thay vào (*) ta có:

$$\frac{R^2\omega_I^2}{4}(7m + 2m_1 + 8m_2) = \frac{g}{2}[2m_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - (m_1 + m)]s;$$

$$\omega_I = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2[2m_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - (m_1 + m)]s}{7m + 2m_1 + 8m_2}}.$$

Ví dụ I.8: Một mômen quay *M* không đổi tác dụng lên tay quay *OA* làm cho *OA* khối lượng m_1 quay quanh trục cố định *O* vuông góc với mặt phẳng nằm ngang. Tay quay *OA* truyền chuyển động cho bánh xe II bán kính *r* khối lượng m_2, bánh xe này ăn khớp trong với bánh xe *I* cố định có bán kính $R = 3r$. Coi bánh xe II là đĩa tròn đồng chất, tay quay *OA* là thanh đồng chất.

1. Tìm vận tốc góc của *OA* theo góc quay φ của nó

2. Tìm gia tốc góc của *OA*.

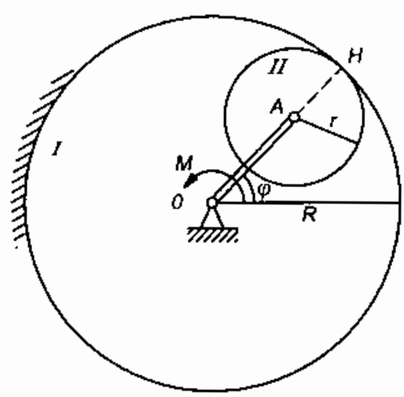
Bài giải: Hệ khảo sát gồm thanh *OA* và bánh xe II. Áp dụng định lý động năng

$$T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Lúc đầu hệ đứng yên nên $T_o = 0$, ta có $\sum A_k^i = 0$ nên:

$$T_1 = \sum A_k^e; \qquad \text{(a)}$$

$$T_I = T_{OA} + T_{II};$$



Hình I.8

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_o \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} (2r)^2 \frac{m_1}{3} \omega_{OA}^2 ;$$

$$T_{OA} = \frac{4r^2}{6} m_1 \omega_{OA}^2 = \frac{2}{3} m_1 r^2 \omega_{OA}^2 ;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_{II}^2 \text{ mà } V_A = 2r\omega_{OA} .$$

Vì H là tâm vận tốc tức thời của bánh xe II nên:

$$\omega_{II} = \frac{V_A}{R} = \frac{2r}{r} \omega_{OA} = 2\omega_{OA} ;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_{II}^2 = \frac{1}{2} m_2 (2r\omega_{OA})^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 (2\omega_{OA})^2 ;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} m_2 4r^2 \omega_{OA}^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 4\omega_{OA}^2 = 3m_2 r^2 \omega_{OA}^2 ;$$

$$T_{hệ} = \frac{2}{3} m_1 r^2 \omega_{OA}^2 + 3m_2 r^2 \omega_{OA}^2 = (2m_1 + 9m_2) \frac{r^2 \omega_{OA}^2}{3} ;$$

$$\sum A_k^e = M\varphi \rightarrow (2m_1 + 9m_2) \frac{r^2 \omega_{OA}^2}{3} = M\varphi ; \qquad \text{(b)}$$

$$\omega_{OA} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3M\varphi}{2m_1 + 9m_2}} .$$

Muốn tính gia tốc thanh OA thì lấy đạo hàm bậc nhất theo thời gian cả hai vế của (b) với chú ý rằng $\dot{\varphi} = \omega_{OA}$ và $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$ ta có:

$$(2m_1 + 9m_2) \frac{r^2}{3} 2\omega_{OA} \dot{\omega}_{OA} = M\dot{\varphi} ;$$

$$\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA} = \frac{3M}{2r^2 (2m_1 + 9m_2)} .$$

NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

Ví dụ I.9: Ròng rọc trọng lượng P (N), bán kính R có thể quay được quanh trục Oz cố định. Ở đầu cuối của một sợi dây cuốn quanh ròng rọc, người ta buộc vật A trọng lượng Q. Bỏ qua ma sát ở ổ trục O và cho biết bán kính quán tính của ròng rọc đối với trục Oz là ρ. Hãy tính gia tốc góc của ròng rọc và phản lực ở ổ trục O nếu cho vật A rơi thẳng đứng. Tìm sức căng T.

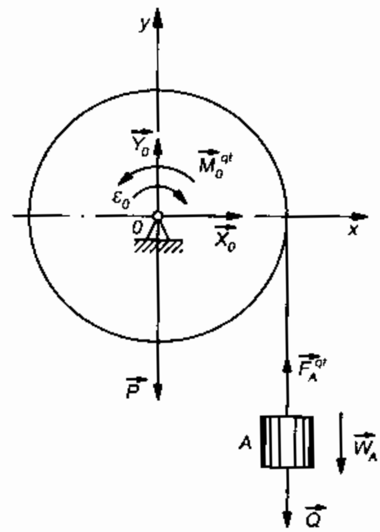
Bài giải: Xét hệ gồm có ròng rọc O và vật A. Ròng rọc quay quanh trục cố định qua khối tâm, vật A chuyển động tịnh tiến. Đặt lên ròng rọc và vật A các lực quán tính thu gọn:

$$M_{Oz}^{qt} = J_o\varepsilon = \frac{P}{g}\rho^2\varepsilon;$$

$$F_A^{qt} = \frac{Q}{g}W_A = \frac{Q}{g}W_N^{\tau} = \frac{Q}{g}R\varepsilon.$$

Hệ lực tác dụng lên hệ:

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X_o}, \vec{Y_o}, \vec{F_A^{qt}}, M_{Oz}^{qt}.$$



Hình I.9

Lập các phương trình tĩnh động:

$$\sum X_k = X_o = 0;$$

$$\sum Y_k = Y_o + F_A^{qt} - P - Q = 0;$$

$$\sum m_{Oz}(\vec{F_k}) = M_{Oz}^{qt} + F_A^{qt}R - QR = 0.$$

Thay các giá trị của F_A^{qt} và M_{Oz}^{qt} vào, giải ra ta có kết quả:

$$\varepsilon = \frac{QRg}{P\rho^2 + QR^2}; \quad X_o = 0;$$

$$Y_o = \frac{P^2\rho^2 + PQ(R^2 + \rho^2)}{P\rho^2 + QR^2}.$$

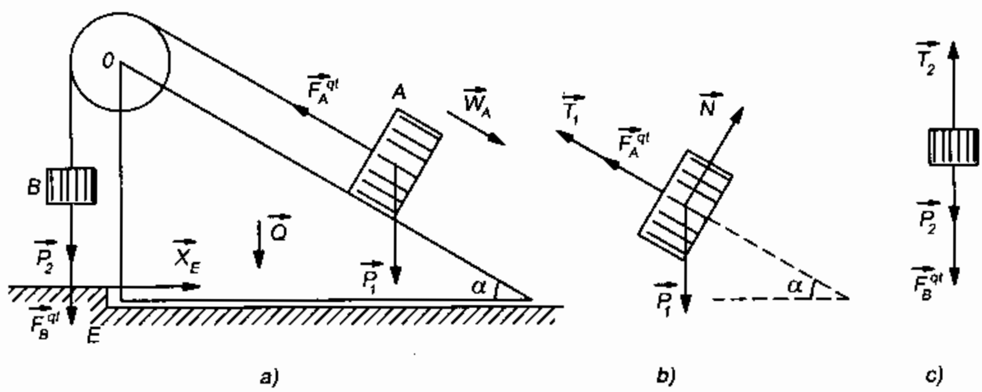
Muốn tìm sức căng T của dây, ta cắt dây và đặt lên vật các lực:

$$\sum Y_k = T + F_A^{qt} - Q = 0 \rightarrow T = Q - F_A^{qt}.$$

Thay giá trị ε vào, tính ra:

$$T = \frac{QP\rho^2}{P\rho^2 + QR^2}.$$

Ví dụ I.10: Vật A trọng lượng P_1 chuyển động xuống theo mặt phẳng nghiêng góc α với phương ngang làm cho vật B trọng lượng P_2 chuyển động. Xác định thành phần phản lực ngang của gờ E tác dụng lên lăng trụ EOI.



Hình I.10

Bài giải: Cơ hệ gồm có lăng trụ EOI và các vật A, B.

Lực tác dụng lên hệ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{X_E}$ trọng lượng của hình lăng trụ, thành phần phản lực $\overrightarrow{N_E}$.

Bỏ qua lực ma sát. Đặt thêm lên các vật lực quán tính (A và B đều chuyển động tịnh tiến).

$$F_A^{qt} = \frac{P_1}{g} W_A = \frac{P_1}{g} W;$$

$$F_B^{qt} = \frac{P_2}{g} W_B = \frac{P_2}{g} W \text{ (vì } W_A = W_B = W\text{)}.$$

Lập phương trình cân bằng đối với trục ngang:

$$\sum X_k = X_E - F_A^{qt}\cos\alpha = 0\,;$$

$$\rightarrow X_E = F_A^{qt}\cos\alpha = \frac{P_1}{g}W\cos\alpha\,.$$

Ròng rọc O có thể bỏ qua khối lượng nên sức căng T của hai nhánh dây bằng nhau.

Lập phương trình hình chiếu lên trục song song với $\overrightarrow{T_1}$ (hình I.10b)

$$T_1 + F_A^{qt} - P_1\sin\alpha = 0 \rightarrow T_1 = P_1\sin\alpha - \frac{P_1}{g}W\,.$$

Lập phương trình hình chiếu lên trục song song với $\overrightarrow{T_2}$ (hình I.10c)

$$T_2 - P_2 - F_B^{qt} = 0 \rightarrow T_2 = P_2 + \frac{P_2}{g}W\,.$$

Vì $T_1 = T_2$ nên:

$$P_1\sin\alpha - \frac{P_1}{g}W = P_2 + \frac{P_2}{g}W\,;$$

$$\rightarrow W = \frac{P_1\sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2}g\,;$$

$$X_E = \frac{P_1}{g}W\cos\alpha = P_1\cos\alpha\,\frac{P_1\sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2}\,.$$

Ví dụ I.11: Thanh AB dài $2l$, hai đầu gắn hai tải trọng có cùng trọng lượng P. Thanh quay đều với vận tốc góc ω quanh trục Oz đi qua điểm giữa O của thanh. Góc α = const. Bỏ qua trọng lượng của thanh và kích thước của tải trọng. Xác định phản lực ở các ổ trục C, D khi thanh nằm trong mặt phẳng Oyz.

Bài giải: Hệ gồm có trục CD, thanh AB và hai tải trọng A, B

Các lực tác dụng lên hệ: $\vec{P}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{X_D}, \overrightarrow{Y_D}, \overrightarrow{Z_D}$.

Thanh AB quay đều nên:

$W_A^\tau = W_B^\tau = 0$;

$W_A^n = W_B^n = l\omega^2 \sin\alpha$.

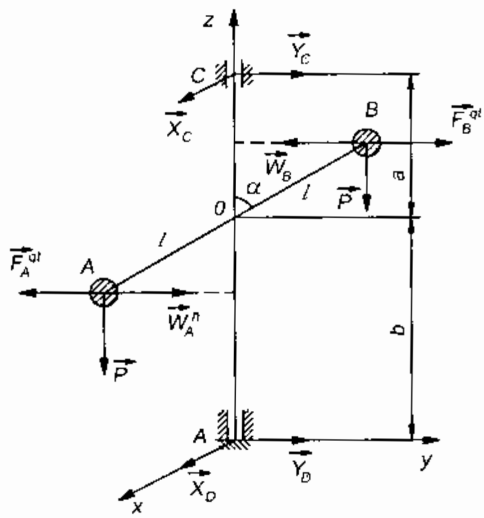
Các lực quán tính:

$F_A^{qt} = \dfrac{P}{g} l\omega^2 \sin\alpha$;

$F_B^{qt} = \dfrac{P}{g} l\omega^2 \sin\alpha$.

Nhận thấy $F_A^{qt} = F_B^{qt}$.

Các phương trình cân bằng:



Hình I.11

$\sum X_k = X_C + X_D = 0$;

$\sum Y_k = Y_C + Y_D + F_B^{qt} - F_A^{qt} = 0$;

$\sum Z_k = Z_D - P - P = 0$;

$\sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = -(a+b)Y_C - (b + l\cos\alpha)F_B^{qt} + (b - l\cos\alpha)F_A^{qt} = 0$;

$\sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = (a+b)X_C = 0$;

$\sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = 0$.

Giải ra được:

$$X_C = X_D = 0;\ Z_D = 2P;$$

$$Y_C = Y_D = -\frac{Pl^2\omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}.$$

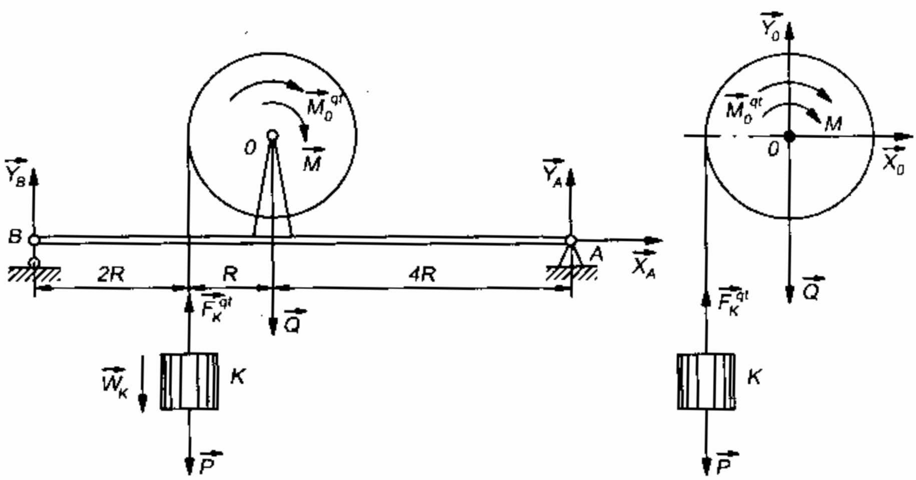
Ví dụ I.12: Ròng rọc *O* trọng lượng *Q* bán kính *R* quay được nhờ vật treo *K* trọng lượng *P*. Mômen cản ở ổ trục là *M*. Ròng rọc được đặt lên dầm *AB* chịu liên kết và có kích thước như hình I.12. Xác định:

1. Gia tốc vật treo *K*.

2. Áp lực động lực tại các gối tựa *A* và *B*.

Bài giải: Cơ hệ gồm có dầm AB, ròng rọc O và vật K.

Các lực tác dụng lên hệ: $\vec{P}, \vec{Q}, M, \overline{X_O}, \overline{Y_O}$.



Hình I.12

Đặt thêm các lực quán tính: vật K chuyển động tịnh tiến, ròng rọc O chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm:

$$F_K^{qt} = \frac{P}{g} W_K;$$

$$M_o^{qt} = J_o \varepsilon = \frac{Q}{2g} R^2 \frac{W_K}{R} = \frac{QR}{2g} W_K.$$

Tách riêng ròng rọc. Tại O liên kết bản lề trụ nên hệ lực tác dụng lên ròng rọc và vật K là: $\vec{P}, \vec{Q}, M, \overline{X_o}, \overline{Y_o}, \overline{F_k^{qt}}, M_o^{qt}$

Lập phương trình mômen đối với O:

$$\sum m_O(\overrightarrow{F_k}) = PR - \frac{P}{g} W_K R - \frac{QR}{2g} W_K - M_o = 0.$$

Tính ra:

$$W_K = \frac{(PR - M)2g}{R(2P + Q)}.$$

Hoá rắn. Hệ lực tác dụng lên hệ: $\vec{P}, \vec{Q}, M, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{F_k^{qt}}, M_o^{qt}$.

Các phương trình cân bằng (không kể các lực tĩnh $\vec{P}, \vec{Q}, M$):

$$\sum X_k = X_A = 0\,;$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B + \frac{P}{g} W_K = 0\,;$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = -7RY_B - 5R\frac{P}{g}W_K - \frac{QR}{2g}W_K = 0\,;$$

Tính ra:

$$X_A = 0\,;\; Y_A = \frac{Q-4P}{14g}W_K\,;\; Y_B = -\frac{10P+Q}{14g}W_K\,.$$

Ví dụ I.13: Thanh EN dài l, trọng lượng P gắn vuông góc với trục quay và nối với thanh NF dài $2l$, trọng lượng $2P$. Hệ quay quanh trục y với vận tốc góc $\omega = \text{const}$. Góc $\alpha = 30°$, $AE = FB = 1\text{cm}$, $l = 2\sqrt{3}$ cm, $P = 10\text{N}$. Xác định áp lực động lực tại các ổ trục A và B.

Bài giải: Hệ lực tác dụng lên cơ hệ: $\vec{P}, \overrightarrow{2P}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Z_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Z_B}$.

Đặt các lực quán tính lên EN, FN. $\overrightarrow{F_I^{qt}}$ có độ lớn:

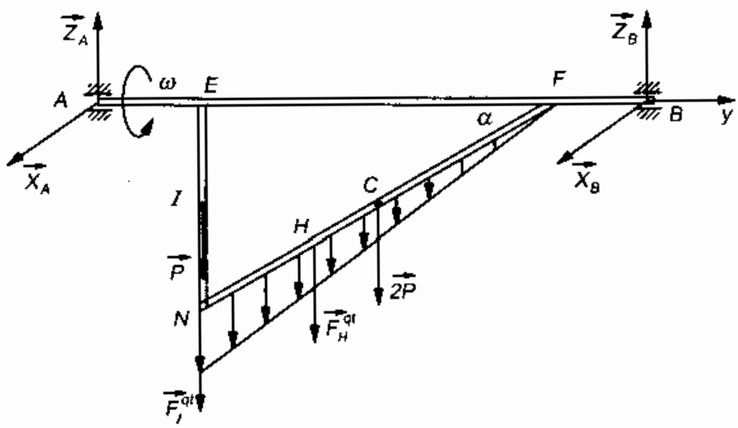
$$F_I^{qt} = \frac{P}{g}W_I^n = \frac{P}{g} \times \frac{l}{2}\omega^2\,.$$

Lực quán tính của thanh FN phân bố tam giác. Thay hệ lực phân bố bằng lực tập trung $\overrightarrow{F_H^{qt}}$ đặt tại H và có độ lớn:

$$F_H^{qt} = \frac{2P}{g}W_C^n = \frac{2P}{g}l\sin 30°\omega^2 = \frac{Pl}{g}\omega^2\,.$$

(W_I^τ và W_C^τ đều bằng 0 vì chuyển động quay đều). Các lực đều vuông góc và cắt trục y nên:

$$\sum Y_k = 0\,;\; \sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = 0\,.$$



Hình I.13

Chỉ còn 4 phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B = 0\,;$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - F_I^{qt} - F_H^{qt} = 0$$

$$\sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = 8Z_B - 1F_I^{qt} - 3F_H^{qt} = 0$$

$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = -ABX_B = 0$$

Tính ra:

$$X_A = 0\,;\; X_B = 0\,;\; Z_A = \frac{85\sqrt{3}}{4g}\omega^2\,;\; Z_B = \frac{35\sqrt{3}}{4g}\omega^2\,.$$

Ví dụ I.14: Con lăn đồng chất có bán kính r trọng lượng P nằm trên sàn nhẵn nằm ngang. Người ta cuốn dây vào tang quay của nó rồi kéo dây bằng lực $\vec{F}$ nghiêng một góc α so với phương nằm ngang. Bán kính tang quay bằng a, bán kính quán tính của con lăn bằng ρ. Xác định quy luật chuyển động của trục con lăn.

Bài giải: Vật khảo sát: con lăn

Các lực tác dụng lên con lăn:

+ Trọng lượng con lăn $\vec{P}$;

+ Lực kéo $\overrightarrow{F}$;

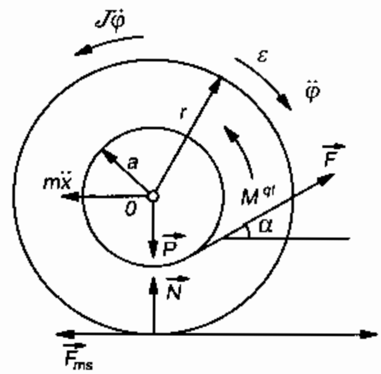
+ Lực ma sát $\overrightarrow{F_{ms}}$;

+ Lực quán tính $\overrightarrow{F_o^{qt}} = -m\overrightarrow{W_o}$ có trị số $F_o^{qt} = m\ddot{x} = \dfrac{P}{g}\ddot{x}$;

+ Ngẫu lực quán tính

$$M^{qt} = -J\varepsilon = -J\ddot{\varphi};$$

+ Phản lực pháp tuyến $\overrightarrow{N}$:



Hình I.14

$$\sum X = F\cos\alpha - m\ddot{x} - F_{ms} = 0, \tag{1}$$

$$\sum m_O(\overrightarrow{F_k}) = aF + J_z\ddot{\varphi} - rF_{ms} = 0. \tag{2}$$

Thay $\quad \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}}{r}$ và $J_z = m\rho^2 = \dfrac{P}{g}\rho^2$

ta có:

$$rF\cos\alpha - rm\ddot{x} = rF_{ms}$$
$$aF + J_z\ddot{\varphi} = rF_{ms}$$

Từ hai đẳng thức trên ta có:

$$aF + \frac{P}{g}\rho^2\frac{\ddot{x}}{r} = rF\cos\alpha - r\frac{P}{g}\ddot{x};$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\frac{\ddot{x}}{r} + r\frac{P}{g}\ddot{x} = rF\cos\alpha - aF;$$

$$\frac{P}{g}(\rho^2 + r^2)\frac{\ddot{x}}{r} = F(r\cos\alpha - a);$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)};$$

$$d\dot{x} = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}dt;$$

$$\dot{x} = \int_o^t \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}dt = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}t;$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}t;$$

$$dx = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}tdt;$$

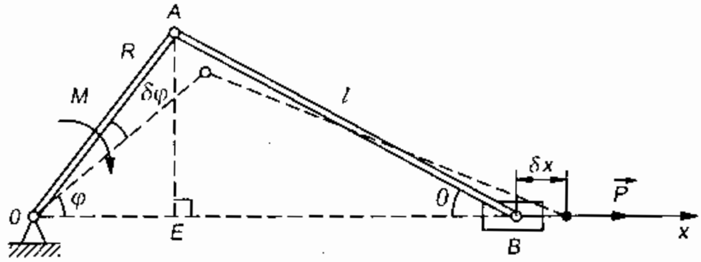
$$x = \int_o^x dx = \int_o^t \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{P(\rho^2 + r^2)}tdt;$$

$$x = \frac{grF(r\cos\alpha - a)}{2P(\rho^2 + r^2)}t^2.$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Ví dụ I.15: Cho cơ cấu tay quay thanh truyền như hình I.15. Bỏ qua ma sát, và cho biết $OA = R; AB = l$. Tìm sự liên hệ giữa lực P và mômen M để hệ cân bằng ở vị trí như hình I.15.

Bài giải: Cơ hệ chịu liên kết lý tưởng. Các lực chủ động tác dụng lên hệ là P và ngẫu lực có mômen M.



Hình I.15

Cho hệ một di chuyển khả dĩ: OA quay góc $\delta\varphi$, còn con chạy B di chuyển đoạn δx. Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ thì (cơ hệ có một bậc tự do):

$$\sum \delta A_k^F = M\delta\varphi - P\delta x = 0\,.$$

Tìm sự liên hệ giữa $\delta\varphi$ và δx:

Gọi $$OB = x = R\cos\varphi + l\cos\theta\,.$$

Theo hình vẽ

$$AE = R\sin\varphi = l\sin\theta\,. \qquad (*)$$

Lấy vi phân hai vế:

$$R\cos\varphi\delta\varphi = l\cos\theta\delta\theta\,;$$

$$\delta\theta = \frac{R\cos\varphi}{l\cos\theta}\delta\varphi\,.$$

Mà $$\cos\theta = \frac{\sqrt{l^2 - AE^2}}{l} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}{l}\,.$$

Vậy: $$\delta\theta = \frac{R\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}\delta\varphi\,;$$

$$\delta x = -R\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\theta\delta\theta = -R\sin\varphi\delta\varphi - R\sin\varphi\delta\theta \text{ (kể đến (*))};$$

$$\delta x = -R\sin\varphi\delta\varphi - R\sin\varphi\frac{R\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}\delta\varphi\,;$$

$$\delta x = -R\sin\varphi\left(1 + \frac{R\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}\right)\delta\varphi\,.$$

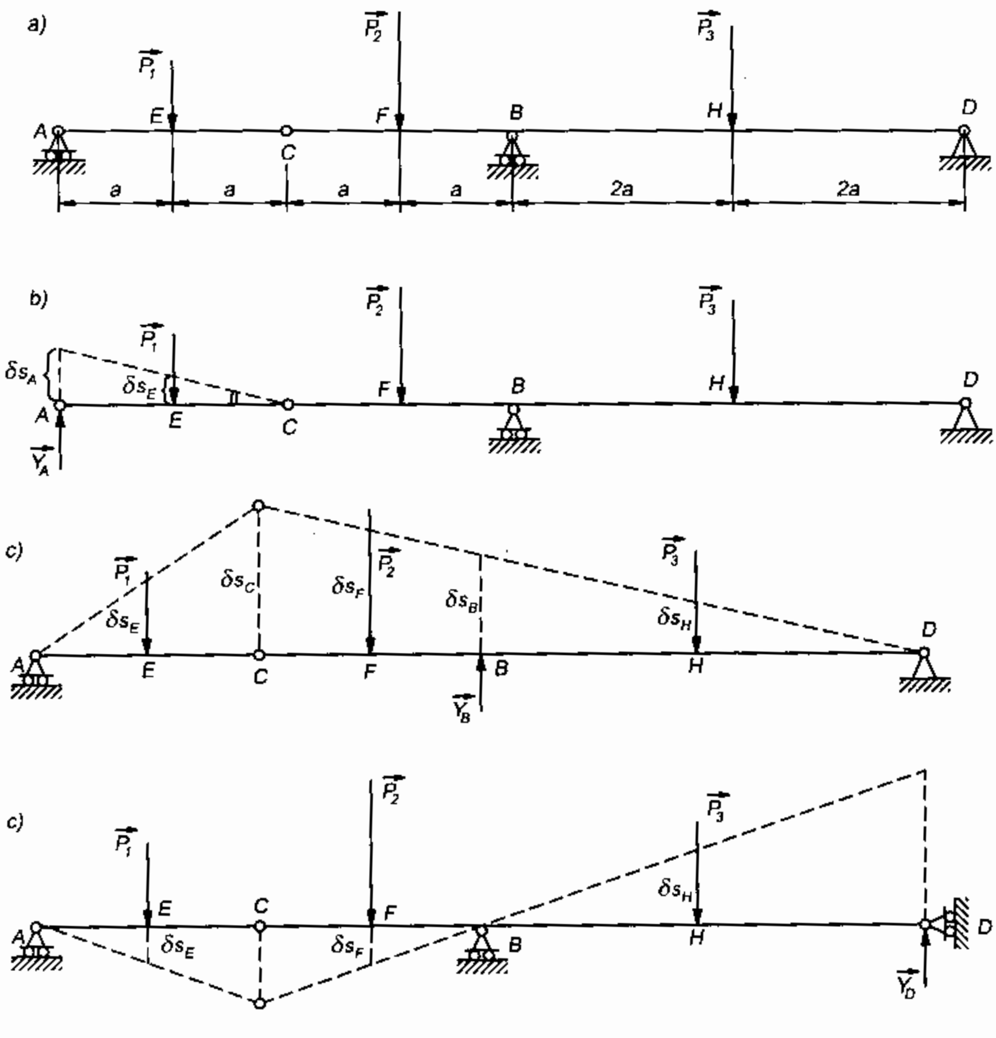
Thay các giá trị vào phương trình công, ta có:

$$M = -PR\sin\varphi\left(1 + \frac{R\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Dấu (–) chứng tỏ là trong di chuyển khả dĩ trên, ngẫu lực có mômen M là chủ động, còn lực P là lực cản.

Ví dụ I.16: Cho hệ thanh chịu lực và chịu liên kết như hình I.16. Cho $P_1 = 2\text{kN}$; $P_2 = 6\text{kN}$; $P_3 = 3\text{kN}$. Tính phản lực tại *A, B, D*.

Bài giải: Hệ đã cho không có bậc tự do nào vì có đầy đủ các liên kết và hệ cân bằng.Để sử dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ tìm phản lực tại *A, B, D* ta lần lượt giải phóng liên kết tại các gối tựa, thay vào đó các phản lực tương ứng.



Hình I.16

1) Tính phản lực tại *A*: bỏ gối di động *A*, thay phản lực Y_A tương ứng. Cho hệ một di chuyển khả dĩ theo Y_A

$$\sum \delta A_k^F = Y_A \delta s_A - P_1 \delta s_E = 0.$$

Theo hình I.16b: $\delta s_A = 2\delta s_E$

Vậy

$$2Y_A\delta s_E - P_1\delta s_E = 0 \rightarrow Y_A = \frac{P_1}{2} = 1kN\,.$$

2) Tính phản lực tại *B:* làm tương tự như trên

$$\sum \delta A_k^F = Y_B\delta s_B - P_1\delta s_E - P_2\delta s_F - P_3\delta s_H = 0\,.$$

Theo hình I.16c:

$$\delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_C\,;\ \delta s_F = \frac{5}{6}\delta s_C\,;$$

$$\delta s_B = \frac{2}{3}\delta s_C\,;\ \delta s_H = \frac{1}{3}\delta s_C\,.$$

Thay vào, tính được $Y_B = 10{,}5kN$.

3) Tìm phản lực ở *D: D* là gối cố định nên có $\overrightarrow{X_D}$ và $\overrightarrow{Y_D}$. $X_D = 0$ vì hệ lực tác dụng lên hệ là hệ lực song song với trục *y*, chỉ có X_D song song với trục x nên nó bằng 0. Để tìm Y_D ta thay gối cố định *D* bằng gối di động thẳng đứng và phản lực Y_D tương ứng. Cho hệ một di chuyển khả dĩ theo Y_D.

$$\sum \delta A_k^F = Y_D\delta s_D - P_3\delta s_H + P_2\delta s_F + P_1\delta s_E = 0\,.$$

Theo hình I.16d:

$$\delta s_H = \delta s_C\,;\ \delta s_F = \frac{1}{2}\delta s_C\,;$$

$$\delta s_B = \frac{1}{2}\delta s_C\,;\ \delta s_D = 2\delta s_H = 2\delta s_C\,.$$

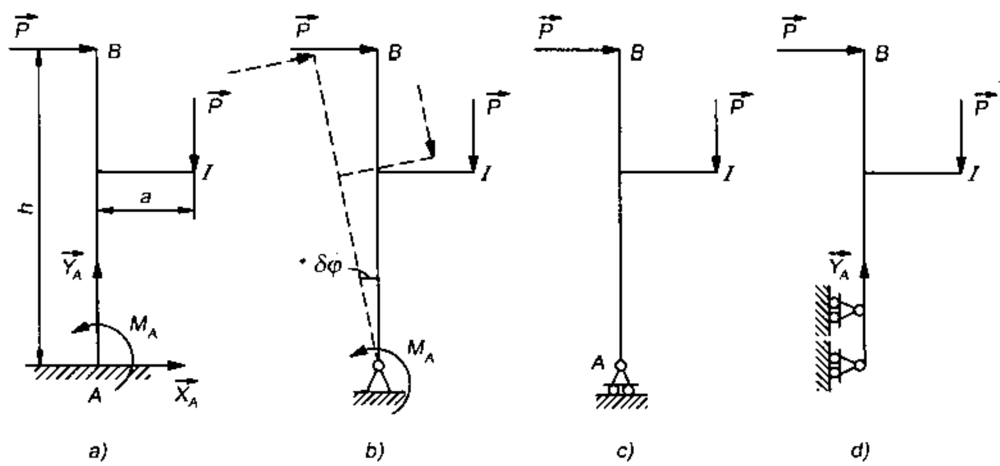
Thay các giá trị vào tính ra được $Y_D = -0{,}5kN$

Ví dụ I.17: Cột *AB* chịu liên kết ngàm tại *A* và chịu lực như hình I.17. Tìm phản lực tại *A*.

Bài giải: Cột *AB* cân bằng.

Phản lực tại ngàm A là: $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, M_A$.

Giải phóng liên kết tại A, thay vào các phản lực tương ứng và sử dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ.



Hình I.17

1) Tính M_A: bỏ ngàm A thay bằng gối cố định và ngẫu lực có mômen M_A sao cho cột AB có thể quay được quanh A. Cho cột một di chuyển khả dĩ quay quanh A một góc $\delta\varphi$ theo chiều M_A:

$$\sum \delta A_k = M_A\delta\varphi - P\delta s_B - P\delta s_I = 0 \text{ (hình I.17a);}$$

$$\delta s_B = h\delta\varphi\,;\ \delta s_I = a\delta\varphi\,.$$

Thay vào, tính được

$$M_A = P(h + a)\,.$$

2) Tính X_A: thay ngàm bằng gối di động ngang và X_A tương ứng (hình I.17b). Cột có thể di chuyển theo phương ngang nhưng không quay quanh A:

$$\sum \delta A_k = X_A\delta s_A + P\delta s_B = 0\,.$$

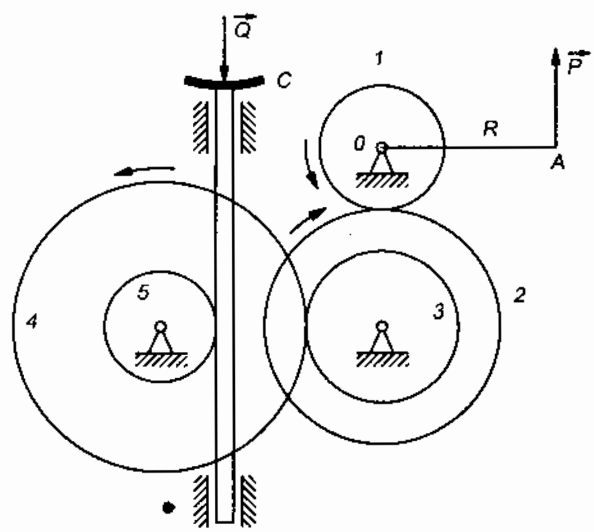
Vì $\delta s_A = \delta s_B$ nên tính ra $X_A = -P$.

