

**KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG**

PHÙNG TRUNG NGHĨA, ĐỖ HUY KHÔI

**GIÁO TRÌNH
XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ 2**

NĂM 2008

CHƯƠNG I

THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ

Như chúng ta đã phân tích trong các chương của Xử lý tín hiệu I, hầu hết các hệ thống LTI đều có chức năng của bộ lọc. Vì vậy, vấn đề thiết kế bộ lọc số đóng vai trò quan trọng trong xử lý tín hiệu số. Có nhiều phương pháp thiết kế các bộ lọc số đã được đề xuất và ứng dụng trong thực tế. Chương này sẽ trình bày các phương pháp thiết kế cơ bản và ứng dụng của nó để thiết kế các bộ lọc khác nhau.

1.1. Thiết kế bộ lọc bằng cách đặt các cực và zeros trên mặt

Đây là phương pháp thiết kế lọc số đơn giản và có thể áp dụng cho nhiều loại bộ lọc FIR cũng như IIR. Tuy nhiên, để có một đáp ứng tần số theo ý muốn, trong một số trường hợp, ta cần phải thêm vào các cực hoặc zero theo thủ tục thử và sai.

Như chúng ta biết, vị trí của các cực và zeros trên mặt phẳng phức mô tả duy nhất hàm truyền đạt $H(z)$, khi hệ thống có tính ổn định và nhân quả. Vì vậy nó cũng qui định đặc tính số của hệ thống.

Phương pháp thiết kế mạch lọc số bằng cách đặt các cực và zeros trên mặt phẳng phức dựa trên nguyên lý cơ bản là: đặt các cực tại các điểm gần vòng tròn đơn vị và ở các vị trí tương ứng với các tần số trong dải thông, đặt các zeros ở các điểm tương ứng với các tần số trong dải triệt. Hơn nữa, cần phải tuân theo các ràng buộc như sau:

1. Tất cả các cực phải được đặt trong vòng tròn đơn vị để cho bộ lọc ổn định. Tuy nhiên, các zeros có thể đặt ở vị trí bất kỳ trong mặt phẳng z .
2. Tất cả các cực và các zeros phức phải xuất hiện với các cặp liên hợp phức để các hệ số của bộ lọc có giá trị thực.

Với một tập cực - zeros đã cho, hàm truyền đạt $H(z)$ của lọc có biểu thức:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.1)$$

Ở đây G là hằng số độ lợi (gain constant) nó được chọn để chuẩn hóa đáp ứng tần số. Ở một tần số xác định nào đó, ký hiệu là ω_0 , G được chọn sao cho:

$$|H(\omega_0)| = 1$$

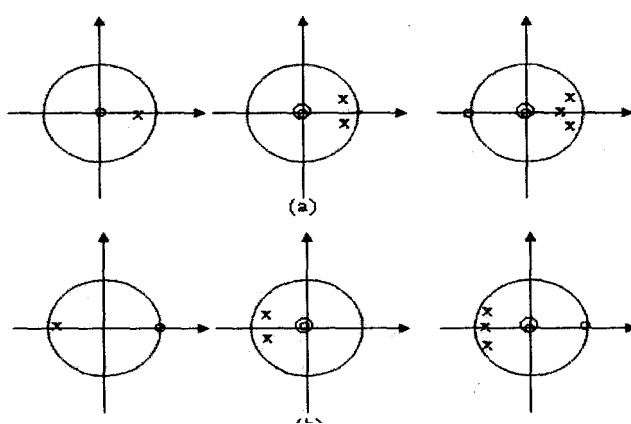
Với ω_0 là tần số trong dải thông của bộ lọc. Thông thường N (bậc của bộ lọc) được chọn bằng hoặc lớn hơn M để cho bộ lọc có số cực không tầm thường (nontrivial) bằng hoặc nhiều hơn zeros.

Phương pháp này được dùng để thiết kế một số bộ lọc đơn giản nhưng quan trọng như: lọc thông thấp, thông cao, thông dải, dải chặn, lọc răng lược, bộ cộng hưởng số, bộ dao động số,... Thủ tục thiết kế cũng thuận tiện khi thực hiện trên máy tính.

1.1.1. LỌC THÔNG THẤP, THÔNG CAO VÀ THÔNG DẢI

1.1.1.1. Lọc thông thấp và thông cao:

Với lọc thông thấp, khi thiết kế các cực phải được đặt ở các điểm gần vòng tròn đơn vị trong vùng tần số thấp (gần $\omega = 0$) và các zeros phải được đặt gần hay trên vòng tròn đơn vị tương ứng với các điểm tần số cao (gần $\omega = \pi$), ngược lại cho lọc thông cao. Hình 1.1 Minh họa cho việc đặt các cực và zeros của ba bộ lọc thông thấp và ba bộ lọc thông cao.



Hình 1.1: Đồ thị cực zeros cho các bộ lọc

(a) Lọc thông thấp; (b) Lọc thông cao

Đáp ứng biên độ và pha cho bộ lọc đơn cực có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \quad (1.3)$$

Được vẽ trong hình 1.1 với $a = 0,9$. Độ lợi G được chọn là $1-a$, để cho lọc có độ lợi bằng 1 ở tần số $\omega = 0$ và độ lợi ở tần số cao tương đối nhỏ.

Thêm vào một zeros ở $z = -1$ sẽ làm đáp ứng suy giảm nhiều hơn ở tần số cao khi đó lọc có hàm truyền đạt là:

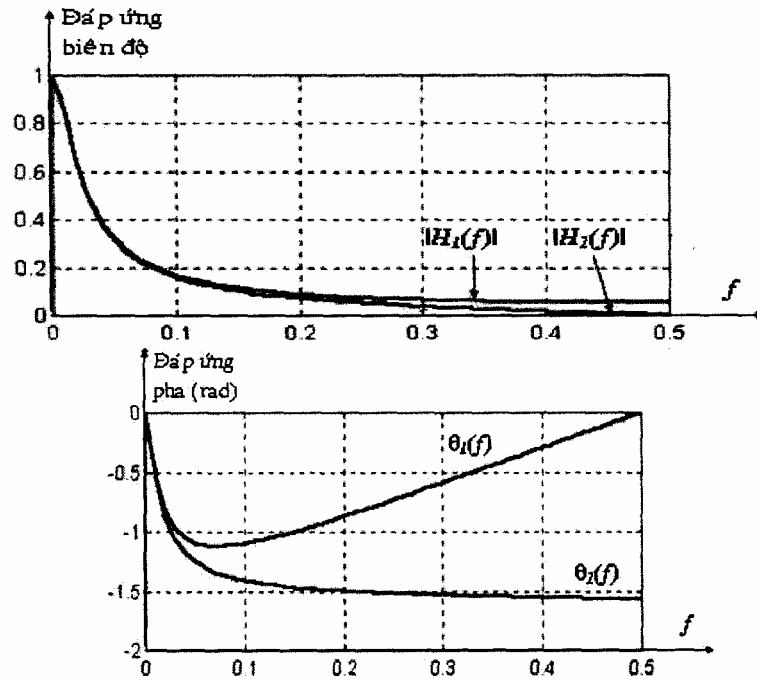
$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (1.4)$$

Đặc tuyến của đáp ứng tần số của hai bộ lọc $H_1(z)$ và $H_2(z)$ cùng được vẽ trên hình 1.2. Ta thấy, biên độ của $H_2(z)$ giảm về 0 khi $\omega = \pi$.

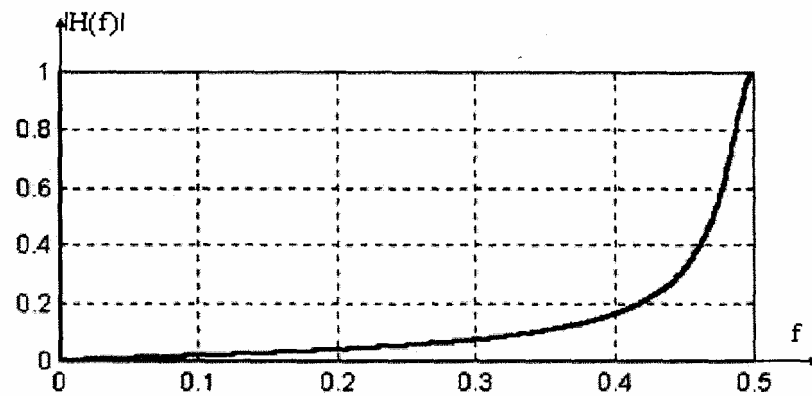
Tương tự, ta thu được các bộ lọc thông cao đơn giản bằng cách lấy đối xứng các điểm cực - zero của mạch lọc thông thấp qua trục ảo của mặt phẳng z . Ta thu được hàm truyền đạt:

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (1.5)$$

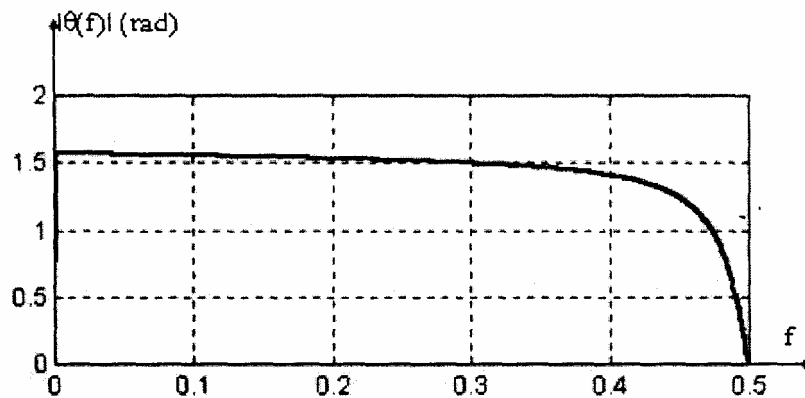
Đặc tuyến của đáp ứng tần số của mạch lọc thông cao được vẽ trong hình 1.3 với $a = 0,9$.



Hình 1.2: Đáp biên độ, đáp ứng pha của bộ lọc 1 cực $H_1(z) = \frac{1-0.9}{1-0.9z^{-1}}$ của bộ lọc 1 cực - 1 zero $H_2(z) = \frac{1-0.9}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$



(a) Đáp ứng biên độ



(b) Đáp ứng pha

Hình 1.3: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của bộ lọc thông cao có hàm truyền đạt $H =$

$$\left[\frac{1-0.9}{2} \right] \left[\frac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}} \right]$$

$$L 2 JLI + o.9z-r -1$$

Ví dụ 1.1:

Một lọc thông thấp hai cực có hàm truyền đạt là: $H(z) = \frac{G}{(1-Pz^{-1})^2}$

Hãy xác định giá trị của G và p sao cho đáp ứng tần số $H(\omega)$ thỏa điều kiện:

$$H(0) = 1 \text{ và } \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Giải: Tại $\omega = 0$, ta có:

$$H(0) = \frac{G}{(1+p)^2} = 1. \text{ Suy ra: } G = (1-p)^2.$$

Tại $\omega = \frac{\pi}{4}$ ta có:

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1-p)^2}{(1-pe^{-j\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1-p\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+jp\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}+\frac{jp}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{(1-p)^4}{\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{Hay } 2(1-p)^4 = 1 + p^2 - \sqrt{2}p$$

Giải phương trình trên ta được: $P = 0,23$.

$$\text{Kết quả: } H(0) = \frac{0,458}{1-0,23z^{-1})^2}$$

1.1.1.2. Lọc thông dải:

Các nguyên tắc tương tự có thể được áp dụng để thiết kế mạch lọc thông dải. Một cách cơ bản, lọc thông dải chứa một hay nhiều cặp cực phức gần vòng tròn đơn vị, trong lân cận của băng tần mà nó hình thành dải thông của bộ lọc.

Ví dụ 1.2:

Hãy thiết kế mạch lọc thông dải hai cực có tâm của băng tần ở $\omega = \frac{\pi}{2}$ đáp ứng tần số $H(\omega) = 0$ khi $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ và đáp ứng biên độ của nó là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tại $\omega = \frac{4\pi}{9}$.

Giải: Rõ ràng bộ lọc phải có 2 cực tại: $p_1 = re^{j\frac{\pi}{2}}$ và $p_1 = re^{j\frac{\pi}{2}}$ và zero tại $z = 1$ và $z = -1$. Vậy hàm truyền đạt của nó là:

$$H(z) = G \frac{(z-1)(+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

Hệ số khuếch đại G được xác định bằng cách tính $H(\omega)$ của bộ lọc ở tần số $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Ta có:

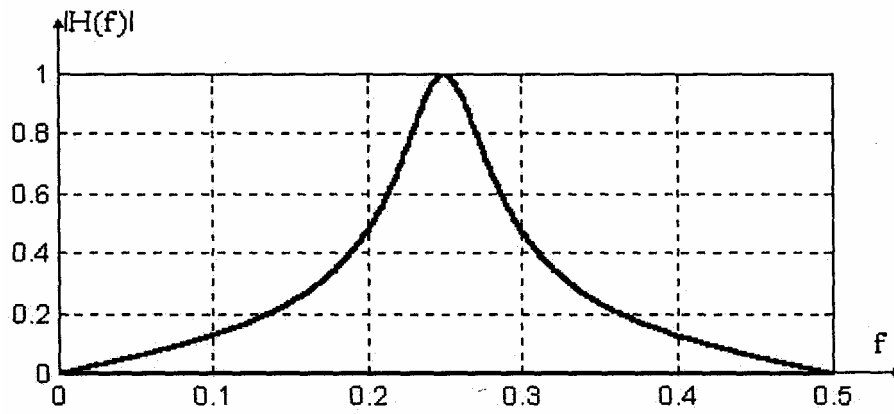
$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{2}{1-r^2} = 1. \text{ Hay : } G = \frac{1-r^2}{2}.$$

Giá trị của r được xác định bằng cách tính $H(\omega)$ tại $\omega = \frac{4\pi}{9}$. Ta có:

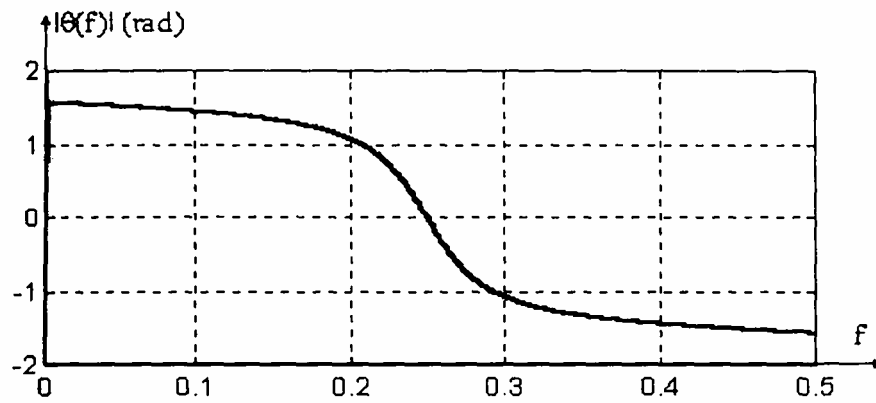
$$\left| H\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{1+r^4+2r^2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} = \frac{1}{2}$$

Hay: $1,94(1-r^2)^2 = 1 - 1,88r^2 + r^4$.

Giải phương trình ta được $r^2 = 0,7$. vậy: $H(z) = 0,15 \frac{1-z^2}{1+0,7z^{-2}}$



(a) Đáp ứng biên độ



(b) Đáp ứng pha

Hình 1.4: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của bộ lọc thông dải có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = 0.15 \left[\frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z} \right]$$

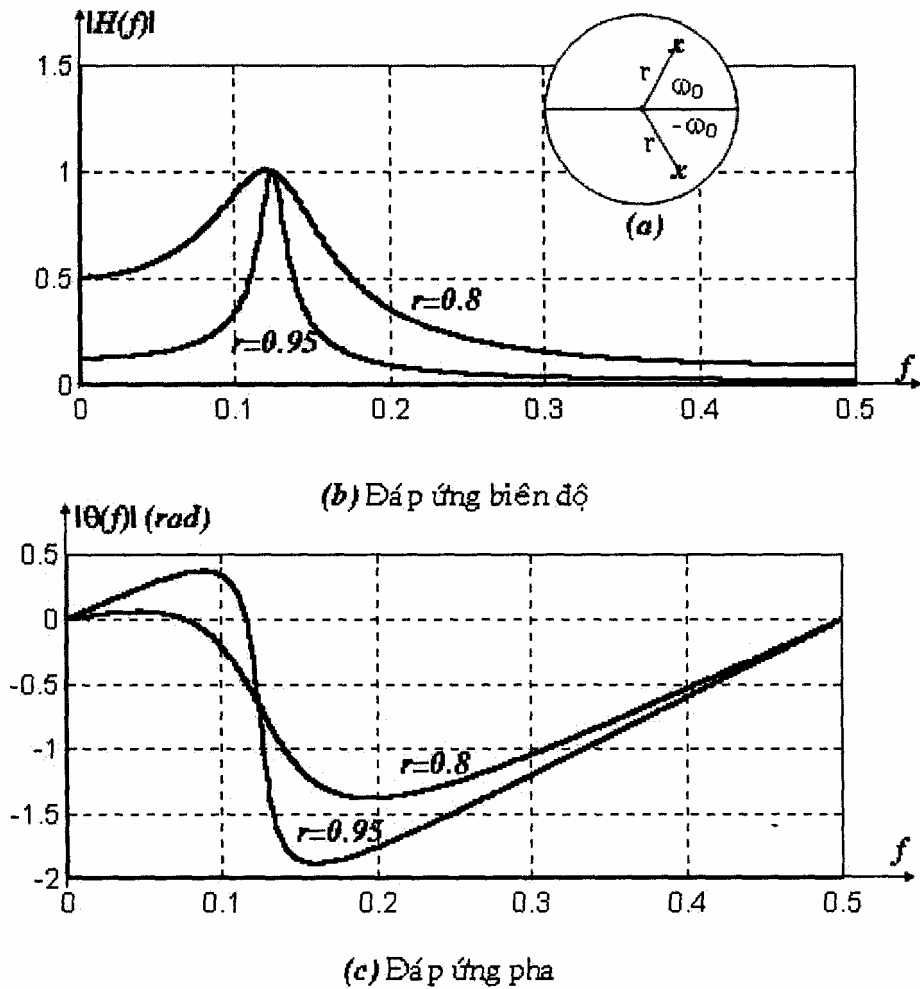
zero lên đáp ứng tần số của hệ thống. Rõ ràng, đây chưa phải là phương pháp tốt cho việc thiết kế mạch lọc số, để có một đặc tuyến của đáp ứng tần số như ý muốn. Các phương pháp thiết kế tốt hơn, được ứng dụng trong thực tế sẽ được trình bày trong phần sau.