3) Tính Y_A: thay ngàm bằng hai gối di động thẳng đứng. Cột có thể di chuyển thẳng đứng và không quay quanh A:

$$\sum \delta A_k = Y_A \delta s_A - P\delta s_I = 0\,;$$

$$\delta s_A = \delta s_I \rightarrow Y_A = P\,.$$

Ví dụ I.18: Tính lực $\vec{P}$ đặt vuông góc vào đầu A của tay quay OA để hệ cân bằng khi có lực Q = 4800N tác dụng vào đĩa C. Cho R_1 = 3cm, R_2 = 12cm, R_3 = 4cm, R_4 = 16cm, R_5 = 3cm. Tay quay OA dài R = 18cm.



Hình I.18

Bài giải: Hệ có một bậc tự do. Cho hệ một di chuyển khả dĩ theo lực P.

$$\sum \delta A_k = P\delta s_A - Q\delta s_C = 0\,;$$

$$\delta\varphi_{OA} = \delta\varphi_1\,;\ \delta s_A = R\delta\varphi_1\,.$$

Theo công thức truyền quay:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow \delta\varphi_3 = \delta\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\delta\varphi_1\,;$$

$$\frac{\delta\varphi_3}{\delta\varphi_4} = \frac{R_4}{R_3} \rightarrow \delta\varphi_5 = \delta\varphi_4 = \frac{R_3}{R_4}\delta\varphi_3 = \frac{R_1R_3}{R_2R_4}\delta\varphi_1\,;$$

$$\delta s_C = R_5\delta\varphi_5 = \frac{R_1R_3R_5}{R_2R_4}\delta\varphi_1\,.$$

Thay vào, tính ra

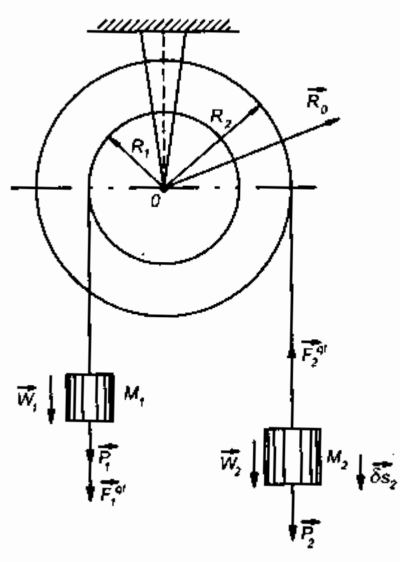
$$P = \frac{R_1R_3R_5}{RR_2R_4}Q = 50N\,.$$

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Ví dụ I.19: Hai tải trọng M_1 trọng lượng P_1, M_2 trọng lượng P_2 treo vào hai sợi dây mềm không dãn cuốn vào hai tang quay cùng trục có bán kính R_1, R_2. Tải trọng chuyển động dưới tác dụng của trọng lượng ($P_2 > P_1$). Bỏ qua khối lượng các tang quay và dây. Xác định gia tốc của tang quay.

Bài giải: Cơ hệ gồm có hai tang quay và hai vật M_1, M_2.

Hệ có một bậc tự do. Lực tác dụng lên cơ hệ: $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{R_o}$



Hình I.19

Đặt thêm lực quán tính lên các vật M_1, M_2. Cả hai vật đều chuyển động tịnh tiến với gia tốc như hình I.19.

$$F_1^{qt} = \frac{P_1}{g} W_1 = \frac{P_1}{g} R_1 \varepsilon ;$$

$$F_2^{qt} = \frac{P_2}{g} W_2 = \frac{P_2}{g} R_2 \varepsilon .$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_2 và dùng phương trình tổng quát động lực học:

$$\sum \delta A_k = P_2 \delta s_2 - F_2^{qt} \delta s_2 - P_1 \delta s_1 - F_1^{qt} \delta s_1 = 0 .$$

Từ cơ cấu, có thể tính được:

$$\delta s_2 = R_2 \delta\varphi ;\ \delta s_1 = R_1 \delta\varphi .$$

Thay vào, ta có:

$$P_2 R_2 \delta\varphi - \frac{P_2}{g} R_2 \varepsilon R_2 \delta\varphi - P_1 R_1 \delta\varphi - \frac{P_1}{g} R_1 \varepsilon R_1 \delta\varphi = 0 .$$

Tính ra $\quad \varepsilon = \dfrac{P_2 R_2 - P_1 R_1}{R_2^2 P_2 + R_1^2 P_1} g .$

Ví dụ I.20: Một hệ ròng rọc được treo hai vật M_1 trọng lượng P_1 = 100N và M_2 trọng lượng P_2 = 80N. xác định gia tốc W_2 của M_2 và sức căng T của nhánh dây 2. Bỏ qua trọng lượng dây và ròng rọc.

Bài giải: Hệ có một bậc tự do.

Các lực hoạt động tác dụng lên hệ là: $\vec{P_1}, \vec{P_2}$.

Các lực quán tính của các vật:

$$F_1^{qt} = \frac{P_1}{g} W_1 ;\ F_2^{qt} = \frac{P_2}{g} W_2 .$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_2 và sử dụng phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$\sum \delta A_k = P_2 \delta s_2 - F_2^{qt} \delta s_2 - P_1 \delta s_1 - F_1^{qt} \delta s_1 = 0 .$$

Ròng rọc O chuyển động song phẳng, nên:

$\delta s_2 = 2\delta s_1$; $W_2 = 2W_1$.

Thay vào và tính ra

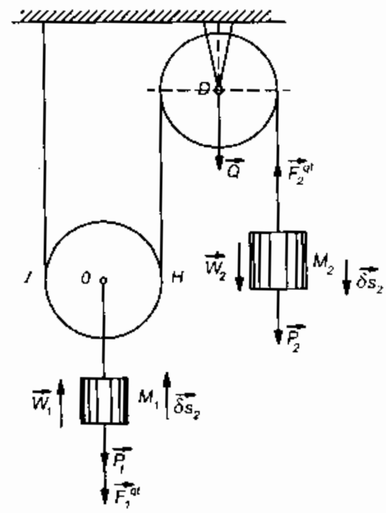
$$W_2 = \frac{2P_2 - P_1}{4P_2 + P_1}2g = 2{,}8\text{m/s}^2 .$$

Tính T: cắt dây

$$\sum Y_k = T + F_2^{qt} - P_2 = 0 .$$

Thay W_2 vào F_2^{qt} tính ra:

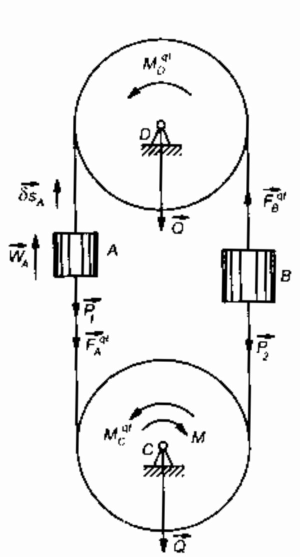
$$T = \frac{3P_1P_2}{4P_2P_1}2g = 57N .$$



Hình I.20

Ví dụ I.21: Hai vật A và B có trọng lượng P_1, P_2 được buộc vào sợi dây vòng qua hai ròng rọc C, D. Để đưa vật A lên, người ta tác dụng vào ròng rọc C một ngẫu lực có mômen M không đổi.

Các ròng rọc C, D có cùng trọng lượng Q, bán kính R. Tìm gia tốc vật A. Bỏ qua khối lượng dây.



Hình I.21

Bài giải: Cơ hệ gồm có hai ròng rọc và hai vật A, B. Hệ có một bậc tự do.

Các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{Q}, \vec{Q}, M$.

Đặt lực quán tính lên các vật. Các vật A, B chuyển động tịnh tiến còn hai ròng rọc chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm.

$$F_A^{qt} = \frac{P_1}{g}W_A\ ;\ F_B^{qt} = \frac{P_2}{g}W_B = \frac{P_2}{g}W_A\ ;$$

$$M_C^{qt} = M_C^{qt} = J_C\varepsilon = \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}R^2\varepsilon = \frac{1}{2}\times\frac{Q}{g}RW_A\ .$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_A và dùng phương trình tổng quát động lực học:

$$\sum\delta A_k = M\delta\varphi - M_C^{qt}\delta\varphi - F_A^{qt}\delta s_A - P_1\delta s_A - M_D^{qt}\delta\varphi - F_B^{qt}\delta s_B + P_2\delta s_B = 0 \qquad (*)$$

Thay $\delta s_B = \delta s_A = R\delta\varphi$ vào (*) tính ra:

$$W_A = \frac{M + R(P_2 - P_1)}{R(Q + P_1 + P_2)}g\ .$$

Ví dụ I.22: Vật A có trọng lượng P được hạ xuống nhờ sợi dây không dãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc D cố định không trọng lượng cuốn vào bánh xe B làm cho trục C lăn không trượt trên đường ray ngang. Hai bánh xe B và C lồng vào nhau, trọng lượng chung là Q và bán kính quán tính đối với trục O là ρ. Tìm gia tốc của vật A.

Bài giải: Hệ có một bậc tự do

Các lực hoạt động tác dụng lên hệ: $\vec{P},\vec{Q}$

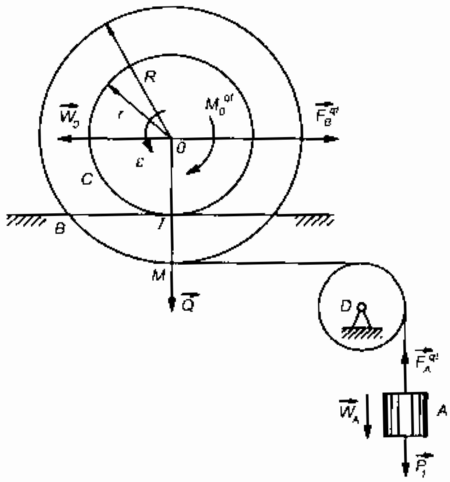
Đặt lực quán tính: vật A chuyển động tịnh tiến, bánh xe B chuyển động song phẳng.

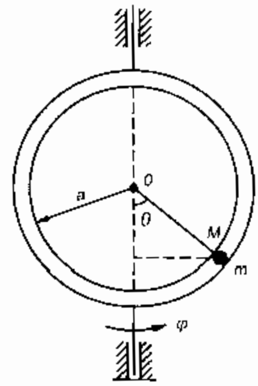
$$F_A^{qt} = \frac{P}{g}W_A\ ;\ F_o^{qt} = \frac{Q}{g}W_o\ ;\ M_o^{qt} = J_o\varepsilon = \frac{Q}{g}\rho^2\varepsilon\ .$$

I là tâm vận tốc tức thời của bánh xe B:

$$W_A = W_M^{\tau} = (R - r)\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{W_A}{R - r}\ ;$$

$$\frac{V_o}{OI} = \frac{V_M}{MI} \rightarrow V_o = \frac{OI}{MI}V_M = \frac{OI}{MI}V_A\ ;$$





H I-23

Hình I.22

$$W_o = \frac{r}{R-r} W_A \text{ (O và } A \text{ đều chuyển động thẳng).}$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δs_A, dùng phương trình tổng quát động lực học:

$$\sum \delta A_k = P\delta s_A - F_A^{qt}\delta s_A - F_o^{qt}\delta s_o - M_o^{qt}\delta\varphi = 0;$$

$$\delta s_o = \frac{r}{R-r}\delta s_A; \ \delta\varphi = \frac{\delta s_A}{R-r}.$$

Thay tất cả các giá trị vào phương trình công, ta tính được:

$$W_A = \frac{Pg(R-r)^2}{P(R-r)^2 + Q(\rho^2 + r^2)}.$$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI II

Ví dụ I.23: Một chất điểm khối lượng m chuyển động theo vòng xuyến bán kính a. Trong khi vòng xuyến quay quanh đường kính thẳng đứng AB với vận tốc góc ω do ngẫu lực M. Mômen quán tính của vòng xuyến đối với đường kính này là J.

Hãy lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và xác định ngẫu lực M cần thiết để giữ cho vận tốc góc không đổi.

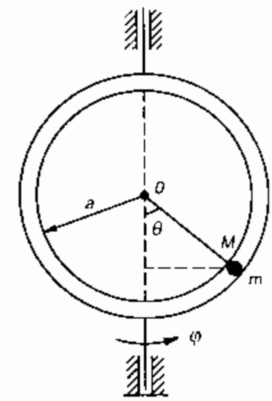
Bài giải: Hệ khảo sát: vòng xuyến và chất điểm.

Hệ có hai bậc tự do.

Chọn các toạ độ suy rộng $q_1 = \varphi$ và $q_2 = \theta$.

Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}mV_a^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 .$$



Hình I.23

Ta tính $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e}$ mà $V_e = a\dot{\varphi}\sin\theta$ và $V_r = a\dot{\theta}$.

Vì $\overrightarrow{V_e} \perp \overrightarrow{V_r}$ nên:

$$V_a^2 = V_r^2 + V_e^2 = a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta ;$$

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 .$$

Ta có: $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 ;$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2\dot{\varphi}\sin^2\theta + J\dot{\varphi} ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ma^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} .$$

Ta có:

$$y = a\cos\theta \rightarrow \delta y = -a\sin\theta\delta\theta ;$$

$$\delta A_\theta = P\delta y = mg(-a\sin\theta\delta\theta) = -amg\sin\theta\delta\theta ;$$

$$Q_\theta = -amg\sin\theta ; \ \delta A_\varphi = M\delta\varphi ; \ Q_\varphi = M ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \rightarrow ma^2\ddot{\theta} - ma^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = -mag\sin\theta ;$$

$$a\ddot{\theta} - a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = -g\sin\theta ;$$

$$a\ddot{\theta} - a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + g\sin\theta = 0 ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \to ma^2\ddot\varphi \sin^2\theta + J\ddot\varphi + 2ma^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta = M .$$

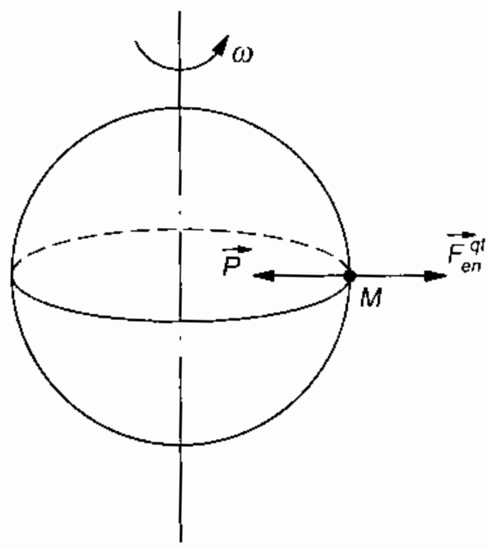
$$\ddot\varphi(J + ma^2\sin^2\theta) + 2ma^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta = M .$$

Mômen M cần thiết để có vận tốc góc không đổi là:

$$M = 2ma^2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta .$$

CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Ví dụ I.24: Cần phải tăng vận tốc góc của Trái Đất khi quay quanh trục của nó lên bao nhiêu lần để tại một điểm trên mặt đất ở xích đạo chất điểm không có trọng lượng nữa. Biết bán kính Trái Đất $R = 6379$km.



Hình I.23

Bài giải: Xét chất điểm tự do M ở gần mặt đất. Các lực tác dụng:

$\vec{P}$ – trọng lượng của chất điểm;

$\vec{F_e^{qt}}$ – lực quán tính theo pháp tuyến.

Theo điều kiện cân bằng tương đối:

$$\vec{P} + \vec{F_e^{qt}} = 0 \qquad (*)$$

Chiếu (*) lên pháp tuyến chính ta có:

$$P - F_e^{qt} = 0 \to P = F_{em}^{qt} = mR\omega_{qd}^2$$

hay $$mg = mR\omega_{qd}^2 \rightarrow g = R\omega_{qd}^2.$$

Gọi ω_* là vận tốc góc của Trái Đất quay quanh trục của nó để trọng lượng $P = 0$ khi ở xích đạo:

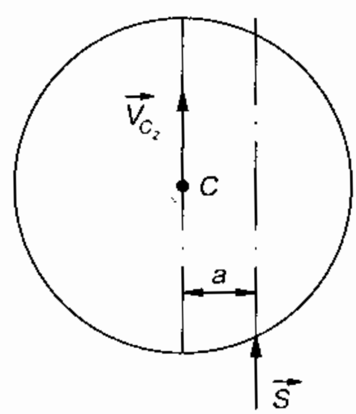
$$\omega_* = k\omega_{qd}, \text{ với } k \text{ là hệ số tỷ lệ.}$$

Khi đó: $$R\omega_*^2 = Rk^2\omega_{qd}^2;$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{R}} \times \frac{1}{\omega_{qd}^2} = \sqrt{\frac{g}{R}} \times \frac{1}{\dfrac{2\pi}{24\times60\times60}} = \sqrt{\frac{g}{R}} \times \frac{24\times60\times60}{2\pi} = 17{,}06 \text{ lần.}$$

LÝ THUYẾT VA CHẠM

Ví dụ I.25: Một đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng m nằm yên trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang. Tại một thời điểm nào đó có một va chạm ở vành đĩa, xung lực va chạm $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng của đĩa và hướng theo đường thẳng cách tâm C của đĩa một khoảng là a. Xác định vị trí của tâm vận tốc tức thời P tại thời điểm kết thúc va chạm.



Hình I.25

Bài giải: Xét va chạm của đĩa tròn. Áp dụng định lý động lượng

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}_k^e.$$

Do lúc đầu đĩa nằm yên nên :

$$\vec{Q}_1 = 0;$$

$$Q_2 = mV_{C_2} = S.$$

Vì sau va chạm vận tốc khối tâm C của đĩa song song với xung lực S và có trị số bằng

$$V_{C_2} = \frac{S}{m}.$$

Theo định lý mômen động lượng đối với trục zC đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng của đĩa và $L_{zC_1} = 0$. Ta có:

$$L_{zC_2} = aS;$$
$$L_{zC_2} = J_{zC}\omega_2.$$

Vì vậy:

$$\frac{1}{2}mR^2\omega_2 = aS = amV_{C_2};$$
$$\frac{V_{C_2}}{\omega_2} = \frac{R^2}{2a}.$$

Mặt khác $V_{C_2} = CP\omega_2 \rightarrow CP = \frac{V_{C_2}}{\omega_2} = \frac{R^2}{2a}.$

Vậy tâm vận tốc tức thời P ở cách khối tâm C của đĩa một đoạn

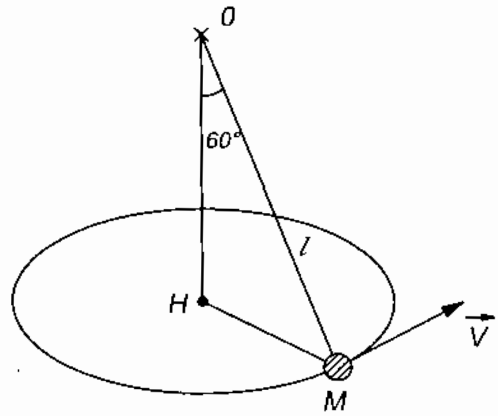
$$d = CP = \frac{R^2}{2a}.$$

II. BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH LỰC THEO CHUYỂN ĐỘNG CHO TRƯỚC

Bài II.1: Một vật nặng M có trọng lượng P = 10N treo vào đầu một sợi dây dài 30cm, đầu kia của dây buộc vào điểm O cố định. Khi chuyển động vật M vạch thành đường tròn trong mặt phẳng nằm ngang, lúc đó sợi dây hợp với đường thẳng đứng một góc 60°.

Xác định vận tốc của vật nặng và sức căng T của sợi dây.



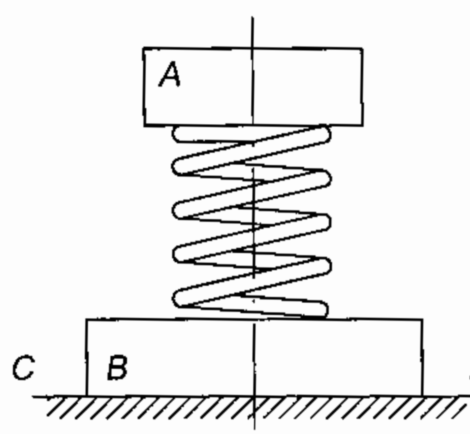
Hình II.1

Bài II.2: Ôtô có trọng lượng Q = 10000N chuyển động trên một chiếc cầu vồng lên với vận tốc V = 10m/s, bán kính cong của cầu tại điểm giữa là ρ = 50m. Hãy xác định áp lực của ôtô lên cầu khi nó đi qua điểm giữa cầu.

Bài II.3: Chuyển động của chất điểm nặng 2N được cho bởi phương trình $x = 3\cos 2\pi t$ (cm), $y = 4\sin \pi t$ (cm), trong đó t tính bằng giây. Xác định hình chiếu của lực tác dụng lên chất điểm phụ thuộc vào toạ độ của nó.

Bài II.4: Các vật A và B có trọng lượng P_A = 20N và P_B = 40N được nối với nhau bằng lò xo như hình II.4. Vật A dao động tự do theo phương thẳng đứng với biên độ 1cm và chu kỳ 0,25 giây.

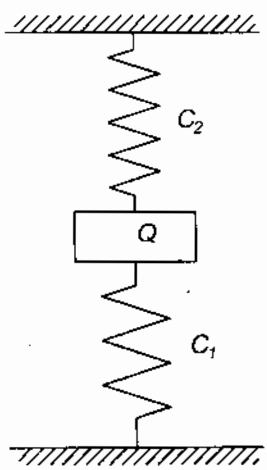
Tìm áp lực lớn nhất của vật A và B lên mặt nền CD.



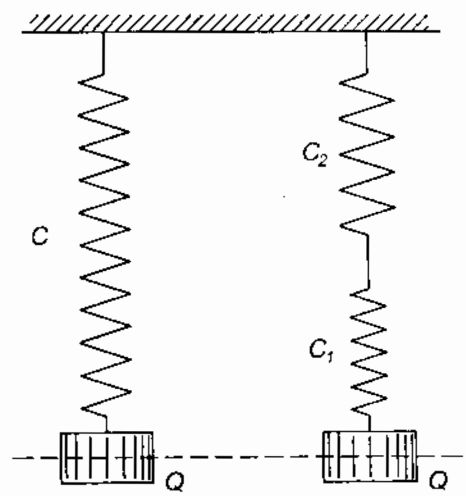
Hình II.4

Bài II.5: Máy bay bổ nhào thẳng đứng đạt được vận tốc 1000km/h, sau đó người lái đưa máy bay ra khỏi hướng bổ nhào và vạch thành một cung tròn bán kính R = 600m trong mặt phẳng thẳng đứng. Trọng lượng người lái là 800N. Hỏi người lái đã ép lên ghế ngồi một lực cực đại bằng bao nhiêu.

Bài II.6: Hãy xác định chu kỳ dao động tự do của tải trọng Q bị nén giữa hai lò xo có hệ số cứng khác nhau là C_1 và C_2 (hình II.6).



Hình II.6

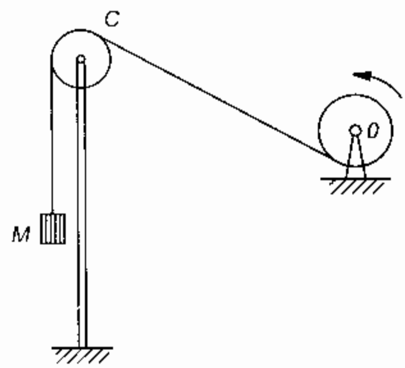


Hình II.7

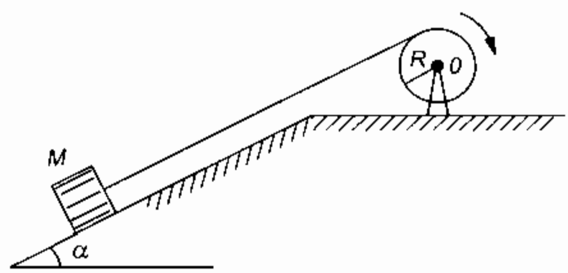
Bài II.7: Hãy xác định hệ số cứng C của lò xo tương đương với lò xo kép gồm hai lò xo có hệ số cứng khác nhau là C_1 và C_2 gắn nối tiếp với nhau. Đồng thời chỉ rõ chu kỳ dao động của tải trọng Q treo vào lò xo kép đó (hình II.7).

Bài II.8: Tời O quay với gia tốc góc ε kéo vật M khối lượng m. Hãy xác định sức căng của dây (hình II.8).

Bài II.9: Tời O quay theo quy luật $\varphi = \dfrac{1}{2}at^2$ kéo vật M khối lượng m chuyển động lên trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α và hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng là f (hình II.9). Hãy xác định sức căng của sợi dây nếu bán kính của tời là R.

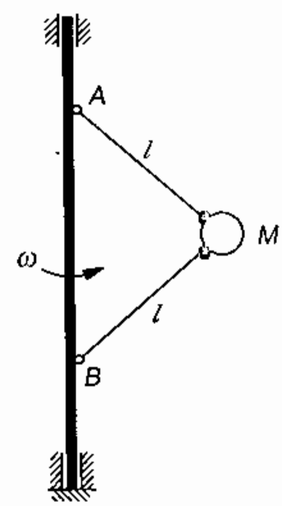


Hình II.8



Hình II.9

Bài II.10: Cho cơ cấu điều tiết ly tâm như hình II.10. Vật M khối lượng m gắn với trục quay bằng bản lề bởi hai thanh AM và BM. xác định ứng lực trong các thanh nếu bỏ qua trọng lượng các thanh và vận tốc ω = const, độ dài $AM = MB = l$, $AB = 2a$.



Hình II.10

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

Bài II.11: Vật nặng 2kG được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc 20m/s. Nó chịu tác dụng của lực cản không khí (tính bằng kG) và có dạng 0,04V, trong đó V tính bằng m/s, g = 9,81m/s^2. Hãy tìm xem sau bao nhiêu giây thì vật đạt vị trí cao nhất.

Bài II.12: Một máy bay đang bay ngang, sức cản của không khí tỷ lệ với bình phương vận tốc và với vận tốc 1m/s thì lực cản bằng 0,05kG. Lực kéo không đổi bằng 3080kG lập với phương bay một góc 10°.

Xác định vận tốc lớn nhất của máy bay.

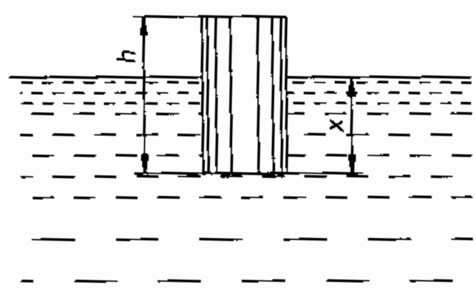
Bài II.13: Một vật rơi xuống mặt đất từ độ cao h không có vận tốc ban đầu. Bỏ quả sức cản của không khí và coi sức hút của trái dất tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ vật đến tâm trái đất.

Tìm thời gian T để vật rơi chạm đất và vận tốc V của nó đạt được sau khoảng thời gian đó. Biết bán kính trái đất bằng R và gia tốc trọng trường bằng g.

Bài II.14: Chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng. Sự phụ thuộc quãng đường dịch chuyển với vận tốc chuyển động được xác định theo biểu thức: $x = a\sqrt{V} - b$, trong đó a và b là hằng số.

Hãy tìm khoảng thời gian cần thiết để vận tốc của động điểm tăng lên gấp hai lần vận tốc ban đầu của nó.

Bài II.15: Một hình trụ tròn khối lượng m được nhấn chìm vào chất lỏng nằm yên có mật độ bằng ρ theo phương thẳng đứng (hình II.15). Tại thời điểm ban đầu trụ tròn dứng yên và dáy dưới của trụ tiếp xúc với mặt chất lỏng. Chiều cao của trụ bằng h, diện tích mặt cắt ngang mặt đáy bằng S.



Hình II.15

Bỏ qua lực cản và giả thiết rằng $m = \rho Sh$. Xác định vận tốc của trụ ở thời điểm khi đáy trên của trụ trùng với bề mặt chất lỏng.

Bài II.16: Một vật nặng được hạ xuống theo mặt phẳng trơn nghiêng với phương nằm ngang một góc 30°. Tại thời điểm ban đầu vận tốc của vật bằng 2m/s. Hãy tìm xem vật đi được 9,6m hết bao nhiêu thời gian.

Bài II.17: Toa tàu điện chuyển động trên đường nằm ngang với vận tốc 36km/h.

Hỏi phải mất bao nhiêu thời gian và quãng đường đi bằng bao nhiêu để toa tàu có thể dừng lại bằng phanh hãm. Biết rằng lực cản chuyển động do phanh hãm là 300N trên 1kN trọng lượng tàu.

Bài II.18: Chất điểm nặng *M* di chuyển lên dọc theo mặt phẳng không nhẵn nghiêng với phương nằm ngang một góc $\alpha = 30^o$. Tại thời điểm ban đầu vận tốc của điểm là $V_o = 15$m/s, hệ số ma sát $f = 0{,}1$.

Bài II.19: Một vật rơi không vận tốc ban đầu trong không khí. Sức cản của không khí là $R = k^2PV^2$, trong đó V là vận tốc của vật, P là trọng lượng của vật.

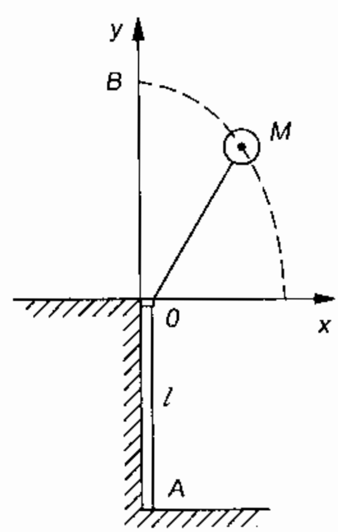
Vận tốc của vật bằng bao nhiêu tại thời điểm t sau khi vật bắt đầu rơi. Tìm giá trị của vận tốc đó.

Bài II.20: Vật thể có trọng lượng $P = 10$N chuyển động dưới tác dụng của lực thay đổi $F = 100(1\text{-}t)$ N, trong đó t tính bằng giây.

Sau bao nhiêu giây thì vật thể dừng lại nếu như vận tốc ban đầu của nó $V_o = 20$cm/s và lực có hướng trùng với hướng vận tốc. Quãng đường đi của vật cho đến khi dừng bằng bao nhiêu.

Bài II.21: Tải trọng *P* được ném lên với vận tốc ban đầu V_o và nghiêng một góc α với phương nằm ngang sẽ chuyển động dưới tác dụng của trọng lượng và lực cản của không khí *R* tỷ lệ bậc nhất với vận tốc theo quy luật $R = kPV$.

Tìm độ cao cực đại *h* của tải trọng so với vị trí ban đầu.



Hình II.22

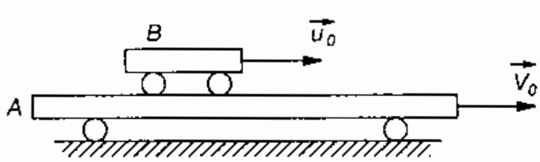
Bài II.22: Một sợi dây đàn hồi gắn chặt tại điểm *A* rồi luồn qua một vòng nhẫn cố định *O*. Quả cầu nhỏ khối lượng *m* (gam) gắn chặt vào đầu tự do của nó. Độ dài dây lúc chưa bị dãn là AO = *l*. Để dãn dài dây ra được 1cm cần phải đặt một lực k^2 m đin. Kéo sợi dây OA đến B sao cho $AB = 2OA$ rồi truyền cho nó vận tốc V_o vuông góc với AB (hình II.22).

Xác định quỹ đạo của quả cầu, bỏ qua tác dụng của trọng lực và coi sức căng của dây tỷ lệ với độ dãn dài của nó.

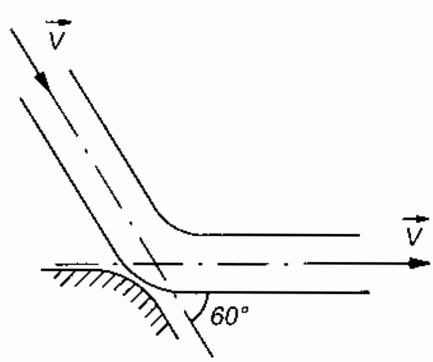
ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

Bài II.23: Hệ số ma sát trượt giữa bánh xe ôtô và nền đường phải bằng bao nhiêu để ôtô đang có vận tốc V = 72km/h dừng lại được sau khi bắt đầu hãm 6 giây. Nếu trọng lượng ôtô là P.

Bài II.24: Trên một mặt sàn nằm ngang A đang chuyển động quán tính với vận tốc $\overrightarrow{V_o}$ có xe dịch chuyển với vận tốc tương đối $\overrightarrow{u_o}$. Tại một thời điểm nào đó xe B được hãm lại. Hãy xác định vận tốc chung của xe B và sàn A sau khi xe B được hãm. Biết khối lượng của sàn là M, của xe là m.