1.1.2. BỘ CỘNG HƯỞNG SỐ (DIGITAL RESONATOR)

Một bộ cộng hưởng số là một bộ lọc thông dải có hai cực đặc biệt, đó là cặp cực phức được đặt ở gần vòng tròn đơn vị (hình 1.1.a). Biên độ của đáp ứng tần số được vẽ trong hình 1.1.b. Ta thấy, đáp ứng biên độ lớn nhất ở tần số tương ứng của cực và đây là tần số cộng hưởng của mạch lọc.

Để thiết kế một bộ cộng hưởng số với đỉnh cộng hưởng ở tại hay gần tần số $\omega = \omega_0$ ta chọn cặp cực phức như sau:

$$P_1 = re^{j\omega} \text{ và } P_2 = re^{-j\omega} \text{ với } 0 < r < 1 \quad (1.6)$$

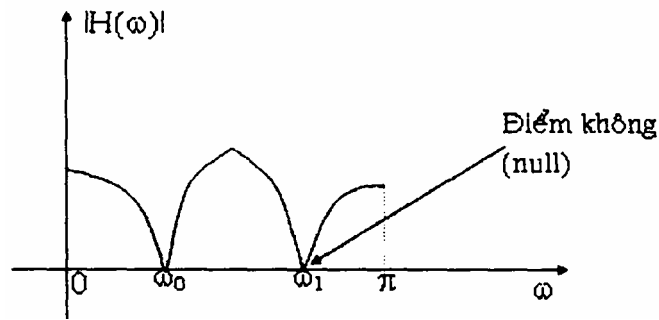


Hình 1.5: (a) Đồ thị cực zeros. (b) Đáp ứng biên độ. (c) Đáp ứng pha của 2 bộ cộng hưởng: một bộ có $r = 0.8$, bộ còn lại có $r = 0.95$

Ngoài ra, ta có thể chọn thêm các zero. Mặc dù có nhiều khả năng chọn lựa khác nhau, nhưng có hai trường hợp thường được chọn. Một là thêm vào một zero tại gốc tọa độ. Hai là chọn một zero ở $z = 1$ và một zero ở $z = -1$. Sự chọn lựa này có thể khử hoàn toàn đáp ứng của bộ lọc tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi$.

1.1.3. BỘ LỌC DẢI KHẮC (NOTCH FILTER)

Bộ lọc dải khắc là một bộ lọc dải chặn có dải tần số chặn rất hẹp như một vết khắc. Hình 1.6 minh họa đặc tuyến đáp ứng tần số của một bộ lọc dải khắc có độ lợi giảm bằng 0 ở các tần số ω_0 và ω_1 . Bộ lọc dải khắc được ứng dụng trong những trường hợp mà một vài thành phần tần số cần phải loại bỏ.



Hình 1.6: Minh họa đặc tuyến đáp ứng tần số của một bộ lọc dải khác có độ lợi

Để tạo một điểm không (null) trong đáp ứng tần số của một lọc ở tần số ω_0 , ta đưa vào một cặp zero phức trên vòng tròn đơn vị tương ứng với góc pha ω_0 . Đó là:

$$Z_1 = re^{j\omega_0} \text{ và } Z_2 = re^{j\omega_0} \quad (1.7)$$

Nếu hệ thống là một bộ lọc FIR thì:

$$H(z) = G(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) = G(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})$$

Hình 1.7 trình bày đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của một bộ lọc dải khác có một điểm không ở $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Ta thấy, bộ lọc khác FIR có băng tần khá rộng (dải chặn), nghĩa là các thành phần tần số xung qu. Anh điểm không (null) bị suy giảm nhiều. Để giảm độ rộng băng tần của bộ lọc khác, ta có thể chọn một bộ lọc FIR dài và phức tạp hơn. Ở đây, ta cố gắng cải tiến đáp ứng tần số bằng cách đưa vào hàm truyền một số cực.

Giả sử ta đặt thêm vào một cặp cực phức tại:

$$P_1 = re^{j\omega_0} \text{ và } P_2 = re^{-j\omega_0}$$

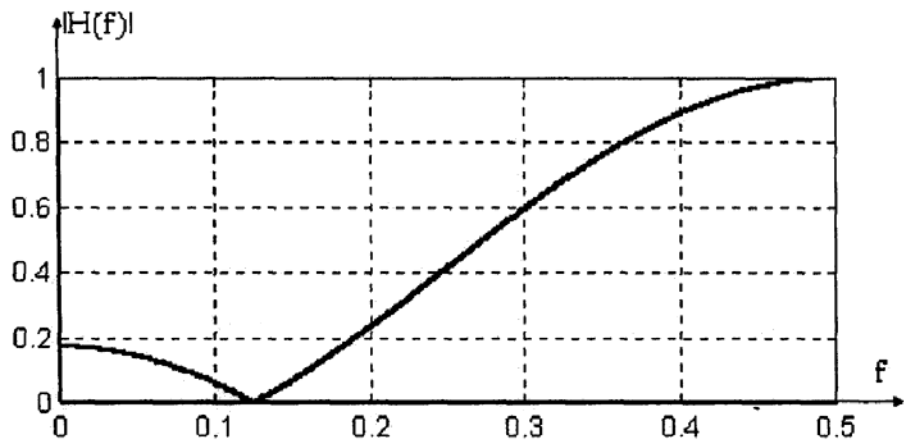
Các cực này gây ra một sự cộng hưởng trong vùng lân cận của điểm không và vì vậy nó làm giảm độ rộng băng tần của lọc khác.

Hàm truyền của hệ thống bây giờ là:

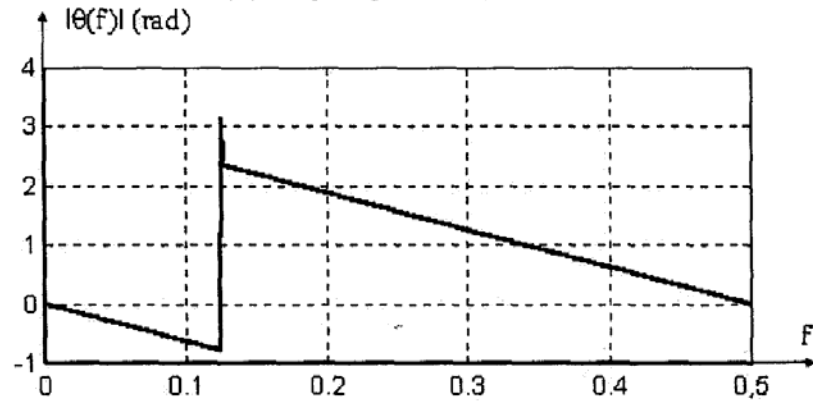
$$H(z) = G \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.8)$$

Đáp ứng biên độ của bộ lọc (1.8) được vẽ trong hình 4.8 với $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $r = 0,81$ và với $\omega = \frac{\pi}{4}$, $r = 0,91$. So sánh với đáp ứng tần số của bộ lọc FIR trong hình 1.7, ta thấy tác dụng của các cực là làm giảm băng tần của lọc khác. Bên cạnh việc làm giảm băng tần lọc khác, các cực được đưa vào còn gây ra một gợn sóng trong dải thông của mạch lọc, vì sự cộng hưởng gây ra bởi cực. Để $h(n)$ chế ảnh hưởng gợn sóng này, ta lại có thể đưa

thêm vào các cực và/hoặc zeros nữa trong hàm truyền đạt. Ta thấy, phương pháp này mang tính thử và sai.

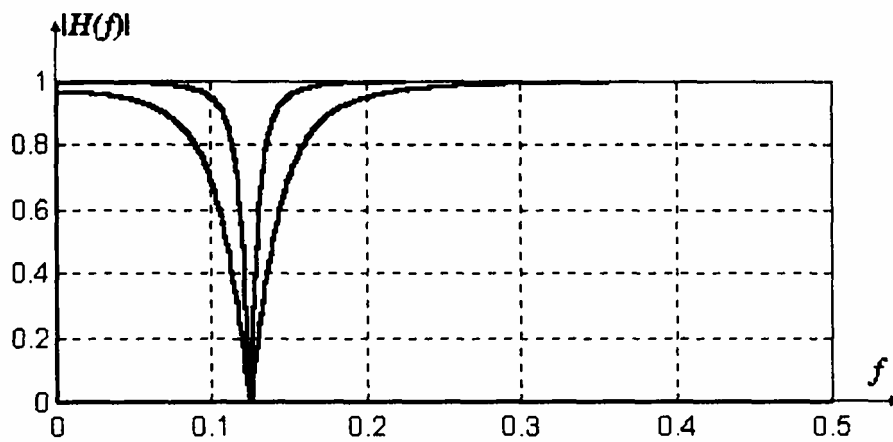


(a) Đáp ứng biên độ

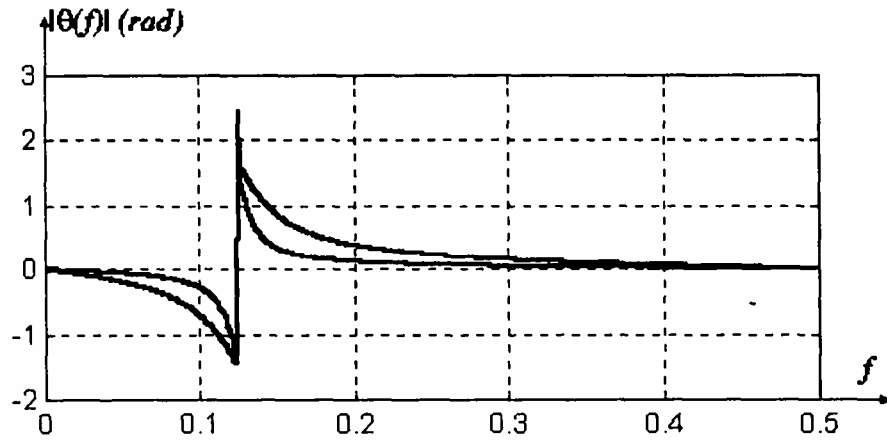


(b) Đáp ứng pha

Hình 1.7. Đặc tuyến đáp ứng tần số của một bộ lọc dải khác có hàm truyền đạt là $H(z) = G[1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$, với một vết khác ở $\omega = \frac{\pi}{4}$ hay $f = \frac{1}{8}$.



(a) Đáp ứng biên độ



(b) Đáp ứng pha

Hình 1.8: Đặc tuyến đáp ứng tần số của 2 bộ lọc khác với các cực ở:

$$(1) r = 0,85e^{\pm\pi/4} \text{ và } (2) r = 0,95e^{\pm\pi/4}, H(z) = G \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

1.1.4. BỘ LỌC RĂNG LƯỘC (COMB FILTERS)

Bộ lọc răng lược đơn giản nhất là bộ lọc có đáp ứng tần số giống như lọc khác, nhưng các vết khác (điểm không) xuất hiện một cách tuần hoàn trên suốt băng tần. Mạch lọc răng lược được ứng dụng trong trường hợp cần loại bỏ một thành phần tần số nào đó và các hài của tần số đó. Nó được ứng dụng rộng rãi trong thực tế như: nghiên cứu tín hiệu thu được từ tầng điện ly, tín hiệu radar.

Để minh họa một dạng đơn giản của mạch lọc răng lược, ta xét một bộ lọc trung bình di chuyển được mô tả bởi phương trình sai phân:

$$y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x(n-k) \quad (1.9)$$

Hàm truyền đạt của hệ thống này là:

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z^{-k} = \frac{1}{M+1} \frac{[1 - z^{-(M+1)}]}{(1 - z^{-1})} \quad (1.10)$$

$$\text{Đáp ứng tần số: } H(\omega) = \frac{e^{-j\omega \frac{M}{2}}}{M+1} \frac{\sin \omega \left(\frac{M+1}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (1.11)$$

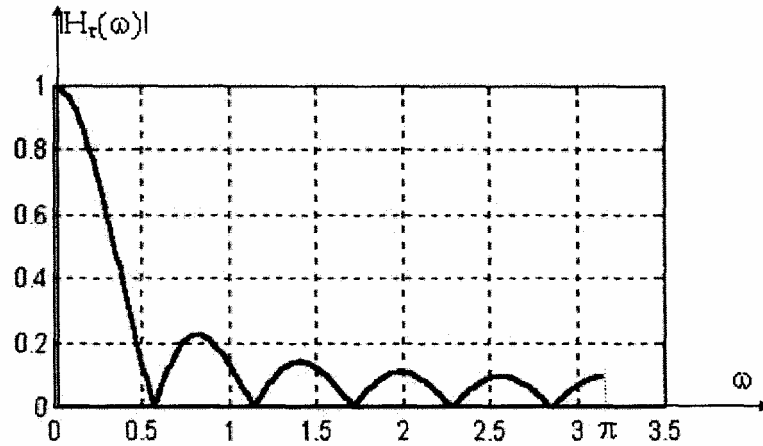
Từ phương trình (1.10) ta thấy bộ lọc có các zero trên vòng tròn đơn vị tại:

$$z = e^{j \frac{2\pi k}{M+1}}; k = 1, 2, 3, \dots, M \quad (1.12)$$

Chú ý rằng cực $z = 1$ bị khử bởi zero ở $z = 1$, vì vậy, ta có thể coi như bộ lọc này

không chứa cực nào ngoài $z = 0$.

Đặc tuyến biên độ của (1.11) với $M = 10$ được vẽ trong hình 1,9 cho thấy sự tồn tại của các điểm không một các tuần hoàn ở các tần số $\omega = \frac{2\pi k}{(M+1)} = 1, 2, \dots, M$



Hình 1.9: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc răng lược cho bởi pt (5.11) với $M = 10$.

Tổng quát, ta có thể tạo ra một lọc răng lược bằng cách thực hiện một bộ lọc FIR với hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (1.13)$$

Thay z bởi z^L với L là một số nguyên dương ta thu được một bộ lọc FIR mới có hàm truyền đạt là:

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-kL} \quad (1.14)$$

Gọi $H(\omega)$ là đáp ứng tần số của bộ lọc tương ứng với $H(z)$ thì đáp ứng tần số của bộ lọc tương ứng với $H_L(z)$ là:

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^M h(k)e^{-jkL\omega} = H(L\omega) \quad (1.15)$$

Kết quả là, đặc tuyến đáp ứng tần số $H_L(\omega)$ là sự lặp lại L lần của $H(\omega)$ trong dải tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Ví dụ 1.3:

Từ bộ lọc răng lược có hàm truyền đạt ở pt(1.10) và đáp ứng tần số ở pt(1.11). Ta thay z bởi z^L , ta được một lọc răng lược mới có hàm truyền đạt là:

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1-z^{-(M+1)L}}{1-z^{-L}} \quad (1.16)$$

và đáp ứng tần số là:

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1-z^{-(M+1)L}}{1-z^{-L}} \quad (1.16)$$

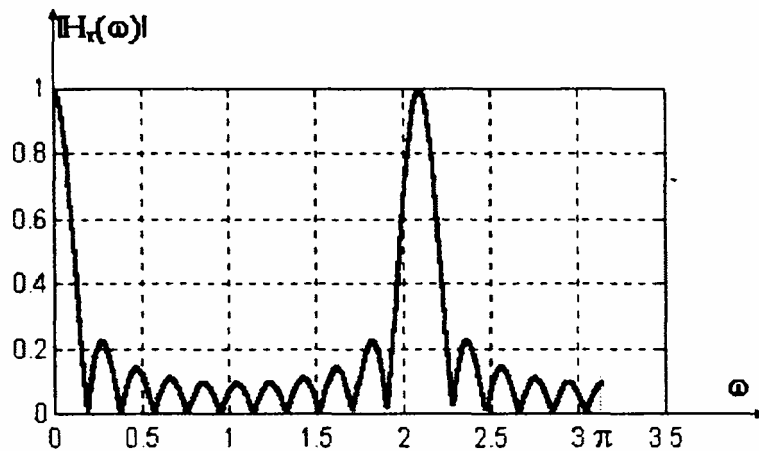
$$H_L(\omega) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin \omega L \left(\frac{M+1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega L}{2} \right)} e^{-j\omega \frac{LM}{2}} \quad (1.17)$$

Bộ lọc này có zeros trên vòng tròn đơn vị ở các vị trí:

$$z = e^{j \frac{2\pi k}{(M+1)L}} \quad (1.18)$$

Với tất cả các giá trị nguyên của k, ngoại trừ k = 0, L, 2L, ..., ML

Hình 1.10 vẽ đặc tuyến đáp ứng biên độ với L = 3 và M = 10.