Hình II.24

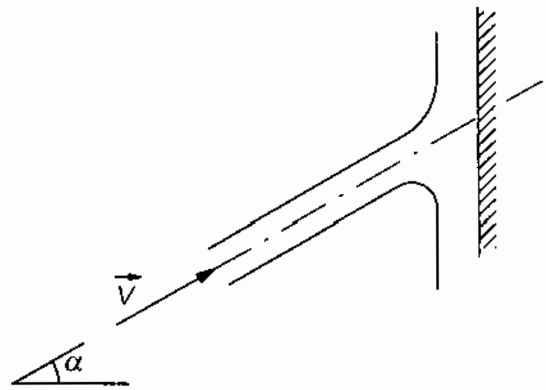


Hình II.25

Bài II.25: Hãy xác định áp lực lên gối tựa A của khuỷu ống có đường kính 20cm. Trục ống nằm trong mặt phẳng nằm ngang (hình II.25 nhìn từ trên xuống). Nước chảy trong ống với vận tốc 4m/s. Vận tốc nước khi vào ống hợp với vận tốc nước khi ra khỏi ống một góc 60°.

Bài II.26: Từ đầu ống cứu hoả có tiết diện 16cm^2 phụt ra một dòng nước nghiêng một góc α = 30° so với phương ngang và với vận tốc 8m/s (hình II.26)

Hãy xác định áp lực của dòng nước lên tường thẳng đứng, giả thiết rằng bỏ qua tác dụng của trọng lực lên dạng của dòng nước.



Hình II.26

Bài II.27: Một vật trượt xuống không có vận tốc ban đầu theo mặt phẳng không nhẵn và nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^o$. Biết hệ số ma sát $\mu = 0,2$. Xác định khoảng thời gian t để vật đi được đoạn đường $l = 39,2$m.

Bài II.28: Đoàn tầu nặng 400kN đến chân dốc có độ dốc $i = \text{tg}\alpha = 0,006$ (trong đó α là góc dốc) có vận tốc 54km/h. Hệ số ma sát (hệ số cản tổng hợp) khi tầu chuyển động bằng 0,005. Sau khi tầu lên dốc được 50 giây, vận tốc của nó giảm xuống còn 45km/h. Tìm lực kéo của đầu tầu.

Bài II.29: Để xác định trọng lượng của đoàn tầu gồm đầu tầu và các toa, người ta đặt một lực kế. Chỉ số trung bình của lực kế trong 2 phút là 100,8kN. Trong khoảng thời gian đó đoàn tầu đạt vận tốc $V = 57,6$km/h (lúc đầu đoàn tầu đứng tại chỗ). Hệ số ma sát $\mu = 0,02$. Hãy tìm trọng lượng đoàn tầu.

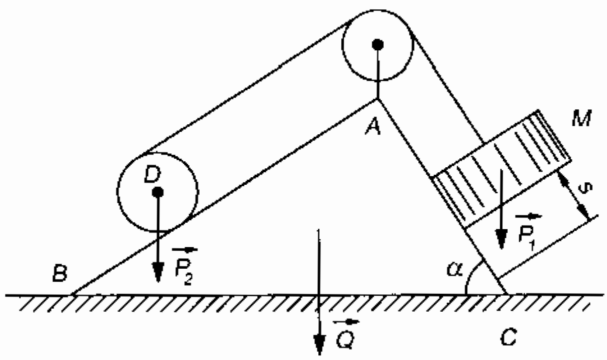
Bài II.30: Trên cầu phao A khối lượng M, một ôtô khối lượng m chuyển động theo quy luật $S(t) = b(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$. Bỏ qua lực cản ngang của nước và tác động của dòng chảy;

Xác định: a. Vận tốc V_A của cầu phao nếu cầu phao không được neo vào bờ.

b. Sức căng T của các dây cáp dùng để giữ cầu phao không chuyển động.

ĐỊNH LÝ KHỐI TÂM

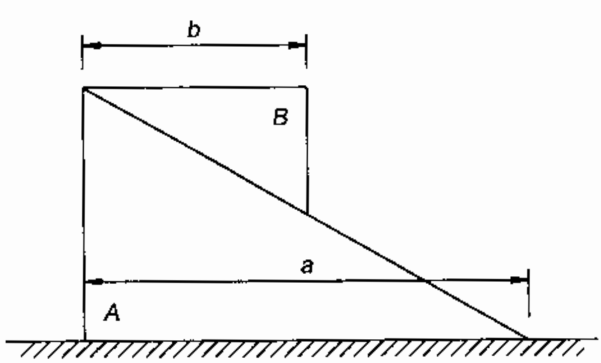
Bài II.31: Lăng trụ tam giác vuông ABC trọng lượng Q đặt trên nền ngang nhẵn. Trên cạnh AC đặt vật M trọng lượng P_1 nối với sợi dây vòng qua ròng rọc và cuốn vào trụ D. Vật M trượt theo mặt AC kéo trụ D lăn không trượt trên mặt AB (hình II.31).



Hình II.31

Xác định dịch chuyển ngang của lăng trụ khi M đi được đoạn s, trọng lượng trụ D là P_2 và góc $ACB = \alpha$, bỏ qua trọng lượng ròng rọc A.

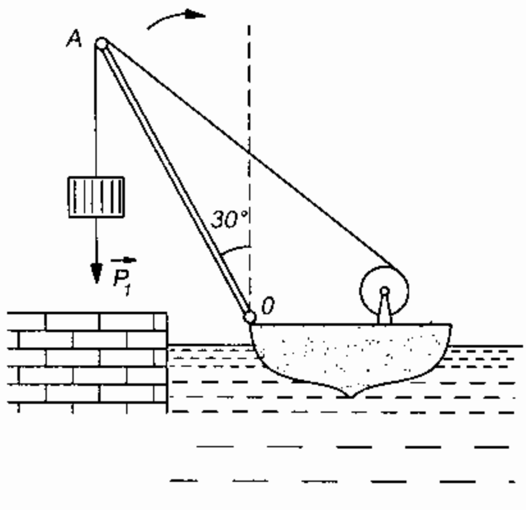
Bài II.32: Ta đặt lăng trụ B đồng chất lên lăng trụ A đồng chất đang nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Tiết diện lăng trụ là các tam giác vuông, trọng lượng lăng trụ A gấp ba lần trọng lượng lăng trụ B. Giả thiết rằng lăng trụ và mặt phẳng nằm ngang đều trơn lý tưởng (hình II.32).



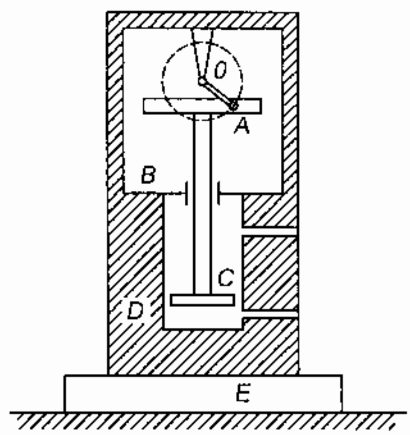
Hình II.32

Xác định độ dài s mà lăng trụ A đi được khi lăng trụ B trượt theo A chớm đến mặt phẳng nằm ngang.

Bài II.33: Hãy xác định dịch chuyển của cần cẩu nổi nâng tải trọng P_1 = 2kN khi thanh nâng AO = 8m quay một góc α = 30° đến vị trí thẳng đứng. Trọng lượng cần cẩu P_2 = 20kN (hình II.33). Bỏ qua sức cản ngang của nước và trọng lượng thanh nâng. Lúc đầu hệ đứng yên.



Hình II.33

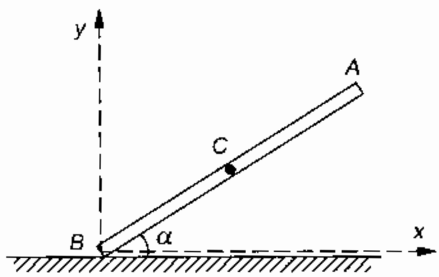


Hình II.34

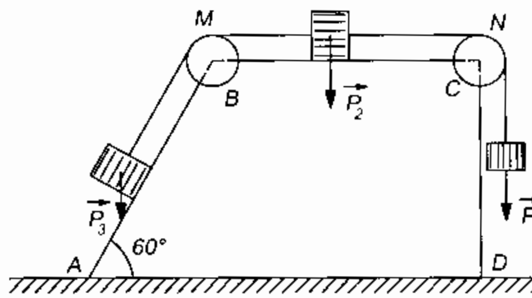
Bài II.34: Xác định áp lực lên đất của máy bơm để xả nước khi nó chạy không tải, biết rằng phần thân D cố định và đế E có trọng lượng P_1. Tay quay $OA = a$ có trọng lượng P_2, trọng lượng rãnh B và pittông C bằng P_3. Tay quay OA là thanh đồng chất quay đều với vận tốc góc ω (hình II.34)

Bài II.35: Thanh đồng chất AB dài $2l$ có đầu B tựa lên mặt phẳng nhẵn nằm ngang và nghiêng một góc α (hình II.35).

Xác định phương trình quỹ đạo điểm A khi thanh rơi xuống mặt phẳng ngang.



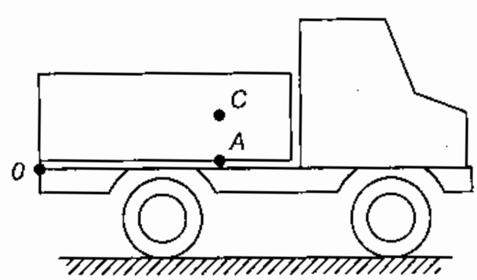
Hình II.35



Hình II.36

Bài II.36: Ba tải trọng P_1 = 20kN, P_2 = 15kN và P_3 = 10kN nối với nhau bằng sợi dây không dãn, không trọng lượng, dây vắt qua các ròng rọc cố định *M* và *N*. Khi hạ tải trọng P_1 xuống thì P_2 dịch chuyển về phía bên phải theo đáy trên của hình thang *AB*CD của tháp cụt có trọng lượng *Q* = 100kN, còn tải trọng P_3 được nâng lên theo cạnh bên *AB*. Bỏ qua ma sát giữa tháp cụt *ABCD* và sàn. Hãy xác định chuyển dịch của tháp cụt *ABCD* với sàn, nếu tải trọng P_1 hạ xuống được 1m.

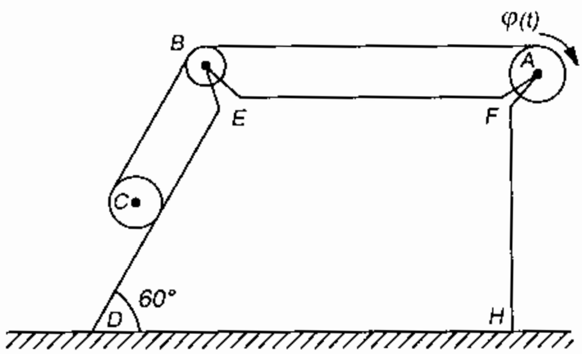
Bài II.37: Xác định dịch chuyển của ôtô tự đổ. Ở thời điểm ban đầu đứng yên khi thùng xe trọng lượng 4T từ vị trí nằm ngang quay quanh trục *O* vuông góc với mặt phẳng (hình II.37) một góc α = 30° so với phương ngang. Trọng lượng xe không kể thùng xe bằng 1,5T. Vị trí khối tâm *C* của thùng xe được chỉ trên hình II.37 với *OA* = 2m; AC = 50cm. Bỏ qua các lực cản chuyển động.



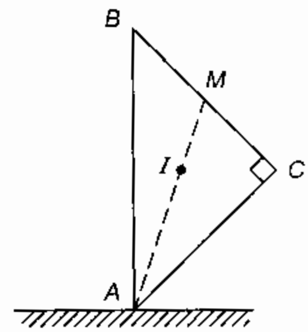
Hình II.37

Bài II.38: Lăng trụ *DEFH* có khối lượng 6m đặt trên mặt nhẵn nằm ngang. Mặt *DE* nghiêng với phương ngang góc 60°. Con lăn đồng chất C khối lượng 2m lăn không trượt nhờ dây kéo cuốn quanh nó và được buộc vào mặt trống A. Trống A có khối lượng m bán kính r cuốn dây quay theo quy luật $\varphi = 0{,}5\varepsilon t^2$, ròng rọc B có khối lượng m.

Xác định quy luật chuyển động của lăng trụ nếu khi $t = 0$ lăng trụ đứng yên. Coi khối tâm của trống và ròng rọc đặt tại trục quay của nó.



Hình II.38



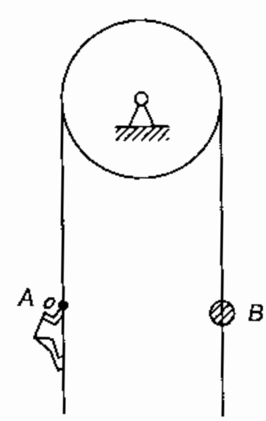
Hình II.39

Bài II.39: Bản đồng chất ABC có dạng hình tam giác vuông cân có cạnh huyền AB = 12cm. Ta đặt đỉnh A của bản trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn sao cho cạnh huyền thẳng đứng. Sau đó để cho bản rơi tự do dưới tác dụng của trọng lực.

Xác định quỹ đạo của trung điểm M thuộc cạnh góc vuông BC.

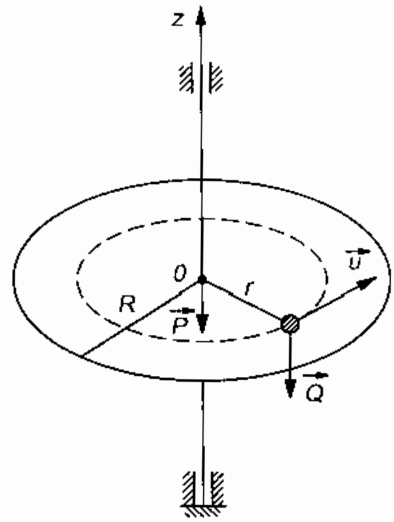
ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Bài II.40: Một sợi dây vắt qua ròng rọc khối lượng của nó có thể bỏ qua. Một người nắm vào dây tại điểm A, còn tại điểm B treo tải trọng có cùng trọng lượng với người (hình II.40). Nếu người leo lên dây với vận tốc a tương đối với dây thì tải trọng sẽ chuyển động như thế nào.



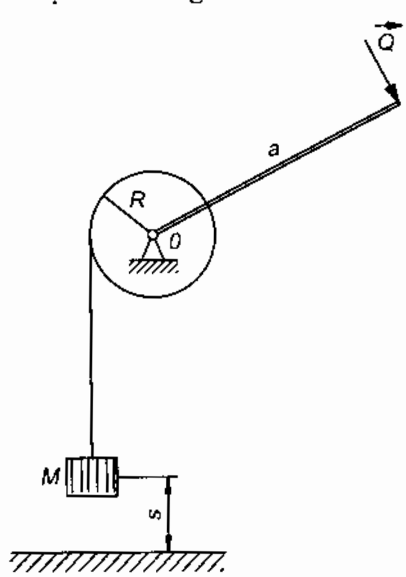
Hình II.40

Bài II.41: Một bàn tròn nằm ngang quay không ma sát xung quanh trục thẳng đứng Oz đi qua tâm O của nó. Một người trọng lượng Q đi trên bàn luôn luôn cách trục Oz một khoảng bằng r với vận tốc u không đổi (hình II.41). Hỏi khi đó bàn sẽ quay quanh trục Oz với vận tốc góc ω bằng bao nhiêu. Coi trọng lượng P của bàn phân bố đều trên diện tích hình tròn bán kính R. Tại thời điểm ban đầu bàn và người có vận tốc bằng không.



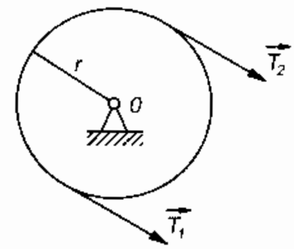
Hình II.41

Bài II.42: Vật M khối lượng m_1 được nối với sợi dây cuốn vào trống O khối lượng m_2, bán kính R. Gắn vào O thanh mảnh OA và tác dụng của lực Q tại đầu A làm cho trống quay và kéo vật lên (hình II.42). Xác định luật chuyển động của vật M và sức căng T của dây treo. Coi trống là khối trụ tròn đồng chất.



Hình II.42

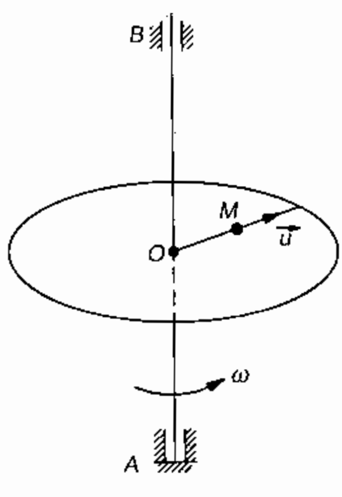
Bài II.43: Sức căng của nhánh dẫn và nhánh bị dẫn của đai truyền làm quay bánh đai có bán kính r = 20cm và trọng lượng P = 3,27N có giá trị tương ứng T_1 = 10,1N, T_2 = 5,05N (hình II.43). Mômen của lực cản phải bằng bao nhiêu để bánh đai quay với gia tốc góc ε = 1,5rađ/s (coi bánh đai là đĩa tròn đồng chất).



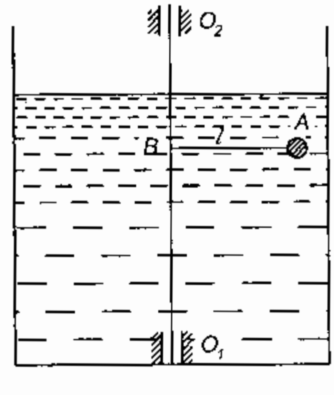
Hình II.43

Bài II.44: Một cố thể đang đứng yên, nhờ mômen không đổi M nó quay quanh trục thẳng đứng cố định, khi đó cũng xuất hiện mômen của lực cản tỷ lệ với bình phương vận tốc góc quay của cố thể $M_C = \alpha\omega^2$. Mômen quán tính của cố thể đối với trục quay bằng J. Tìm quy luật thay đổi vận tốc góc.

Bài II.45: Đĩa tròn đồng chất khối lượng m_1 quay quanh trục AB với vận tốc góc ban đầu ω_0. Trên bán kính của đĩa, một chất điểm M khối lượng m_2 chuyển động từ O với vận tốc không đổi u (hình II.45). Xác định vận tốc góc của đĩa theo thời gian t và vận tốc góc ω_1 khi M tới vành đĩa. Tại thời điểm đầu M ở tại tâm đĩa, bỏ qua ma sát tại các ổ trục.



Hình II.45

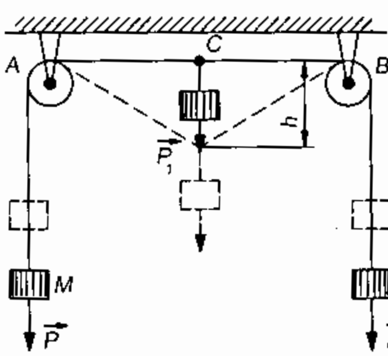


Hình II.46

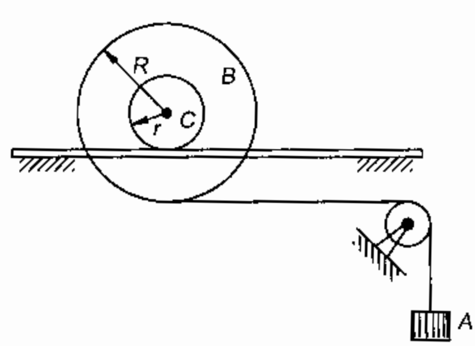
Bài II.46: Quả cầu A khối lượng m gắn vào đầu thanh $AB = l$ và gắn với trục quay O_1O_2. Cả hệ thống đặt trong bình chứa chất lỏng (hình II.46). Lực cản của chất lỏng tác dụng lên qủa cầu ngược với vận tốc góc và có giá trị $R_C = \alpha m\omega$ (α là hệ số tỷ lệ). Biết rằng vận tốc góc ban đầu là ω_0. Hãy xác định khoảng thời gian T để vận tốc góc giảm đi một nửa và số vòng quay trong khoảng đó.

ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Bài II.47: Người ta kéo căng một sợi dây vắt qua hai ròng rọc khá bé A và B nằm trên cùng một đường thẳng nằm ngang cách nhau một khoảng $AB = 2l$. Ở hai đầu dây treo hai tải trọng M bằng nhau. Mỗi tải nặng P (N). Sau đó treo tải trọng M_1 nặng P_1 (N) vào điểm C của dây ở giữa hai ròng rọc và cho nó rơi không vận tốc ban đầu. Hãy xác định khoảng cách lớn nhất h mà tải M_1 hạ xuống được. Giả thiết rằng dây đủ dài và $P_1 < 2P$.



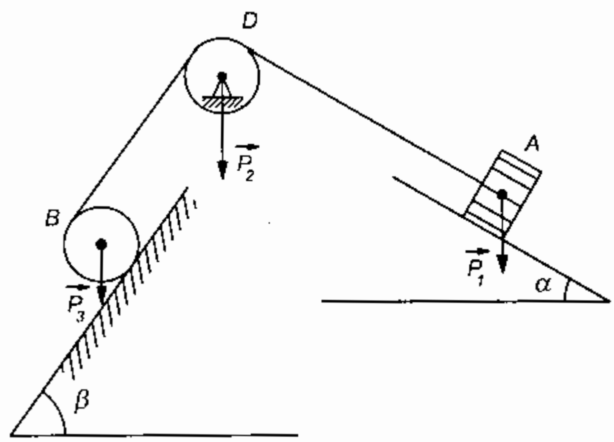
Hình II.47



Hình II.48

Bài II.48: Tải A có trọng lượng P trong khi hạ xuống dưới nhờ sợi dây không dãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc cố định D không trọng lượng và cuốn vào bánh đai B làm cho trục C lăn không trượt theo đường ray nằm ngang. Bánh đai B bán kính R gắn chặt vào trục C bán kính r. Trọng lượng tổng cộng của chúng bằng Q, bán kính quán tính đối với trục O trực giao với mặt phẳng hình vẽ bằng ρ. Hãy tìm gia tốc của tải trọng A.

Bài II.49: Vật A trọng lượng P_1 được buộc vào dây không dãn vắt qua ròng rọc cố định D trọng lượng P_2 và cuốn vào con lăn hình trụ B trọng lượng P_3. Vật A chuyển động xuống theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α làm cho ròng rọc D chuyển động và con lăn B lăn không trượt lên trên theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc β (hình II.49).



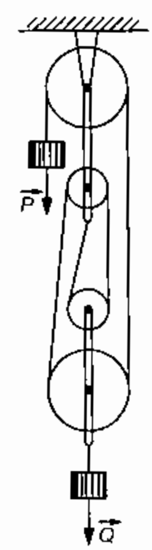
Hình II.49

Xác định vận tốc vật A phụ thuộc vào đoạn đường dịch chuyển s của nó, nếu ban đầu hệ đứng yên. Ròng rọc và con lăn được xem là các hình trụ tròn đồng chất có cùng bán kính. Bỏ qua khối lượng dây và các lực ma sát.

Bài II.50: Giải bài toán trên khi có ma sát trượt f và ma sát lăn f_o, bán kính của con lăn bằng r.

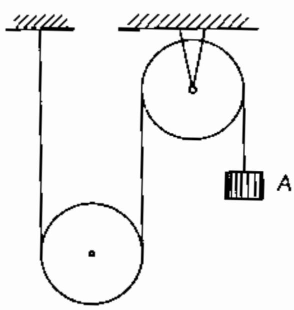
Bài II.51: Phải hạ tải trọng P với gia tốc W bằng bao nhiêu để nâng tải trọng Q nhờ hệ palăng như hình II.51. Với điều kiện nào tải trọng P chuyển động đều. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và dây cáp.

Ghi chú: gia tốc của tải trọng Q nhỏ hơn gia tốc của tải trọng P bốn lần.

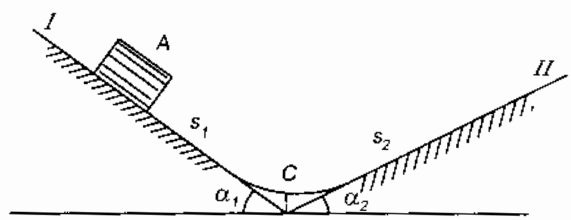


Hình II.51

Bài II.52: Đầu của một sợi dây mềm buộc vào một điểm cố định. Dây vắt qua một ròng rọc động có khối lượng M bán kính R và mômen quán tính J. Ròng rọc cố định có cùng khối lượng M bán kính R và mômen quán tính J_1. Đầu kia của dây buộc vào vật A có khối lượng m. Tìm gia tốc của vật A nếu coi đoạn dây tự do thẳng đứng. Lúc đầu hệ đứng yên.



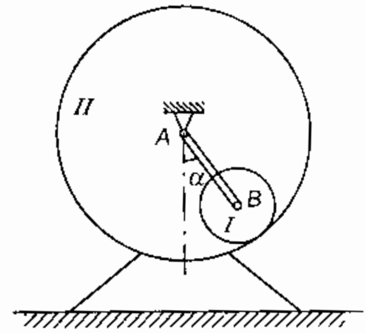
Hình II.52



Hình II.53

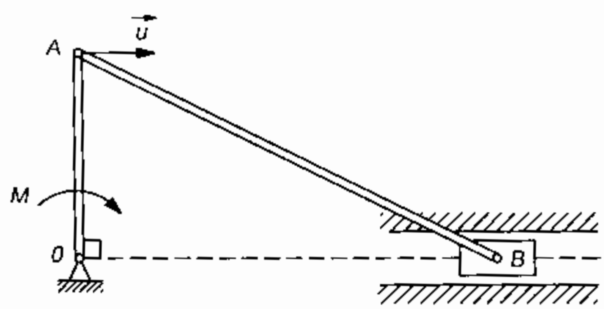
Bài II.53: Vật A trượt trên mặt nghiêng I với góc nghiêng α_1 và vận tốc đầu bằng không, vật đi được quãng đường s_1 tới C rồi trượt lên mặt nghiêng II với góc nghiêng α_2 và dừng lại sau quãng đường đi được s_2. Tìm quãng đường s_2 nếu biết góc ma sát trượt giữa vật A và hai mặt nghiêng là φ_1 và φ_2 (giả thiết rằng $\alpha_1 > \varphi_1$) (hình II.53).

Bài II.54: Bánh xe I khối lượng m_1 chuyển động lăn không trượt trên mặt cong cố định II nhờ liên kết với thanh AB bằng bản lề tại A và B (hình II.54). Thanh $AB = l$ đồng chất có khối lượng m_2. Ban đầu $\alpha_o = 60°$ và hệ đứng yên. Hãy xác định vận tốc góc ω của thanh AB khi hệ qua vị trí cân bằng ứng với $\alpha = 0$. Bánh xe I có bán kính R và hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.



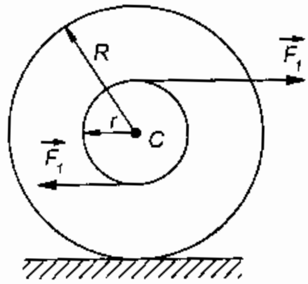
Hình II.54

Bài II.55: Cơ cấu tay quay thanh truyền OAB chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M = const. Tại vị trí khảo sát $V_A = u$, góc $AOB = \frac{\pi}{2}$. Hãy xác định vận tốc điểm A khi hệ ở vị trí nằm ngang (O, A, B thẳng hàng) biết rằng OA và AB là hai thanh đồng chất có khối lượng là m_1 và m_2 (hình II.55).

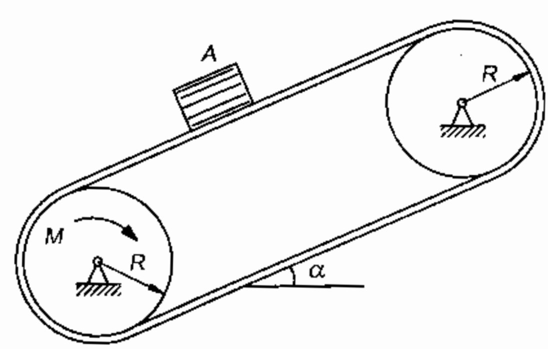


Hình II.55

Bài II.56: Bánh xe kép khối lượng M và mômen quán tính với tâm C là J. Bánh xe chuyển động lăn không trượt trên đường ngang nhờ tác dụng của hai lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ như hình II.56. Xác định gia tốc của khối tâm C biết các bán kính là R, r và $F_1 > F_2$. Lúc đầu hệ đứng yên.



Hình II.56

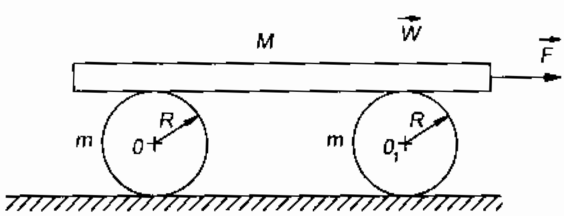


Hình II.57

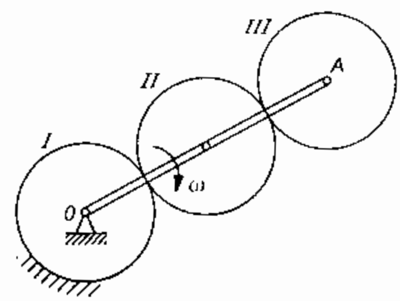
Bài II.57: Băng truyền vật liệu được mô tả trên hình II.57. Khối lượng vật tải A là m_1; hai bánh xe, mỗi bánh có khối lượng m_2 bán kính R

được xem là đĩa tròn đồng chất. Khối lượng của băng truyền là m_3 được coi là đồng chất và phân bố đều. Băng truyền chuyển động dưới tác dụng của mômen M = const. Xác định vận tốc góc ω theo góc quay φ và gia tốc góc ε, giả thiết ban đầu hệ đứng yên, góc nghiêng là α. Bỏ qua sự trượt của A trên băng.

Bài II.58: Tấm phẳng khối lượng M đặt trên hai con lăn như hình II.58. Mỗi con lăn khối lượng m, bán kính R và được xem như dĩa tròn đồng chất. Hệ chuyển động nhờ tác dụng lực $\vec{F} = \text{const}$. Xác định gia tốc của tấm nếu giả thiết các con lăn chuyển động lăn không trượt và hệ số ma sát lăn là k.



Hình II.58



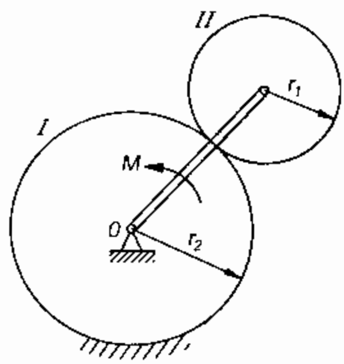
Hình II.59

Bài II.59: Cơ cấu truyền động nằm trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động được nhờ tay quay OA nối trục của ba bánh xe bằng nhau I, II, III. Bánh xe I cố định, tay quay OA quay quanh O với vận tốc góc ω. Các bánh xe có cùng trọng lượng P và bán kính r, trọng lượng tay quay là Q (hình I.59).

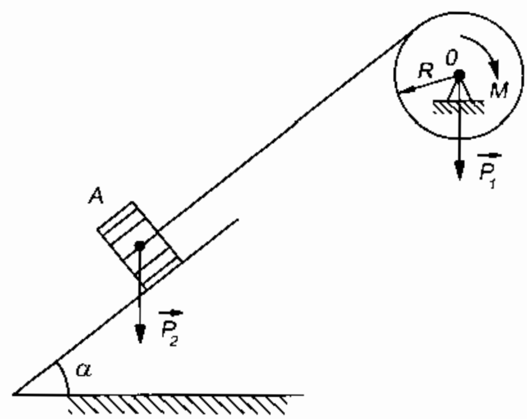
Tính động năng của cơ cấu, xem các bánh xe là đĩa tròn đồng chất, còn tay quay là thanh đồng chất. Công của ngẫu lực đặt vào bánh xe III bằng bao nhiêu.

Bài II.60: Cơ cấu vòng tròn ngoại luân đặt trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động được nhờ mômen quay không đổi M tác dụng vào tay quay OA (hình II.60).

Xác định vận tốc góc của tay quay phụ thuộc vào góc quay của nó. Cho biết bánh xe *I* cố định có bán kính r_1, bánh xe động II có bán kính r_2 trọng lượng *P*, tay quay *OA* có trọng lượng *Q*. Xem bánh xe là đĩa tròn đồng chất và tay quay là thanh đồng chất.



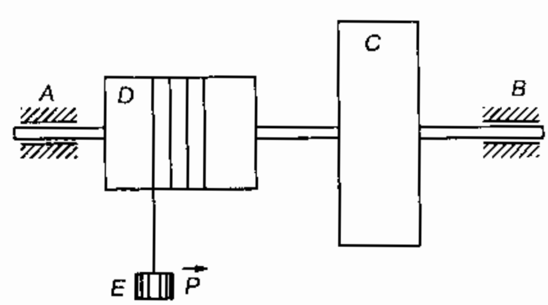
Hình II.60



Hình II.61

Bài II.61: Mômen quay không đổi *M* tác dụng vào tang quay của tời có bán kính *R* trọng lượng P_1. Tải trọng P_2 buộc vào đầu *A* của sợi dây cuốn vào tang quay, nó được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α (hình II.61).

Tang quay của tời đạt được vận tốc góc bao nhiêu, sau khi nó quay được một góc φ. Hệ số ma sát trượt giữa tải trọng và mặt phẳng nghiêng bằng μ. Bỏ qua khối lượng của dây và xem tang quay như là hình trụ tròn đồng chất. Lúc đầu hệ đứng yên.



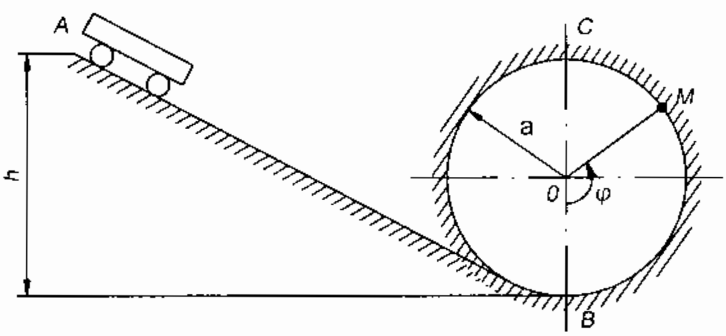
Hình II.62

Bài II.62: Trên trục *AB* người ta gắn đúng tâm vôlăng *C* có mômen quán tính đối với trục quay là J và trống D bán kính R. Trên trống có cuốn một sợi dây treo vật nặng P. Cho mômen quán tính của trục AB và trống D là J_o. Bỏ qua ma sát ở ổ trục và dây treo (hình II.62). Tìm:

a. Gia tốc của vật nặng.

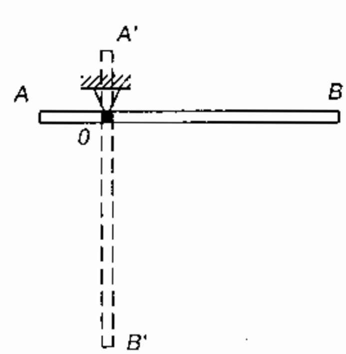
b. Mômen quán tính J của vôlăng C nếu biết sau thời gian t vật rơi một đoạn h. Ban đầu hệ đứng yên.

Bài II.63: Toa goòng trọng lượng P lăn theo ray đặt trên đường AB, sau đó theo vòng lộn lại dưới dạng đường tròn BC bán kính a. Hỏi ta phải thả goòng không có vận tốc ban đầu từ độ cao h bằng bao nhiêu để goòng có thể đi hết đường tròn mà không tách rời khỏi nó. Xác định áp lực N của goòng lên đường tròn tại điểm M với góc $MOB = \varphi$ (hình II.63).



Hình II.63

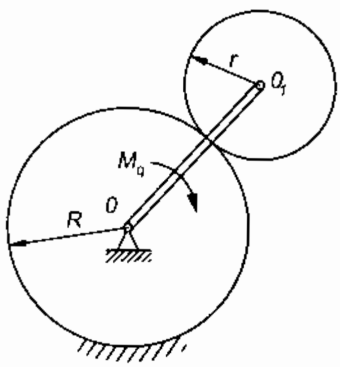
Bài II.64: Thanh đồng chất $AB = l = 1{,}2$m trọng lượng P có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang O cách đầu A một đoạn $OA = \frac{1}{4}l$. Thanh được giữ ở vị trí nằm ngang rồi sau đó thả cho chuyển động. Xác định vận tốc đầu B khi thanh chuyển động đến vị trí thẳng đứng.



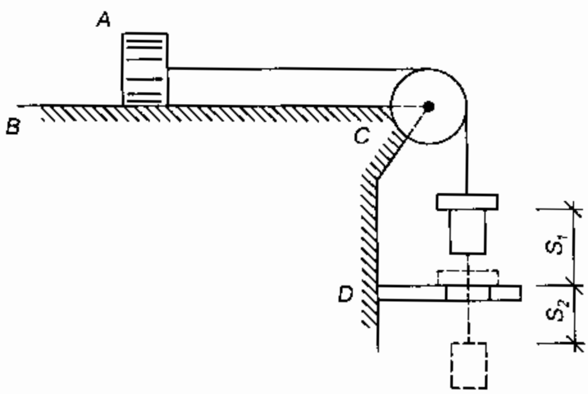
Hình II.64

Bài II.65: Một mômen quay $M_q = M_o - \alpha\omega$ (trong đó M_o và α là các hằng số dương còn ω là vận tốc góc của tay quay O_1O) tác dụng lên tay quay O_1O của cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng nằm ngang. Khối lượng tay quay là m, của bánh xe động là M. Ở thời điểm ban đầu hệ đứng yên. Bỏ qua lực cản.

Hãy xác định vận tốc góc của tay quay là hàm của thời gian t. Coi tay quay là thanh đồng chất, bánh xe động là đĩa tròn đồng chất bán kính r còn bánh xe cố định có bán kính R.



Hình II.65



Hình II.66

Bài II.66: Nhờ sợi dây vắt qua ròng rọc, tải trọng P với phụ tải P_1 đã làm cho vật A có trọng lượng Q nằm trên mặt phẳng không nhẵn nằm ngang BC dịch chuyển từ vị trí đứng yên. Khi hạ xuống một đoạn S_1 tải trọng P đi qua vòng D, vòng này gạt bỏ phụ tải P_1. Sau đó chỉ còn tải trọng P hạ xuống thêm một đoạn S_2 thì dừng lại.

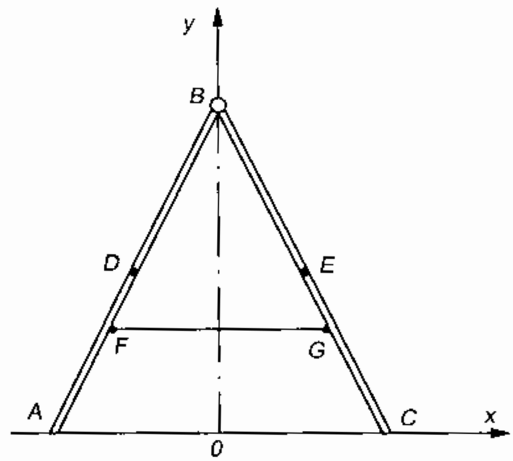
Hãy xác định hệ số ma sát động giữa vật A và mặt phẳng BC. Bỏ qua khối lượng của dây, của ròng rọc và ma sát tại ròng rọc. Biết

$$Q = 0{,}8\text{N};\ P = P_1 = 0{,}1\text{N};\ S_1 = 50\text{cm};\ S_2 = 30\text{cm}.$$

Bài II.67: Một cái thang kép ABC có bản lề tại B được dựng trên sàn nhẵn nằm ngang. Độ dài AB = BC = 2a. Trọng tâm các thanh ở tại trung điểm D và E. Bán kính quán tính của mỗi thanh đối với trục đi qua trọng tâm bằng ρ, khoảng cách từ bản lề B đến mặt sàn bằng h. Tại thời điểm nào đó thang bắt đầu rơi do đứt dây chằng FG. Bỏ qua ma sát tại bản lề B. Xác định:

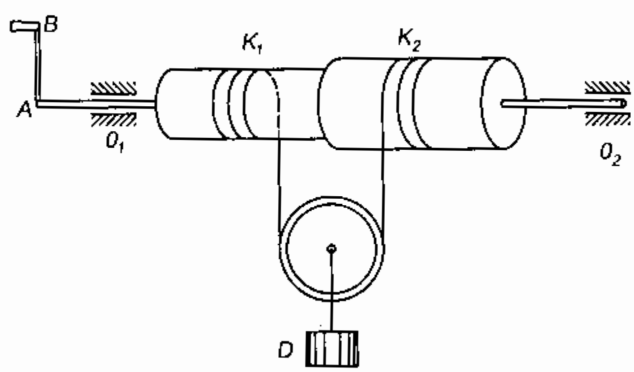
a. Vận tốc của điểm B khi nó chạm mặt sàn.

b. Vận tốc của điểm B khi nó cách mặt sàn một khoảng $\frac{h}{2}$.



Hình II.67

Bài II.68: Trong cơ cấu tời vi sai có hai trục hình trụ K_1 và K_2 với bán kính tương ứng r_1 và r_2; mômen quán tính đối với trục O_1O_2 tương ứng là J_1 và J_2 chúng gắn liền vào nhau và quay được nhờ tay quay AB. Ròng rọc động C treo vào sợi dây không dãn và không trọng lượng, nhánh trái của dây cuốn vào trục K_1 còn nhánh phải cuốn vào trục K_2. Khi quay tay quay AB thì nhánh trái của dây lơi khỏi trục K_1 còn nhánh phải cuốn vào trục K_2. Tải D có trọng lượng P treo vào ròng rọc C; mômen quay không đổi M tác dụng vào tay quay AB.

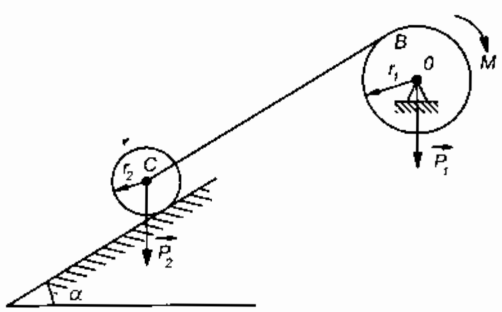


Hình II.68

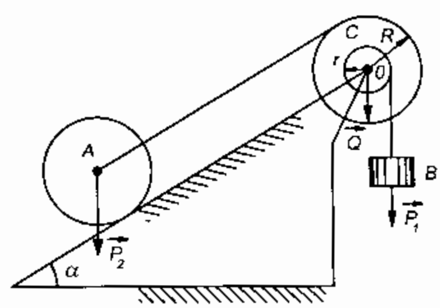
Tìm vận tốc góc của tay quay khi nâng tải trọng lên một đoạn bằng S. Lúc đầu hệ đứng yên. Bỏ qua khối lượng tay quay và ròng rọc.

Bài II.69: Tang quay B trọng lượng P_1 bán kính r_1 quay quanh trục O. Đầu một sợi dây không dãn không trọng lượng cuốn vào tang quay còn đầu kia của dây buộc vào trục C của con lăn trọng lượng P_2 bán kính r_2. Một ngẫu lực có mômen $M(t)$ tác dụng vào tang quay. Con lăn C lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α. Bỏ qua ma sát ở trục O và ma sát lăn. Hệ số ma sát trượt giữa con lăn và mặt đường là f. Dây kéo song song với mặt phẳng nghiêng. Tang quay được coi là trụ tròn đồng chất.

Cho $M(t) = M_o - b\omega_1$. Trong đó M_o và b là các hằng số dương, ω_1 là trị số vận tốc góc của tang quay. Tìm biểu thức vận tốc góc của tang quay là hàm của thời gian. Biết rằng lúc đầu hệ đứng yên.



Hình II.69



Hình II.70

Bài II.70: Một ròng rọc kép trọng lượng Q bán kính R và r có thể quay quanh trục cố định đi qua O. Một sợi dây không dãn không trọng lượng cuốn vào ròng rọc kép C. Một đầu dây buộc vào vật B trọng lượng P_1, đầu kia của dây buộc vào trục A của bánh xe đồng chất trọng lượng P_2 bán kính R và có thể chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α. Bán kính quán tính của ròng rọc kép đối với trục O là ρ ($J_O = \frac{Q}{g}\rho^2$). Bỏ qua ma sát lăn và ma sát ở trục quay O. Lúc đầu hệ đứng yên.

Tính gia tốc vật B:

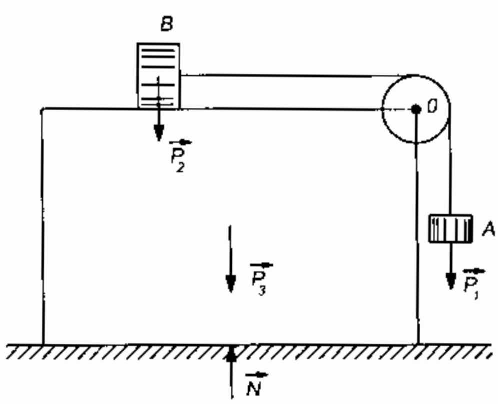
a. Với điều kiện nào vật B chuyển động hướng xuống dưới (khi nào hướng lên).

b. Trường hợp nào vật B chuyển động thẳng đều.

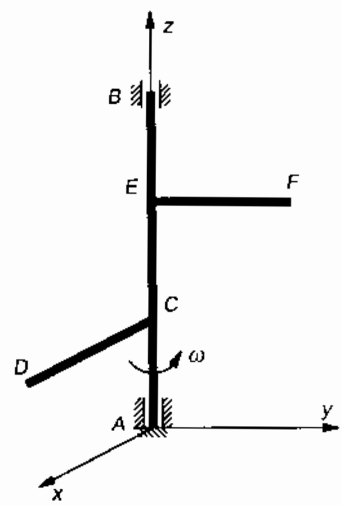
NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

Bài II.71: Vật A trọng lượng P_1 chuyển động di xuống làm cho vật B trọng lượng P_2 chuyển động trên mặt bàn ngang nhẵn. Bỏ qua trọng lượng của ròng rọc O, cho biết trọng lượng của bàn là P_3.

Xác định áp lực của bàn lên nền ngang (hình II.71).



Hình II.71



Hình II.72

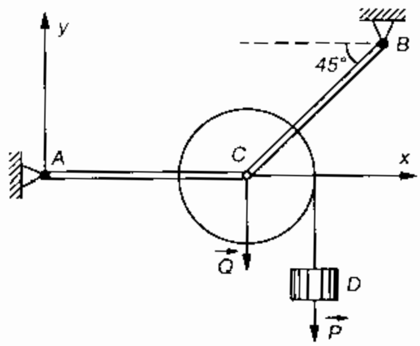
Bài II.72: Hai thanh đồng chất CD và EF có cùng chiều dài a và trọng lượng P, được gắn vuông góc với trục AB như hình II.72. Hệ thanh quay quanh trục z với vận tốc góc ω không đổi.

Cho thanh $AC = CE = EB = 1$m. Xác định áp lực động lực tác dụng lên hai ổ trục A, B.

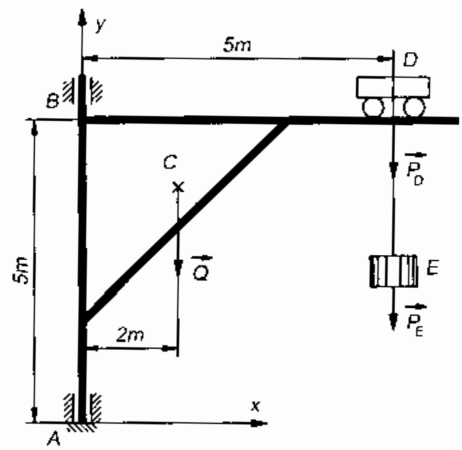
Bài II.73: Ròng rọc C quay nhờ vật treo P, M_C là mômen cản ở ổ trục C. Trọng lượng ròng rọc là Q, bán kính R và được xem như đĩa tròn đồng chất.

Hãy tìm: 1. Gia tốc vật P.

2. Phản lực động lực trong các thanh AC và BC (hình II.73).



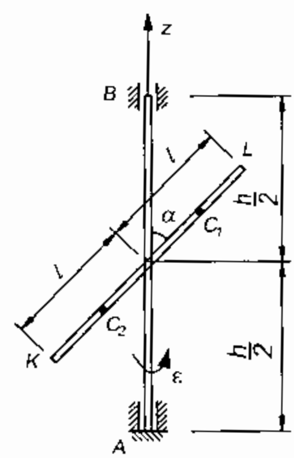
Hình II.73



Hình II.74

Bài II.74: Xác định phản lực tại các ổ trục A, B của cần trục quay khi nâng vật E trọng lượng 3kN với gia tốc bằng $\frac{1}{3}g$. Trọng lượng của cần trục bằng 2kN và đặt tại trọng tâm C của nó. Trọng lượng xe con D bằng 0,5kN. Cần trục và xe con không chuyển động. Các kích thước như hình II.74.

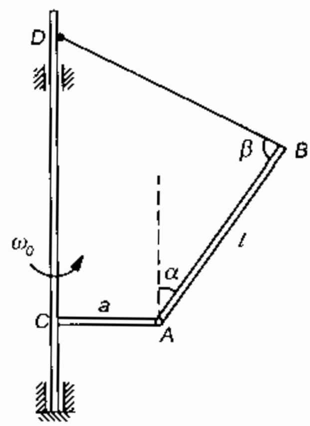
Bài II.75: Thanh đồng chất KL dài $2l$, trọng lượng P được gắn vào trục quay thẳng đứng AB, quay nhanh dần đều với gia tốc góc ε tại điểm giữa của thanh và hợp với trục quay một góc α. Xác định áp lực động lực của trục AB lên ổ trục A và B. Tại thời điểm đầu cả hệ đứng yên. $OA = OB = \frac{h}{2}$ (hình II.75).



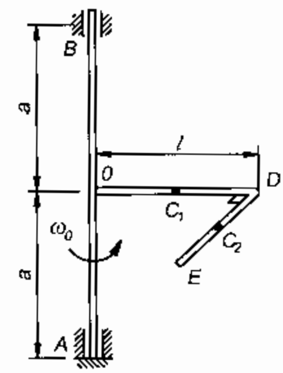
Hình II.75

Bài II.76: Một thanh đồng chất AB chiều dài l, khối lượng m gắn vào thanh CA bằng bản lề A. Thanh CA gắn trục quay thẳng đứng. Trục vuông góc quay với ω_o = const (hình II.76).

Xác định sức căng T của dây BD giữ cho thanh AB nghiêng với phương thẳng đứng góc α không đổi. Nếu góc $\beta = \frac{\pi}{2}$ và $CA = a$.



Hình II.76



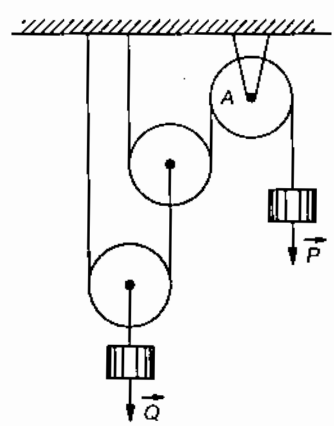
Hình II.77

Bài II.77: Hai thanh đồng chất OD và DE có cùng chiều dài l và khối lượng m được gắn với nhau tạo thành góc vuông. Thanh được gắn vào điểm giữa O của trục quay AB sao cho mặt phẳng ODE vuông góc với AB. Trục AB quay với vận tốc ω_o = const.

Xác định phản lực toàn phần tại ổ đỡ A và B (kích thước cho trên hình II.77).

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

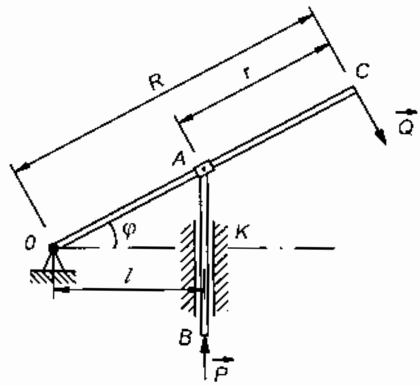
Bài II.78: Một cơ hệ gồm có ròng rọc cố định A và n ròng rọc động. Xác định tỷ số giữa tải trọng được nâng Q và lực P đặt vào đầu dây vắt qua ròng rọc cố định A để hệ cân bằng (hình II.78).



Hình II.78

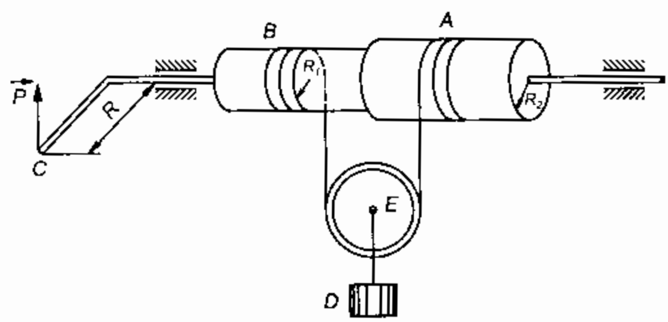
Bài II.79: Cho một cơ cấu thanh trượt. Khi tay quay OC quay quanh trục nằm ngang O thì con chạy A chuyển dịch dọc theo tay quay OC làm cho thanh

AB chuyển động trong rãnh thẳng đứng *K*. Cho biết $OC = R$, $OK = l$. Tại *C* cần phải đặt lực *Q* vuông góc với *OC* bằng bao nhiêu để cân bằng với lực *P* tác dụng vào thanh *AB* như hình II.79.



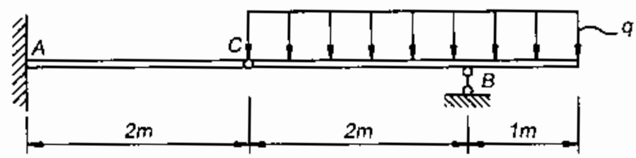
Hình II.79

Bài II.80: Trục kéo vi sai có hai tầng *A* và *B* gắn chặt với nhau chuyển động nhờ tay quay *C* dài *R*. Vật nặng *D* trọng lượng *Q* được treo vào ròng rọc động E. Khi quay tay quay *C* để kéo *D* lên thì nhánh dây trái nhả ra khỏi tầng *B* và nhánh dây phải cuốn vào tầng *A*. Bán kính của hai tầng đó lần lượt là R_2 và R_1 (với $R_1 < R_2$). Tìm lực *P* cần đặt vuông góc với tay quay tại đầu mút của nó để giữ cho hệ cân bằng (hình II.80).



Hình II.80

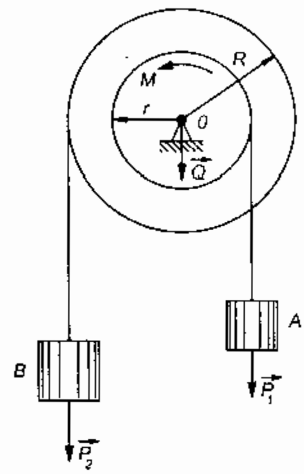
Bài II.81: Cho hệ dầm như hình II.81. Tìm các phản lực tại *A* và *B*. Cho biết $q = 4{,}9$N/m.



Hình II.81

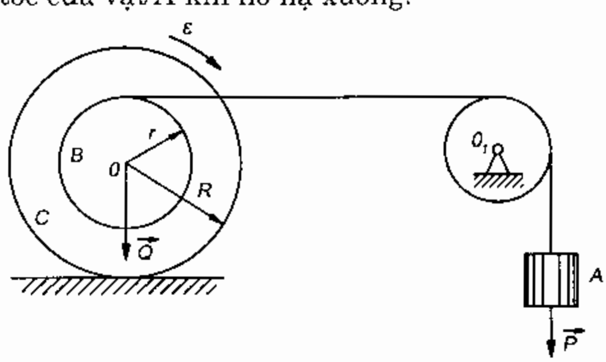
PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Bài II.82: Hai vật nặng P_1 và P_2 được buộc vào hai dây cuốn vào hai tang của một tời bán kính r, R. Để nâng vật nặng P_1 lên, ta tác dụng lên tời một mômen quay M. Tìm gia tốc góc của tời quay. Biết trọng lượng của tời là Q và bán kính quán tính đối với trục quay là ρ (hình II.82).



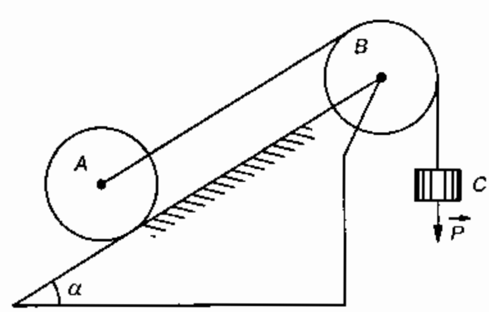
Hình II.82

Bài II.83: Cho một cơ cấu như hình II.83. Vật A có trọng lượng P. Trọng lượng chung của trống B và bánh xe C là Q, bán kính quán tính đối với trục O là ρ. Tìm gia tốc của vật A khi nó hạ xuống.



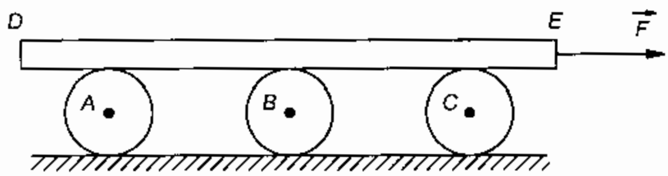
Hình II.83

Bài II.84: Con lăn A lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc α với phương ngang làm vật C trọng lượng P được nâng lên nhờ ròng rọc B. Con lăn A và ròng rọc B là hai đĩa tròn đồng chất cùng trọng lượng Q và bán kính R. Xác định gia tốc vật C.



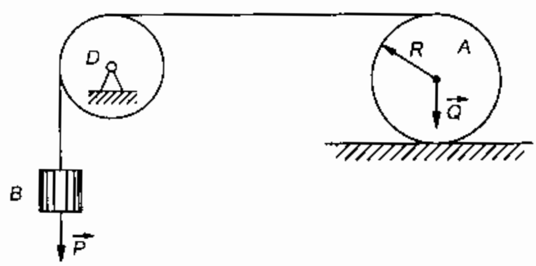
Hình II.84

Bài II.85: Thanh DE trọng lượng Q được đặt trên ba con lăn hình trụ A, B, C có cùng trọng lượng P, bán kính R. Tác dụng lực $\vec{F}$ lên thanh, bỏ qua sự trượt giữa thanh và các con lăn, cũng như giữa các con lăn với mặt phẳng ngang. Các con lăn là trụ tròn đồng chất. Tìm gia tốc của thanh (hình II.85).

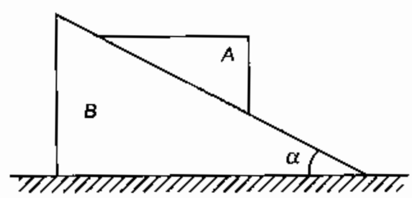


Hình II.85

Bài II.86: Vật B trọng lượng P làm chuyển động con lăn A hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q bán kính R nhờ dây mềm cuốn quanh con lăn vắt qua ròng rọc cố định D và buộc vào vật B. Xác định gia tốc vật B khi con lăn lăn không trượt, hệ số ma sát lăn là f_l, bỏ qua khối lượng ròng rọc D (hình II.86).



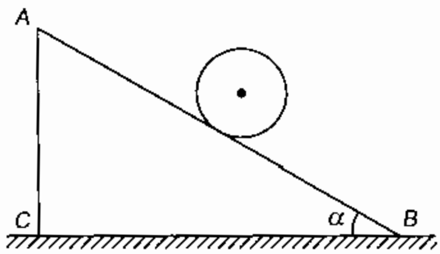
Hình II.86



Hình II.87

Bài II.87: Một lăng trụ A có trọng lượng P trượt theo mặt bên trơn của lăng trụ B có trọng lượng Q, mặt này hợp với phương ngang một góc α. Hãy xác định gia tốc của lăng trụ B. Bỏ qua ma sát giữa lăng trụ B và mặt phẳng nằm ngang (hình II.87).

Bài II.88: Trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn ta đặt lăng trụ tam giác ABC có trọng lượng P. Nó có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng đó. Hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q lăn không trượt trên mặt bên AB của lăng trụ (hình II.88). Hãy xác định gia tốc của lăng trụ.

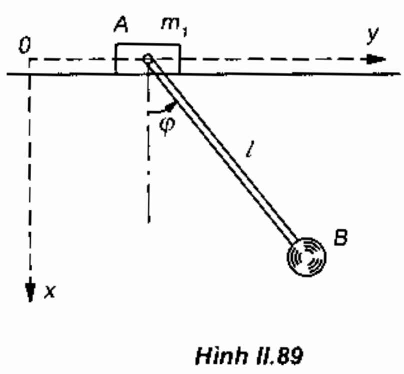


Hình II.88

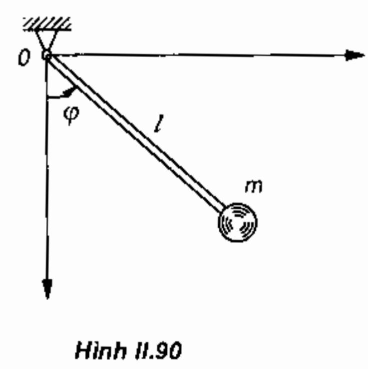
PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI II

Bài II.89: Một con lắc elíptic gồm có con chạy A khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và qủa cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh AB chiều dài l. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt phẳng (hình II.89).

Hãy thiết lập phương trình chuyển động của con lắc, bỏ qua khối lượng của thanh. Tìm các tích phân đầu của chuyển động.



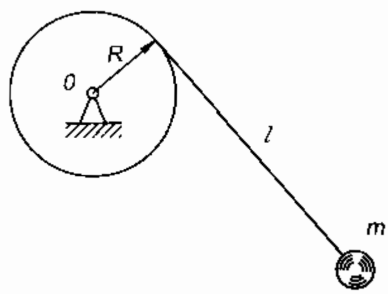
Hình II.89



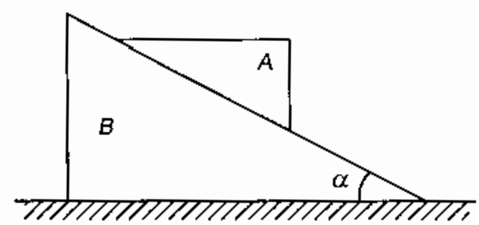
Hình II.90

Bài II.90: Hãy lập phương trình chuyển động của con lắc gồm một chất điểm khối lượng m treo lên một sợi dây có độ dài biến đổi theo quy luật cho trước $l = l(t)$.

Bài II.91: Hãy lập phương trình chuyển động của con lắc gồm chất điểm khối lượng m treo trên dây cuốn vào hình trụ cố định có bán kính R. Độ dài của phần dây buông thõng tại vị trí cân bằng là l. Bỏ qua khối lượng của dây.



Hình II.91

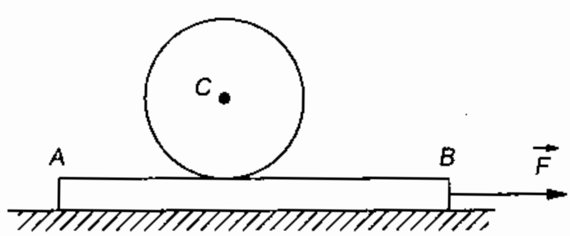


Hình II.92

Bài II.92: Lăng trụ A trọng lượng P trượt trên mặt bên trơn của lăng trụ B có trọng lượng Q. Mặt bên này hợp với phương ngang một góc α.

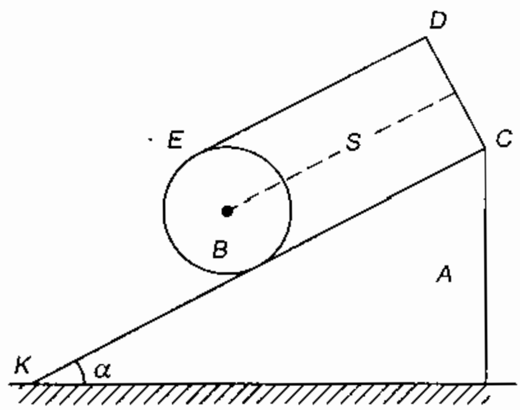
Hãy xác định gia tốc của lăng trụ B. Bỏ qua ma sát giữa lăng trụ B và mặt phẳng nằm ngang. Tìm các tích phân đầu của chuyển động.

Bài II.93: Tấm phẳng AB khối lượng M chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ = const theo phương ngang sẽ chuyển động tịnh tiến trên sàn nằm ngang nhẵn. Một con lăn khối lượng m bán kính R có mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm thẳng góc với mặt phẳng con lăn là J_C. Con lăn đặt tự do trên tấm AB. Xác định gia tốc của tấm AB và gia tốc tâm C của con lăn.



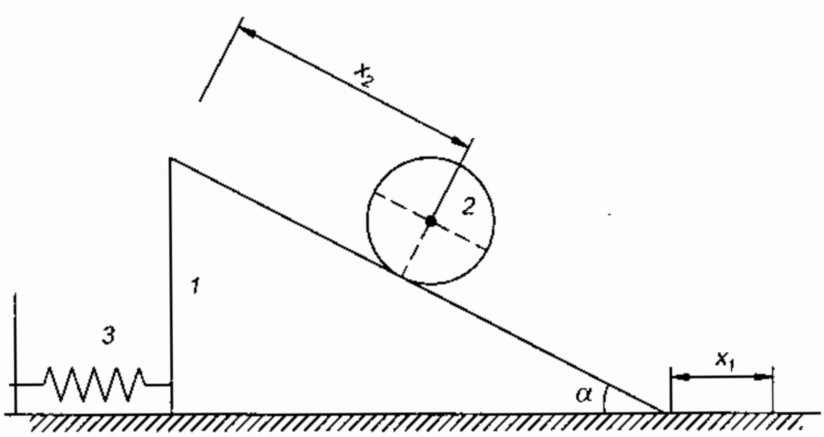
Hình II.93

Bài II.94: Lăng trụ A khối lượng m_A có thể trượt trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Theo mặt nghiêng của lăng trụ hợp với phương ngang một góc α, một con lăn B khối lượng m_B chuyển động lăn không trượt. Quanh con lăn người ta cuốn dây mềm không dãn. Đầu kia của dây buộc vào điểm D của thanh CD gắn cứng vào lăng trụ. Trục của con lăn vuông góc, còn phần dây DE song song với mặt nghiêng CK của lăng trụ. Con lăn xem như trụ tròn đồng chất.



Hình II.94

Xác định gia tốc của lăng trụ và gia tốc khối tâm của con lăn đối với lăng trụ, tính sức căng của dây. Biết $m_B = 2m_A$ với $m_A = 5{,}1$kg; $\alpha = 30°$.