Hình 1.10: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc răng lược cho bởi pt(5.17) với L = 3 và M = 10.

1.1.5. BỘ LỌC THÔNG TẮT (ALL-PASS FILTERS)

Lọc thông tắt là một bộ lọc có đáp ứng biên độ là hằng với tất cả các tần số, đó là:

$$|H(\omega)| = 1; 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (1.19)$$

Một số ví dụ đơn giản nhất cho lọc thông tắt là một hệ thống thuần trễ (pure delay system) với hàm truyền đạt là:

$$H(z) = z^{-k} \quad (1.20)$$

Hệ thống này cho qua tất cả tín hiệu mà không có thay đổi gì cả ngoại trừ việc làm trễ k mẫu. Đây là một hệ thống thông tất tầm thường (trivial) có pha tuyến tính.

Một lọc thông tất được quan tâm nhiều hơn là lọc có hàm truyền đạt như sau:

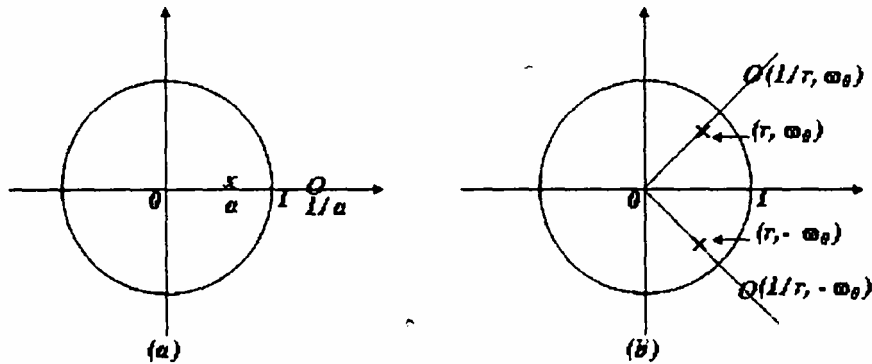
$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}; a_0 = 1 \quad (1.21)$$

Tất cả các hệ số an đều là thực. Đặt: $A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}; a_0 = 1 \quad (1.22)$

Thì phương trình (1.21) được viết lại: $H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \quad (1.23)$

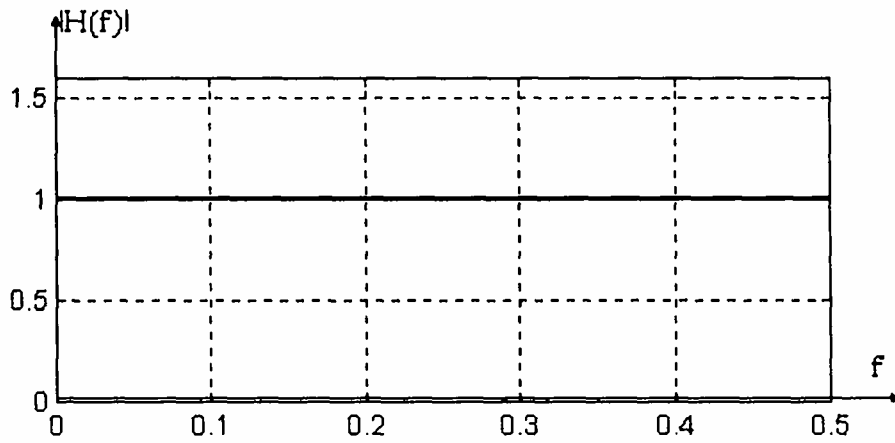
$$\text{Vì } |H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1$$

nên hệ thống cho bởi pt(1.23) là lọc thông tất. Hơn nữa, nếu z_0 là cực của $H(z)$, thì $1/z_0$ là zero của $H(z)$. Hình 1.11 minh họa đồ thị cực - zero của bộ lọc 1 cực 1 zero và bộ lọc 2 cực -2 zero. Đặc tuyến đáp ứng pha của các hệ thống này được vẽ trong hình 1.12 với $a = 0,6$ và $r = 0,9$.

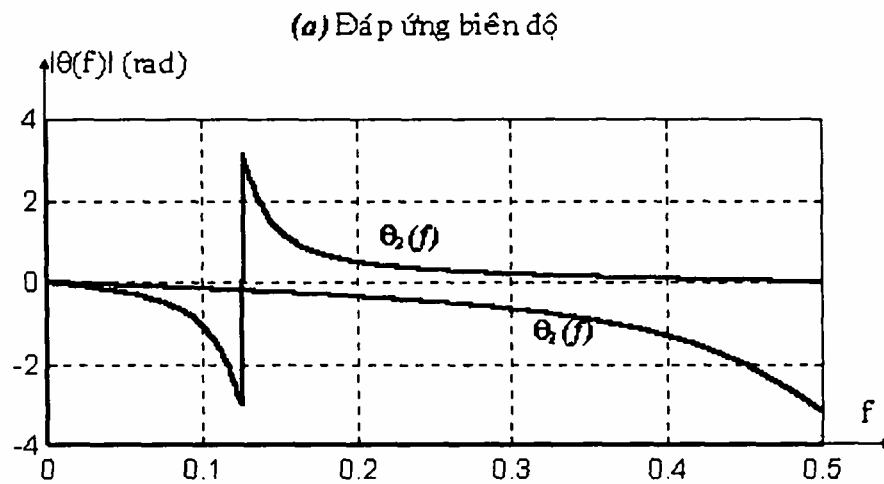


Hình 1.11: Đồ thị cực - zero (a) Lọc thông tất bậc 1 (b) Lọc thông tất bậc 2

Lọc thông tất được ứng dụng như là bộ cân bằng pha (phase equalizers). Khi đó được mắc liên tiếp (cascade) với một hệ thống có đáp ứng pha không như mong muốn, bộ cân bằng pha được thiết kế để bù lại đặc tính pha "nghèo nàn" của hệ thống này và vì vậy toàn bộ hệ thống (hệ tương đương) có đáp ứng pha tuyến tính.



(a) Đáp ứng biên độ



(b) Đáp ứng pha

Hình 1.12. Đặc tuyến đáp ứng tần số của bộ lọc tắt:

$$(1) H(z) = \frac{(0,6 + z^{-1})}{1 + 0,6z^{-1}} \quad (2) H(z) = \frac{(r^2 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2})}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}; r = 0,9; \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

1.1.6. BỘ DAO ĐỘNG SIN SỐ

Bộ dao động sin số có thể được coi như là dạng giới hạn của bộ cộng hưởng hai cực với các cực phức nằm trên vòng tròn đơn vị.

Nhắc lại rằng, một hệ thống bậc hai có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (1.24)$$

$$\text{Và các tham số là: } a_1 = -2r \cos \omega_0; a_2 = r^2 \quad (1.25)$$

Các cực liên hợp phức là $p = r e^{\pm j\omega_0}$

$$\text{Đáp ứng xung là: } h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin(n+1) \omega_0 u(n) \quad (1.26)$$

Nếu các cực nằm trên vòng tròn đơn vị ($r = 1$) và $b_0 = A \sin \omega_0$ thì

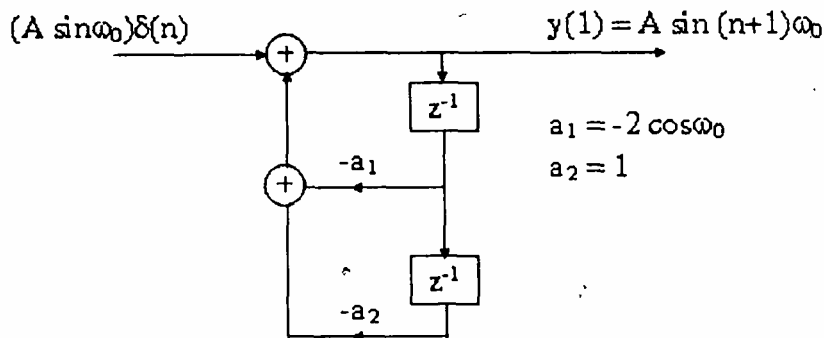
$$h(n) = A \sin(n + 1)\omega_0 u(n) \quad (1.27)$$

Vậy đáp ứng xung của một hệ thống bậc hai với các cực liên hợp phức nằm trên vòng tròn đơn vị có dạng sin và hệ thống này được gọi là bộ dao động sin số hay bộ phát tín hiệu sin số.

Để lập sơ đồ khối của bộ dao động sin số ta viết lại phương trình sai phân:

$$Y(n) = -a_1 y(n - 1) - y(n - 2) + b_0 d(n) \quad (1.28)$$

Với $a_1 = -2 \cos \omega_0$; $b_0 = A \sin \omega_0$ và thỏa điều kiện nghỉ $y(-1) = y(-2) = 0$



Hình 1.13 : Bộ phát tín hiệu sin số

Dùng phương pháp đệ qui để giải phương trình sai phân ta thu được:

$$Y(0) = A \sin \omega_0$$

$$y(1) = 2 \cos \omega_0 y(0) = 2A \sin \omega_0 \cos \omega_0 = A \sin 2\omega_0$$

$$y(2) = 2 \cos \omega_0 y(1) - y(0)$$

$$= 2A \cos \omega_0 \sin 2\omega_0 - A \sin \omega_0$$

$$= A (4 \cos^2 \omega_0 - 1) \sin \omega_0$$

$$= 3A \sin \omega_0 - A \sin^3 \omega_0 = A \sin 3\omega_0$$

Tiến trình được tiếp tục, ta thấy tín hiệu ra có dạng: $y(n) = A \sin(n + 1)\omega_0$

Ta chú ý rằng, việc cung cấp xung ở thời điểm $n = 0$ nhằm mục đích khởi động cho bộ dao động sin. Sau đó, bộ dao động tự duy trì, bởi vì hệ thống không tắt dần (do $r = 1$).

Từ hệ thống được mô tả bởi pt(1.21) ta cho tín hiệu vào bằng 0 và cho các điều kiện đầu là $y(-1) = 0$, $y(-2) = -A \sin \omega_0$ thì đáp ứng tín hiệu vào bằng 0 của hệ thống bậc hai được mô tả bởi phương trình sai phân thuần nhất.

$$y(n) = -a_1 y(n - 1) - y(n - 2) \quad (1.29)$$

Đáp ứng của hệ thống được mô tả bởi pt(1.26) với các điều kiện đầu:

$$y(1) = 0 \text{ và } y(-2) = -A \sin \omega_0 \quad (1.30)$$

giống một cách chính xác như là đáp ứng của hệ thống được mô tả bởi pt(1.28) với kích thích là tín hiệu xung đơn vị.

1.2. Thiết kế bộ lọc FIR

1.2.1. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH DÙNG CỬA SỔ

1.2.1.1. Nguyên tắc:

Từ đáp ứng tần số mong muốn $H_d(\omega)$ với các chỉ tiêu tương ứng, ta lấy biến đổi Fourier ngược để có đáp ứng xung $h_d(n)$:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.31)$$

Nói chung, $h_d(n)$ thu được sẽ có chiều dài vô hạn và không nhân quả, ta không thể thực hiện được trong thực tế. Vì vậy, hệ thống phải được sửa lại thành nhân quả và buộc $h(n)$ phải có chiều dài của $h_d(n)$. Phương pháp đơn giản là cắt bỏ $h_d(n)$ từ giá trị $n = M-1$ và thu được bộ lọc FIR có chiều dài M . Sự "cắt ngọn" này tương đương với phép nhân $h(n)$ với một hàm cửa sổ (window). Hàm cửa sổ này được định nghĩa như sau:

$$w(n) = \begin{cases} \neq 0, & n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ 0, & \text{khác} \end{cases} \quad (1.32)$$

Như vậy, đáp ứng xung của bộ lọc FIR trở thành:

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad (1.33)$$

Gọi $W(\omega)$ là biến đổi Fourier của cửa sổ $w(n)$, từ tính chất nhân của biến đổi Fourier, ta thu được đáp ứng tần số của bộ lọc như sau:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(\omega - v) dv \quad (1.34)$$

1.2.1.2. Các bước chính của phương pháp cửa sổ:

Chọn 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số: $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$.

Xác định đáp ứng xung của mạch lọc lý tưởng.

Chọn loại cửa sổ.

Nhân với cửa sổ để có đáp ứng xung của mạch lọc: $h_d(n) = h(n) \cdot w(n)$.

Thử lại trong miền tần số: $H_d(\omega) = H(\omega) * W(\omega)$.

Nếu không thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật, ta tăng M và trở lại bước 2.

1.2.1.3. Cửa sổ chữ nhật

Định nghĩa: Cửa sổ chữ nhật có chiều dài M được định nghĩa trong miền thời gian

như sau:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ 0, & n \neq \end{cases} \quad (1.35)$$

Trường hợp M lẻ, $w(n)$ có dạng đối xứng với tâm đối xứng là $n: \frac{M-1}{2}$.

Biến đổi Fourier của cửa sổ chữ nhật là:

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(M-1)/2} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (1.36)$$

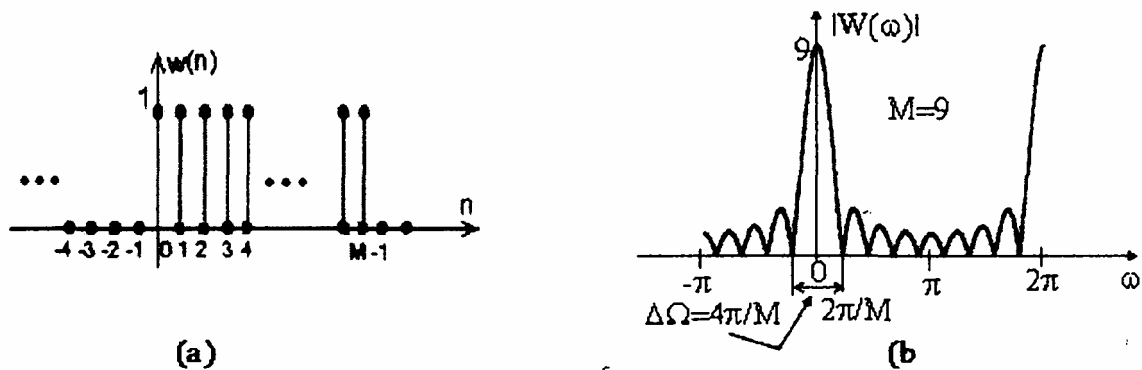
Cửa sổ này có đáp ứng biên độ là:

$$|W(\omega)| = \frac{|\sin(\omega M/2)|}{|\sin(\omega/2)|}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (1.37)$$

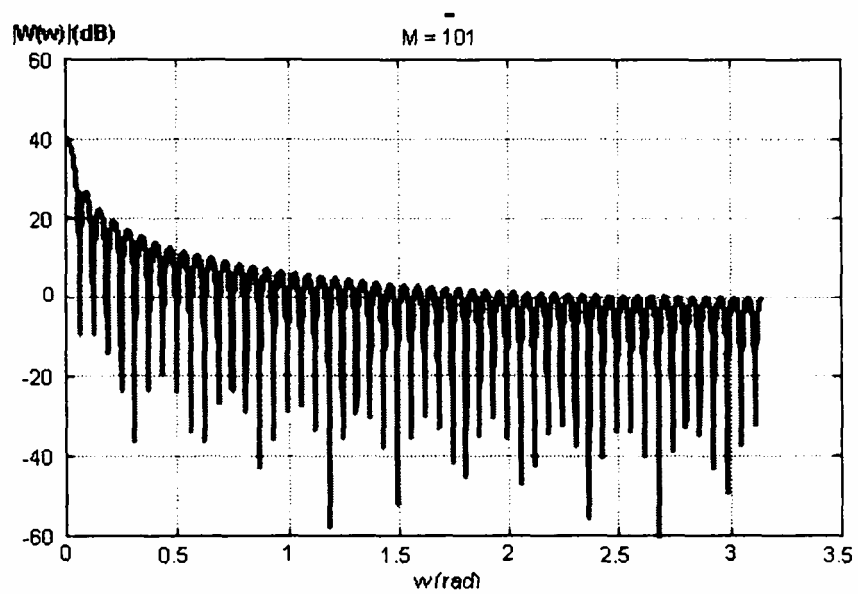
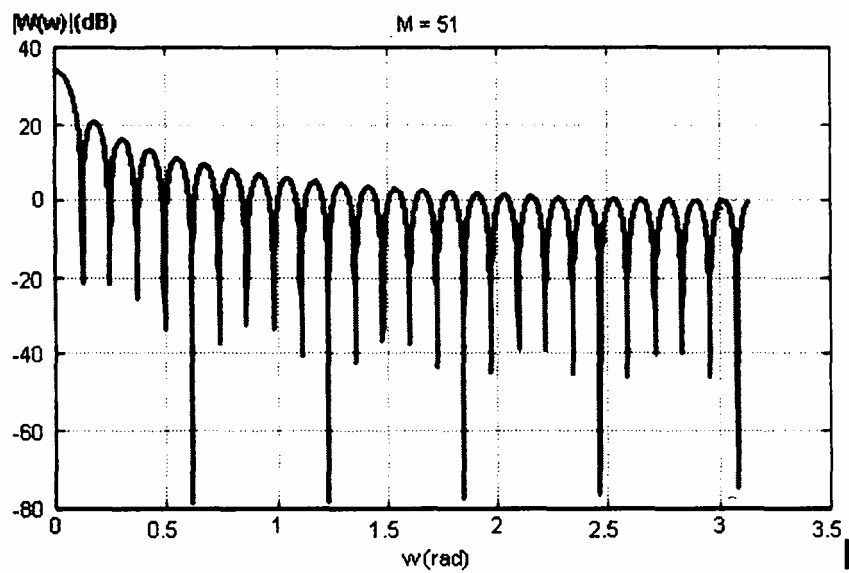
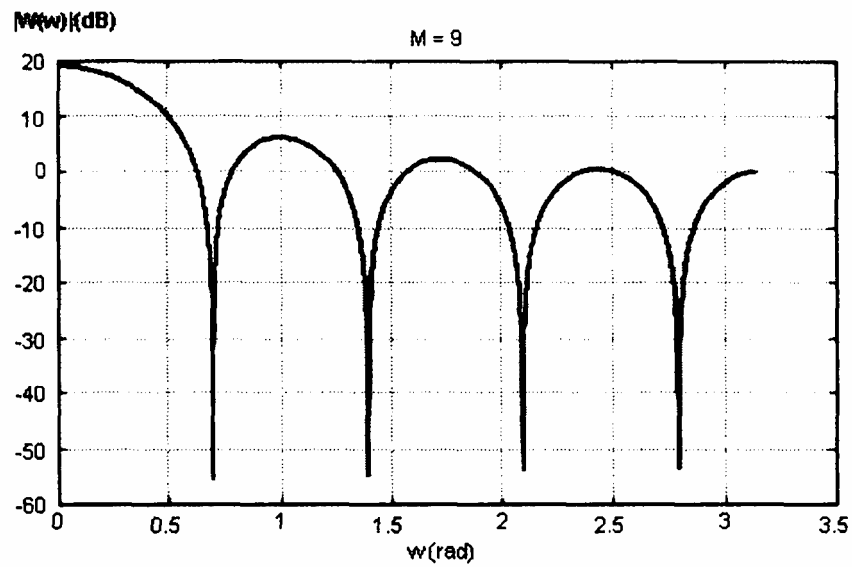
và có đáp ứng pha tuyến tính từng đoạn:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \left(\frac{M-1}{2} \right) & , \text{ khi } \sin(\omega M/2) \geq 0 \\ -\omega \left(\frac{M-1}{2} \right) & , \text{ khi } \sin(\omega M/2) < 0 \end{cases}$$

1.38



Hình 1.14: (a) Cửa sổ chữ nhật có chiều dài $M = 9$
(b) Đáp ứng biên độ cửa sổ chữ nhật



Hình 1.15: Các đáp ứng biên độ (db) của cửa sổ chữ nhật với $M = 9$, $M = 51$ và $M = 101$

Các tham số (các tham số này cũng được định nghĩa chung cho các loại cửa sổ khác):

- Độ rộng của múi chính DW (được tính bằng 2 lần dải tần số từ $\omega = 0$ đến ω_p , tần số ω_p tương ứng với giá trị zero của múi chính), đối với cửa sổ chữ nhật:

$$DW = 4p/M. \quad (1.39)$$

- Tỉ số giữa đỉnh của múi bên đầu tiên và đỉnh của múi chính, ký hiệu ta có:

$$\lambda = \frac{|W(\omega_1)|}{|W(0)|} \quad (1.40)$$

với ω_1 là tần số tương ứng với đỉnh của múi bên đầu tiên, với cửa sổ chữ nhật $\omega_1 = 3p/M$.

Tham số này thường được tính theo dự như sau:

$$\lambda(dB) = 20 \log_{10} \lambda = 20 \log_{10} \frac{|W(\omega_1)|}{|W(0)|} \quad (1.41)$$

Người ta cũng thường xét đến một đại lượng ngược lại, đó là tỉ số của đỉnh múi chính và đỉnh *múi bên đầu tiên*, ký hiệu η , ta có:

$$\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{|W(0)|}{|W(\omega_1)|} \quad (1.42)$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{|W(0)|}{|W(\omega_1)|} = \frac{M \left| \sin\left(\frac{3\pi}{M} \frac{1}{2}\right) \right|}{\left| \sin \frac{3\pi}{2} \right|} \quad (1.43)$$

đối với cửa sổ chữ nhật:

Sau đây là giá trị của η tương ứng với các độ dài M khác nhau:

$M = 6 \text{ ® } \eta = 4,2426$; $M = 9 \text{ ® } \eta = 4,1000$; $M = 10 \text{ ® } \eta = 4,7014$; $M = 100 \text{ ® } \eta = 4,7106$;

và $M \text{ ® } \eta \sim$ thì $\eta \gg 4,712$. Ta thấy, khi $M > 10$ tham số gần như không đổi.

Hình 1.14.a trình bày cửa sổ chữ nhật trong miền thời gian, hình 1.14.b là đáp ứng biên độ của cửa sổ chữ nhật với $M = 9$. Các tham số tương ứng như sau:

$$DW = 4p/M = 1,3963 \text{ rad}; \quad l = -13,0643 \text{ dB}; \quad \eta = 4,1000$$

Hình 1.11 trình bày đáp ứng biên độ của cửa sổ chữ nhật với M lần lượt là: 9, 11 và 101.

Hiện tượng Gibbs 1

Để giới hạn chiều dài đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc lý tưởng, ta đã nhân với hàm cửa sổ $w(n)$. Đáp ứng tần số của bộ lọc thực tế có được từ tích chập (131). Đối với bộ lọc

lý tưởng, đáp ứng biên độ chuyển đột ngột từ 1 xuống 0 (hoặc ngược lại) ở tần số cắt. Nhưng đối với bộ lọc thực tế, do tích chập trong miền tần số sẽ gây dao động ở dải thông và dải chặn xung qu./ Anh tần số cắt ω_c . Sự phát sinh các dao động này được gọi là hiện tượng Gibbs.

Ví dụ 1.4:

Hãy thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.01$, $\omega_p = \pi/4 - \pi/10 = 0,7226$, $\omega = \pi/4 + \pi/10 = 0,8482$ và $\omega = (\omega_p + \omega_s)/2 = \pi/4$.

Giải:

- Chọn cửa sổ chữ nhật $W(n)$ nhân quả và có tâm đối xứng tại $(M-1)/2$.
- Để minh họa hiện tượng Gibbs, ta chọn đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng, ta có:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega k}, & |\omega_c| \leq \pi/4 \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \quad (1.44)$$

Lấy biến đổi Fourier ngược, theo pt(1.28), ta được đáp ứng xung $h(n)$:

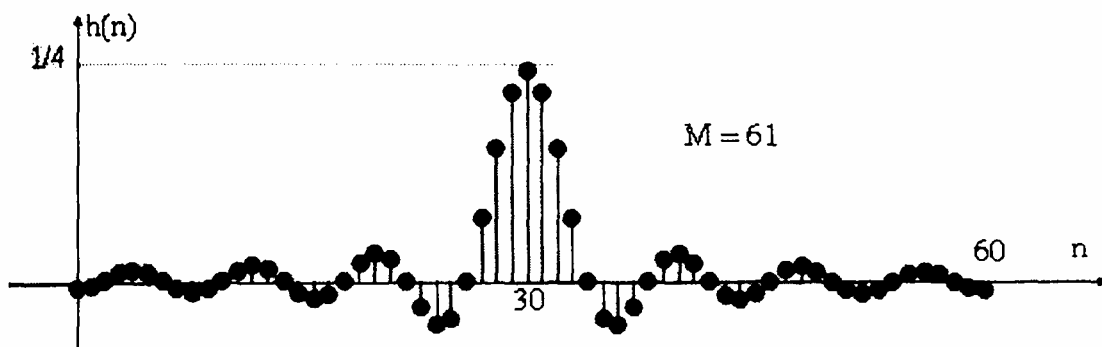
$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = \frac{M-1}{2} \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n-k)}{\omega_c(n-k)}, & n \neq \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (1.45)$$

Ta thấy $h_d(n)$ có chiều dài vô h(n), không nhân quả và có tâm đối xứng là k trong miền thời gian. Nếu ta chọn $k = (M-1)/2$ thì hơn có tâm đối xứng tại $(M-1)/2$.

Nhân $h(n)$ với cửa sổ chữ nhật $w(n)$, đáp ứng xung của bộ lọc trở nên nhân quả và có chiều dài hữu h(n):

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

Hình 1.16. Minh họa đáp ứng xung $h(n)$ với $M = 61$.



Hình 1.16: Đáp ứng xung $h(n)$ được cắt từ $h_d(n)$ và cửa sổ chữ nhật $M = 61$

Đáp ứng tần số của hệ thống được thiết kế là:

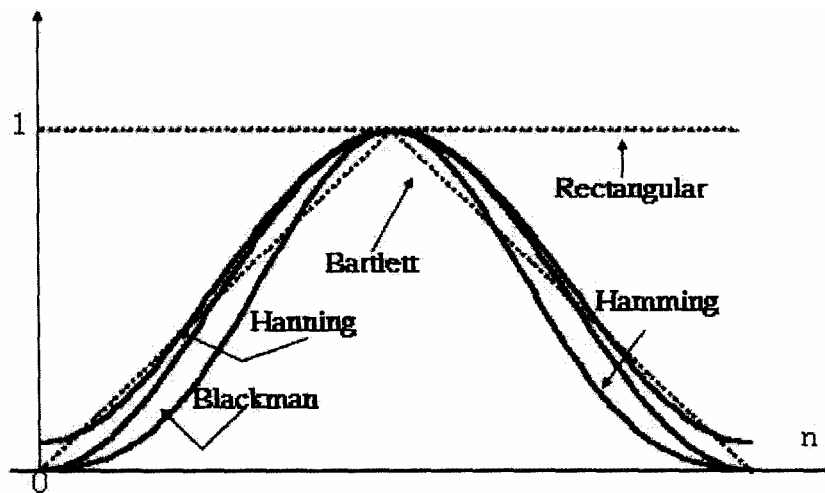
$$\begin{aligned}
H(\omega) &= H_d(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(\omega - v) dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-jv \frac{M-1}{2}} e^{-j(\omega-v) \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(\omega - v) \frac{M}{2}}{\sin \frac{(\omega - v)}{2}} dv \\
&= e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\sin(\omega - v) \frac{M}{2}}{\sin \frac{(\omega - v)}{2}} dv
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Hình 1.18 vẽ đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc với $M = 9$, $M = 61$ và $M = 101$.

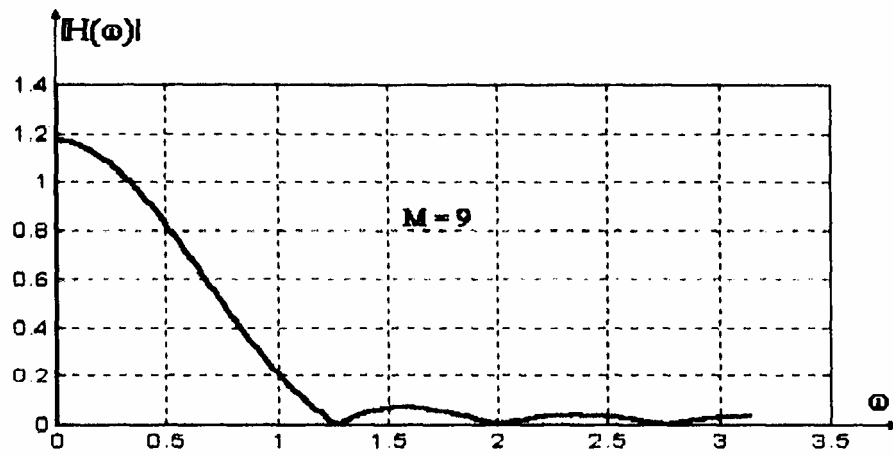
Ta thấy, khi tăng M , độ gọn sóng dải thông và dải chặn có biên độ không giảm và trong cả ba trường hợp, chỉ tiêu về độ gọn đã đề ra chưa được thỏa mãn. Tuy nhiên, độ rộng dải quá độ được cải thiện (thu hẹp lại) khi M tăng.

Để làm giảm những gợn sóng lớn trong cả dải thông và dải chặn, chúng ta có thể sử dụng các hàm cửa sổ mà nó chứa đựng một đỉnh nhọn và suy giảm dần về zero thay vì đột ngột như hàm cửa sổ hình chữ nhật.

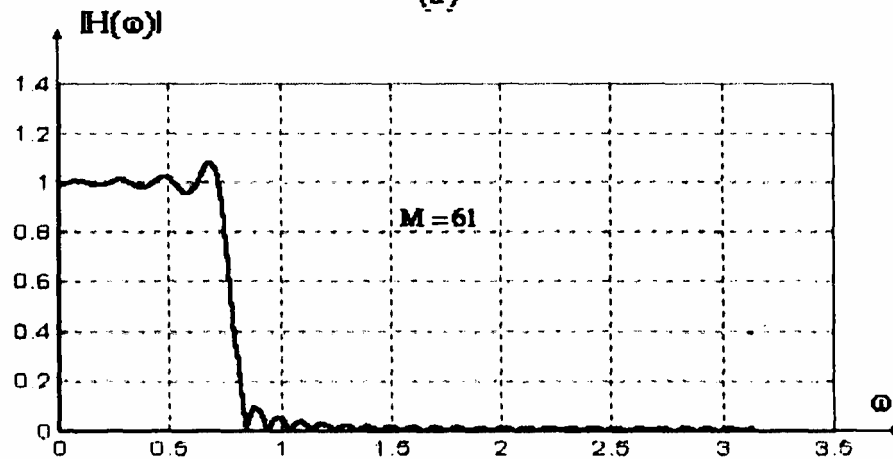
Một số hàm cửa sổ tiêu biểu thường được dùng trong thiết kế mạch lọc FIR được trình bày trong bảng 1.1 và dạng của một số cửa sổ được trình bày trong hình 1.17. Những hàm cửa sổ này có các múi bên (sidelobe) thấp hơn so với cửa sổ hình chữ nhật. Tuy nhiên, với cùng giá trị M chiều rộng của múi chính của các hàm cửa sổ này cũng rộng hơn so với cửa sổ hình chữ nhật. Do đó, các hàm cửa sổ này có tác dụng làm trơn (smoothing) đáp ứng tần số thông qua tích chập trong miền tần số, và kết quả là dải quá độ của lọc FIR rộng hơn. Để giảm độ rộng của dải quá độ, chúng ta tăng chiều dài cửa sổ, kết quả là mạch lọc lớn hơn.



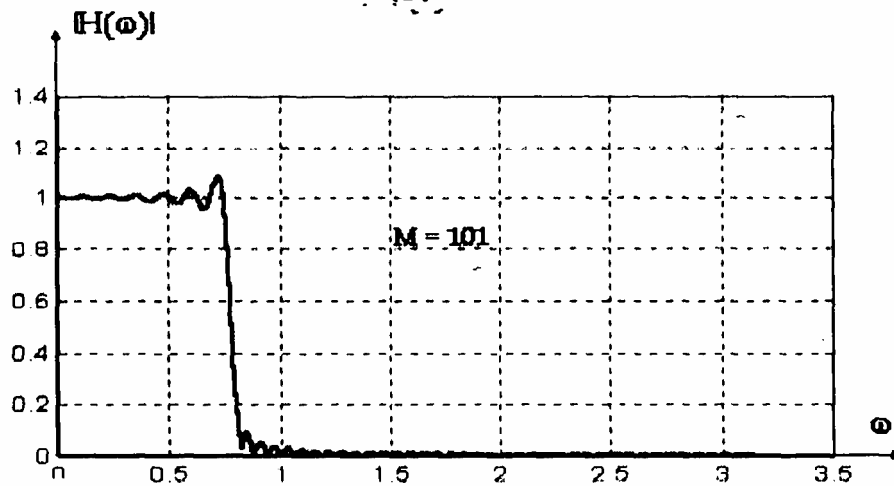
Hình 1.17. Dạng (bao hình) của một số hàm cửa sổ trong miền thời gian



(a)



(b)



(c)

Hình 1.18: Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp được thiết kế với cửa sổ chữ nhật.