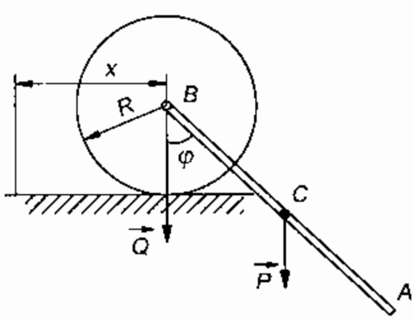
Hình II.95

Bài II.95: Theo mặt phẳng nghiêng của lăng trụ (1) hợp với phương ngang một góc α, một khối trụ tròn đồng chất (2) có khối lượng m_2 chuyển động lăn không trượt làm cho lăng trụ dịch chuyển trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang, làm cho lò xo (3) biến dạng. Lò xo (3) gắn vào tường thẳng đứng, có hệ số cứng C. Khối lượng của lăng trụ m_1. Tại thời điểm ban đầu lò xo chưa bị biến dạng.

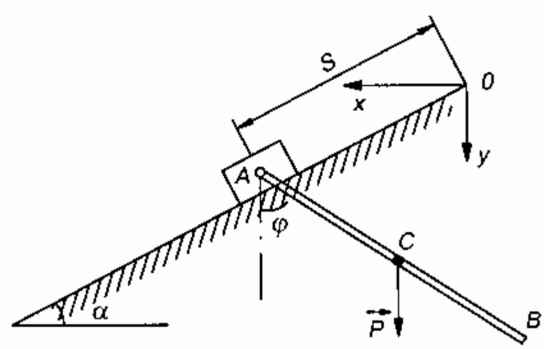
Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ, gốc toạ độ x_1 tính từ vị trí ban đầu.

Bài II.96: Một thanh đồng chất AB trọng lượng P được gắn bằng bản lề B vào trục con lăn trọng lượng Q bán kính R. Con lăn có thể lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang dọc theo trục Ox. Hệ khảo sát trong mặt phẳng thẳng đứng mô tả như hình II.96. Bỏ qua ma sát giữa con lăn và mặt tựa. Con lăn coi là trụ tròn đồng chất.

Thành lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ. Tìm các tích phân đầu của chuyển động.



Hình II.96



Hình II.97

Bài II.97: Thanh đồng chất $AB = a$ trọng lượng P chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng dưới tác dụng của trọng lực. Đầu A của thanh gắn vào con chạy A có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α. Bỏ qua trọng lượng con chạy A.

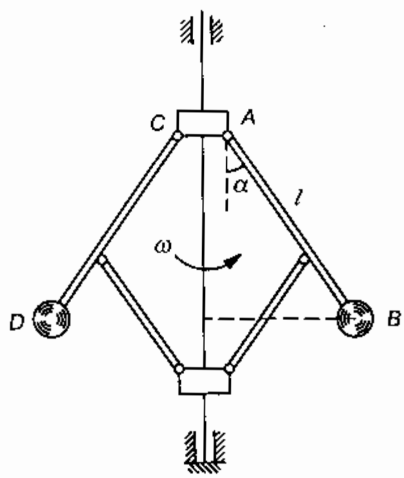
Thành lập phương trình chuyển động của hệ.

Tìm điều kiện để có chuyển động trượt mà không quay của thanh AB.

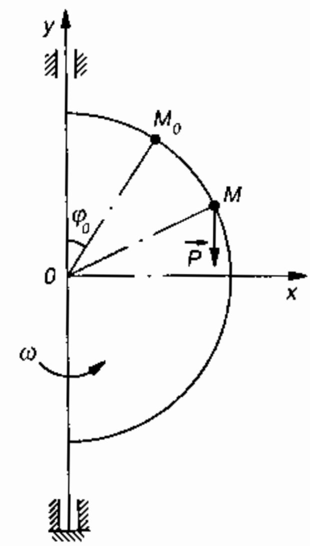
ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI

Bài II.98: Các quả cầu B và D của máy tiết chế ly tâm Oát có khối lượng m (hình II.98).

Tìm góc nghiêng α để xác định vị trí cân bằng tương đối của thanh AB nếu cơ cấu máy tiết chế ly tâm quay với vận tốc góc ω còn chiều dài $AB = l$. Bỏ qua khối lượng của thanh.



Hình II.98



Hình II.99

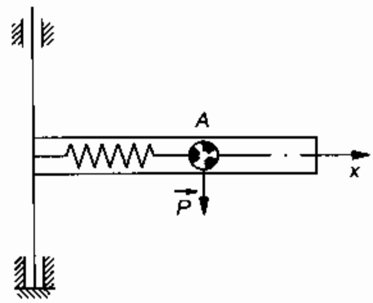
Bài II.99: Điểm M có khối lượng m chuyển động không ma sát trong ống hình bán nguyệt bán kính R và quay quanh đường kính thẳng đứng với vận tốc góc ω = const (hình II.99).

Xác định vận tốc tương đối V_r phụ thuộc vào góc φ là góc giữa OM và trục quay. Nếu ban đầu $\varphi = \varphi_0$ và $\dot{\varphi} = 0$.

Bài II.100: Quả cầu A có khối lượng m = 0,2kg chuyển động trong ống thẳng nằm ngang và được gắn trực giao với trục quay thẳng đứng ở đầu ống. Một lò xo có độ cứng C = 4kN/m nối quả cầu với trục quay. Độ dài của lò xo khi chưa biến dạng là a = 3cm.

a. Xác định quy luật biến đổi vận tốc góc ω của ống khi nó quay quanh trục để sao cho quả cầu chuyển động trong ống với vận tốc tương đối không đổi V_r = 1cm/s, nếu tại thời điểm ban đầu ở cách đầu ống một khoảng b = 5cm.

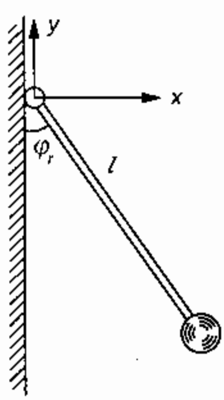
b. Tìm áp lực do quả cầu tác dụng lên thành ống khi t = 1s.



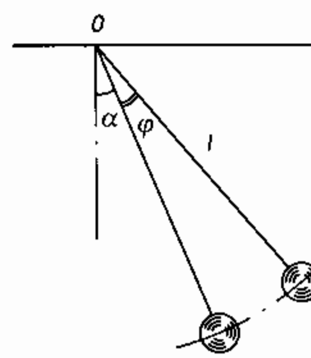
Hình II.100

Bài II.101: Điểm treo của con lắc toán học có độ dài l chuyển động theo phương thẳng đứng với gia tốc không đổi (hình II.101).

Hãy nghiên cứu chuyển động của con lắc trong hệ toạ độ gắn vào điểm treo khi gia tốc điểm treo hướng lên và khi gia tốc điểm treo hướng xuống.



Hình II.101



Hình II.102

Bài II.102: Trong một toa tàu đang chuyển động theo đường thẳng nằm ngang có một con lắc dao động bé điều hoà.

Hãy xác định:

a. Gia tốc W của toa tàu.

b. Tìm hiệu số chu kỳ dao động của con lắc. T: chu kỳ dao động của con lắc khi toa tàu đứng yên và T_1 là chu kỳ dao động của con lắc khi toa tàu chuyển động với W.

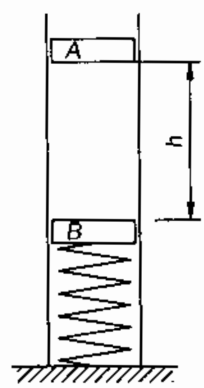
Bài II.103: Một chất điểm rơi tự do trên Bắc bán cầu từ độ cao cách mặt đất 500m. Chú ý đến sự quay của trái đất quanh trục của nó và bỏ qua lực cản của không khí.

Hãy xác định điểm rơi xuống lệch về phương Đông bao nhiêu. Địa điểm rơi tại vĩ tuyến 60°.

BÀI TẬP VA CHẠM

Bài II.104: Đầu búa A của máy đóng cọc rơi từ độ cao h = 4,905m và đập xuống cái đe B gắn trên một lò xo. Trọng lượng đầu búa là 10N, trọng lượng đe là 5N.

Hãy tìm xem sau khi va chạm đe chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu nếu như đầu búa cùng chuyển động với nó.

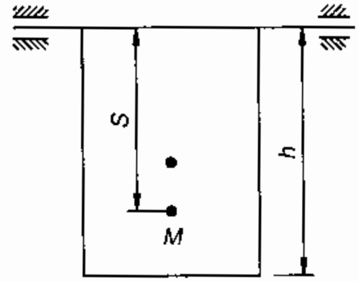


Hình II.104

Bài II.105: Để nén chặt đất dưới móng công trình người ta dùng búa đóng cọc, đóng các cọc có trọng lượng P_1 = 50N xuống đất. Đầu búa nặng P_2 = 450N rơi không có vận tốc ban đầu từ độ cao h = 2m. Hệ số phục hồi bằng không. Sau 10 lần va dập, sau cùng cọc xuống sâu được δ = 5cm.

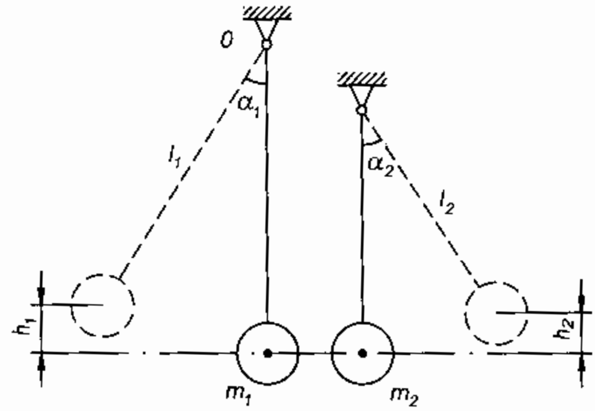
Xác định lực cản trung bình của đất khi đóng cọc.

Bài II.106: Hãy xác định tâm va chạm của bia bắn hình chữ nhật. Chiều cao của bia bằng h (hình II.106).



Hình II.106

Bài II.107: Hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 treo trên hai sợi dây song song có chiều dài l_1 và l_2 sao cho tâm của chúng nằm trên cùng một độ cao. Quả cầu thứ nhất được được đưa lệch khỏi đường thẳng đứng một góc α_1 rồi thả không vận tốc ban đầu (hình II.107).

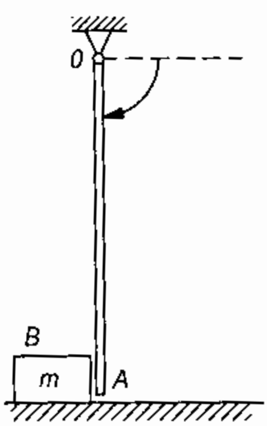


Hình II.107

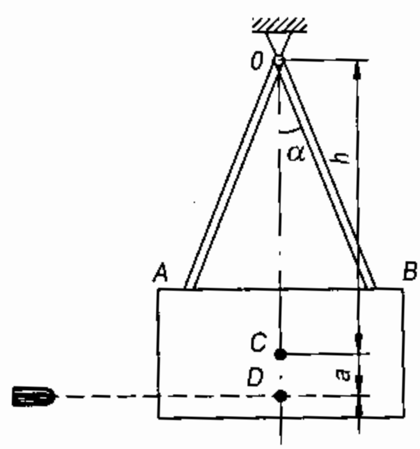
Xác định góc lệch giới hạn α_2 của quả cầu thứ hai nếu hệ số phục hồi bằng k.

Bài II.108: Thanh đồng chất $OA = a$ khối lượng M đầu O được gắn bằng bản lề. Nó rơi không vận tốc ban đầu từ vị trí nằm ngang đến vị trí thẳng đứng đập vào vật B làm cho nó chuyển động trên mặt phẳng không nhẵn nằm ngang. Hệ số ma sát trượt là μ. Coi va chạm là không đàn hồi, vật B có khối lượng m (hình II.108).

Xác định quãng đường mà vật B đi được.



Hình II.108



Hình II.109

Bài II.109: Con lắc xạ kích dùng để xác định vận tốc viên đạn gồm hình trụ AB treo vào trục nằm ngang O. Hình trụ hở đầu A và chứa đầy cát. Khi viên đạn bay vào hình trụ sẽ làm con lắc quay quanh trục O một góc nào đấy. Cho biết M là khối lượng con lắc; $OC = h$ là khoảng cách từ trọng tâm C của nó đến trục và ρ là bán kính quán tính đối với trục O; m là khối lượng viên đạn; $OD = a$ là khoảng cách từ đường tác dụng va chạm đến trục O và α là góc lệch của con lắc.

Hãy xác định vận tốc V của viên đạn, giả thiết rằng trục O của con lắc không chịu ảnh hưởng va chạm $ah = \rho^2$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

XÁC ĐỊNH LỰC THEO CHUYỂN ĐỘNG CHO TRƯỚC

Bài II.1 (hình III.1)

Xét vật M.

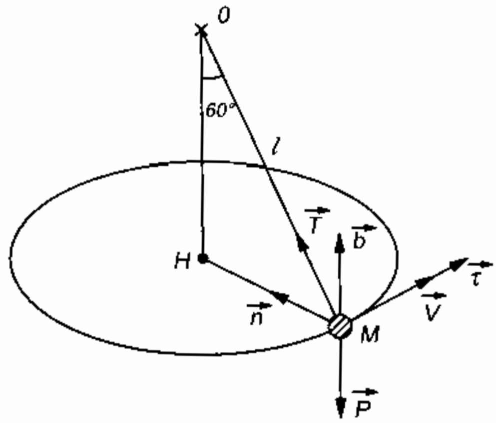
Các lực tác dụng: $\vec{P}, \vec{T}$;

$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{T}$;

$T = 2P = 20\text{N}$;

$V^2 = \rho g \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

và $V = 210\text{cm/s}$.



Hình III.1

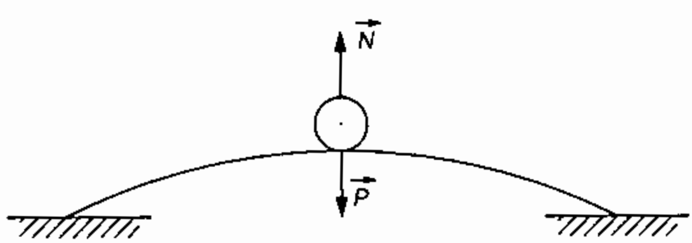
Bài II.2 (hình III.2)

Vật khảo sát: ôtô

Các lực tác dụng: $\vec{P}, \vec{N}$;

$$N = P - \frac{P}{g}\frac{V^2}{\rho} = P\left(1 - \frac{V^2}{\rho g}\right);$$

$$N = 7960\text{N} \approx 8000\text{N} \ .$$



Hình III.2

Bài II.3

Ta có: $X = m\ddot{x} = \dfrac{2}{9{,}81}\ddot{x} = -0{,}08xN$; $Y = m\ddot{y} = -0{,}02yN$.

Bài II.4

$$T = 0{,}25\text{s nên } k = \frac{2\pi}{T} = 8\pi;$$

$$y_A = \sin 8\pi t;$$

$$N_A = P_A + P_B + m_A \ddot{y}_A;$$

$$N_{A\max} = 72{,}8N;\ N_{A\min} = 47{,}2N.$$

Bài II.5

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N};$$

$$N = P + \frac{P}{g}\frac{V^2}{\rho};$$

$$N = 800\left(1 + \frac{277{,}8^2}{0{,}81 \times 600}\right) = 11300N.$$

Bài II.6 (hình III.6)

$$P_F = C_1x_1 + C_2x_2.$$

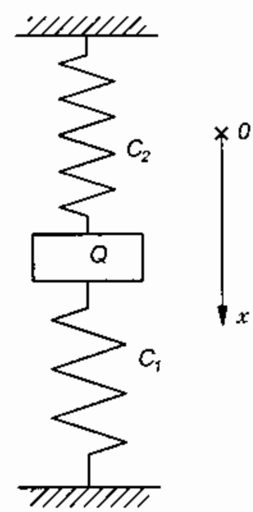
Do lực đàn hồi khi đẩy và khi kéo đều có đoạn đường đàn hồi bằng nhau. Nên ta có:

$$P_F = (C_1 + C_2)x = Cx;$$

$$C = C_1 + C_2;$$

$$T = 2\pi\omega \text{ mà } \omega = \sqrt{\frac{m}{C}};$$

Vậy $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Q}{g(C_1 + C_2)}}$.



Hình III.6

Bài II.7 (hình III.7)

$$P_F = C_1x_1 + C_2x_2 = Cx;$$

$$x = x_1 + x_2;$$

$$x_1 = \frac{P_F}{C_1};$$

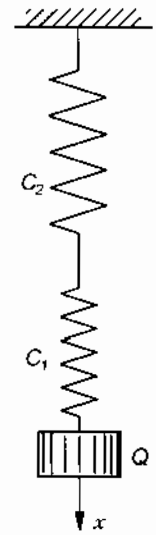
$$x_2 = \frac{P_F}{C_2};$$

$$x = \frac{P_F}{C_1} + \frac{P_F}{C_2};$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Mà $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q(C_1 + C_2)}{g C_1 C_2}}.$$



Hình III.7

Bài II.8

$$m\vec{W} = \vec{T} + \vec{P};$$

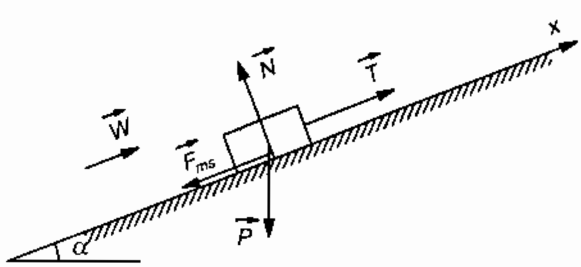
$$T = m(g + \varepsilon R).$$

Bài II.9 (hình III.9)

$$W = R\varepsilon = R\ddot{\varphi} = Ra;$$

$$m\vec{W} = \overrightarrow{F_{ms}} + \vec{T} + \vec{P};$$

$$T = mg\left(f\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{Ra}{g}\right).$$



Hình III.9

Bài II.10 (hình III.10)

$$W_n = MH\omega^2 = \omega^2\sqrt{l^2 - a^2}\ ;$$

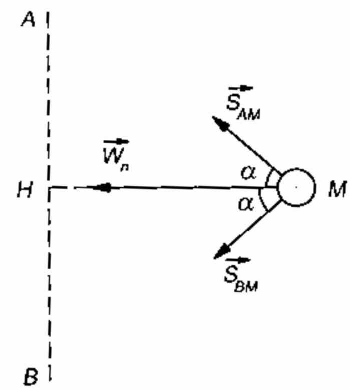
$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{S_{AM}} + \overrightarrow{S_{BM}} + \overrightarrow{P}\ ;$$

$$S_{AM}\sin\alpha - S_{BM}\sin\alpha - P = 0\ ;$$

$$S_{AM}\cos\alpha - S_{BM}\cos\alpha - mW_n = 0\ ;$$

$$S_{AM} = \frac{ml}{2a}(a\omega^2 + g)\ ;$$

$$S_{AM} = \frac{ml}{2a}(a\omega^2 - g)\ .$$



Hình III.10

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài II.11 (hình III.11)

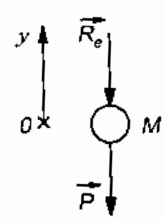
Xét chuyển động của vật nặng.

Các lực tác dụng: $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{R_C}$.

Ta có:

$$m\,W_y = m\ddot{y} = -P - R_C = -mg - k\dot{y}\ ;$$

t = 5,1ln(1,41) = 1,7s.



Hình III.11

Bài II.12 (hình III.12)

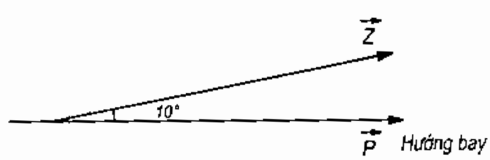
$P = Z\cos 10°$ và gọi $R_C = aV^2$

Khi bay thì

$$P = R_{C\max} = a\,V_{\max}^2\ ;$$

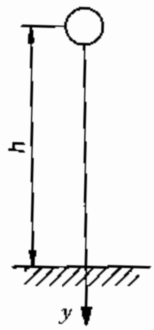
$$V_{\max} = \sqrt{\frac{P}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{3030}{0{,}05}} = 246\text{m/s}$$



Hình III.12

Bài II.13 (hình III.13)



Hình III.13

$$m\vec{W} = \vec{F};$$

$$F = \frac{a}{[R + (h - y)]^2},$$

y: khoảng cách từ vật đến mặt đất.

Nên khi $y = h$ thì:

$F = mg$ và $a = mgR^2$;

$$\ddot{y} = \frac{gR^2}{[R + (h - y)]^2} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dt};$$

$$\int_0^V \dot{y}d\dot{y} = gR^2\int_0^h \frac{dy}{(R + h - y)^2}; \qquad (1)$$

$$V = \frac{2gRh}{R + h};$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{gR^2}{R + h - y} + C.$$

Khi $t = 0$: $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$; $C = -\dfrac{gR^2}{R + h}$

nên
$$\dot{y} = R\sqrt{\frac{2g}{R + h}} \times \sqrt{\frac{y}{R + h - y}};$$

$$\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\dfrac{y}{R + h - y}}} = \int_0^T R\sqrt{\frac{2g}{R + h}}dt. \qquad (*)$$

Đổi biến và đặt $\sqrt{\dfrac{R + h}{y} - 1} = u$ tính được tích phân (*)

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R + h}{2g}}\left[\sqrt{Rh} + \frac{R + h}{2} ar\cos\frac{R - h}{R + h}\right].$$

Bài II.14

$$x = a\sqrt{V} - b\,.$$

Ta có $\quad V = \dot{x}$ nên $x = a\sqrt{\dot{x}} - b\,;$

$$\dot{x} = \frac{a\ddot{x}}{2\sqrt{\dot{x}}} \text{ hay } \frac{a}{2}\frac{d\dot{x}}{(\dot{x})^{3/2}} = dt\,.$$

Điều kiện ban đầu: $t = 0$

$$x(0) = 0;\ \sqrt{V_o} = \frac{b}{a};\ V_o = \frac{b^2}{a^2}\,.$$

Xác định hằng số tích phân C

$$T = -\frac{a}{\frac{b\sqrt{2}}{a}} + \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Bài II.15 $\quad m\ddot{x} = P - N$

trong đó $\quad N = \rho g S x\,;\ m = \rho S h\,.$

$$\ddot{x} = g\left(1 - \frac{x}{h}\right) \to \int_0^V \dot{x}d\dot{x} = \int_0^h g\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx\,;$$

$$V = \sqrt{gh}\,.$$

Bài II.16 (hình III.16)

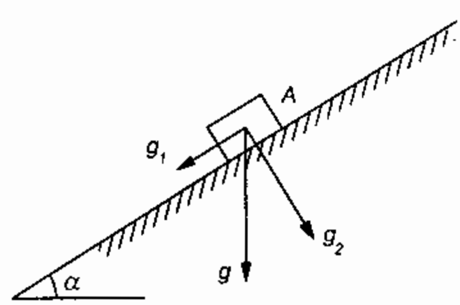
$$S = V_o t + \frac{1}{2}g_1 t^2\,.$$

Ta có

$$g_1 = g\sin\alpha = g\sin 30° = \frac{1}{2}g\,;$$

$$\frac{1}{4}gt^2 + V_o t - S = 0\,.$$

Giải phương trình này theo t ta có $t = 1{,}16$s.



Hình III.16

Bài II.17

Lực hãm $P = mW$.

$$W = 0,3g \to t = \frac{100}{3g}3,4\text{s};$$

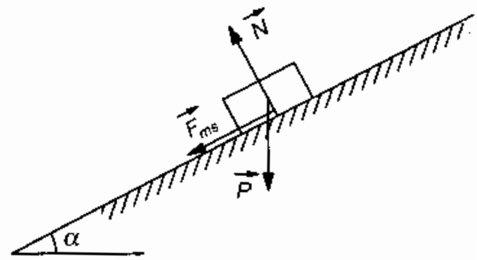
$$S = V_o t - \frac{1}{2}\frac{V_o}{t}t^2 = \frac{1}{2}V_o t = 16,9\text{m}.$$

Bài II.18 (hình III318)

Xét chuyển động của M.

Các lực tác dụng: $\vec{P}, \vec{N}, \overrightarrow{F_{ms}}$.

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{ms}}.$$



Hình III.18

Điều kiện đầu $t = 0$;

$x(0) = 0$;

$$\dot{x}(0) = V_o = 15\text{m/s};$$

$$\dot{x} = -g(f\cos\alpha + \sin\alpha)t + C_1;$$

$$C_1 = V_o;$$

$$T = \frac{V_o}{g(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 2,61\text{s};$$

$$S = \frac{1}{2g}\frac{V_o}{(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 19,55\text{m}.$$

Bài II.19 (hình III.19)

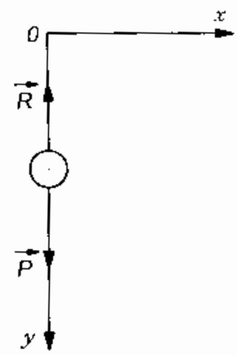
Xét chuyển động của vật A.

Các lực tác dụng: $\vec{P}, \vec{R}$.

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R};$$

$$mW_y = m\ddot{y} = P - R = P(1 - k^2\dot{y}^2);$$

$$\frac{1}{kg}\int_0^V \frac{d(k\dot{y})}{1-k^2\dot{y}^2} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{1+kV}{1-kV} = e^{2kgt}.$$



Hình III.19

Chọn điều kiện ban đầu: $t = 0$;

$y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = 0$;

$$V = \frac{1}{k}\frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}} \rightarrow V_{gh} = \frac{1}{k};$$

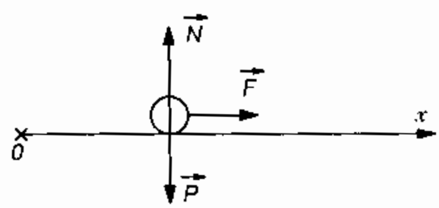
Bài II.20 (hình III.20)

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F};$$

$$mW_x = m\ddot{x} = F = 100(1-t);$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{100}{m}(1-t) \rightarrow \dot{x} = \frac{100}{m}t - \frac{100}{m}\frac{t^2}{2} + C_1;$$

$$C_1 = V_o;$$



Hình III.20

$$\frac{100}{m}t - \frac{100}{m}\frac{t^2}{2} + V_o = 0.$$

Khi dừng lại $t = 2{,}02$s

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{100}{m}t - \frac{100}{m}\frac{t^2}{2} + V_o;$$

$$x = \frac{100}{2m}t^2 - \frac{100}{6m}t^3 + V_o t + C_2 \rightarrow C_2 = x;$$

$S = 692$cm.

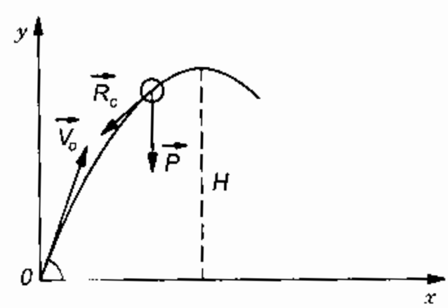
Bài II.21 (hình III.21)

Xét chuyển động của tải trọng P:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R};$$

$$mW_y = m\ddot{y} = -mg(1 + k\dot{y});$$

$$\ddot{y} = -g(1 + k\dot{y});$$



Hình III.21

$$\int_{V_o \sin\alpha}^{0} \frac{\dot{y}d\dot{y}}{1+k\dot{y}} = -g\int_0^h dy\,;$$

$$h = \frac{V_o \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g}\ln(1 + kV_o \sin\alpha)\,.$$

Bài II.22 (hình III.22)

Xét quả cầu M:

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{F} = -k^2 m\vec{r}\,. \qquad (1)$$

Chiếu (1) lên Ox và Oy:

$$W_x = \ddot{x} = -k^2 x \qquad \text{(a)}$$

$$W_y = \ddot{y} = -k^2 y \qquad \text{(b)}$$

Nghiệm của (a) và (b) là:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,;$$

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt\,.$$

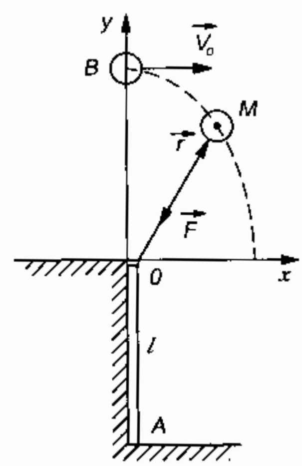
Điều kiện ban đầu: $t = 0$;

$$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = V_o\,;$$

$$y(0) = l\,;\ \dot{y}(0) = 0\,;$$

$$x = \frac{V_o}{k}\sin kt\,;\ y = l\cos kt$$

$$\rightarrow \left(\frac{kx}{V_o}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1\,.$$



Hình III.22

Đây là đường elíp.

ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG

Bài II.23 (hình III.23)

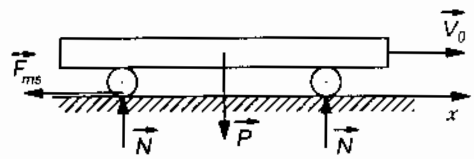
Các lực tác dụng: $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{F_{ms}}$.

$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_o} = \sum \overrightarrow{S_k^e} = (\overrightarrow{P} + 2\overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_{ms}})t\,.$$

$Q_{1x} - Q_{ox} = -F_{ms}t$ mà $Q_{1x} = 0$

do ôtô dừng lại

$\frac{P}{g}V_o = fPt \rightarrow f = \frac{V_o}{gt} = 0{,}339$.



Hình III.23

Bài II.24 (hình III.24)

Hệ khảo sát: sàn A và xe B.

Ngoại lực:

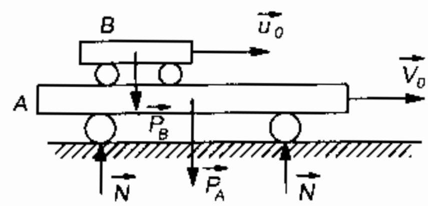
$\overrightarrow{P_A}, \overrightarrow{P_B}, \overrightarrow{N}$;

$Q_{1x} = Q_{ox}$;

$Q_{1x} = (M + m)V$;

$Q_{ox} = m(u_o + V_o) + MV_o$;

$V = V_o + \frac{m}{m + M}u_o$.



Hình III.24

Bài II.25 (hình III.25)

Xét khối nước giới hạn bởi $\overline{aa}, \overline{bb}$:

Sau thời gian dt dịch chuyển đến $\overline{a'a'}, \overline{b'b'}$.

$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_o} = \vec{R}dt$;

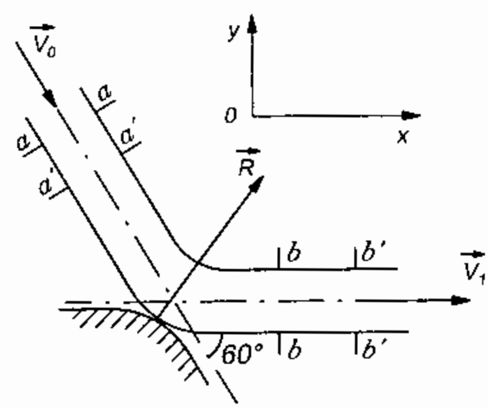
$(V_1 - V_o \cos 60°)dm = R_x dt$,

mà $dm = \gamma V \pi \frac{d^2}{4} dt$;

$V_o \sin 60° dm = R_y dt$;

$R_x = \gamma\pi\frac{d^2}{8}V^2$; $R_y = \gamma\pi\frac{d^2}{8}\sqrt{3}V^2$;

$\rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 51{,}2\text{kG}$.



Hình III.25

Bài II.26:

Giải tương tự bài II.27 ta có $N = 9{,}05$kg.

Bài II.27 (hình III.27)

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_{ms}}\,; \qquad (*)$$

$$mW_x = m\ddot{x} = P\sin\alpha - F_{ms}\,;$$

$$m\ddot{x} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,;$$

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,; \qquad (**)$$

$$mW_y = m\ddot{y} = N - P\cos\alpha = 0\,; \qquad (b)$$

Điều kiện ban đầu: $t = 0$;

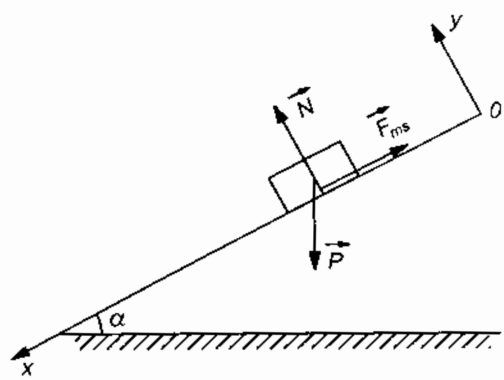
$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0\,;$

$C_1 = 0;\ C_2 = 0\,;$

$$x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2}\,;$$

$L = 39{,}2$m

thì $t = T \rightarrow T = 5s$.



Hình III.27

Bài II.28

Áp dụng định lý động lượng ta có:

$$m(V_1 - V_o) = t[P - Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\,,$$

trong đó: Q– trọng lượng đoàn tàu;

P– lực kéo đoàn tàu.

$$P = Q\left[\frac{V_1 - V_o}{gt} + (\sin\alpha + \varpi\cos\alpha)\right] = 2{,}36\text{kN}\,.$$

Bài II.29

Áp dụng định lý động lượng, có:

P: chỉ số trung bình của lực kế;

Q: trọng lượng đoàn tàu.