(a) $M = 9$, (b) $M = 61$, (c) $M = 101$

Bảng 1.1. Các hàm cửa sổ

Bartlett (triangular)	$\frac{2n}{M-1}, \text{ Với } 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2}$ $2 - \frac{2n}{M-1}, \text{ Với } \frac{M-1}{2} < n \leq M-1$
Blackman	$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$
Kaiser	$\frac{I \left[\beta \frac{M-1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{M-1} - 1 \right)^2} \right]}{I \left[\beta \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$
Lanczos	$w(n) = \left\{ \begin{array}{l} \sin \left[\frac{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right)}{M-1} \right] \\ \hline 2\pi \left(\frac{n - \frac{M-1}{2}}{M-1} \right) \end{array} \right\}$
Tukey	$1, \text{ với } \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \alpha \frac{M-1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1$ $\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+\alpha) \left(\frac{M-1}{2} \right)}{(1+\alpha) \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right) \right],$ $\text{Với } \alpha \frac{M-1}{2} \leq \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \frac{M-1}{2}$

Ghi chú: Cửa sổ Kaiser là một cửa sổ gần tối ưu, nó được thành lập từ hàm Bessel biến dạng loại một bậc không $I_0(x)$. Trong công thức định nghĩa cửa sổ Kaiser (Bảng

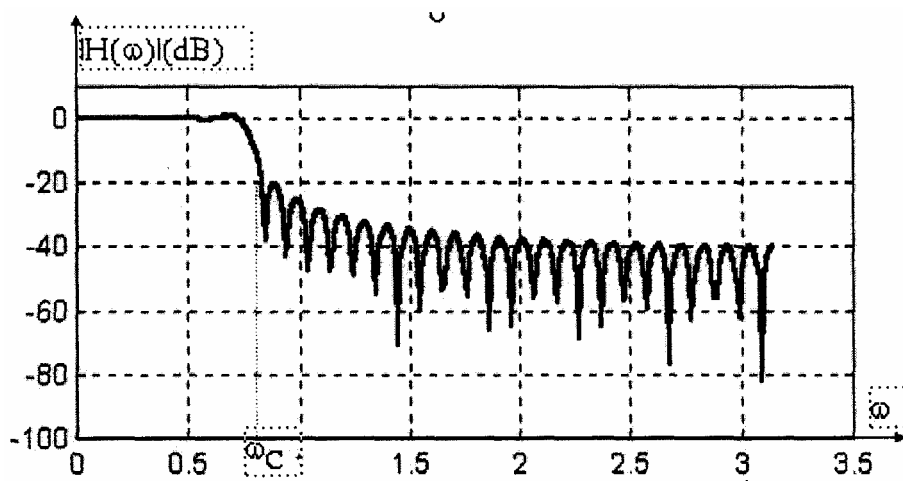
1.1), tham số (có tác dụng sửa dạng cửa sổ. Với một chiều dài M xác định, độ rộng của múi chính DW trong đáp ứng biên độ của cửa sổ sẽ gia tăng theo β . Vì vậy, với cửa sổ Kaiser, ta có thể điều chỉnh DW và hệ số λ bằng cách thay đổi tham số. (Tuy nhiên, vì biểu thức đại số của cửa sổ này khá phức tạp, không thân thiện với người dùng, nên việc sử dụng nó cũng có h(n) chế.

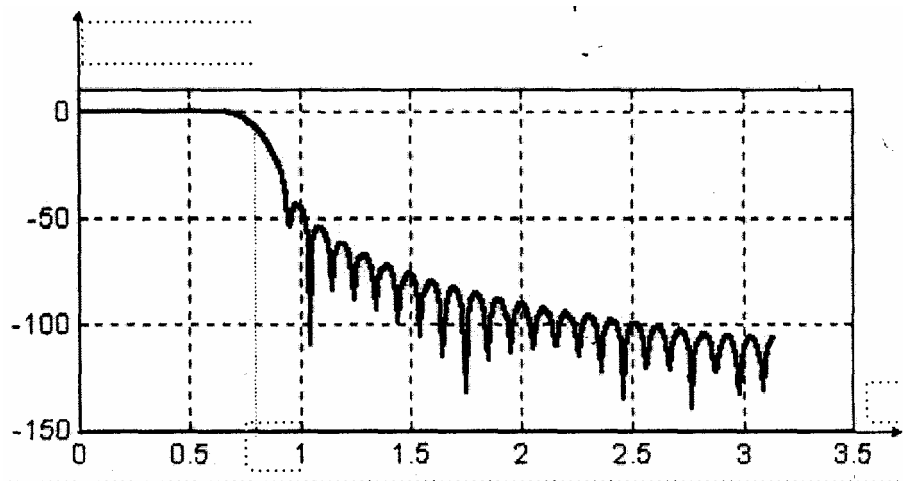
Bảng 1.2 trình bày các đặc tính quan trọng của một số hàm cửa sổ trong miền tần số:

Bảng 1.2

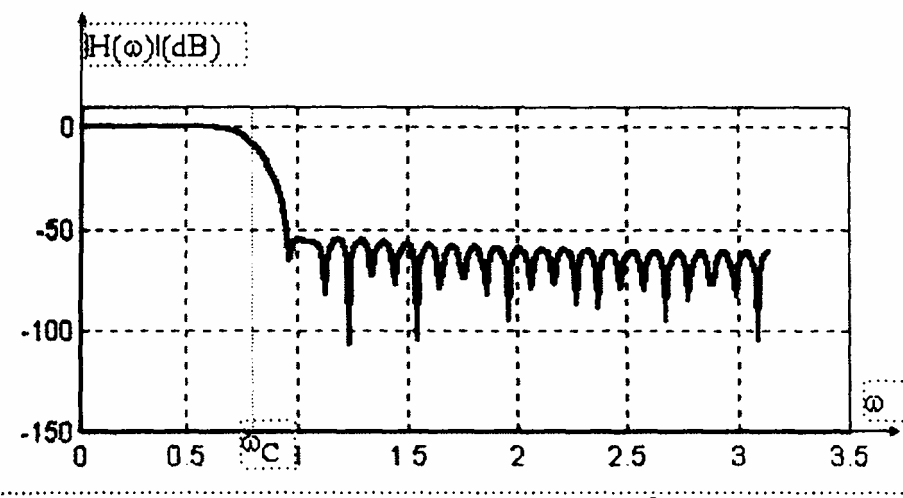
Loại cửa sổ	Độ rộng xấp xỉ của vùng quá độ	Đỉnh múi trên (dB)
Rectangula	4p/M	- 12
Bartlett	8p/M	- 27
H(n)ning	8p/M	- 32
Hamming	8p/M	- 43
Blackman	12p/M	- 18

Hình 1.19.a, b, c, d, e lần lượt trình bày đáp ứng biên độ (dB) của bộ lọc thông thấp có tần số cắt là $\omega = \pi/4 = 0,7814$ rad/sample (tương ứng với $f = 0.121$ cycle/sample), được thiết kế bằng các cửa sổ Rectangular, H(n)ning, Hamming, Blackman và Kaiser có cùng chiều dài $M = 61$. So sánh các bộ lọc b, c, d, e với bộ lọc được thiết kế bằng cửa sổ chữ nhật (a), ta thấy sự ảnh hưởng hiện tượng Gibbs ở cạnh dải thông được h(n) chế và kết quả là múi bên có đỉnh thấp hơn. Tuy nhiên, độ rộng của dải quá độ lại gia tăng.

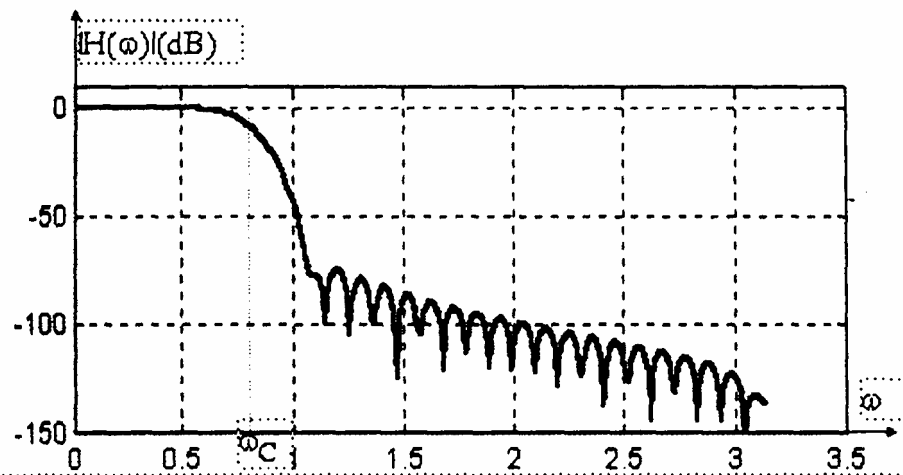




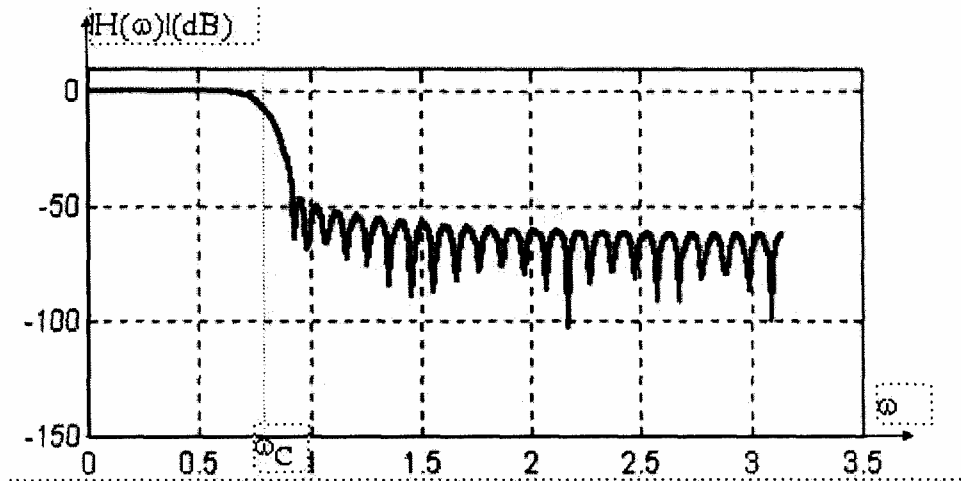
(b) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ $H(n)$ (M = 61)



(c) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ Hamming (M = 61)



(d) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ Blackman (M = 61)



(e) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ Kaiser ($M = 61$, $\beta = 4$)

Hình 1.19: Đáp ứng biên độ (dB) của bộ lọc thông thấp có tần số cắt là $\omega_c = \pi/4 = 0.7854$ rad/sample được thiết kế bằng các loại cửa sổ khác nhau có cùng chiều dài $M=61$

1.2.2. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẤY MẪU TRONG MIỀN TẦN SỐ

Bộ lọc FIR pha tuyến tính (linear-phase fir filters) là một loại bộ lọc đơn giản về mặt thiết kế lẫn thực hiện. Như ta sẽ thấy, chỉ có bộ lọc FIR mới có thể có pha tuyến tính và bộ lọc IIR không thể có pha tuyến tính. Trong nhiều ứng dụng thực tế, chẳng hạn như thông tin số, sự méo pha (méo trễ) không thể chấp nhận được, vì vậy bộ lọc pha tuyến tính được dùng rộng rãi.

Một bộ lọc FIR chiều dài M có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-j\omega k} \quad (1.47)$$

Các hệ số G của bộ lọc cũng chính là giá trị của các mẫu trong đáp ứng xung của nó:

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \quad (1.48)$$

(Trong pt(1.46) chỉ số trên của tổng được chọn là $M-1$ để đáp ứng xung có chiều dài M).

Bộ lọc có pha tuyến tính khi đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn các điều kiện đối xứng. Ta xét 2 điều kiện đối xứng khác nhau như sau:

1.2.2.1: Điều kiện xung $h(n) = h(M-1-n)$ (1.49)

Để chứng tỏ một bộ lọc thỏa điều kiện đối xứng này là bộ lọc pha tuyến tính ta xét hai trường hợp M lẻ và M chẵn.

Ví dụ 1.1: Trường hợp M lẻ

Giả sử chọn $M = 1$, điều kiện đối xứng là: $h(0) = h(4)$; $h(1) = h(3)$; $h(2)$ là tâm đối xứng (không có mẫu tương ứng).

Đáp ứng tần số $H(\omega)$ là:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(2)e^{-j2\omega} + h(3)e^{-j3\omega} + h(4)e^{-j4\omega} \\ &= e^{-j2\omega}[h(2) + h(0)e^{j2\omega} + h(4)e^{-j2\omega} + h(1)e^{j\omega} + h(3)e^{-j\omega}] \end{aligned}$$

Vì $h(0) = h(4)$ và $h(1) = h(3)$ nên $H(\omega)$ có thể viết lại là:

$$H(\omega) = e^{-j2\omega}[h(2) + 2h(0)\cos 2\omega + 2h(1)\cos \omega] \quad (1.50)$$

Trong pt(.50), thừa số trong dấu ngoặc có giá trị thực. Ta ký hiệu là:

$$H_r(\omega) = h(2) + 2h(0)\cos 2\omega + 2h(1)\cos \omega \quad (1.51)$$

Biên độ của đáp ứng tần số là:

$$|H(\omega)| = |H_r(\omega)| \quad (1.52)$$

Đặc tính pha của mạch lọc là:

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \quad (1.53)$$

Ta thấy, đặc tính pha $q(\omega)$ là một hàm tuyến tính của ω trong cả hai trường hợp $H_r(\omega)$ dương hoặc âm. Khi $H_r(\omega)$ đổi dấu từ dương sang âm (hay ngược lại), $q(\omega)$ thay đổi đột ngột một lượng là π radians. Nếu sự thay đổi pha này xuất hiện ở bên ngoài dải thông (trên dải chặn) ta sẽ không cần quan tâm, vì tín hiệu mong muốn đi qua bộ lọc không có nội dung tần số ở trong dải chặn.

Ví dụ 1.6: Trường hợp M chẵn

Giả sử chọn $M = 4$, điều kiện đối xứng là: $h(0) = h(3)$; $h(1) = h(2)$.

Trong trường hợp này, mỗi mẫu của $h(n)$ đều có mẫu đối xứng. Tương tự như trên ta tìm được đáp ứng của bộ lọc là:

$$H(\omega) = e^{-j3\omega/2} \left[2h(0) \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2h(1) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \quad (1.54)$$

$$\text{Đặt :} \quad H_r(\omega) = 2h(0)\cos \omega + 2h(1)\cos \frac{\omega}{2} \quad (1.55)$$

Biên độ của đáp ứng tần số là: $|H(\omega)| = |H_r(\omega)|$

và pha là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2} & \text{neu } H_r(\omega) > 0 \\ -\frac{3\omega}{2} + \pi & \text{neu } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Một lần nữa, pha của bộ lọc là tuyến tính và nhảy một lượng là π ở những tần số mà $H_r(\omega)$ đổi dấu.

Từ hai ví dụ trên, ta có thể ngoại suy cho trường hợp tổng quát với chiều dài M bất kỳ.

Tổng quát, đáp ứng tần số của một bộ lọc FIR có đáp ứng xung $h(n)$ thỏa điều kiện đối xứng (1.49) là:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j\frac{\omega(M-1)}{2}} \quad (1.57)$$

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right), \quad \text{nếu } M \text{ lẻ.} \quad (1.58)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right), \quad \text{nếu } M \text{ chẵn.} \quad (1.59)$$

Đặc tính pha của bộ lọc cho cả hai trường hợp M chẵn và M lẻ là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \frac{(M-1)}{2} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ -\omega \frac{(M-1)}{2} + \pi & \text{nếu } M \text{ lẻ.} \end{cases} \quad (1.60)$$

1.2.2.2. Điều kiện đối xứng: $h(n) = -h(M-1-n)$ (1.61)

Trong trường hợp này ta gọi đáp ứng xung là phản đối xứng (antisymmetric). Khi M lẻ, điểm trung tâm của $h(n)$ phản đối xứng là $n = \frac{M-1}{2}$. Điều kiện (1.49) hàm ý rằng: $n = \frac{M-1}{2} = 0$ Ví dụ, Nếu $M = 1$, ta có $h(0) = -h(4)$; $h(1) = h(3)$ và $h(2) = 0$. Khi M chẵn, mỗi mẫu của $h(n)$ có một mẫu tương ứng ngược dấu.

Tương tự như trường hợp đối xứng thứ nhất, ta có thể chứng minh rằng, đáp ứng tần số của bộ lọc FIR với đáp ứng xung phản đối xứng có biểu thức là:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{j(-\omega(M-1)/2 + \pi/2)} \quad (1.62)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \quad M \text{ lẻ} \quad (1.63)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \quad M \text{ chẵn} \quad (1.64)$$

Đặc tính pha của bộ lọc cho cả hai trường hợp M lẻ và M chẵn là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega \frac{(M-1)}{2}, & \text{neu } H_r(\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega \left(\frac{M-1}{2} \right), & \text{neu } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

Các công thức đáp ứng tần số tổng quát này được dùng để thiết kế các bộ lọc FIR pha tuyến tính với đáp ứng xung đối xứng hoặc phản đối xứng.

Chú ý rằng, trong các pt(1.11) và pt(1.16), số hệ số cần thiết để xác định đáp ứng tần số là $\frac{M+1}{2}$ khi M lẻ hay khi M chẵn. Trong các pt(1.63) và pt(1.64), vì $n = \frac{M-1}{2}$, nên $\frac{M+1}{2}$ có hệ số khi M lẻ và hệ số khi M chẵn cần được xác định.