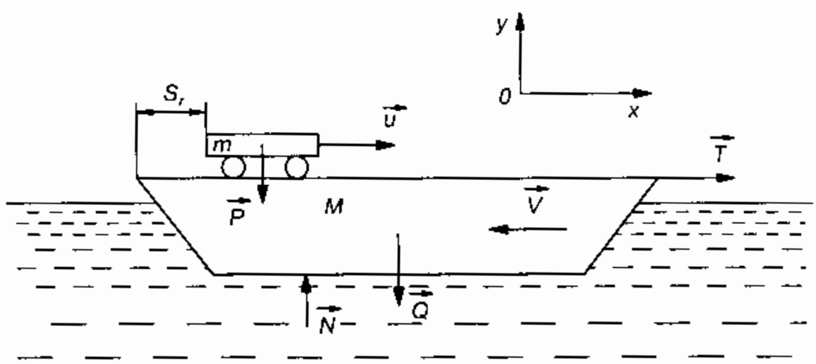
$$V_o = 0;\ V_1 = 57{,}6\text{km/h};$$

$$\frac{Q}{g}V_1 = (P - \mu Q)t \rightarrow Q = \frac{Pt}{\frac{V_1}{g} + \mu t} \approx 3000\text{kN}.$$

Bài II.30 (hình III.30)

Hệ gồm cầu phao và ôtô.

Ngoại lực: $\vec{Q}, \vec{P}, \vec{N}, \vec{T}$.



Hình III.30

Khi chưa neo cầu phao vào bờ thì $\vec{T} = 0$.

$$\vec{Q_1} - \vec{Q_0} = \sum F_k^e t \rightarrow Q_x = const \rightarrow Q_{1x} = Q_{0x};$$

$$Q_{0x} = 0 \rightarrow Q_{1x} = 0;$$

$$Q_{1x} = -MV + m(u - V) = 0 \rightarrow V = \frac{mu}{M};$$

$$u = \dot{S};$$

$$V = \frac{m}{M+m}u = \frac{m}{M+m}\dot{S} = \frac{m\alpha b}{M+m}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Khi neo cầu phao vào bờ bằng dây cáp thì sức căng $\vec{T} \neq 0$

$$Q_{\text{hệ}} = (M + m)V = (\mathrm{M} + \mathrm{m})\frac{\mathrm{m}\dot{\mathrm{S}}}{(\mathrm{M} + \mathrm{m})} = \mathrm{m}\dot{\mathrm{S}}\,;$$

$$T = \frac{dQ_x}{dt} = m\ddot{S} \to T = \alpha^2 bme^{-\alpha t}.$$

ĐỊNH LÝ KHỐI TÂM

Bài II.31

Hệ khảo sát: lăng trụ và vật M.

Ngoại lực: $(\vec{Q}, \vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{N}) \perp Ox$.

$$Mx_C = \text{const} \to x_C = \text{const};$$

$$\frac{Q}{g}\Delta + \frac{P_1}{g}(\Delta + S\cos\alpha) + \frac{P_2}{g}\left(\Delta + \frac{1}{2}S\sin\alpha\right) = 0\,;$$

$$\Delta = -\frac{2P_1\cos\alpha + P_2\sin\alpha}{2(Q + P + P_2)}S.$$

Bài II.32 (hình III.32)

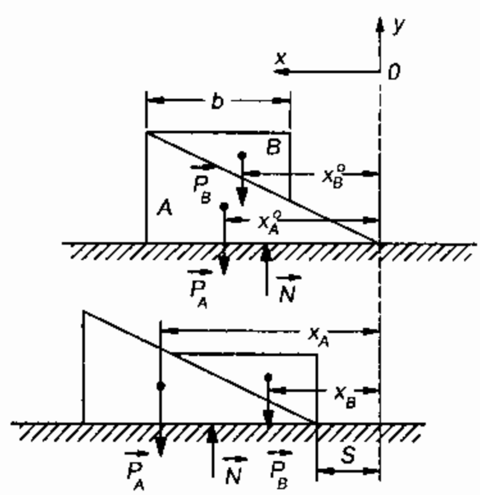
$$M\overrightarrow{W_C} = \vec{N} + \overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{P_B}\,;$$

$$MW_{Cx} = M\ddot{x}_C = 0 \to \ddot{x}_C = 0\,;$$

$$\dot{x}_C = const \to x_C = const\,;$$

$$x_C^o = x_C^1 \to \sum p_k x_k^o = \sum p_k x_k\,;$$

$$S = \frac{a - b}{4}.$$



Hình III.32

Bài II.33

Giải tương tự bài II.34.

$$P_1x_1^o + P_2x_2^o = P_1x_1 + P_2x_2\,;$$

$$S = \frac{4P_1}{P_1 + P_2} = \frac{4 \times 2}{2 + 20} = 0{,}36m.$$

Bài II.34 (hình III.34)

Ngoại lực: $\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}$.

$$M\overrightarrow{W_C} = \sum \overrightarrow{F_k^e} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3};$$

$$MW_{Cy} = P_1 + P_2 + P_3 - N$$

$$\rightarrow N = P_1 + P_2 + P_3 - MW_{Cy}$$

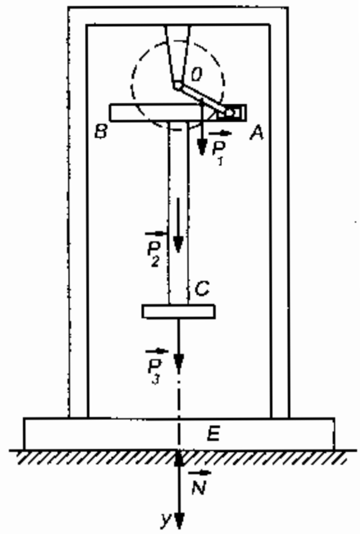
$$N = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_2}{g}\ddot{y}_2 - \frac{P_3}{g}\ddot{y}_3;$$

$$y_1 = const;$$

$$y_2 = \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{a}{2}\cos\varpi t;$$

$$y_3 = a\cos\varpi t + h;$$

$$N = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{a\varpi^2}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\varpi t$$



Hình III.34

Bài II.35 (hình III.35)

Xét thanh $AB = 2a$.

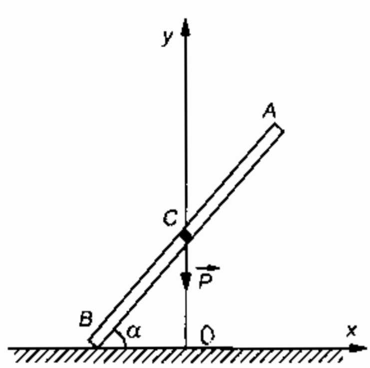
Các lực tác dụng: $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{N}$.

$\sum F_{kx}^e = 0$ nên khối tâm C chuyển động dọc trục Oy.

$$x_A = a\cos\alpha;$$

$$y_A = 2a\sin\alpha$$

$$\rightarrow \left(\frac{x_A}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{2a}\right)^2 = 1.$$



Hình III.35

Bài II.36 (hình III.36)

Áp dụng định lý khối tâm. Ngoại lực tác dụng: $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{Q}$.

Ta có

$$\sum p_k x_k^o = \sum p_k x_k . \qquad (*)$$

Trước khi dịch chuyển:

$P_1 x_1^o + P_2 x_2^o + P_3 x_3^o + Q x_Q^o$.

Sau khi dịch chuyển:

$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + Q x_Q$.

x_1^o : toạ độ P_1 lúc đầu;

$x_2^o = x_1^o + d$;

$x_Q^o = x_1^o + e$;

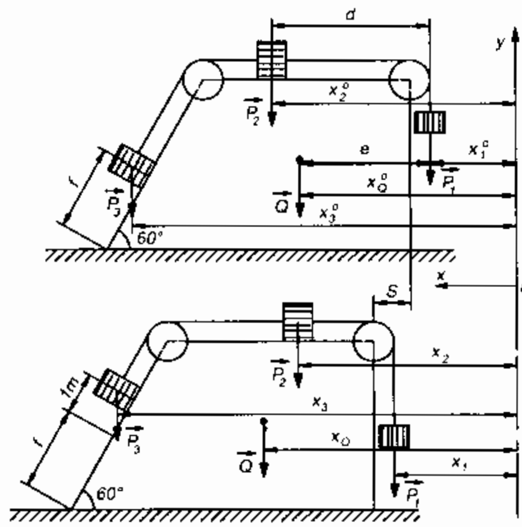
$x_3^o = x_1^o + a - f\cos 60°$;

$x_1 = x_1^o + S$;

$x_2 = x_1^o + S + d - 1$;

$x_Q = x_1^o + S + e$;

$x_1 = x_1^o + S + a - (1 + f)\cos 60°$.



Hình III.36

Thay vào (*) và giải ra ta có:

$$S = \frac{P_2 + P_3\cos 60°}{P_1 + P_2 + P_3 + Q} = \frac{20}{145} = 0,138\text{m} .$$

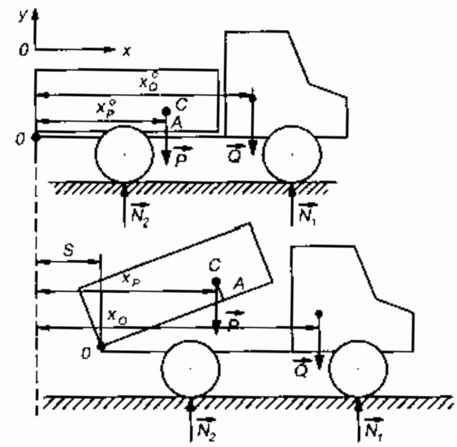
Bài II.37 (hình III.37)

Xét xe ôtô:

Ngoại lực $\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}, \vec{P}, \vec{Q}$.

$$M\overrightarrow{W_C} = \sum \overrightarrow{F_k^e} = \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2} + \vec{P} + \vec{Q} ;$$

$$MW_{Cx} = 0 ;$$



Hình III.37

$$x_C^o = x_C$$

$$\sum p_k x_k^o = \sum p_k x_k$$

$$x_P^1 = S + x_P^o \cos\alpha - AC\sin\alpha$$

$$x_Q^1 = S + x_Q^o$$

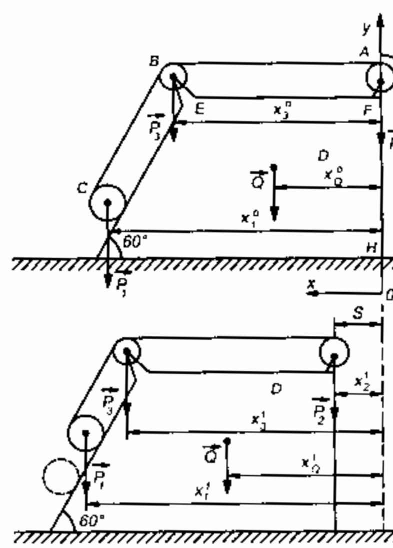
$$AC = 0{,}5\text{m};$$

$$OA = 2 = x_P^o$$

$$Px_P^o + Qx_Q^o = Px_P^1 + Qx_Q^1$$

$$S = \frac{P\left(2 + 0{,}5\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)}{Q + P} = 0{,}39\text{m}.$$

Bài II.38 (hình III.38)



Hình III.38

Hệ khảo sát: các vật *A, B, C* và *D*.

Ngoại lực tác dụng: $\vec{Q}, \vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \vec{N}$.

$$M\overrightarrow{W_C} = \vec{Q} + \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \vec{N}; \quad (1)$$

$$\sum p_k x_k^o = \sum p_k x_k^1;$$

$$x_1^1 = x_1^o + S - l\sin 30°;$$

$$x_2^o = 0;$$

$$x_3^1 = x_3^o + S;$$

$$x_Q^1 = x_Q^o + S; \quad x_2^1 = S;$$

$$l = \frac{R\varphi}{2} \text{ mà } \varphi = 0{,}5\varepsilon t^2;$$

$$S = \frac{P_1 l}{2(Q + P_1 + P_2 + P_3)}; \; S = \frac{P_1 R\varphi}{4(Q + P_1 + P_2 + P_3)} = 0{,}025R\varepsilon t^2.$$

Bài II.39 (hình III.39)

Tại A không có lực ma sát.

Nên trọng tâm I chuyển động thẳng đứng xuống phía dưới.

Ta có:

$$x_I = \text{const} = 2\text{cm};$$

$$x_M = \frac{a}{3}\cos\varphi\,;\; y_M = a\sin\varphi\,;$$

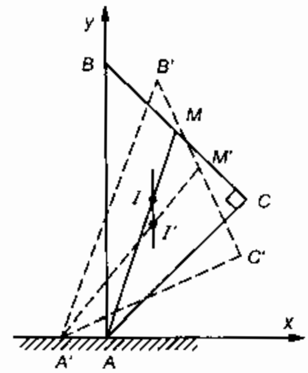
$$x_M = x_I + \frac{a}{3}\cos\varphi = 2 + \frac{a}{3}\cos\varphi\,;$$

$$a^2 = 90;$$

$$(x_M - 2)^2 = \frac{a^2}{9}\cos^2\varphi\,;$$

$$y_M^2 = a^2\sin^2\varphi\,;$$

$$9(x_M - 2)^2 + y_M^2 = 90\,.$$



Hình III.39

ĐỊNH LÝ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

Bài II.40 (hình III.40)

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e})\,;$$

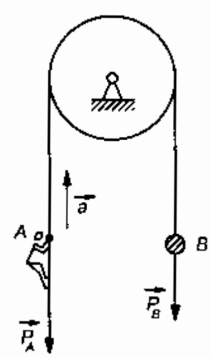
$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = 0\,;$$

$$L_z^{hệ} = L_z^o = 0\,;$$

$L_z^o = 0$ vì lúc đầu hệ đứng yên;

$$L_z^{hệ} = 2\frac{P}{g}RV_B - \frac{P}{g}Ra = 0\,;$$

$$V_B = \frac{a}{2}\,.$$



Hình III.40

Bài II.41 (hình III.41)

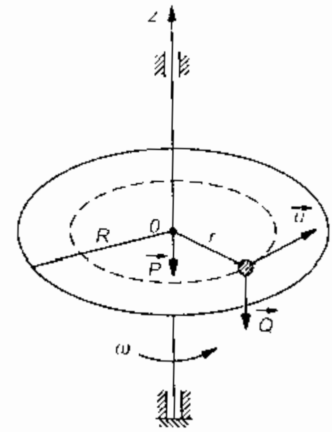
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e);$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0;$$

$$L_z = L_z^o;$$

$$L_z = J_z\omega + r\frac{Q}{g}(u + r\omega);$$

$$\omega = \frac{2Qu}{(P + 2Q)r}.$$



Hình III.41

Bài II.42 (hình III.42)

Lấy Oz đi qua O và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

V là vận tốc vật M

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e)$$

với $$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = m_1gR - aQ.$$

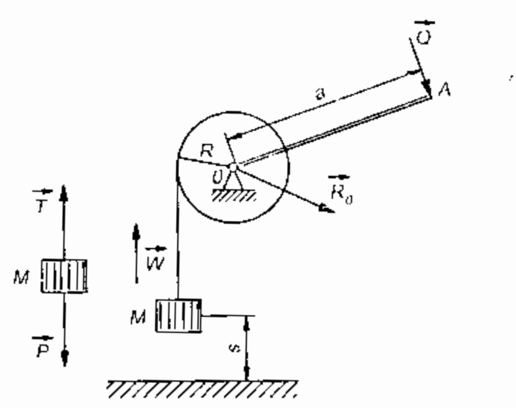
$$L_z = \frac{m_2 + 2m_1}{2}RV;$$

$$W = R\varepsilon = \frac{2(aQ - m_1gR)}{R(m_2 + 2m_1)}. \quad (*)$$

Tích phân 2 lần (*) với điều kiện đầu bằng không. Ta có:

$$S = \frac{(aQ - m_1gR)}{R(m_2 + 2m_1)}t^2;$$

$$T = m_1g + m_1W$$
$$= \frac{m_1(m_2gR + 2aQ)}{R(m_2 + 2m_1)}.$$



Hình III.42

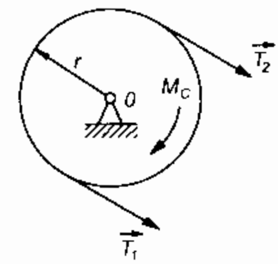
Bài II.43 (hình III.43)

$$\frac{dLz}{dt} = \sum m_z(\overrightarrow{F_k^e});$$

$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = (T_1 - T_2)r - M_C;$$

$$L_z = J_z\omega = \frac{P}{2g}r^2\varepsilon;$$

$$M_C = (T_1 - T_2)r - \frac{P}{2g}r^2\varepsilon = 1Nm.$$



Hình III.43

Bài II.44 (hình III.44)

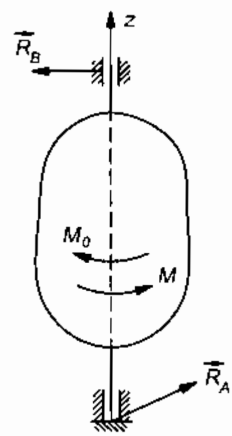
$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = M - \alpha\omega^2;$$

$$L_z = J_z\omega;$$

$$J_z\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = dt.$$

Đặt $\beta = \dfrac{2\sqrt{\alpha M}}{J};$

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}\,\frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}}.$$



Hình III.44

Bài II.45 (hình III.45)

$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k^e}) = 0;$$

$$L_z = const;\ L_z = L_z^o;$$

$$L_z^o = J_z\omega_o;$$

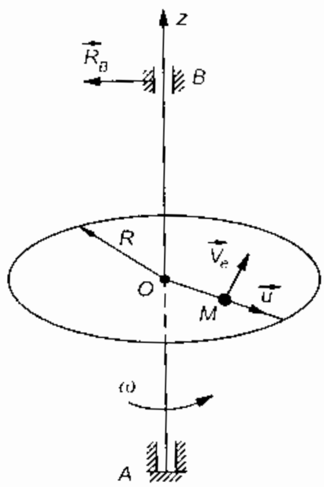
$$L_z = J_z\omega + m_2(OM)^2\omega;$$

$$L_z = (J_z + m_2u^2t^2)\omega = J_z\omega_o;$$

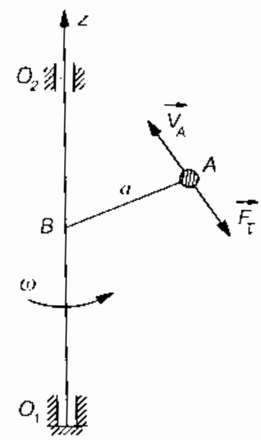
$$\omega = \frac{m_1R^2\omega_o}{m_1R^2 + 2m_2u^2t^2}.$$

Khi M ra tới vành đĩa thì $R = ut$

$$\omega_1 = \frac{m_1\omega_o}{m_1 + 2m_2}.$$



Hình III.45



Hình III.46

Bài II.46 (hình III.46)

Gọi φ là góc quay của thanh AB:

$$\omega = \dot{\varphi};$$

$$\frac{dLz}{dt} = \sum m_z(F_k^e)$$

$$\rightarrow ma^2\ddot{\varphi} = -a\alpha m\dot{\varphi}.$$

Tính thời gian T

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -\frac{\alpha}{a}dt;$$

$$T = \frac{a}{\alpha}\ln 2.$$

Tính số vòng quay

$$d\varphi = \dot{\varphi}dt \rightarrow d\dot{\varphi} = -\frac{\alpha}{a}d\varphi.$$

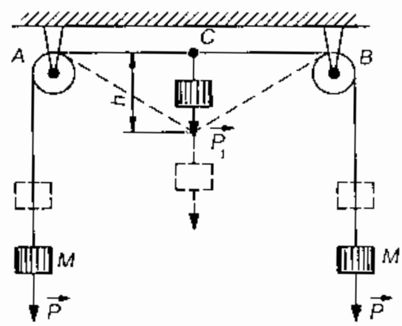
Lấy tích phân 2 vế với cận tương ứng:

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\frac{\omega_o}{2}.$$

Số vòng quay $n = \dfrac{a\omega_o}{4\pi\alpha}$.

ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Bài II.47 (hình III.47)



Hình III.47

$$\sum A_k^e = 0;$$

và $S = \sqrt{l^2 + h^2} - l$;

$$\sum A_k^e = P_1 h - 2P(\sqrt{l^2 + h^2} - l) = 0;$$

$$h = \frac{4PP_1 l}{4P^2 - P_1^2}.$$

Bài II.48 (hình III.48)

Áp dụng định lý động năng (có thể dùng phương trình tổng quát để giải, xem phần sau)

$$T_{hệ} = T_1 = \sum A_k^e; \qquad (*)$$

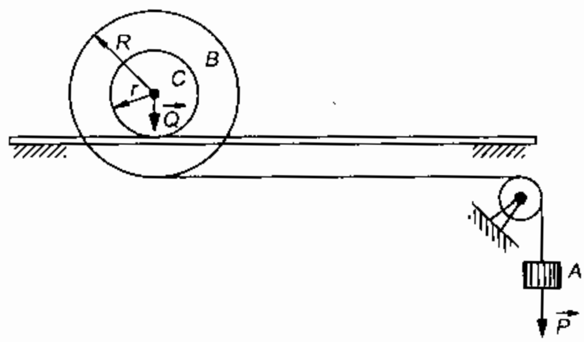
$$\sum A_k^e = PS;$$

$$T_{hệ} = T_A + T_{BC};$$

$$T_{hệ} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_A^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\frac{r^2 V_A^2}{(R-r)^2} + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\rho^2\frac{V_A^2}{(R-r)^2};$$

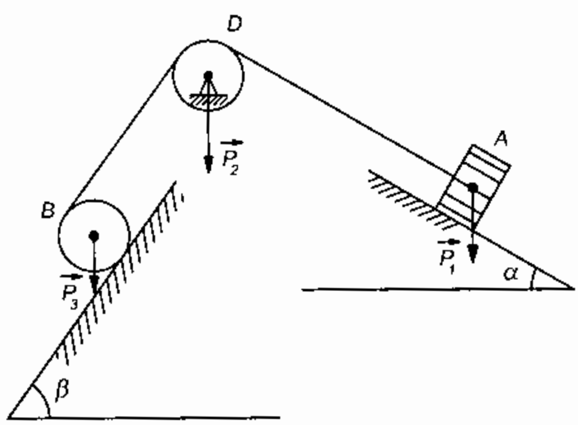
$$T_{hệ} = \frac{P(R-r)^2 + Q(r^2 + \rho^2)}{2g(R-r)^2}V_A^2 = PS;$$

$$W_A = g\frac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2 + +Q(r^2 + \rho^2)}.$$



Hình III.48

Bài II.49 (hình III.49)



Hình III.49

$$T_{hệ} = \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{16g} V_A^2;$$

$$\sum A_k^e = P_1 \sin\alpha S_A - P_3 \sin\beta S_o \text{ với } S_o = \frac{S_A}{2};$$

$$\sum A_k^e = (2P_1 \sin\alpha - P_3 \sin\beta)\frac{S_A}{2} \quad T_{hệ} = \sum A_k^e; \qquad (*)$$

$$V_A = 2\sqrt{2g\frac{(2P_1 \sin\alpha - P_3 \sin\beta)S_A}{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}}.$$

Bài II.50

Khi có ma sát trượt với hệ số f và ma sát lăn có hệ số f_o và bán kính con lăn r thì phải tính công của các lực ma sát.

$$\sum A_k^e = P_1 S \sin\alpha - fP_1 S\cos\alpha - P_3\frac{S}{2}\sin\beta - f_o P\frac{S}{2r}\cos\beta .$$

Động năng của hệ vẫn tính như bài trên. Từ đó tính được V_A.

Bài II.51 (hình III.51)

$$T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i ;$$

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ;$$

$$\sum A_k^e = PS - QS_1 = \frac{(4P-Q)}{4}S .$$

Vì $S_1 = \dfrac{S}{4}$;

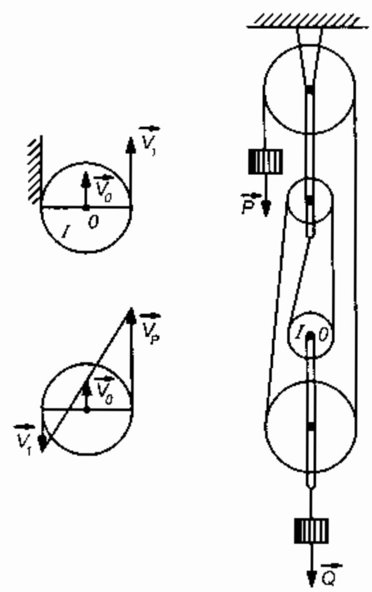
$$T_{hệ} = T_P + T_Q = \frac{16P+Q}{32g}V_P^2 ;$$

$$V_o = V_Q ;$$

và $V_1 = V_P \rightarrow V_P = 4V_Q$;

$$\frac{16P+Q}{32g}V_P^2 = \frac{(4P-Q)}{4}S ;$$

$$W_P = \dot{V}_P = \frac{4P-Q}{16P+Q}4g .$$



Hình III.51

P chuyển động đều

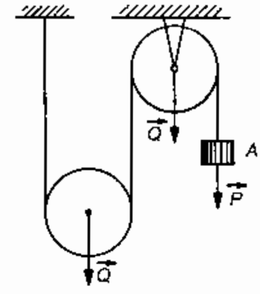
$$W_P = 0 \rightarrow P = \frac{Q}{4} .$$

Bài II.52 (hình III.52)

Giải tương tự bài trên

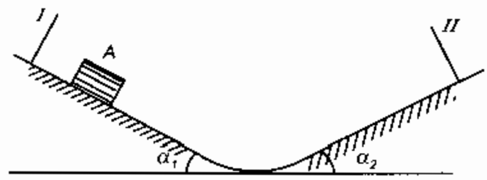
$$[J + 4J_1 + R^2(4m+M)]\frac{V_A^2}{8R^2} = (2m-M)g\frac{S}{2} ;$$

$$W_A = \dot{V}_A = \frac{2R^2G(2m-M)}{J+4J_1+R^2(4m+M)} .$$



Hình III.52

Bài II.53 (hình III.53)



Hình III.53

Ta có quan hệ giữa hệ số ma sát trượt và góc ma sát

$$f_1 = tg\varphi_1\,;\ f_2 = tg\varphi_2\,.$$

Áp dụng định lý động năng

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V_C^2 = (P\sin\alpha_1 - Pf_1\cos\alpha_1)S_1\,; \tag{a}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{P}{g}V_C^2 = -(P\sin\alpha_2 - Pf_2\cos\alpha_2)S_2\,. \tag{b}$$

Thay f_1 và f_2 ở trên vào (a) và (b) ta có:

$$S_2 = \frac{\cos\varphi_2\sin(\alpha_1 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1\sin(\alpha_2 + \varphi_2)}\,.$$

Bài II.54

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e\,; \tag{*}$$

$$T_{hệ} = \frac{2m_2 + 9m_1}{12}l^2\omega^2\,;$$

$$\sum A_k^e = \frac{gl}{4}(2m_1 + m_2)\,.$$

Thay vào (*) ta có:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(m_2 + 2m_1)}{l(2m_2 + 9m_1)}}\,.$$

Bài II.55 (hình III.55)

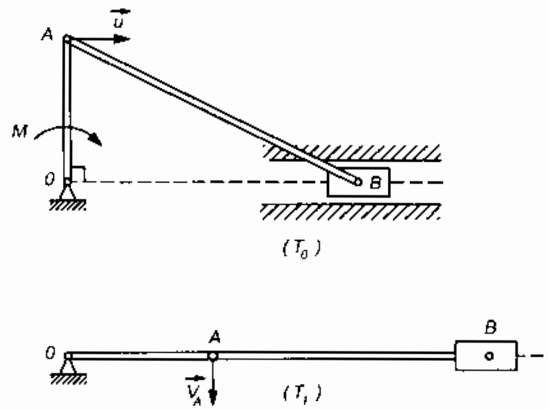
$T = T_o = \sum A_k^e$; (*)

$T_o = \dfrac{u^2}{6}(m_1 + 3m_2)$;

$T_1 = \dfrac{V_A^2}{6}(m_1 + m_2)$;

$\sum A_k^e = M\dfrac{\pi}{2}$;

$V_A = \sqrt{\dfrac{3M\pi + (m_1 + 3m_2)u^2}{m_1 + m_2}}$.



Hình III.55

Bài II.56

Gọi V_C là vận tốc khối tâm C khi nó di chuyển một đoạn là S.

$$T_o = 0 \text{ và } \sum A_k^i = 0 ;$$

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ; \qquad (*)$$

$$\sum A_k^e = F_1\frac{S}{R}(R + r) - F_2\frac{S}{R}(R - r) ;$$

$$T_{hệ} = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 = \frac{J + MR^2}{2R^2}V_C^2 .$$

Thay vào (*) rồi tính đạo hàm theo t:

$$W_C = \dot{V}_C = \frac{F_1(R + r) - F_2(R - r)}{J + MR^2} = \frac{(F_1 - F_2)R + (F_1 + F_2)r}{J + MR^2} .$$

Bài II.57

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ;$$

$$T_{hệ} = T_A + T_{bx} + T_{băng} = (m_1 + m_2 + m_3)\frac{R^2\omega^2}{2} ;$$

$$\sum A_k^e = M\varphi - m_1 gR\varphi\sin\alpha = (M - m_1 gR\sin\alpha)\varphi ;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(M - m_1 gR\sin\alpha)\varphi}{(m_1 + m_2 + m_3)R^2}}\ ;$$

$$\varepsilon = \frac{M - m_1 gR\sin\alpha}{(m_1 + m_2 + m_3)R^2}\ .$$

Điều kiện để có chuyển động $M > m_1 gR\sin\alpha$.

Bài II.58

$$T = \frac{4M + 3m}{4}\frac{V^2}{2} \text{ và } \sum A_k^e = FS - \frac{k}{R}S(M + 2m)g\ ;$$

$$W = \frac{4\left[F - \dfrac{k}{R}(M + 2m)g\right]}{4M + 3m}\ .$$

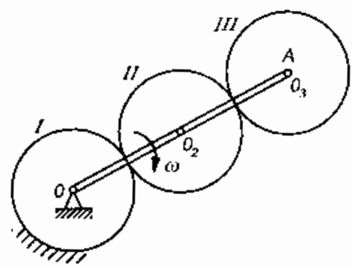
Bài II.59 (hình III.59)

Hệ khảo sát: tay quay OA, bánh xe II và III.

+ OO_3: chuyển động quay quanh O;

+ Bánh xe II chuyển động song phẳng;

+ Bánh xe III chuyển động tịnh tiến.



Hình III.59

$$T_{hệ} = \frac{8Q + 33P}{3g}r^2\omega_{OA}^2\ .$$

Bài II.60 (hình III.60)

$$T_{hệ} = T_1 = \sum A_k^e\ ; \qquad (*)$$

$$\sum A_k^e = M\varphi\ ;$$

$$T_{hệ} = T_{OA} + T_{II}\ ;$$

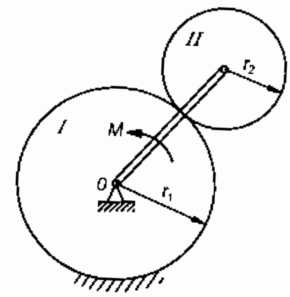
$$T_{OA} = \frac{1}{6}\frac{Q}{g}(r_1 + r_2)^2\varpi_{OA}^2\ ;$$

$$T_{II} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}(r_1 + r_2)^2 \varpi_{OA}^2 ;$$

$$T_{hệ} = \frac{(2Q + 9P)}{12g}(r_1 + r_2)^2 \varpi_{OA}^2 .$$

Thay vào (*) ta có:

$$\omega_{OA} = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3gM\varphi}{2Q + 9P}} .$$



Hình III.60

Bài II.61 (hình III.61)

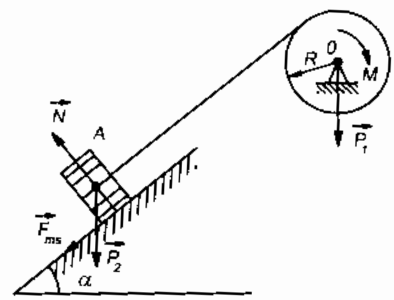
$$T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i ;$$

$$T_o = 0 ; \sum A_k^i = 0 ;$$

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ; \qquad (*)$$

$$T_{hệ} = T_A + T_B = \frac{2P_2 + P_1}{4g} R^2 \omega^2 ;$$

$$\sum A_k^e = M\varphi - P_2 \sin\alpha S - F_m S$$
$$= [M - P_2 R(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\varphi.$$



Hình III.61

Thay vào (*) ta có:

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{g\frac{[M - P_2 R(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\varphi}{2P_2 + P_1}} .$$

Bài II.62 (hình III.62)

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ; \qquad (*)$$

$$T_{hệ} = T_C + T_D + T_E = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}R^2 + J_O + J\right)\omega^2 ;$$

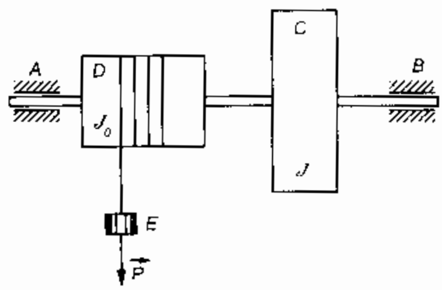
$$\sum A_k^e = Ph \text{ và } \omega^2 = \frac{V^2}{R^2},$$

h: độ dịch chuyển của vật E.

$$W = \dot{V} = \frac{PR^2}{\frac{P}{g}R^2 + J_O + J};$$

$$W = \frac{h}{T^2} = \frac{PR^2}{\frac{P}{g}R^2 + J_O + J}$$

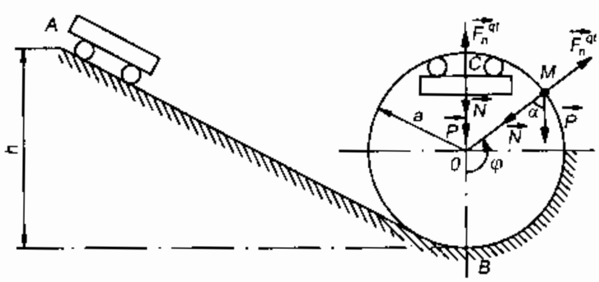
$$\rightarrow J = \frac{PR^2T^2}{2h} - \frac{P}{g}R^2 - J_O$$



Hình III.62

ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

Bài II.63 (hình III.63)



Hình III.63

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng.

Xét xe goòng tại vị trí M phụ thuộc góc φ.

Các lực tác dụng: $\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{F_n^{qt}}$

$$N + P\cos\alpha - F_n^{qt} = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\cos\alpha = \pi - \varphi = -\cos\varphi;$$

$$N = \frac{P}{g}\frac{V_M^2}{a} + P\cos\varphi.$$

Ta có $\quad T_M + \pi_M = T_A + \pi_A. \qquad$ (b)

Tại A có $\quad T_A = 0;\ \pi_A = Ph.$

Tại M có $T_M = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_M^2$;

$$\pi_M = P(a + a\cos\alpha) = Pa(1 - \cos\alpha).$$

Thay vào (b) được V_M^2 rồi thay vào (a) ta được

$$N = P\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right).$$

Muốn vượt qua điểm C không bị rơi thì $N = 0$ tại đó $\varphi = \pi$ nên $\cos\varphi = -1$. Ta được $h \geq 2{,}5a$.

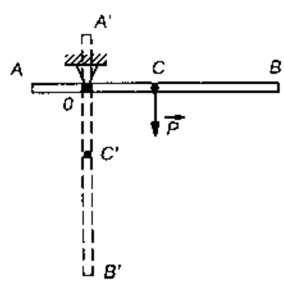
Bài II.64 (hình III.64)

$$T_C + \pi_C = T_{C'} + \pi_{C'}; \qquad \text{(a)}$$

$$\pi_{C'} = 0;\ T_{C'} = \frac{1}{2}J_{oz}\varpi^2;$$

$$\pi_C = P\frac{l}{4} = mg\frac{l}{4};$$

$$T_C = 0;\ \ J_{oz} = \frac{7}{48}\frac{P}{g}l^2.$$



Hình III.64

Thay vào (a) và chú ý $V_B = \frac{3}{4}l\omega$

ta có:

$$V_B^2 = \frac{27}{14}gl \rightarrow V_B = 4{,}76\text{m/s}.$$

Bài II.65 (hình III.65)

$$dT = \sum dA_k^e \text{ vì } \sum dA_k^i = 0.$$

$$\sum dA_k^e = dA = M_q d\varphi = (M_o - \alpha\omega)\omega dt;$$

$$T_{hệ} = T_{OO_1} + T_B;$$

$$V_{O_1} = (R + r)\omega;$$

$$\omega_1 = \frac{V_{O_1}}{r} = \frac{(R+r)\omega}{r};$$

$$T_{hệ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2\omega^2;$$

$$dT = \left(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2\omega d\omega \ .$$

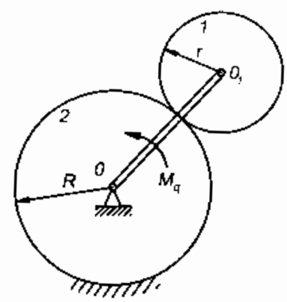
Đặt

$$J_R = \left(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\right)(R+r)^2;$$

$$dT = J_R\omega d\omega \rightarrow dT = dA;$$

$$J_R\omega d\omega = (M_o - \alpha\omega)\omega dt;$$

$$\frac{d\omega}{(M_o - \alpha\omega)} = \frac{1}{J_T}dt \ .$$



Hình III.65

Tìm nguyên hàm và xác định hằng số tích phân theo điều kiện đầu:

$$t = 0; \quad \omega(0) = 0;$$

$$\omega = \frac{M_o}{\alpha}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \text{ với } \beta = \frac{-\alpha}{J_R}.$$

Bài II.66 (hình III.66)

Áp dụng định lý động năng.

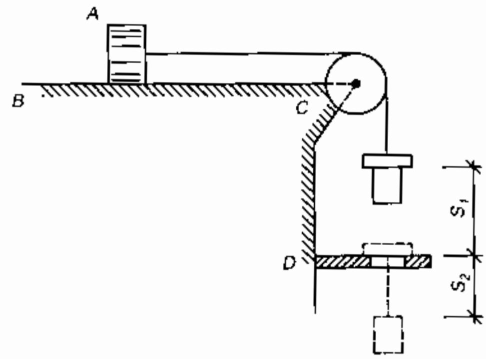
Trên đoạn S_1:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P+P_1}{g}V^2;$$

$$T_1 = \frac{1}{2g}(Q+P+P_1)V^2;$$

$$\sum A_k^e = (P+P_1)S_1 - fQS_1 = (P+P_1-fQ)S_1;$$

$$\frac{1}{2g}(Q+P+P_1)V^2 = (P+P_1-fQ)S_1 \ .$$



Hình III.66

Trên đoạn S_2:

$$T_2 = 0;\ T_1 = -\frac{1}{2}(Q+P)V^2;\ \sum A_k^e = PS_1 - fQS_2;$$

$$-\frac{1}{2}(Q+P)V^2 = PS_1 - fQS_2 = -\frac{(Q+P)(P+P_1-fQ)S_1}{Q+P+P_1};$$

$$f = -\frac{(Q+P)(P+P_1)S_1 + (Q+P+P_1)PS_2}{Q[(Q+P)S_1 + (Q+P+P_1)S_2]} = 0{,}2.$$

Bài II.67 (hình III.67)

Xét thanh AB

$$T_1 + \pi_1 = T_2 + \pi_2; \qquad (*)$$

$$T_1 = 0;\ \ \pi_1 = P\frac{h}{2};$$

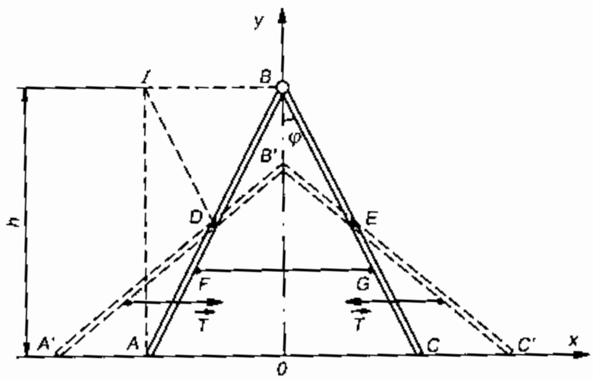
$$\pi_2 = \frac{1}{2}Py;\ T_2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\rho^2 + a^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\rho^2 + a^2)\dot{\varphi}^2;$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{2a} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{2a\sin\varphi};$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{y}^2}{4a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\dot{y}^2}{4a^2(1-\cos^2\varphi)} = \frac{\dot{y}^2}{4a^2\left(1-\frac{y^2}{4a^2}\right)} = \frac{\dot{y}^2}{4a^2 - y^2};$$

$$P\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\rho^2 + a^2)\dot{\varphi}^2 + P\frac{y}{2} \to \dot{y}^2 = g(h-y)\frac{4l^2 - y^2}{(\rho^2 + l^2)}.$$



Hình III.67

Khi B cách sàn một đoạn $\frac{h}{2}$ thì $y_B = \frac{h}{2}$

$$V_B = \dot{y}_B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gh}{2}\frac{16a^2 - h^2}{\rho^2 + a^2}}.$$

Khi B chạm sàn thì $y_B = 0$

$$V_B = \dot{y}_B = 2a\sqrt{\frac{gh}{\rho^2 + a^2}}.$$

Bài II.68 (hình III.68)

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e; \qquad (*)$$

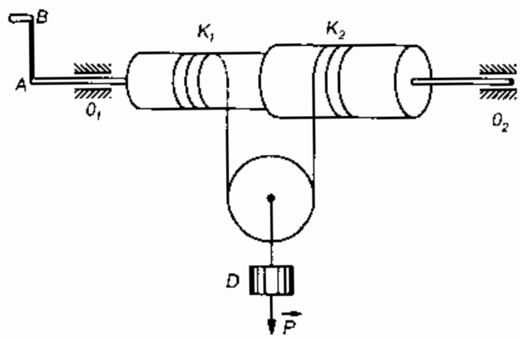
$$\sum A_k^e = M\varphi - PS;$$

$$T_{hệ} = T_1 + T_2 + T_D;$$

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega^2;$$

$$T_D = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2.$$



Hình III.68

Ta có:

$$S_C = \frac{S_2 - S_1}{2};$$

$$S_C = \frac{S_2 - S_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}\varphi;$$

$$V_D = V_C = \dot{S}_C = \frac{r_2 - r_1}{2}\omega;$$

$$T_{hệ} = [4g(J_1 + J_2) + P(r_2 - r_1)^2]\frac{\omega^2}{8g};$$

$$M\varphi - PS = 2M - P(r_2 - r_1)S.$$

Thay vào (*) ta có:

$$\omega = 2\sqrt{2g\frac{2M - P(r_2 - r_1)}{[4g(J_1 + J_2) + P(r_2 - r_1)](r_2 - r_1)}}.$$

Bài II.69 (hình III.69)

$$dT = \sum dA_k^e; \qquad (*)$$

$$\sum dA_k^e = Md\varphi - P_2\sin\alpha dS_C;$$

$$dS_C = r_1 d\varphi;$$

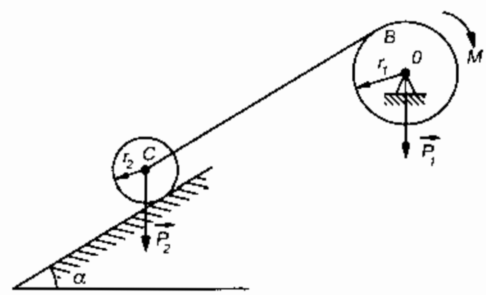
$$\sum dA_k^e = (M - r_1P_2\sin\alpha)d\varphi;$$

$$T_{hệ} = T_1 + T_2 = \frac{1}{4g}(P_1 + 3P_2)r_1^2\omega_1^2;$$

$$dT = \frac{1}{2g}(P_1 + 3P_2)r_1^2\omega_B d\omega_1 .$$

Thay vào (*) ta được:

$$\frac{1}{2g}(P_1 + 3P_2)r_1^2\omega_1 d\omega_1 =$$
$$= (M - r_1P_2\sin\alpha)d\varphi$$
$$= (M - r_1P_2\sin\alpha)\omega_1 dt;$$



Hình III.69

$$\frac{1}{2g}(P_1 + 3P_2)r_1^2 d\omega_1 = (M - r_1P_2\sin\alpha - b\omega_1)dt .$$

Đặt $\frac{1}{2g}(P_1 + 3P_2)r_1^2 = \beta$ và $M_o - r_1P_2\sin\alpha = A$;

$$\frac{d\omega_1}{A - b\omega_1} = -\frac{b}{\beta}dt .$$

Điều kiện đầu:

$$t = 0;\ \omega(0) = 0 ;$$

$$\omega_1 = \frac{A}{b}(1 - e^{-\beta t}) .$$

Bài II.70 (hình III.70)

$$T_1 = T_{hệ} = \sum A_k^e ; \qquad (*)$$

$$\sum A_k^e = P_1S_B - P_2S_I\sin\alpha ;$$

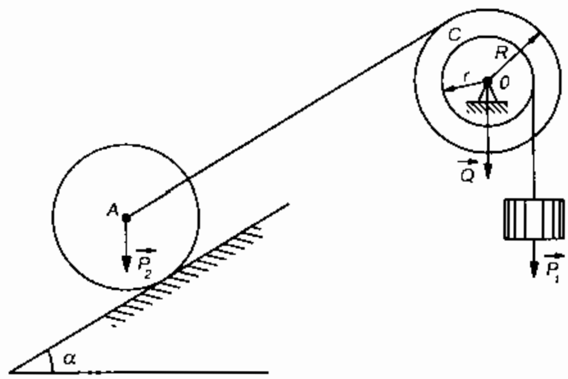
$$\sum A_k^e = \left(P_1 - P_2\sin\alpha\frac{R}{r}\right)S_B ;$$

$$T_{hệ} = T_A + T_B + T_C ;$$

$$T_{hệ} = \frac{1}{4g}(2P_1r^2 + 3P_2R^2 + 2Q\rho^2)\frac{V_B^2}{r^2} ;$$

$$\frac{1}{4g}(2P_1r^2 + 3P_2R^2 + 2Q\rho^2)\frac{V_B^2}{r^2} = \frac{rP_1 - P_2\sin\alpha R}{r}S_B ;$$

$$W_B = 2gr\frac{rP_1 - P_2\sin\alpha R}{2P_1r^2 + 3P_2R^2 + 2Q\rho^2}.$$



Hình III.70

Điều kiện để vật B đi xuống: $W_B > 0$ hay $rP_1 - P_2\sin\alpha R > 0$ và $V_B(0) \geq 0$.

Để B chuyển động thẳng đều thì $W_B = 0$ hay $rP_1 - P_2\sin\alpha R = 0$.

NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

Bài II.71 (hình III.71)

$$F_A^{qt} = \frac{P_1}{g}W_A;$$

$$F_B^{qt} = \frac{P_2}{g}W_B;$$

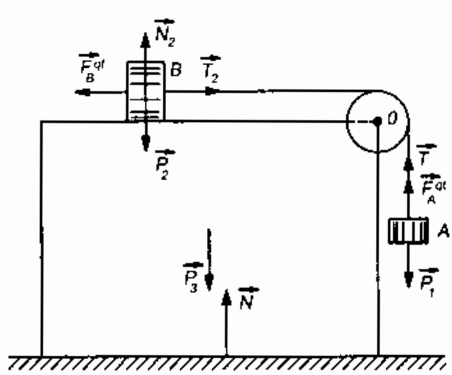
$$W_B = W_A = W.$$

Xét vật A có:

$$T_1 = P_1 - \frac{P_1}{g}W.$$

Xét vật B có:

$$T_2 = \frac{P_2}{g}W.$$



Hình III.71

Do $T_1 = T_2$ nên tính được

$$W = \frac{P_1}{P_1 + P_2} g \; ;$$

$$N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_1^2}{P_1 + P_2} .$$

Bài II.72 (hình III.72)

$$F_{CD}^{qt} = F_{EF}^{qt} = \frac{P}{g}\frac{a}{2}\omega_o^2 .$$

Các phản lực tại A và B:

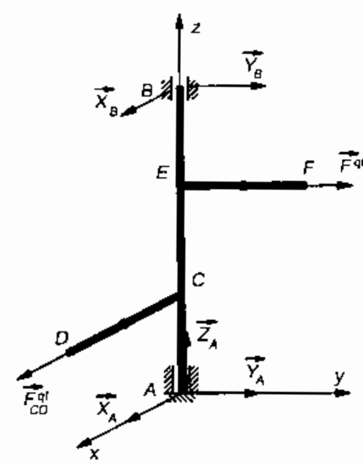
$$\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B} .$$

Lập các phương trình cân bằng của hệ lực không gian và giải ra kết quả

$$X_A = -\frac{Pa}{3g}\omega^2 \; ;$$

$$Y_A = -\frac{Pa}{6g}\omega^2 \; ; \; Z_A = 0$$

$$X_B = -\frac{Pa}{6g}\omega^2 \; ; \; Y_B = -\frac{Pa}{3g}\omega^2 .$$



Hình III.72

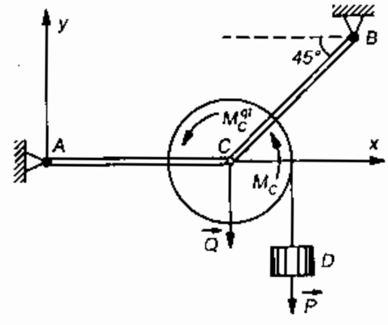
Bài II.73 (hình III.73)

$$F_D^{qt} = \frac{P}{g} W_D \; ;$$

$$M_C^{qt} = \frac{Q}{2g} R^2 \frac{W_D}{R} = \frac{Q}{2g} R W_D .$$

Lập các điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng gồm các lực:

$$(\overrightarrow{S_{AC}}, \overrightarrow{S_{BC}}, M_C, M_C^{qt}, \vec{Q}, \vec{P}, \overrightarrow{F_D^{qt}}) \sim 0.$$



Hình III.73

Ta tính được:

$$W_D = \frac{2g(RP - M)}{R(Q + 2P)};\ S_{AC} = \frac{P}{g}W_D;$$

$$S_{BC} = -\frac{P\sqrt{2}}{g}W_D.$$

Bài II.74 (hình III.74)

$$W_E = \frac{1}{3}g;\ F_E^{qt} = \frac{P_E}{g}W_E = \frac{1}{3}P_E$$

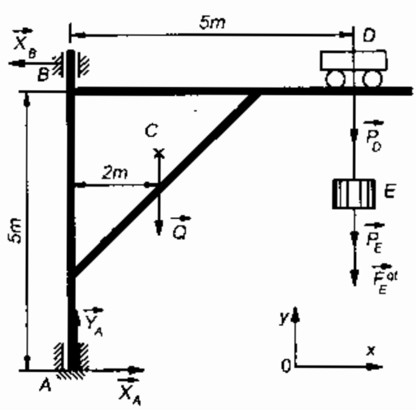
$$+\ \Sigma X = 0$$

$$+\ \Sigma Y = 0$$

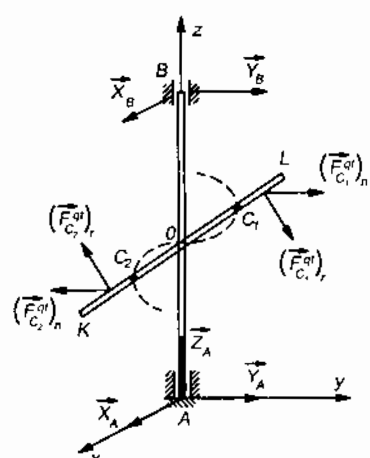
$$+\ \Sigma m_A(\vec{F}) = 0$$

$$X_A = -X_B = 5{,}3kN$$

$$Y_A = 6{,}5kN$$



Hình III.74



Hình III.74

Bài II.75 (hình III.75)

$\varepsilon = const$ nên có $\omega = \varepsilon t$.

Do lúc đầu hệ đứng yên

$$\left(F_{C_1}^{qt}\right)_\tau = \frac{P}{2g}\frac{a}{2}\sin\alpha\varepsilon = \frac{1}{4g}Pa\varepsilon\sin\alpha\,;$$

$$\left(F_{C_1}^{qt}\right)_n = \frac{P}{2g}\frac{a}{2}\sin\alpha\omega^2 = \frac{1}{4g}Pa\varepsilon^2t^2\sin\alpha\,;$$

$$\left(F_{C2}^{qt}\right)_\tau = \frac{1}{4g}Pa\varepsilon\sin\alpha\,;$$

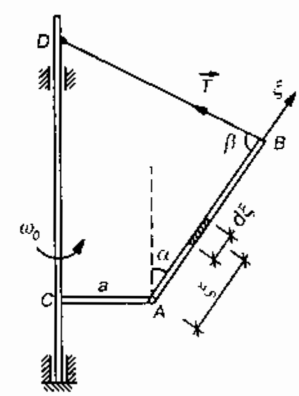
$$\left(F_{C_2}^{qt}\right)_n = \frac{1}{4g}Pa\varepsilon^2t^2\sin\alpha\,.$$

Lập các phương trình cân bằng của hệ lực không gian sẽ tính được các kết quả

$$X_A = \frac{Pa^2}{6gh}\varepsilon\sin 2\alpha\,;\ Y_A = \frac{Pa^2\varepsilon^2t^2}{6gh}\sin 2\alpha\,;\ Z_A = 0\,;$$

$$X_B = -\frac{Pa^2}{6gh}\varepsilon\sin 2\alpha\,;\ Y_B = -\frac{Pa^2\varepsilon^2t^2}{6gh}\sin 2\alpha\,.$$

Bài II.76 (hình III.76)



Hình III.76

Cho $AB = b$;

$$dF^{qt} = \omega_o^2(a+\xi\sin\alpha)dm\,;$$

$$dm = \gamma d\xi = \frac{P}{gb}d\xi\,;$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = Tb - P\frac{b}{2}\sin\alpha - \int_0^b dF^{qt}\xi\cos\alpha = 0$$

Ta có:

$$T = \frac{1}{2}m(g\sin\alpha + a\omega_o^2\cos\alpha + \frac{b\omega_o^2\sin 2\alpha}{3}\,.$$

Khi $\alpha = 0$ ta có $T = \frac{1}{2}ma\omega_o^2$.

Bài II.77 (hình III.77)

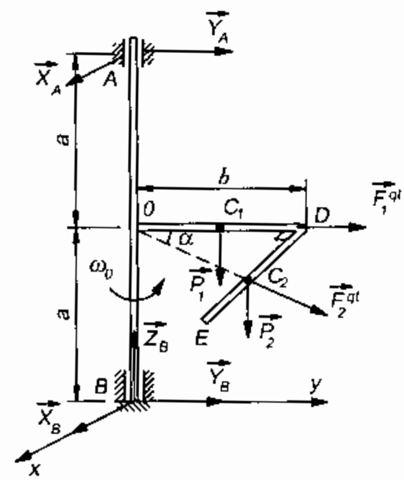
Xét toàn bộ trục quay *AB*.

Các lực tác dụng:

$(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{Z_B}, \overrightarrow{F_1^{qt}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}) \sim 0.$

$F_1^{qt} = m\dfrac{b}{2}\omega_o^2;\ F_2^{qt} = m\dfrac{b}{2}\omega_o^2\sqrt{5};$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}.$



Hình III.77

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X = 0 \qquad \sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = 0$$
$$\sum Y = 0 \qquad \sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = 0$$

Từ các phương trình cân bằng này ta có:

$$X_A = -\frac{mb}{4a}(g + a\omega_o^2);$$

$$Y_A = -\frac{3mb}{4a}(g + a\omega_o^2)$$

$$X_B = \frac{mb}{4a}(g - a\omega_o^2);Y_B = \frac{3mb}{4a}(g - a\omega_o^2);$$

$$Z_B = 2mg.$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Bài II.78 (hình III.78)

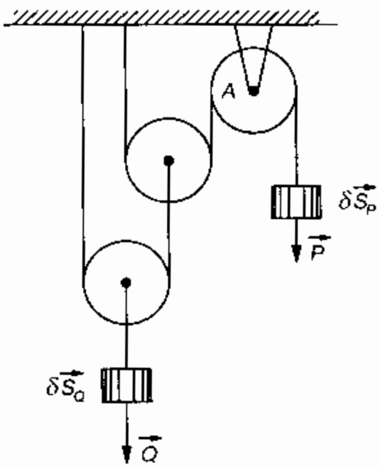
Hệ có 1 bậc tự do:

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δS_P

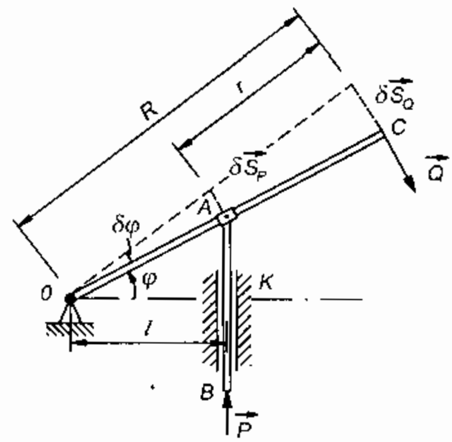
$$\sum \delta A_k = P\delta S_P - Q\delta S_Q = 0.$$

Vì các ròng rọc chuyển động song phẳng

$$\delta S_P = 2^n \delta S_Q ; \ \frac{Q}{P} = 2^n .$$



Hình III.78



Hình III.79

Bài II.79 (hình III.79)

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δS_Q

$$\sum \delta A_k = Q\delta S_Q - P\delta S_P = 0 ; \qquad (*)$$

$$\cos\varphi = \frac{l}{R-r} ; \ \cos\varphi = \frac{(R-r)\delta\varphi}{\delta S_P} ;$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta S_P \cos^2\varphi}{l} .$$

Thay vào (*) ta có: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

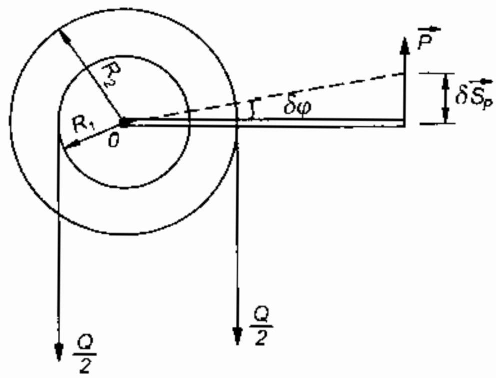
Bài II.80 (hình III.80)

Hệ có 1 bậc tự do:

Cho hệ một di chuyển khả dĩ δS_P.

$$\sum \delta A_k = PR\delta\varphi + \frac{Q}{2}R_1\delta\varphi - \frac{Q}{2}R_2\delta\varphi = 0\ ;$$

$$P = -\frac{R_1 - R_2}{2}Q\ .$$



Hình III.80

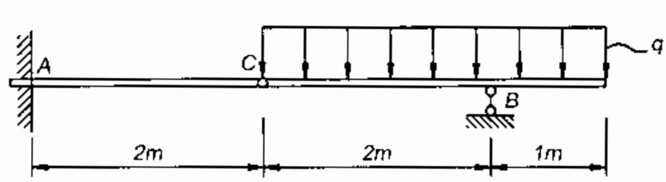
Bài II.81 (hình III.81)

Muốn tính phản lực tại B: thay liên kết B bằng $\overrightarrow{N_B}$. Rồi cho hệ di chuyển $\delta\varphi_C$ (góc quay quanh C). Tính được:

$$N_B = \frac{1{,}5Q}{2} = \frac{1{,}5\times 4{,}9\times 3}{2} \approx 11N\ .$$

Muốn tính M_A: thay liên kết ngàm ở A bằng gối cố định A và M_A. Cho hệ di chuyển khả dĩ $\delta\varphi_A$ (góc quay quanh A) rồi viết phương trình tính công:

$$M_A = \frac{3q}{2} = \frac{3\times 4{,}9}{2} = 7{,}4Nm\ .$$



Hình III.81

Để tính X_A: ta thay ngàm A bằng gối di động ngang và phản lực X_A. Cho di chuyển khả dĩ δX_A rồi viết phương trình tính công: $X_A = 0$.

Tính Y_A: thay ngàm A bằng gối di động thẳng đứng và phản lực Y_A. Lập phương trình tính công: $Y_A = 3{,}7N$.

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Bài II.82 (hình III.82)

Hệ có 1 bậc tự do:

Các lực tác dụng lên hệ:

$$\vec{Q}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, M, \overrightarrow{R_o}.$$

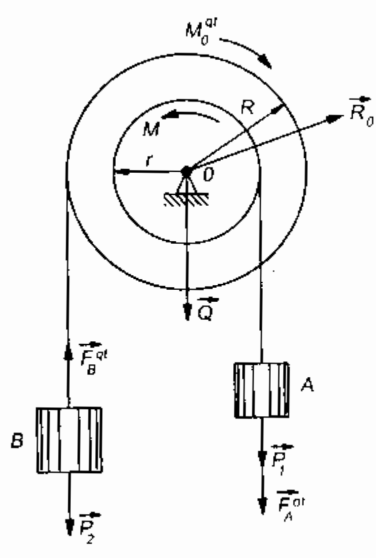
Các lực quán tính:

$$F_A^{qt} = \frac{P_1}{g} W_A = \frac{P_1}{g} r\varepsilon;$$

$$F_B^{qt} = \frac{P_2}{g} W_B = \frac{P_1}{g} R\varepsilon;$$

$$M_o^{qt} = J_{oz}\varepsilon = \frac{Q}{g}\rho^2\varepsilon;$$

$$\delta S_B = R\delta\varphi;\ \delta S_A = r\delta\varphi;$$



Hình III.82

$$\sum \delta A_k = (P_2 - F_B^{qt})\delta S_B + (M - M_o)\delta\varphi - (P_1 + F_A^{qt})\delta S_A = 0;$$

$$\varepsilon = \frac{M + P_2 R - P_1 r}{P_2 R^2 + Q\rho^2 + P_1 r^2}.$$

Bài II.83 (hình III.83)

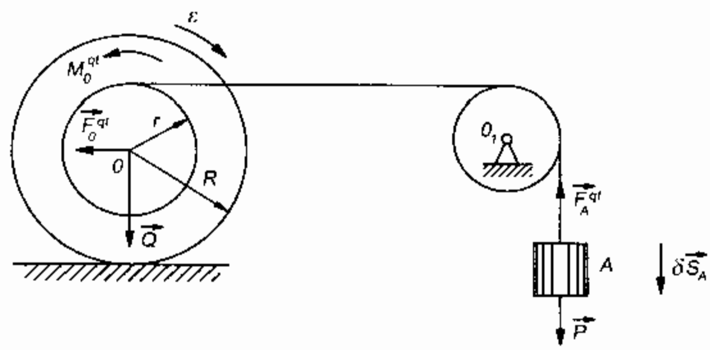
Hệ có 1 bậc tự do:

$$F_A^{qt} = \frac{P}{g} W_A;\ F_o^{qt} = \frac{Q}{g} W_o;$$

$$W_o = \frac{RW_A}{R+r};\ M_o^{qt} = J_{oz}\varepsilon = \frac{Q}{g}\frac{\rho^2}{R+r} W_A;$$

$$\sum \delta A_k = \left(P - \frac{P}{g} W_A \right) \delta S_A - \frac{Q}{g} \frac{\rho^2}{R+r} W_A \delta S_o - Q\rho^2 W_A \delta\varphi = 0 \ ;$$

$$W_A = \frac{P(R+r)^2 g}{P(R+r)^2 + Q(\rho^2 + R^2)} .$$



Hình III.83

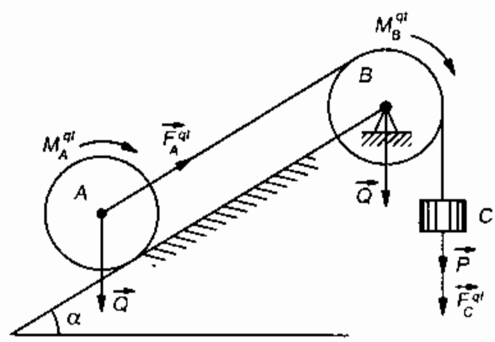
Bài II.84 (hình III.84)

$$F_A^{qt} = \frac{Q}{g} W_A \ ; \ F_C^{qt} = \frac{P}{g} W_C \ ;$$

$$M_B^{qt} = J_{Bz} \varepsilon_B = \frac{Q}{2g} R^2 \varepsilon_B \ ;$$

$$M_A^{qt} = J_{Az} \varepsilon_A = \frac{Q}{2g} R^2 \varepsilon_A \ ;$$

$$W_A = W_C \ ; \ \varepsilon_A = \varepsilon_B = \frac{W_A}{R} \ ;$$



Hình III.84

$$\sum \delta A_k = (Q \sin\alpha - F_A^{qt}) \delta S_A - M_A^{qt} \delta\varphi_A - M_B^{qt} \delta\varphi_B - (P + F_C^{qt}) \delta S_C = 0 \ ;$$

$$W_A = g \frac{Q \sin\alpha - P}{2Q + P} .$$

Bài II.85 (hình III.85)

Các lực quán tính:

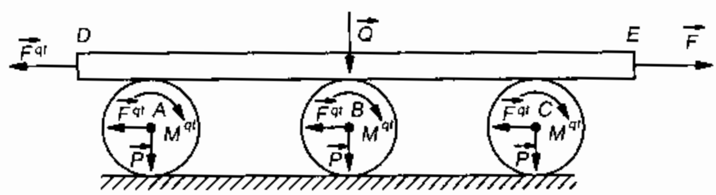
$$F_{DE}^{qt} = \frac{Q}{g} W_{DE} \ ; \ F_A^{qt} = \frac{P}{g} W_A \ ;$$

$$M_A^{qt} = J_{Az}\varepsilon_A = \frac{P}{2g}R^2\varepsilon_A\,;$$

$$R\varepsilon = W_A = \frac{1}{2}W_{DE}\,;\ \varepsilon = \frac{W_{DE}}{2R}\,;$$

$$\sum \delta A_k = (F - F_{DE}^{qt})\delta S - 3F_A^{qt}\delta S_A - 3M_A^{qt}\delta\varphi = 0\,;$$

$$W_{DE} = \frac{8F}{8Q + 9P}g\,.$$

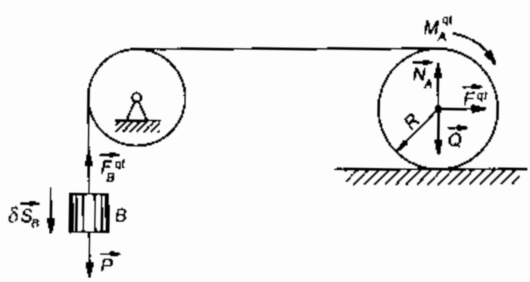


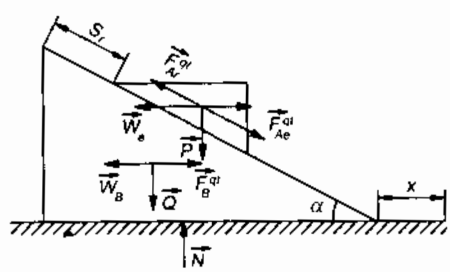
Hình III.85

Bài II.86 (hình III.86)

Giải tương tự bài trên:

$$W_B = \frac{2RP - f_1 Q}{R(8P + 3Q)}4g\,.$$





Hình III.86 *Hình III.87*

Bài II.87 (hình III.87)

Hệ gồm lăng trụ A và B.