1.2.2.3. Chọn đáp ứng xung và tính các hệ số từ các mẫu trong miền tần số

Việc chọn đáp ứng xung đối xứng hay phản đối xứng tùy thuộc vào ứng dụng. Ví dụ, nếu $h(n) = -h(M-1-n)$ và M lẻ, theo pt(1.60) thì $H_r(0) = 0$ và $H_r(\pi) = 0$, kết quả là đáp ứng xung phản đối xứng không phù hợp cho mạch lọc thông thấp hoặc thông cao. Tương tự, nếu chọn đáp ứng xung phản đối xứng và M chẵn, thì theo pt(1.60) ta có $H_r(0) = 0$. Kết quả là ta không thể chọn điều kiện phản đối xứng trong việc thiết kế bộ lọc thông thấp FIR pha tuyến tính. Ngược lại, nếu chọn điều kiện đối xứng $h(n) = h(M-1-n)$ thì sẽ được bộ lọc FIR pha tuyến tính với đáp ứng tần số khác 0 ở $\omega = 0$, đó là:

$$H_r(0) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n), \quad \text{nếu M lẻ} \quad (1.66)$$

$$\text{Và } H_r(0) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n), \quad \text{nếu M chẵn} \quad (1.67)$$

Mỗi phương trình trong các pt(1.11), (1.16), (1.60) và (1.61) đóng góp một tập các phương trình tuyến tính để xác định các hệ số của mạch lọc FIR. Kết quả là, nếu ta xác định được đáp ứng tần số ở $\frac{M+1}{2}$ hay $\frac{M+1}{2}$ hay điểm trên trục ω , ta phải giải một tập tương ứng các phương trình tuyến tính để tìm các hệ số. Mặc dù các giá trị của ω có thể

được chọn một cách tùy ý, nhưng ta thường muốn chọn những điểm cách đều nhau trên trục tần số, trong khoảng $0 \leq \omega \leq \pi$ (lấy mẫu đều trong miền tần số). Vì vậy, ta sẽ chọn các tần số lấy mẫu như sau:

Trường hợp chọn đáp ứng xung đối xứng

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}; \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}; \quad M \text{ lẻ}$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1; \quad M \text{ chẵn} \quad (1.68)$$

Ta định nghĩa:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{kn} = 2 \cos \omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \text{ với tất cả } k \\ \text{Và nếu } M \text{ lẻ thì } a_{kn} = 1 \text{ khi } n = \frac{M-1}{2} \end{array} \right. \quad (1.69)$$

Khi đó, các phương trình tuyến tính (1.11) và (1.16) cho bộ lọc FIR đối xứng trở thành:

$$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ lẻ} \quad (1.70)$$

$$\sum_{n=0}^{(M/2)-1} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad M \text{ chẵn} \quad (1.71)$$

Trường hợp chọn đáp ứng xung phản đối xứng

Trường hợp này, ta cần xác định các hệ số tương ứng với $\frac{M+1}{2}$ điểm khi M lẻ và điểm khi M chẵn trên trục ω . Vì các pt(1.60) và pt(1.61) hàm ý rằng $H_r(0) = 0$, độc lập với sự chọn các hệ số $\{h(n)\}$. Vì vậy tần số $\omega = 0$ không thể được dùng để xác định các thông số của đáp ứng tần số.

Khi M lẻ thì rất dễ dàng, ta có thể xác định $H_r(\omega)$ ở điểm cách đều nhau trên trục tần số. Các điểm này có thể được chọn như sau:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M} \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}$$

Khi M chẵn, ta cần G điểm tần số, vì ta không thể sử dụng $\omega = 0$, ta có thể sử dụng $\omega = \pi$.

$$a_{10}h(0) + a_{11}h(1) = H_r(\pi) =$$

Trong đó: $a_{00} = 2$; $a_{01} = 2$; $a_{10} = -\sqrt{2}$; $a_{11} = \sqrt{2}$. Các phương trình tuyến tính này

được viết dưới dạng ma trận:

$$[A] [h] = [H_r] \quad (1.17)$$

trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \end{bmatrix}; \quad H_r = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Giải phương trình ma trận trên ta được:

$$h(0) = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1) = 0,0732232 = h(3)$$

$$h(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2} + 1) = 0,426776 = h(2)$$

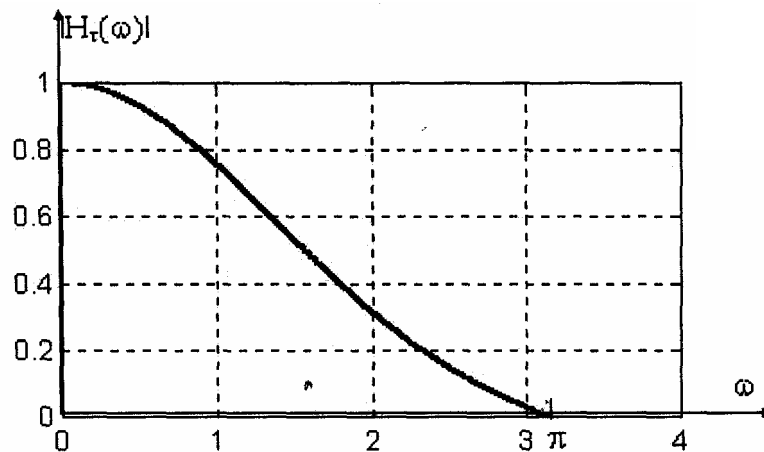
Đáp ứng tần số của bộ lọc là:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{\frac{3\omega}{2}}$$

với

$$H_r(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(\sqrt{2} - 1) \cos \frac{3\omega}{2} + (\sqrt{2} + 1) \cos \frac{\omega}{2} \right]$$

Đặc tuyến đáp ứng biên độ $|h_r(\omega)|$ và $20\log|H_r(\omega)|$ được vẽ trong hình 1.20. Ta thấy đây là lọc thông thấp.



Tóm lại, tập các điểm tần số được chọn như sau:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}, \text{ với } \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}; M \text{ lẻ} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}; M \text{ chẵn} \end{cases} \quad (1.72)$$

Một sự chọn lựa khác hoàn toàn có thể tránh trường hợp $H(\omega) = 0$ ở $\omega = 0$ (và $\omega = \pi$) đó là:

$$\omega_k = \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{M}; \text{ với } \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}; M \text{ lẻ} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1; M \text{ chẵn} \end{cases} \quad (1.73)$$

Với bất kỳ sự chọn lựa nào trong các trường hợp trên, ta định nghĩa:

$$b_{kn} = 2 \sin \omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (1.74)$$

Thì các phương trình tuyến tính (4.71) và (4.76) cho bộ lọc FIR phản đối xứng trở thành:

$$\sum_{n=0}^{(M-3)/2} b_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}, M \text{ lẻ} \quad (1.75)$$

$$\sum_{n=0}^{(M/2)-1} b_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, M \text{ chẵn} \quad (1.76)$$

Tập tần số cho bởi pt(1.70) cũng có thể được dùng trong pt(1.73) và pt(1.74) thay vì dùng tập tần số cho bởi pt(1.61).

Ví dụ 1.7:

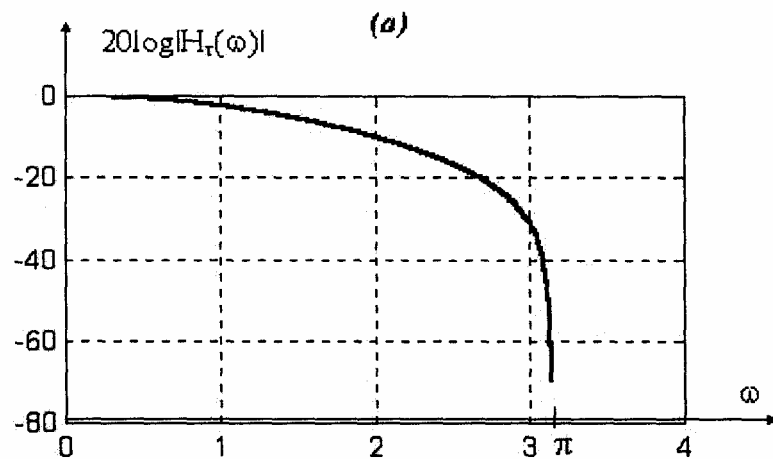
Hãy xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR pha tuyến tính, có chiều dài $M = 4$. Đáp ứng tần số $H(\omega)$ tại $\omega = 0$ và $\omega = \frac{\pi}{2}$ được xác định như sau:

$$H_r(0) = 1; \quad H_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Giải:

Đây là bài toán thiết kế mạch lọc khá đơn giản, các thông số chưa biết là $h(0)$ và $h(1)$. Tập các phương trình tuyến tính là:

$$a_{00}h(0) + a_{01}h(1) = H_r(0) = 1$$



Hình 1.20. Đặc tuyến ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính trong ví dụ 5.7

Ví dụ 1.8:

Hãy xác định các hệ số của bộ lọc FIR tuyến tính pha có chiều dài $M = 11$, đáp ứng xung đối xứng và đáp ứng tần số thỏa mãn điều kiện:

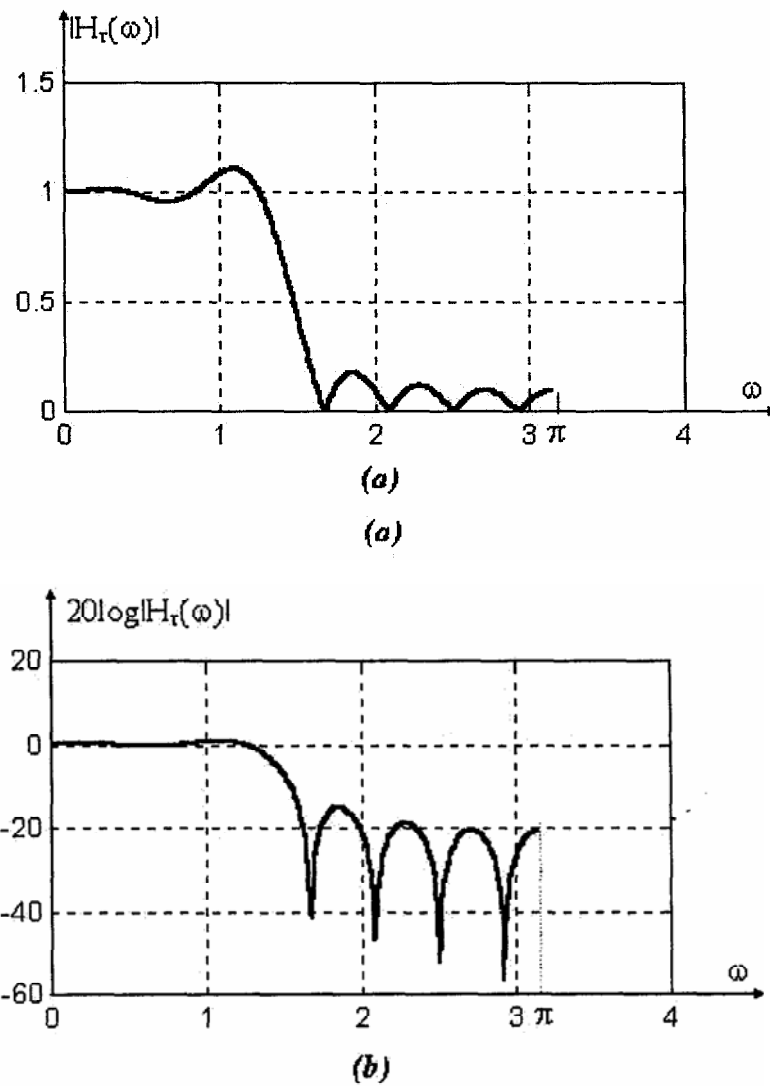
$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1 & ; k = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & k = 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

Giải:

Đây là một mạch lọc khá dài, hơn không thể tìm được nếu không có sự hỗ trợ của máy vi tính trong việc giải hệ phương trình tuyến tính. Lập trình trên máy tính để giải hệ phương trình này, ta có thể thu được các nghiệm như sau:

$$\begin{aligned} h(0) &= h(14) = 0,04981188 & h(1) &= h(13) = 0,04120224 \\ h(2) &= h(12) = 0,06666674 & h(3) &= h(11) = -0,03648787 \\ h(4) &= h(10) = -0,1078689 & h(1) &= h(9) = 0,03407801 \\ h(6) &= h(8) = 0,3188924 & h(7) &= 0,4666666 \end{aligned}$$

Đáp ứng tần số của mạch lọc thu được trong hình 1.21. Ta thấy, bộ lọc này có một vọt lố (overshoot) ở cạnh dải thông ở phía trước dải quá độ. Nó cũng có các múi bên (sidelobe) khá lớn trong dải chặn, múi bên lớn nhất là -11 dB.



Hình 1.21: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 15$ trong ví dụ 5.8

Nhận xét:

Trong ví dụ trên, ta đã minh họa bài toán thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính với đáp ứng tần số thay đổi đột ngột từ dải thông ($H_r(\omega_r) = 1$) sang dải chặn, trong dải chặn $H_r(\omega)$ được xác định bằng 0 ở các tần số rời rạc. Ta thấy bộ lọc có các múi bên khá lớn, đây là điều không mong muốn.

Trong ví dụ sau đây, thay cho sự thay đổi đột ngột, ta xác định một giá trị trung gian của $H_r(\omega)$ trong dải quá độ. Đáp ứng tần số sẽ có các múi bên nhỏ hơn nhiều trong dải chặn.

Ví dụ 1.9:

Thực hiện lại bài toán thiết kế trong ví dụ 4.11 với các chỉ tiêu của đáp ứng tần số là:

$$H_i\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1 & ; k = 0,1,2,3 \\ 0,4 & ; k = 4 \\ 0 & k = 5,6,7 \end{cases}$$

Giải:

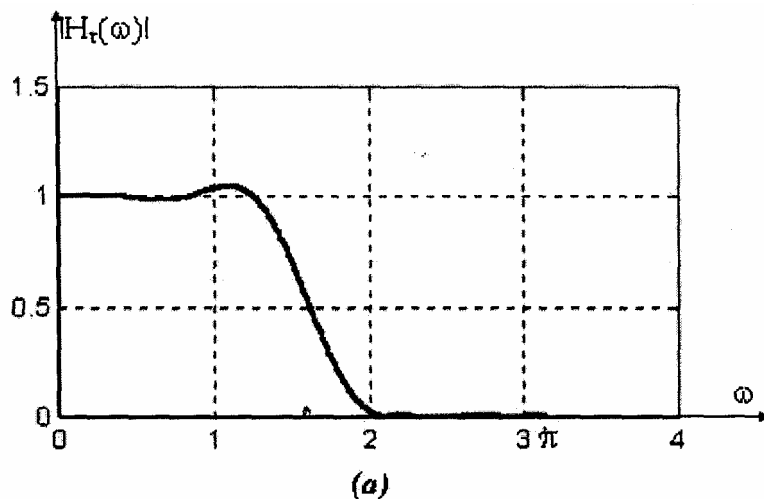
Trong trường hợp này, các hệ số của bộ lọc thu được từ việc giải các phương trình tuyến tính là:

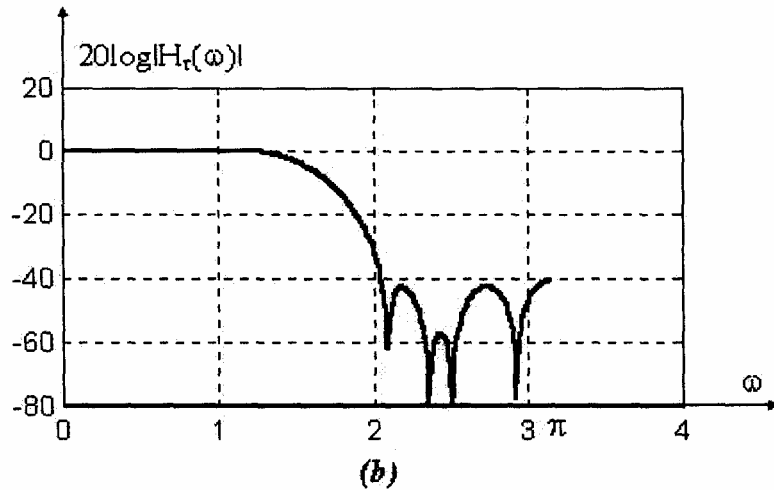
$$\begin{aligned} h(0) &= h(14) = -0,01412893 & h(1) &= h(13) = -0,001941309 \\ h(2) &= h(12) = 0,04000004 & h(3) &= h(11) = 0,01223414 \\ h(4) &= h(10) = -0,09138802 & h(1) &= h(9) = -0,01808986 \\ h(6) &= h(8) = 0,3133176 & h(7) &= 0,12 \end{aligned}$$

Nhận xét:

Mạch lọc thu được có đáp ứng tần số được vẽ trong hình 1.22. Ta thấy các múi bên bây giờ thấp hơn trong ví dụ trước, múi bên lớn nhất là -41 dB.

Trong ví dụ này, ta đã mở rộng dải quá độ đó là một sự bất lợi, nhưng ta đã thu được một lợi ích lớn hơn, đó là giảm được các múi bên một cách đáng kể. Như vậy, có hai hiệu ứng ngược nhau, nếu ta đưa thêm vào các chỉ tiêu của đáp ứng tần số trong dải quá độ thì biên độ của các múi bên sẽ giảm, trong khi đó bề rộng dải quá độ lại tăng. Tất nhiên ta cần có sự cân nhắc cho hợp lý.





Hình 1.22. Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 15$, trong ví dụ 5.9.

Ví dụ 1.10:

Hãy xác định các hệ số của mạch lọc FIR pha tuyến tính $M = 16$ mà đáp ứng xung của nó đối xứng và đáp ứng tần số thỏa mãn điều kiện;

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 0 & ; k = 0, 1, 7 \\ 0,456 & ; k = 2, 6 \\ 1 & ; k = 3, 4, 5 \end{cases}$$

Giải:

Giải hệ thống các phương trình tuyến tính, ta thu được đáp ứng xung $h(n)$:

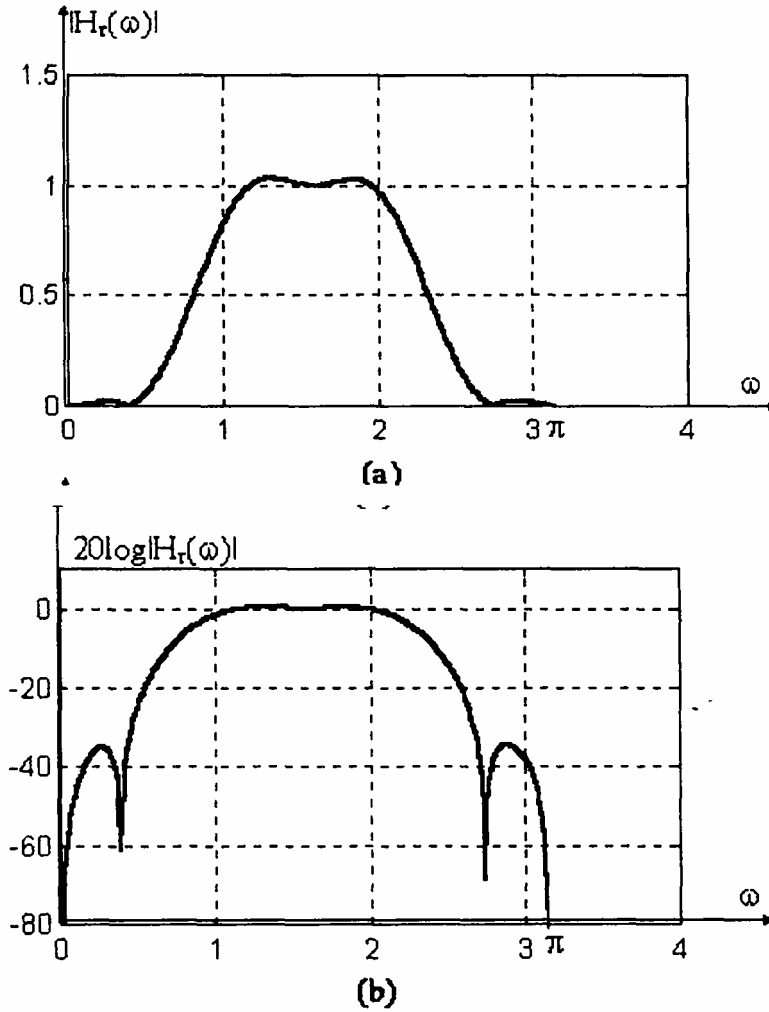
$$\begin{aligned} h(0) &= h(11) = 0,01011716 & h(1) &= h(14) = 0,02774791 \\ h(2) &= h(13) = 0,04067173 & h(3) &= h(12) = -0,02017317 \\ h(4) &= h(11) = 0,04840164 & h(1) &= h(10) = -0,111712 \\ h(6) &= h(9) = -0,266221 & h(7) &= h(8) = 0,3362424 \end{aligned}$$

Đây là mạch lọc thông dải, có đáp ứng tần số được vẽ trong hình 4.23 mũi bên lớn nhất trong dải chặn giảm xuống còn -34dB.

Cuối cùng, việc chọn các tần số ω_k để xác định các chỉ tiêu của đáp ứng xung của bộ lọc cần dựa trên tần số cắt hay tần số cạnh dải thông ω_p và cạnh dải chặn ω_s . Ta có thể chọn chiều dài M của bộ lọc sao cho trong các tần số $\{\omega_r\}$ có tần số trùng hoặc gần trùng với ω_p, ω_s .

Người thiết kế cũng có thể chọn 1 tập tần số $\{\omega_r\}$ tùy ý không cần phải cách đều, sao

cho nó phù hợp nhất với các chỉ tiêu của đáp ứng cho trước.



Hình 1.23: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 16$, trong ví dụ 5.10.

1.2.2.4. Công thức tính $h(n)$

- Mục đích của ta là tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc có đáp ứng tần số mong muốn, từ đó xác định hàm truyền đạt (hay phương trình sai phân) và xây dựng cấu trúc của bộ lọc. Trong mục 1.2.2.3. ta đã tính hện bằng cách giải các hệ phương trình tuyến tính (1.70), (1.71) hoặc (1.75), (1.76), tổng quát hơn là phương trình ma trận (1.77). Theo đó, ta phải xác định ma trận các hệ số a_{kn} (ma trận [A]) hay ma trận các hệ số b_{kn} (ma trận [B]), và sau đó, để giải phương trình ma trận (1.77) (trường hợp chọn đáp ứng xung phản đối xứng ta thay ma trận [A] bằng ma trận [B]), ta phải tính ma trận nghịch đảo. Việc làm này rõ ràng là tốn nhiều thời gian và công sức. Vì vậy, ta muốn thiết lập một công thức sao cho có thể tính trực tiếp $h(n)$.

Trước tiên, ta xác định đáp ứng tần số mong muốn ở một tập tần số rời rạc cách đều nhau $\{\omega_k\}$:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M} (k + \alpha) \text{ với } \alpha = 0 \text{ hoặc } \alpha = -\frac{1}{2} \quad (1.78)$$

Và $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}$ khi M lẻ, $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$ khi M chẵn.

Sau đó tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR từ các mẫu trong miền tần số đã chọn.

Theo định nghĩa, đáp ứng tần số của bộ lọc FIR có chiều dài M là:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (1.79)$$

Giá trị của đáp ứng tần số tại các tần số $\{\omega_r\}$ là:

$$H(k+\alpha) = H\left[\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right] = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} \quad (1.80)$$

với $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

Do $H(k+\alpha)$ có tính đối xứng, nên các tần số chỉ định có thể giảm xuống còn $\frac{M-1}{2}$ nếu M lẻ, $\frac{M}{2}$ nếu M chẵn. Tuy nhiên, ở đây ta muốn khảo sát đặc tính tần số ở M điểm như đã chỉ định ở pt(1.80).

Để xác định được $h(n)$ từ $H(k+\alpha)$, ta nhân hai vế của pt(1.80) với $\frac{e^{j2\pi 2m}}{M}$, trong đó $m = 0, 1, \dots, M-1$, rồi lấy tổng trên $k = 0, 1, \dots, M-1$. Vế phải của pt(1.77) sẽ rút gọn về $Mh(n)$ và ta thu được:

$$Mh(n)e^{-j2\pi\alpha n/M} = \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi kn/M}$$

$$\text{Hay } h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (1.81)$$

Ta thấy trong trường hợp $\alpha = 0$ thì $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$ và $h(n) = \text{IDFT}[H(k)]$.

Để tìm công thức tính $h(n)$, ta sẽ dựa vào tính chất đối xứng của $h(n)$ và giá trị của α . Ta chia thành các trường hợp cụ thể như sau:

- $\alpha = 0$, $h(n)$ đối xứng.
- $\alpha = 1/2$, $h(n)$ đối xứng.
- $\alpha = 0$, $h(n)$ phản đối xứng.
- $\alpha = 1/2$, $h(n)$ phản đối xứng.

Cũng cần chú ý rằng, trong các điều kiện đối xứng và phản đối xứng đã xét, $h(n)$ luôn luôn có giá trị thực.

Xét trường hợp $\alpha = 0$, hơn đối xứng: $h(n) = h(M-1-n)$

Vì $h(n)$ thực, nên từ pt(1.77) ta dễ dàng suy ra được $H(k) = H^*(M-k)$, và vì hơn đối xứng nên từ pt(1.77) ta thu được: (1.82)

$$H(k) = \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right\} e^{-j\pi k \frac{M-1}{M}}, M \text{ lẻ}$$

Và

$$H(k) = \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right\} e^{-j\pi k \frac{M-1}{M}}, M \text{ chẵn} \quad (1.83)$$

Ta thấy các số hạng trong dấu ngoặc $\{ \}$ chính là các mẫu của $H_r(\omega)$ tại các tần số $\omega_k = 2\pi k/M$. Vì vậy biểu thức của $H(k)$ có dạng:

$$H(k) = H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) e^{-j2\pi k \frac{M-1}{2M}} \quad (1.84)$$

Để thuận tiện, ta viết lại:

$$H(k) = H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) e^{-j\pi k} e^{-j\pi k/M} = G(k) e^{-j\pi k/M} \quad (1.85)$$

$$\text{Trong đó: } G(k) = H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) e^{-j\pi k} = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad (1.86)$$

Vì $H_r(2\pi k/M)$ có giá trị thực, nên $G(k)$ cũng là dãy thực. Hơn nữa, từ điều kiện $H(k) = H^*(M-k)$ dẫn đến kết quả là:

$$G(k) = -G(M-k) \quad (1.87)$$

Khi M chẵn, thì pt(1.84) đòi hỏi rằng: $G(M/2) = 0$, mặt khác, mẫu của đáp ứng tần số tại $\omega = \pi$ phải là 0.

Từ tính chất đối xứng của các mẫu tần số có giá trị thực $G(k)$ trong pt(1.84), ta có thể thành lập công thức tính đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR.

Ta bắt đầu từ pt(1.81) với $\alpha = 0$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k) e^{j2\pi kn/M}, n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} G(k) e^{j2\pi k(n+\frac{1}{2})/M} \quad (1.88)$$

$$= \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, \text{ M lẻ} \quad (1.89)$$

và

$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, \text{ M chẵn} \quad (1.90)$$

Từ pt(1.89) và (1.90) ta có thể tính trực tiếp $h(n)$ từ $G(k)$ (hay $H_r(2\pi k/M)$). Trong cách tính này, để xác định $h(n)$ ta không cần phải tính ma trận nghịch đảo như đã làm trong các ví dụ 1.7, 1.8 và 1.9 (giải phương trình ma trận (1.77)).

Kế tiếp ta xét trường hợp $\alpha = \frac{1}{2}$.

Vì $h(n)$ là dãy thực, nên từ pt(1.80) ta suy ra được $H(k + \frac{1}{2}) = H^*(M-1-k - \frac{1}{2})$, hay $H(k + \frac{1}{2}) = H(M-k - \frac{1}{2})$.

Bằng cách liên kết tính chất này với điều kiện đối xứng $h(n) = h(M-1-n)$, ta thu được:

$$H(k + \frac{1}{2}) = H_r(\omega_k) e^{-j\pi(k+\alpha)\frac{M-1}{M}} \quad (1.91)$$

trong đó: $\omega_k = 2\pi(k + \frac{1}{2})/M$; $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $H_r(\omega_k)$ được cho bởi pt(1.1) cho trường hợp M lẻ và pt(1.16) cho trường hợp M chẵn. Ta thấy pt(1.88) có dạng của pt(1.81) với k được thay thế bằng $(k + \alpha)$.

Một lần nữa, để đơn giản ta diễn tả $H(k + \alpha)$ dưới dạng:

$$H(k + \alpha) = G(k + \alpha) e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\pi(k+\frac{1}{2})/M} \quad (1.92)$$

Trong đó:

$$G(k + \alpha) = (-1)^k H_r(\omega_k), \quad \omega_k = 2\pi(k + \alpha)/M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (1.93)$$

Từ pt(1.92) ta suy ra được $H(k + \frac{1}{2}) = h^*(M-k - \frac{1}{2})$, tính chất này hàm ý rằng:

$$G(k + \frac{1}{2}) = G(M-k-\frac{1}{2}) \quad (1.94)$$

Dựa vào tính chất đối xứng (1.94) và từ pt(1.81) ta có:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \frac{1}{2}) e^{j2\pi\alpha(k+\frac{1}{2})/M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} -jG(k + \frac{1}{2}) e^{j2\pi(k+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})/M} \\ h(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} G(k + \frac{1}{2}) \sin \frac{2\pi}{M} (k + \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2}), \quad M \text{ lẻ} \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\text{và } h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} G(k + \frac{1}{2}) \sin \frac{2\pi}{M} (k + \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2}), \quad M \text{ chẵn} \quad (1.96)$$

Tương tự cho trường hợp đáp ứng xung phân đối xứng, ta thiết lập được biểu thức tính $h(n)$ tương ứng với $\alpha = 0$ và $\alpha = \frac{1}{2}$. Cuối cùng công thức tích đáp ứng xung $h(n)$ cho 4 trường hợp được tổng kết trong bảng 1.3.

1.2.2.1. Các bước thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp lấy mẫu tần số

Từ các phân tích vừa rồi, ta sẽ tổng kết thành các bước thiết kế bộ lọc FIR bằng cách lấy mẫu đáp ứng tần số.

Bước 1: Chọn loại bộ lọc, chiều dài M của bộ lọc, tính chất đối xứng của $h(n)$, tập tần số ω và chỉ định các mẫu của đáp ứng tần số tương ứng với tập tần số $\{\omega_k\}$.

Bước 2: Tính các mẫu $G(k)$ theo công thức tương ứng trong bảng 1.3.

Bước 3: Tính đáp ứng xung $h(n)$ theo công thức tương ứng trong bảng 1.3.

Bước 4: Tính đáp ứng tần số $H(0)$ theo các pt(1.14), (1.11), (1.16), (1.17) hoặc pt(1.19), (1.63), (1.64), (1.65), kiểm tra lại trong miền tần số bằng cách vẽ đặc tuyến đáp ứng biên độ và đáp ứng pha. Nếu chưa thỏa các chỉ tiêu kỹ thuật, thì chọn lại M hay tập tần số $\{\omega_k\}$ hay các mẫu $H_r(k)$ và trở lại từ bước 2.

Bảng 1.3: Công thức tính đáp ứng xung $h(n)$

Đối xứng: $h(n) = h(M-1-n)$	
a = 0	$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}; \quad k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right); \quad G(k) = -G(M-k)$ $h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}$

	$U = \frac{M-1}{2}$ khi M lẻ và $\frac{M}{2} - 1$ khi M chẵn
$a = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r \left[\frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(M - k - \frac{1}{2}\right)$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^U G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$

Phản đối xứng: $h(n) = -h(M-1-n)$	
$a = 0$	$H(k) = G(k) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}, k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r \left(\frac{2\pi k}{M} \right); G(k) = -G(M-k)$ $\frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, M \text{ lẻ}$ $\frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, M \text{ chẵn}$
$a = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+2)/2M}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r \left[\frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]$ $\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right), G(M/2) = 0 \text{ với } M \text{ lẻ}$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^V G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$ $V = \frac{M-3}{2} \text{ khi } M \text{ lẻ và } V = \frac{M}{2} - 1 \text{ khi } M \text{ chẵn}$

Cuối cùng là khâu xây dựng cấu trúc và thi công bộ lọc.

Ghi chú:

- Việc chọn tập tần số $\{\omega_k\}$ và các mẫu $H_r(\omega_k)$ tương ứng được dựa trên đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng. Tuy nhiên, việc chọn $H_r(\omega_k)$ thay đổi đột ngột ở tần số cắt sẽ làm phát sinh các gợn sóng trong dải thông và dải chặn không thể chấp nhận được. Để làm giảm biên độ các gợn sóng, ta phải mở rộng dải quá độ bằng cách thêm vào một số mẫu $H_r(\omega_k)$ có giá trị trung gian trong dải quá độ (gọi là các tham số quá độ). Ta thấy để thực hiện tốt công việc này còn phụ thuộc vào kinh nghiệm của người thiết kế. Các tham số quá độ tối ưu đã được tổng kết bởi Rabiner (1970) (Tham khảo [11] trang 377).

- Do tính đối xứng, thay vì phải xác định M mẫu của $H_r(\omega_k)$ ta chỉ cần xác định $\frac{M+1}{2}$ mẫu khi M lẻ [tương ứng với $k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$] và $\frac{M}{2}$ mẫu khi M chẵn [tương ứng với $k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$].

Ví dụ 1.11:

Hãy tính các hệ số của một bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 32$, có đáp ứng xung thỏa điều kiện đối xứng $h(n) = h(M-1-n)$, và đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$H_r(2\pi k / 32 + \alpha) = \begin{cases} 1 & ; K = 0, 1, 2, \dots, 5 \\ T_1 & ; K = 6, \dots, 11 \\ 0 & ; K = 12, \dots, 15 \end{cases}$$

Trong đó hệ số quá độ là: $T_1 = 0,3789791$ với $\alpha = 0$ và $T_1 = 0,3170496$ với $\alpha = 1/2$ (theo Rabiner - 1970).