Hệ có 2 bậc tự do: Lực chủ động $\vec{P}, \vec{Q}$.

Các lực quán tính:

$$\overrightarrow{F_B^{qt}} = -\frac{Q}{g}\overrightarrow{W_B};$$

$$\overrightarrow{F_{Ar}^{qt}} = -\frac{P}{g}\overrightarrow{W_r}.$$

$$\overrightarrow{F_{Ae}^{qt}} = -\frac{P}{g}\overrightarrow{W_e};$$

$$\overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W_B}.$$

Coi x = const còn S_r có $\delta S_r \neq 0$

$$\sum \delta A_k = P\sin\alpha\delta S_r + F_{Ae}^{qt}\cos\alpha\delta S_r - F_{Ar}^{qt}\delta S_r = 0;$$

$$W_r = W_B\cos\alpha + g\sin\alpha. \tag{a}$$

Coi S_r = const cho x biến thiên với $\delta x \neq 0$

$$\sum \delta A_k = F_{Ar}^{qt}\cos\alpha\delta x - F_B^{qt}\delta x - F_{Ae}^{qt}\delta x = 0;$$

$$F_{Ar}^{qt}\cos\alpha - F_B^{qt} - F_{Ae}^{qt} = 0. \tag{b}$$

Giải hệ (a) và (b) ta được:

$$W_B = W_e = g\frac{P\sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}.$$

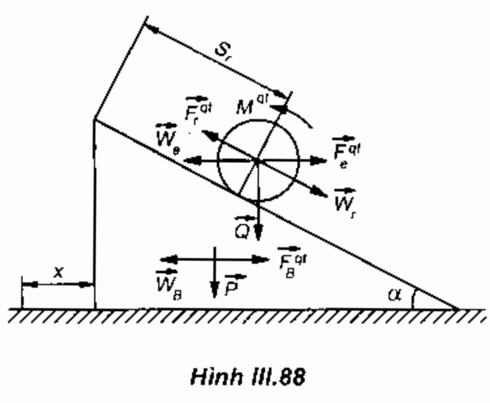
Lăng trụ B dịch chuyển sang trái.

Bài II.88 (hình III.88)

Giải tương tự bài trên

$$W = g\frac{Q\sin 2\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha}.$$

Lăng trụ B dịch chuyển sang trái.



Hình III.88

PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI II

Bài II.89 (hình III.89)

Hệ gồm con chạy *A* và quả cầu *B*.

Hệ có 2 bậc tự do.

Chọn toạ độ suy rộng $q_1 = y$; $q_2 = \varphi$.

$$T_{hệ} = T_A + T_B;\ T_A = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2;$$

$$T_B = \frac{1}{2}m_2V_{Ba}^2 = \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi);$$

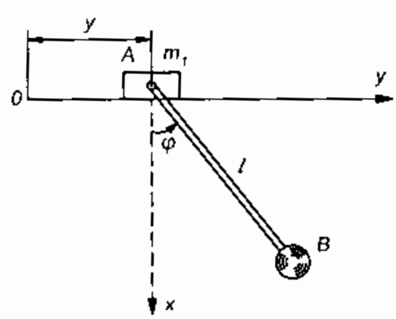
$$T_{hệ} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi).$$

Tính:

$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$;

$Q_y = 0$; $\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0$;

$Q_\varphi = -m_2gl\sin\varphi$.



Hình III.89

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Ta có:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

Thay vào phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y$$

Vì $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$; $Q_y = 0$; $\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0$ nên *y* là toạ độ xyclic. Hệ có một tích phân xyclic là:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_1\dot{y} + m_2\dot{y} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = const = h_1$$

Tích phân năng lượng của hệ có dạng:

$$E = T + \pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi - m_2 gl\cos\varphi = const = h_2$$

Bài II.90 (hình III.90)

Hệ có 2 bậc tự do:

Chọn toạ độ suy rộng: $q_1 = \varphi$; $q_2 = l(t)$

Ta có:

$x_A = l\sin\varphi$;

$\dot{x}_A = \dot{l}\sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\varphi$;

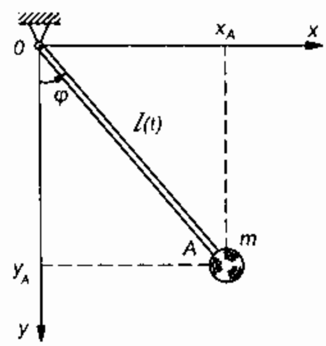
$y_A = l\cos\varphi$;

$\dot{y}_A = \dot{l}\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\varphi$;

$V_A^2 = \dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2$;

$T = \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2)$;

$\pi = -mgl\cos\varphi$.



Hình III.90

Tính các đạo hàm riêng rồi thay vào hệ phương trình Lagrăng loại II ta có:

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 .$$

$$\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi = 0 .$$

Bài II.91 (hình III.91)

Hệ có 1 bậc tự do: Chọn $q = \theta$.

Ta có:

$$x_A = (l + r\theta)\sin\theta + r\cos\theta ;$$

$y_A = (l + r\theta)\cos\theta - r\sin\theta$;

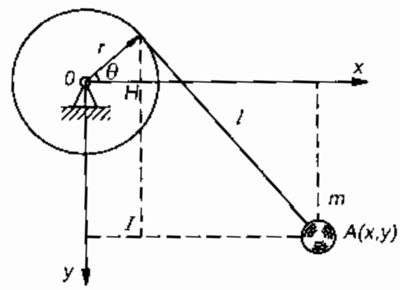
$V_A^2 = (l + r\theta)^2\dot{\theta}^2$

$\rightarrow T = \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}(l + r\theta)^2\dot{\theta}^2$;

$\sum \delta A_k = -mg\delta y_A$

$= -mg(l + r\theta)\sin\theta\delta\theta$;

$Q_\theta = -mg(l + r\theta)\sin\theta$.



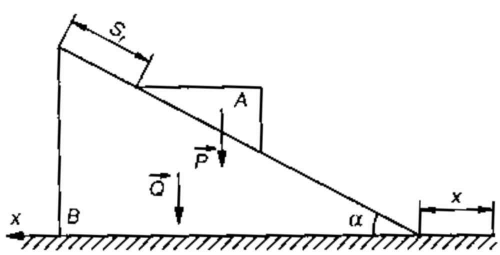
Hình III.91

Tính $\frac{\partial T}{\partial \theta}$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$ và $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)$,

thay vào $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$ ta được:

$$(l + r\theta)\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0.$$

Bài II.92 (hình III.92)



Hình III.92

Hệ có 2 bậc tự do.

Chọn $q_1 = x$; $q_2 = S_r$.

Cho di chuyển $\delta x \neq 0$ có:

$$Q_x = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0.$$

Cho $\delta S_r \neq 0$ có: $Q_S = P\sin\alpha$

$$T_{\text{hệ}} = T_A + T_B = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{x}^2 + \dot{S}_r^2 + 2\dot{S}_r\dot{x}\cos\alpha).$$

Tính:

$$\frac{\partial T}{\partial x};\ \frac{\partial T}{\partial S_r};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_r};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right);\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_r}\right).$$

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial S_r}=Q_{S_r}$$

Ta được hệ phương trình sau:

$$(Q+P)\ddot{x}+P\ddot{S}_r\cos\alpha=0; \tag{a}$$

$$\ddot{x}\cos\alpha+\ddot{S}_r-g\sin\alpha=0. \tag{b}$$

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta dược:

$$\ddot{x}=\frac{Pg\cos\alpha\sin\alpha}{Q+P^2\sin\alpha}=\frac{Pg\sin2\alpha}{2(Q+P^2\sin\alpha)}.$$

$\ddot{x}$ mang dấu (+) chứng tỏ lăng trụ B dịch chuyển sang trái theo chiều dương của trục x khi lăng trụ A chuyển động xuống dưới; x là toạ độ xyclic vì $\frac{\partial T}{\partial x}=0$; $Q_x=0$; $\frac{\partial \pi}{\partial x}=0$.

Tích phân xyclic là:

$$\frac{Q+P}{g}\dot{x}+\frac{P}{g}\dot{S}_r\cos\alpha=const=h_1.$$

Tích phân năng lượng có dạng:

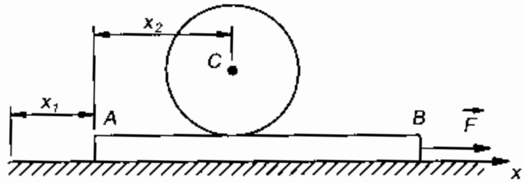
$$E=T+\pi=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{x}^2+\dot{S}_r^2+2\dot{S}_r\dot{x}\cos\alpha)-PS_r\sin\alpha=const=h_2.$$

Bài II.93 (hình III.93)

Hệ khảo sát: tấm AB và con lăn C.

Hệ có 2 bậc tự do. Chọn $q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$ là khoảng cách từ đầu A của thanh AB đến tâm C của con lăn

Cho $\delta x_1 \neq 0$ còn $x_2 = const$.



Hình III.93

Tương tự có: $Q_{x_2} = 0$;

$$T_{\text{hệ}} = T_{AB} + T_C$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2;$$

$$T_C = \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2}mV_C^2;$$

$$V_C^a = \dot{x}_1 + \dot{x}_2.$$

Vì $V_C^r = \dot{x}_2$ và $V_C^e = \dot{x}$, vận tốc tương đối và vận tốc theo song song cùng chiều $\omega = \dfrac{\dot{x}_2}{R}$;

$$T_{\text{hệ}} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(J_{Cz} + mR^2)\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2.$$

Tính các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1};\ \frac{\partial T}{\partial x_2};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right);\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right).$$

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_{x_1};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_{x_2}.$$

Ta có hệ phương trình:

$$(M+m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = F; \qquad \text{(a)}$$

$$mR^2\ddot{x}_1 + (J_{Cz} + mR^2)\ddot{x}_2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Giải hệ (a) và (b) ta được:

$$\ddot{x}_1 = W_{AB} = \frac{(J_{Cz} + mR^2)F}{J_{Cz}(M+m) + mMR^2};$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{mR^2F}{J_{Cz}(M+m) + mMR^2}$$

$\ddot{x}_2$ mang dấu (-) chứng tỏ khi thanh AB chuyển động sang phải thì trục con lăn C chuyển động tương đối sang trái.

Gia tốc tuyệt đối của trục C là:

$$W_C^a = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{J_{Cz}F}{J_{Cz}(M+m) + mMR^2}.$$

Ta có x_2 là tọa độ xyclic. Tích phân xyclic là:

$$\frac{(J_{Cz} + mR^2)}{R^2}\dot{x}_2 + m\dot{x}_1 = const.$$

Bài II.94 (hình III.94)

Hệ gồm: lăng trụ A và con lăn B.

Chọn $q_1 = x$; $q_2 = S$.

Tính $Q_x = 0$; $Q_S = m_B g \sin\alpha$;

$$T_{\text{hệ}} = T_A + T_B;$$

$$T_{\text{hệ}} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m_B\dot{S}^2 + m_B\dot{x}\dot{S}\cos\alpha$$

Tính:

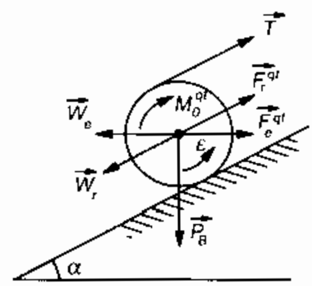
$$\frac{\partial T}{\partial x};\ \frac{\partial T}{\partial S};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}};\ \frac{\partial T}{\partial \dot{S}};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right);\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right).$$

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right)-\frac{\partial T}{\partial S}=Q_S\,.$$



Hình III.94

Ta được hệ phương trình sau:

$(m_A+m_B)\ddot{x}+m_B\ddot{S}\cos\alpha=0\,;$ (1)

$2m_B\ddot{x}\cos\alpha+3m_B\ddot{S}-2gm_B\sin\alpha=0\,.$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được:

$$\ddot{x}=2{,}83m/s^2\,;\ \ddot{S}=\frac{1}{2}g=4{,}9m/s^2\,.$$

Tính sức căng:

$$F_r^{qt}=m_B\ddot{S}=49{,}98\,;\ F_e^{qt}=m_B\ddot{x}=-28{,}86\,.$$

Chiếu lên phương S:

$$\sum S_k=T+F_r^{qt}+F_e^{qt}\cos\alpha-P_B\sin\alpha=0\rightarrow T=25N\,.$$

Bài II.95 (hình III.95)

Hệ có 2 bậc tự do.

Chọn $q_1=x_1\,;\ q_2=x_2\,;$

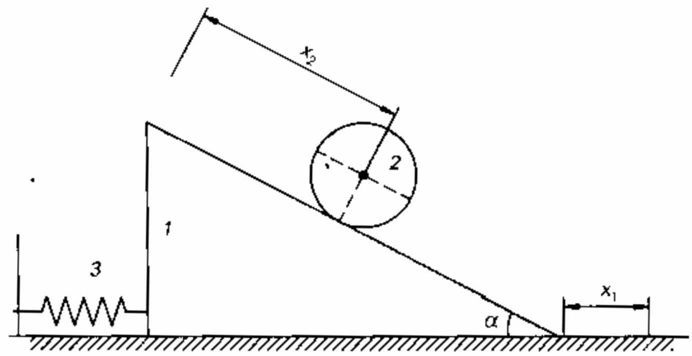
$$T_{\text{hệ}}=T_1+T_2\,;$$

$$V_1=\dot{x}_1\,;\ \omega=\frac{\dot{x}_2}{R}\,;$$

$$V_o^2=\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2x_1x_2\cos\alpha\,;$$

$$T_{\text{hệ}}=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2x_1x_2\cos\alpha)+\frac{1}{4}m_2\dot{x}_2^2\,;$$

$$\pi=\frac{1}{2}Cx_1^2+m_2g(H-x_2\sin\alpha)\,;$$



Hình III.95

Tính các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1};\ \frac{\partial T}{\partial x_2};\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1};\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right);\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right);\quad \frac{\partial \pi}{\partial x_1};\quad \frac{\partial \pi}{\partial x_2}.$$

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial \pi}{\partial x_1};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \pi}{\partial x_2}.$$

Ta có hệ phương trình:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2\cos\alpha+Cx_1=0;$$

$$3\ddot{x}_2-2\ddot{x}_1\cos\alpha-2g\sin\alpha=0.$$

Bài II.96 (hình III.96)

Chọn toạ độ suy rộng $q_1 = x$; $q_2=\varphi$;

$$T_{\text{hệ}} = T_{\text{cl}}+T_{AB};$$

$$V_{ca}^2=\frac{a^2}{4}\dot{\varphi}+\dot{x}^2+a\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi;$$

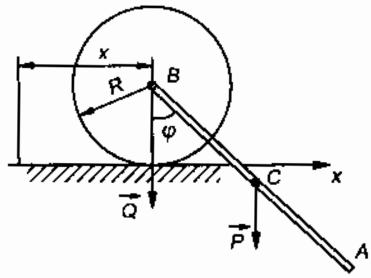
$$T_{cl} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}\dot{x}^2\,;$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_C^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\frac{P}{g}a^2\dot{\varphi}^2\,;$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + \frac{1}{24}\frac{P}{g}a^2\dot{\varphi}^2\,;$$

$$\mathrm{T}_{\text{hệ}} = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{3} + \dot{x}^2 + a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right);$$

$$Q_x = 0\,;\; Q_\varphi = -\frac{1}{2}Pa\sin\varphi\,.$$



Hình III.96

Tính:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3Q}{2g}\dot{x} + \frac{P}{g}\dot{x} + \frac{P}{2g}a\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{3Q+2P}{2g}\dot{x} + \frac{P}{2g}a\dot{\varphi}\cos\varphi\,;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2g}P\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi\,;\; \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2g}Pa^2\dot{\varphi}\,.$$

Thay vào các phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \rightarrow 3\ddot{x}\cos\varphi + 2a\ddot{\varphi} = 3g\sin\varphi\,.$$

Ta thấy $x = q_1$ là toạ độ xyclic. Tích phân xyclic của hệ có dạng:

$$(3Q + 2P)\dot{x} + Pa\dot{\varphi}\cos\varphi = const = h_1 .$$

Tích phân năng lượng của hệ có dạng:

$$E = T + \pi = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\dot{x}^2 + a\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{a^2\dot{\varphi}^2}{3}\right) - \frac{1}{2}aP\cos\varphi = const = h_2 .$$

Bài II.97 (hình III.97)

Hệ gồm: con chạy A và thanh AB.

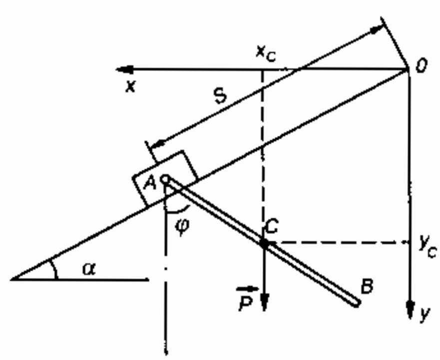
Hệ có 2 bậc tự do. Chọn $q_1 = S$; $q_2 = \varphi$;

$$T_{\text{hệ}} = T_{AB} = \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_C^2 ;$$

$$V_C^2 = \dot{S}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 - a\dot{S}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha) ;$$

$$T_{\text{hệ}} = \frac{P}{g}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{S}^2 - \frac{1}{2}\frac{P}{g}a\dot{S}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha) ;$$

$$Q_S = P\sin\alpha ;\ Q_\varphi = -\frac{a}{2}P\sin\varphi .$$



Hình III.97

Tính:

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right).$$

Thay vào phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right)-\frac{\partial T}{\partial S}=Q_S \rightarrow 2\ddot{S}-a\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)+a\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=2g\sin\alpha\,.$$

Thay vào phương trình:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi \rightarrow 2a\ddot{\varphi}-3\ddot{S}\cos(\varphi-\alpha)+3g\sin\alpha=0\,.$$

Điều kiện để có chuyển động trượt mà không quay: $\dot{\varphi}=0$ và $\ddot{\varphi}=0$.

Khi đó $\ddot{S}=g\sin\alpha$

ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI

Bài II.98 (hình III.98)

Xét chuyển động tương đối của quả cầu B:

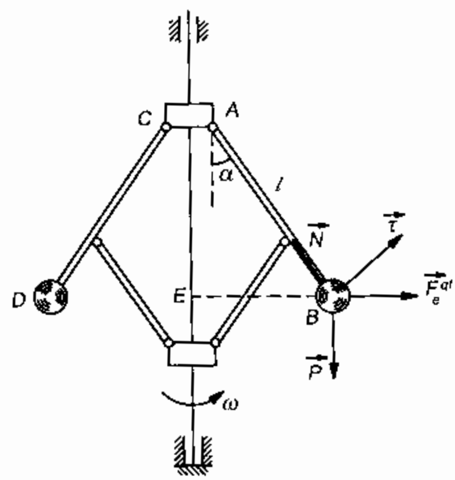
Các lực tác dụng: $\vec{P},\overrightarrow{F_e^{qt}},\vec{N}$

$\vec{P}+\overrightarrow{F_e^{qt}}+\vec{N}=0$ (*)

Chiếu (*) lên trục $B\tau$:

$F_e^{qt}\cos\alpha-P\sin\alpha=0$

$\cos\alpha=\dfrac{g}{l\omega^2}$



Hình III.98

Bài II.99 (hình III.99)

Xét chuyển động tương đối của điểm M trên cung BA.

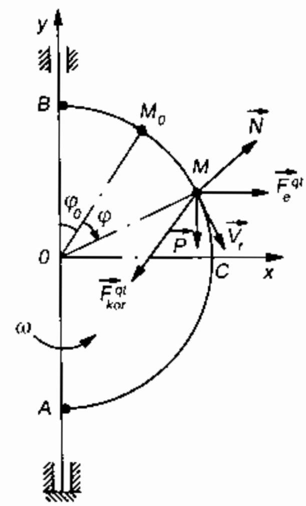
Các lực tác dụng: $\vec{P},\vec{N},\overrightarrow{F_e^{qt}},\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$.

$$\frac{1}{2}mV_{r1}^2-\frac{1}{2}mV_{r0}^2=A_P+A_e^{qt};$$

$V_{r0}=0$;

$$\frac{1}{2}mV_{r1}^2 = mgR(\cos\varphi_o - \cos\varphi) - \frac{1}{2}mR^2\omega^2(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_o);$$

$$V_{r1} = R\sqrt{\omega^2(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_o) + \frac{2g}{R}(\cos\varphi_o - \cos\varphi)}.$$



Hình III.99

Bài II.100 (hình III.100)

Chọn hệ *Oxyz* như hình vẽ.

Chuyển động của *A* dọc *Ox* là chuyển động tương đối:

$$m\overrightarrow{W_r} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{en}^{qt}} + \overrightarrow{F_{e\tau}^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}} + \overrightarrow{F_{dh}} \quad \overrightarrow{V_r} = const \to \overrightarrow{W_r} = 0$$

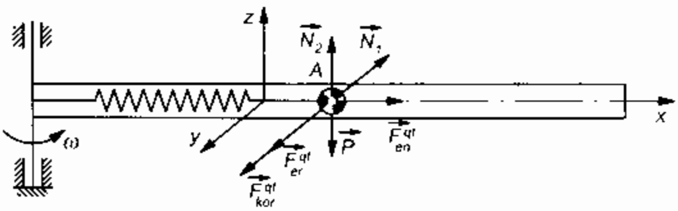
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{en}^{qt}} + \overrightarrow{F_{e\tau}^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}} + \overrightarrow{F_{dh}} = 0 \qquad (1)$$

$F_{en}^{qt} - F_{dh} = mW_{en} - cx = 0$ (a) $\to mx\omega^2 = cx$

$N_2 - P = 0$ (b) $\to N_2 = P$

$F_{e\tau}^{qt} + F_{kor}^{qt} - N_1 = 0$ (c) $x = x_o + V_r t$

Ta có: $$\omega = \sqrt{\frac{c(x_o + V_r t)}{m(a + x_o + V_r t)}} \qquad (*)$$



Hình III.100

Từ (*) $\rightarrow \varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ rồi thay vào (c)

$$N_1 = mW_{e\tau} + mW_{kor} 2m\omega_o V_r + m(a + x_o + V_r t)\varepsilon ;$$

$$N_1 = \frac{V_r\sqrt{mc}[4(x_o + V_r t) + a]}{2\sqrt{(x_o + V_r t)(a + x_o + V_r t)}} .$$

Khi t = 1s thì N_1 = 0,5N.

Bài II.101 (hình III.101)

Chọn hệ động Oxy có gốc trùng điểm treo O.

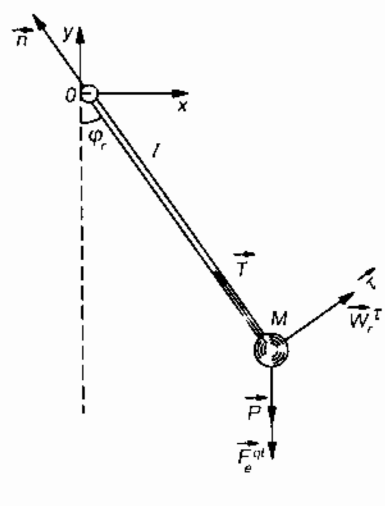
Chuyển động tương đối của M quanh O:

$$\overrightarrow{F_{kor}} = 0 ;$$

$$\overrightarrow{F_e^{qt}} = -m\vec{W} .$$

Các lực tác dụng lên M: $\vec{P}, \vec{T}, \overrightarrow{F_e^{qt}}$

$$m\overrightarrow{W_r} = \vec{P} + \vec{T} + \overrightarrow{F_e^{qt}} .$$



Hình III.101

Xét trường hợp điểm treo O đi lên với gia tốc $\vec{W}$.

$$mW_r^{\tau} = ml\ddot{\varphi} = -P\sin\varphi - F_e^{qt}\sin\varphi = -m(g + W)\sin\varphi ;$$

$$\sin\varphi \approx \varphi .$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + W}{l}\varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 ;$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+W}}\,.$$

Xét trường hợp khi gia tốc hướng xuống $W < g$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-W}}\,.$$

Trường hợp $W = g$ thì $\ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \varphi = C_1 t + C_2$.

Nếu $t = 0$ thì $\varphi(0) = \alpha$ và $\dot{\varphi}(0) = 0 \rightarrow C_2 = \alpha$; $C_1 = 0$; $\varphi = \alpha = \text{const}$ con lắc cân bằng tương đối (không dao động).

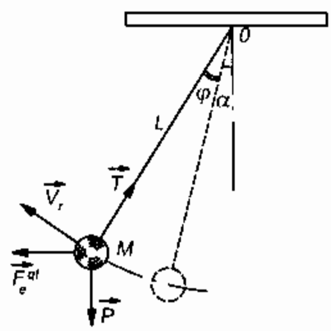
Bài II.102 (hình III.102)

Xét dao động bé quanh O của con lắc.

Các lực tác dụng lên M: $\vec{P}, \vec{T}, \overrightarrow{F_e^{qt}}$

$$\frac{d(l_o)}{dt} = \sum m_o(\overrightarrow{F_k});$$

$$mL^2\ddot{\varphi} = PL\sin(\varphi+\alpha) - W\cos(\varphi+\alpha).$$



Hình III.102

Biến đổi $\sin(\varphi+\alpha)$ và $\cos(\varphi+\alpha)$ với chú ý $\sin\varphi \approx \varphi$ và $\cos\varphi \approx 1$;

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{L}(g\cos\alpha + W\sin\alpha)\varphi = \frac{1}{L}(W\cos\alpha - g\sin\alpha);$$

$$k^2 = \frac{g\cos\alpha + W\sin\alpha}{L}.$$

Con lắc đứng yên thì $W = gtg\alpha$ và $W = 103cm/s^2$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha + W\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha + g\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}} = T\sqrt{\cos\alpha}\,;$$

$$T - T_1 = T(1 - \sqrt{\cos\alpha})\,.$$

Bài II.103 (hình III.103)

Xét chuyển động của điểm trong hệ động $Oxyz$

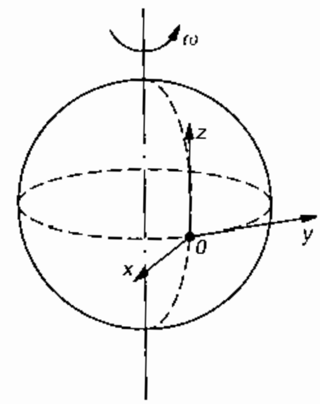
$\ddot{y} = 2gt\omega\cos\varphi$; $\ddot{x} = -g$;

$$y = 2g\omega\frac{t^3}{6}\cos\varphi;$$

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Xét nếu $x = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$;

$$y = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi = 12cm.$$



Hình III.103

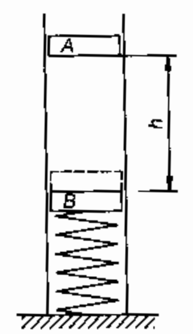
BÀI TOÁN VA CHẠM

Bài II.104 (hình III.104)

$V_A = \sqrt{2gh}$; $V_B = 0$;

$m_A V_A + m_B V_B = (m_A + m_B)u$;

$$u = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B} = \frac{m_A\sqrt{2gh}}{m_A + m_B} = 6{,}54m/s.$$



Hình III.104

Bài II.105 (hình III.105)

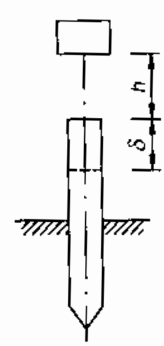
$V_b = \sqrt{2gh}$; $V_C = 0$;

$m_b V_b + m_C V_C = (m_b + m_C)u$.

Áp dụng định lý động năng:

$$\frac{1}{2}\frac{P_1 + P_2}{g}u_C^2 = F_{tb}\delta;$$

$$F_{tb} = \frac{1}{2}\frac{P_1 + P_2}{g\delta}\frac{P_2^2 2gh}{(P_1 + P_2)^2} = \frac{P_2^2 h}{g(P_1 + P_2)\delta} = 16{,}2.$$

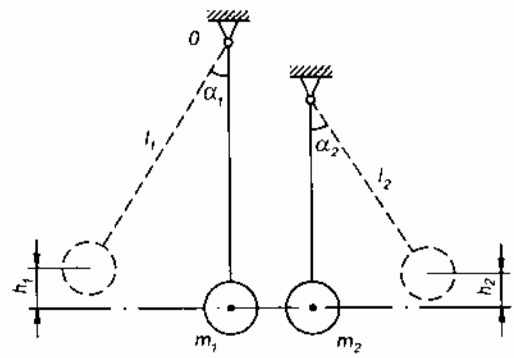


Hình III.105

Bài II.106

Theo công thức $x = \frac{J_{Oz}}{aM}$. Thay các giá trị ta có $x = \frac{2}{3}h$.

Bài II.107 (hình III.107)



Hình III.107

$$V_1 = \sqrt{2gl_1(1-\cos\alpha_1)} = 2\sqrt{gl_1}\sin\frac{\alpha_1}{2};$$

$$V_2 = 0;\ u_2 = 2\sqrt{gl_2}\sin\frac{\alpha_2}{2};$$

$$(1+k)m_1V_1 = (m_1+m_2)u_2;$$

$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{(1+k)m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

Bài II.108 (hình III.108)

Định lý động năng:

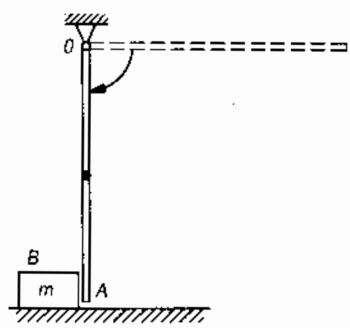
$$\frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2 = \frac{1}{2}Mga;\ J_{Oz} = \frac{1}{3}Ma^2;\ \omega^2 = \frac{3g}{l};$$

$$J_{Oz}\omega = J_{Oz}\frac{V_{vc}}{l} + mlV;\ V_{vc} = \frac{M\sqrt{3gl}}{M+3m};$$

$$S = -\mu g\frac{t^2}{2} + V_{vc}t;\ \ V = -\mu gt + V_{vc}.$$

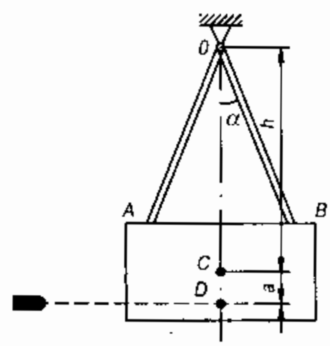
Khi $V = 0;\ S = S_{\max};\ t = \dfrac{V_{vc}}{\mu g};$

$$S_{\max} = \frac{V_{vc}^2}{2\mu g} = \frac{3M^2 l}{2\mu(M+3m)^2}.$$



Hình III.108

H III-107



Hình III.109

Bài II.109 (hình III.109)

Định lý mômen động lượng:

$$mVa = (M\rho^2 + ma^2)\omega. \qquad (1)$$

Định lý động năng:

$$(M\rho^2 + ma^2)\frac{\omega^2}{2} = g(Mh + ma)(1 - \cos\alpha); \qquad (2)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$V = \frac{M\rho^2 + ma^2}{ma}\omega = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g(Mh+ma)(M\rho^2+ma^2)}}{ma};$$

$$\rho^2 = ah;$$

$$V = \frac{2(Mh+ma)}{m}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Nguyễn Trọng Chuyền, Nguyễn Văn Đạo, Ngô Văn Thảo, Nguyễn Thế Tiến*. **Cơ học lý thuyết**. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1969.
2. *Trần Hữu Duẩn*. **Cơ học lý thuyết**. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1970.
3. *Đinh Thế Hanh, Nguyễn Thế Hùng, Nguyễn Trọng*. **Cơ học lý thuyết**. Trường Đại học Xây Dựng, Hà Nội, 1982.
4. *Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Văn Khang, Đỗ Sanh*. **Cơ học**. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1990.
5. *Nguyễn Văn Đình, Lê Doãn Hồng. Nguyễn Nhật Lệ, Đỗ Sanh*. **Bài tập cơ học**. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1990.
6. *Phan Văn Cúc, Nguyễn Văn Tỉnh*. **Cơ học lý thuyết**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1991.
7. *Nguyễn Trọng Chuyền, Phan Văn Cúc*. **Bài tập cơ học lý thuyết**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1994.
8. *Đinh Thế Hanh*. **Cơ học cơ sở**. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1996.
9. *Đinh Thế Hanh, Lê Ngọc Chấn*. **Bài tập cơ học cơ sở**. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1996.
10. *Nguyễn Trọng, Tống Danh Đạo, Lê Thị Hoàng Yến*. **Cơ học cơ sở.** Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1997.
11. *N.A. Brajnichenko, V.L. Kan, B.L. Minchberg, V.I.Morozov, G.N. Usakov*. **Cbornik zađach po teoretichexkoi mekhanike**. Uzđartelxtvo "Vưskaya skola", Moxkva, 1967.
12. *I.V. Metserxkii*. **Cbornik zađach po teoretichexkoi mekhanike.** Uzđartelxtvo "nauka" glavnaya rеđaktxyafiziko – matemati chexkoi literaturư, Moxkva, 1968.
13. *A.A.Yablonxkii*. **Cbornik zađachii đlya kurxovưc rabot po teoretichexkoi mekhanike**. Uzđartelxtvo "vưskaya skola", Moxkva, 1972.

MỤC LỤC

Trang

VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN ĐỘNG HỌC

206106

8 935048 961063

Giá : 40.000 đ