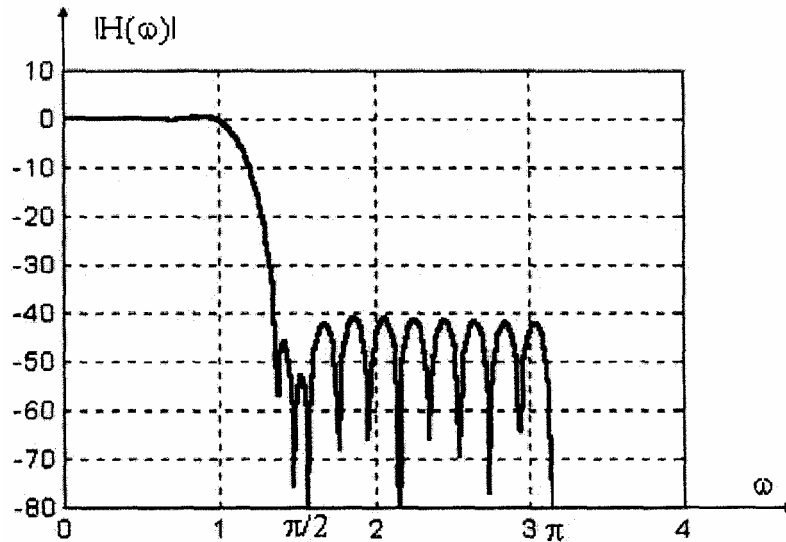
Giải:

- Ta thấy đây là bộ lọc thông thấp và bước 1 đã hàm chứa trong các điều kiện của đề bài. Ta thấy, chỉ cần chọn $\frac{M+1}{2} = 16$ mẫu của $H_r(\omega_k)$.
- Áp dụng công thức tính $G(k)$ và sau đó là công thức tính hơn trong bảng 1.1, tương ứng với trường hợp $h(n)$ đối xứng và $M = 32$ lần lượt cho 2 trường hợp $\alpha = 0$ và $\alpha = 1/2$. Kết quả lần lượt được trình bày trong sau đây:

$$M=32, \alpha = 0, T_1 = 0.3789795$$

$h(0) = h(31) = -0.0071$	$h(8) = h(23) = 0.0254$
$h(1) = h(30) = -0.0031$	$h(9) = h(22) = 0.0399$
$h(2) = h(29) = 0.0059$	$h(10) = h(21) = 0.0028$

$h(3) = h(28) = 0.0135$	$h(11) = h(20) = -0.0591$
$h(4) = h(27) = 0.0081$	$h(12) = h(19) = -0.0684$
$h(5) = h(26) = -0.0111$	$h(13) = h(18) = 0.0318$
$h(6) = h(25) = -0.0242$	$h(14) = h(17) = 0.2081$
$h(7) = h(24) = -0.0094$	$h(15) = h(16) = 0.3471$



Hình 1.24. Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc PIR
có đáp ứng xung **đối xứng** với $M = 32, \alpha_c = 0, T_1 = 0.3789795$

Các kết quả trong ví dụ 1.11 thu được từ chương trình firsampled viết bằng ngôn ngữ Matlab (xem phụ lục 3).

1.2.3. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH CÓ ĐỘ GỌN KHÔNG ĐỔI BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẬP

Phương pháp cửa sổ và phương pháp lấy mẫu tần số là kỹ thuật đơn giản cho việc thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính. Tuy nhiên, hai phương pháp này cũng có vài bất lợi nhỏ. Đó là thiếu sự điều khiển chính xác các tần số giới hạn như: tần số cạnh dải thông ω_p và cạnh dải chặn ω_s .

Việc thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính có độ gọn không đổi được xem như bài toán gần đúng Chebyshev. Kết quả sẽ là tối ưu, nhưng chúng ta phải trả giá là việc tính toán sẽ khá phức tạp và phải có sự trợ giúp của máy tính. Theo đó, những sai lệch giữa đáp ứng tần số mong muốn với đáp ứng tần số thực được trải đều trên cả dải thông và dải chặn, và sai lệch cực đại sẽ được cực tiểu hóa. Kết quả là xuất hiện những gợn sóng có biên độ bằng nhau trong cả dải thông và dải chặn.

Như ta đã trình bày trong mục 1.2.2, với một bộ lọc FIR pha tuyến tính có chiều dài M , $H_r(\omega_k)$ được xác định từ $h(n)$ với 4 trường hợp được tổng kết lại như sau:

Trường hợp 1: Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng, $h(n) = h(M-1-n)$, và M lẻ

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (1.97)$$

Nếu ta đặt $k = \left\lfloor \frac{M-1}{2-n} \right\rfloor$ và định nghĩa một tập tham số mới $\{a(k)\}$ như sau:

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right); & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right); & k = 1, 2, \dots, (M-1)/2 \end{cases}$$

Ta có:
$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos \omega k \quad (1.98)$$

Trường hợp 2: Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng, $h(n) = h(M-1-n)$, và M chẵn

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos \omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (1.99)$$

Đổi chỉ số từ n thành $k = \frac{M}{2} - n$ và định nghĩa một bộ thông số mới $\{b(k)\}$ như sau:

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (1.100)$$

Ta có:

$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{M/2} b(k) \cos \omega\left(k - \frac{1}{2}\right) \quad (1.101)$$

Để thực hiện việc tối ưu hóa, ta viết lại pt(1.98) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \cos \frac{\omega}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} b'(k) \cos \omega k \quad (1.102)$$

với các hệ số $\{b'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $b\{(k)\}$ như sau:

$$b'(0) = \frac{1}{2} b(1)$$

$$b'(k) = 2b(k) - b'(k-1); \quad k = 1, 2, \dots, M/2 - 2 \quad (1.103)$$

$$b'\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 2b\left(\frac{M}{2}\right)$$

Trường hợp 3: Đáp ứng xung $h(n)$ phản đối xứng, $h(n) = -h(M-1-n)$, và M lẻ

Trong trường hợp này $H_r(\omega_k)$ có biểu thức là:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (1.104)$$

Ta cũng thay đổi chỉ số n của tổng bằng $k = \left[\frac{M-1}{2} - n \right]$ và định nghĩa tập thông số mới:

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \quad (1.105)$$

Pt(5.101) trở thành:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \sin \omega k \quad (1.106)$$

Như trên, để thuận tiện, ta sắp xếp pt(1.106) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \sin \omega \sum_{k=0}^{(M-3)/2} c'(k) \cos \omega k \quad (1.107)$$

Với các hệ số $\{c'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $\{c(k)\}$ như sau:

$$\begin{aligned} c'\left(\frac{M-3}{2}\right) &= c\left(\frac{M-1}{2}\right) \\ c'\left(\frac{M-5}{2}\right) &= 2c\left(\frac{M-3}{2}\right) \\ &\dots\dots\dots \\ c'(k-1) - c'(k+1) &= 2c(k); \quad 2 \leq k \leq \frac{M-5}{2} \\ c'(0) &= \frac{1}{2} c'(2) = c(1) \end{aligned} \quad (1.108)$$

Trường hợp 4: Đáp ứng xung $h(n)$ phản đối xứng, $h(n) = -h(M-1-n)$, và M chẵn

Trong trường hợp này $H_r(\omega_k)$ có biểu thức là:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (1.109)$$

Ta cũng thay đổi chỉ số n của tổng bằng $k = \left[\frac{M}{2} - n \right]$ và định nghĩa tập thông số.

$$d(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (1.110)$$

Pt (5.106) trở thành:

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k) \sin \omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad (1.111)$$

Như trên, ta sắp xếp pt(1.108) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} d'(k) \cos \omega k \quad (1.112)$$

Với các hệ số $\{d'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $\{d(k)\}$ như sau:

$$\begin{aligned} d' \left(\frac{M}{2} - 1 \right) &= 2d \left(\frac{M}{2} \right) \\ d'(k-1) - d'(k) &= 2d(k); \quad 2 \leq k \leq \frac{M}{2} - 1 \\ d'(0) - \frac{1}{2} d'(1) &= d(1) \end{aligned} \quad (1.113)$$

Biểu thức $H_r(\omega_k)$ trong bốn trường hợp có thể được biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau:

$$H_r(w) = Q(w)p(w) \quad (1.114)$$

Với $Q(\omega)$ và $P(\omega)$ được định nghĩa trong bảng 1.4.

Bảng 1.4

Trường hợp	Loại mạch lọc	$Q(w)$	$P(w)$
1	$h(n) = h(M-1-n)$, M lẻ	1	$\sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} a(k) \cos \omega k$
2	$h(n) = h(M-1-n)$, M chẵn	$\cos \frac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b'(k) \cos \omega k$
3	$h(n) = -h(M-1-n)$, M lẻ	$\sin w$	$\sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} c'(k) \cos \omega k$
4	$h(n) = -h(M-1-n)$, M chẵn	$\sin$	$\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} d'(k) \cos \omega k$

Tổng quát, $Q(\omega)$ và $P(\omega)$ có thể được diễn tả như sau:

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1 & ; \text{(Trường hợp 1)} \\ \cos \frac{\omega}{2} & ; \text{(Trường hợp 2)} \\ \sin \omega & ; \text{(Trường hợp 3)} \\ \sin \frac{\omega}{2} & ; \text{(Trường hợp 4)} \end{cases} \quad (1.115)$$

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos \omega k \quad (1.116)$$

với $\{\alpha(k)\}$ là các tham số đặc trưng cho bộ lọc mà nó có quan hệ tuyến tính với đáp ứng xung $h(n)$ và:

$$L = \begin{cases} \frac{M-1}{2}; & \text{(Trường hợp 1)} \\ \frac{M-3}{2}; & \text{(Trường hợp 3)} \\ \frac{M}{2}-1; & \text{(Trường hợp 2 và 4)} \end{cases}$$

Hàm sai số có trọng số $E(\omega)$

Ta thấy $Q(\omega)$, $P(\omega)$ là các hàm có giá trị thực, trong đó, $Q(\omega)$ là một hàm cố định đã biết và $P(\omega)$ là một hàm cần phải tìm. Gọi $H_{dr}(\omega)$ là đáp ứng tần số mong muốn có giá trị thực, $H_{dr}(\omega)$ được chọn một cách đơn giản là bằng 1 trong dải thông, bằng zêro trong dải chặn (Xem đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng hình 4.7, chương 4). Vấn đề của chúng ta là phải tìm các hệ số $\alpha(k)$ của $P(\omega)$ giữa đáp ứng tần số $H_r(\omega)$ của bộ lọc thực tế và đáp ứng tần số $H_{dr}(\omega)$ của bộ lọc lý tưởng là nhỏ nhất. Để thực hiện điều này, ta định nghĩa một hàm trọng số trên sai số gần đúng (the weighting function on the approximation error) $W(\omega)$. Từ việc chỉ định $H_{dr}(\omega)$ và $W(\omega)$, sai số giữa bộ lọc số thực tế và bộ lọc số lý tưởng được đánh giá hàm sai số có trọng số $E(\omega)$ như sau:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)] \\ &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - Q(\omega)P(\omega)] \\ &= W(\omega)Q(\omega) \left[\frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \end{aligned} \quad (1.117)$$

Về mặt qui ước toán học, ta có thể định nghĩa một hàm trọng số biến dạng:

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \quad (1.118)$$

Và đáp ứng tần số biến dạng:

$$\hat{H}_{dr}(\omega) = \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} \quad (1.119)$$

Vậy :
$$E(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \quad (1.120)$$

Pt(1.120) được sử dụng cho tất cả 4 loại bộ lọc FIR pha tuyến tính đã trình bày ở trên.

Bài toán gần đúng ở đây là xác định tập hệ số sao cho nó cực tiểu hóa được giá trị tuyệt đối của sai số $E(\omega)$ trong các dải tần mà ta thực hiện thực hiện phép tính gần đúng. Ta giải quyết vấn đề này bằng công thức toán học sau:

$$\min_{\forall \alpha(k)} \left[\max_{\omega \in S} |E(\omega)| \right] = \min_{\forall \alpha(k)} \left[\max_{\omega \in S} \left| \hat{W}(\omega) \left[\hat{H}_{dr}(\omega) - \sum_{k=0}^M \alpha(k) \cos \omega k \right] \right| \right]$$

Trong đó: S bao gồm dải thông và dải chặn của mạch lọc mong muốn.

Xác định hàm trọng số $W(\omega)$:

Hàm trọng số $W(\omega)$ có thể được xác định bằng cách so sánh đáp ứng biên độ của bộ lọc thực tế với đáp ứng biên độ của bộ lọc lý tưởng. Ví dụ, ta xét một bộ lọc thông thấp FIR thực tế với tần số cạnh dải thông là ω_p , tần số cạnh dải chặn là ω_s (xem lại các tiêu chuẩn kỹ thuật được trình bày trong đặt tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp hình 4.9, chương 4).

Trong dải thông, đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$1-d_1 \leq |H_r(\omega)| \leq 1+d_1 \quad ; \quad \omega \in \omega_p \quad \text{hay} \quad ||H_{dr}(\omega)| - |H_r(\omega)|| = d_1 \quad (1.122)$$

Trong dải chặn, đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$-d_2 \leq |H_r(\omega)| \leq d_2 \quad ; \quad \omega > \omega_s \quad \text{hay} \quad ||H_{dr}(\omega)| - |H_r(\omega)|| = d_2 \quad (1.123)$$

Ở đây: δ_1 là gợn sóng dải thông, δ_2 là gợn sóng dải chặn.

$(\delta_s - \delta_p)$ là độ rộng dải quá độ.

Nói chung, d_1, d_2 nên hàm trọng số có thể được chọn khác nhau trong dải thông và dải chặn và việc chọn $W(\omega)$ phụ thuộc vào giá trị của d_1 và d_2 .

Ta đặt:

$$\delta = \max |E(\omega)| \quad (1.124)$$

thì:

$$d = \max[d_1, d_2] \quad (1.125)$$

Giả sử $d_1 > d_2$ thì ta có: $d_1 = d_2$, khi đó hàm trọng số sẽ được chuẩn hóa bằng 1 ở dải

chấn và bằng d_1 / d_2 ở dải thông, tức là:

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & \text{ở dải thông} \\ 1 & \text{ở dải chặn} \end{cases} \quad (1.126)$$

Parks và McClellan (1972) đã vận dụng phép xấp xỉ Chebyshev, cụ thể là định lý xoay chiều (*Alternation theorem*) để giải bài toán này.

Định lý xoay chiều: Gọi S là một tập con trong khoảng tần số $[0, \pi]$, điều kiện cần và miền đủ để cho $P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos \omega k$ xấp xỉ với $H_{dr}(\omega)$ một cách tốt và nhất và duy nhất theo nghĩa Chebyshev trong S là hàm sai số $E(\omega)$ tồn tại ít nhất $L+2$ thành phần tần số cực trị trong S . Nghĩa là phải tồn tại ít nhất $L+2$ tần số ω_i trong S sao cho:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{L+2}, E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1})$$

và

$$|E(\omega_i)| = \max |E(\omega)| \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots, L+2.$$

Ta thấy rằng, hàm sai số đổi dấu giữa hai tần số cực trị kế nhau nên định lý này được gọi là định lý xoay chiều.

Để làm rõ định lý xoay chiều. Ta xét trường hợp thiết kế một bộ lọc thông thấp với dải thông là $0 \leq \omega \leq \omega_p$ và dải chặn là $\omega_s \leq \omega \leq \omega_p$.

Ta có:

$$E(\omega) = W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]$$

Vì $W(\omega)$ và $H_{dr}(\omega)$ có giá trị hằng (trên từng đoạn) nên:

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \{W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]\} = -W(\omega) \frac{dH_r(\omega)}{d\omega}$$

Ta cho đạo hàm bằng 0 để tìm cực trị:

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH_r(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (1.127)$$

Từ pt(1.123) ta thấy rằng các tần số ω_i tương ứng với các đỉnh của $E(\omega)$ cũng tương ứng với các đỉnh của $H_r(\omega)$, với độ sai lệch cho phép. Vì $H_r(\omega)$ là một đa thức lượng giác bậc L , giả sử thiết kế bộ lọc ứng với trường hợp 1, ta có:

$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos \omega k = \sum_{k=0}^L \alpha'(k) \left[\sum_{n=0}^k \beta_{nk} (\cos \omega)^n \right] = \sum_{k=0}^L \alpha'(K) (\cos \omega)^k \quad (1.128)$$

Ta nhận thấy $H_r(\omega)$ có thể có (1-1) cực trị trong khoảng mở $0 < \omega < \pi$, thêm vào đó ω

$= 0$ và $\omega = \pi$ thường là điểm cực trị của $H_r(\omega)$ và cũng là của $E(\omega)$. Ngoài ra, $\omega = \omega_p$ và $\omega = \omega_s$ cũng là điểm cực trị của $H_r(\omega)$. Vậy có nhiều nhất là $L+3$ tần số cực trị trong hàm sai số $E(\omega)$ cho sự xấp xỉ duy nhất và tốt nhất với bộ lọc thông thấp lý tưởng. Mặt khác, định lý xoay chiều phát biểu rằng phải có ít nhất $L+2$ tần số cực trị trong $E(\omega)$. Vì vậy, $E(\omega)$ của bộ lọc có thể có $L+3$ hoặc $L+2$ cực trị.

Định lý xoay chiều bảo đảm một lời giải duy nhất cho việc xấp xỉ tối ưu Chebyshev. Từ các tần số cực trị mong muốn chúng ta có hệ thống phương trình:

$$\hat{W}(\omega_n) [\hat{H}_{dr}(\omega_n) - P(\omega_n)] = (-1)^n \delta \quad \text{với } n=0,1,\dots,L+1 \quad (1.129)$$

Của hàm sai số $E(\omega)$, nếu ta chọn $W(\omega)$ như trong pt(1.126) thì, hệ pt(1.129) có thể được viết lại:

$$P(\omega_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n) \quad , n=0,1,2,\dots,L+1 \quad (1.130)$$

$$\text{Hay } \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(\omega_n k) + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n) \quad (1.131)$$

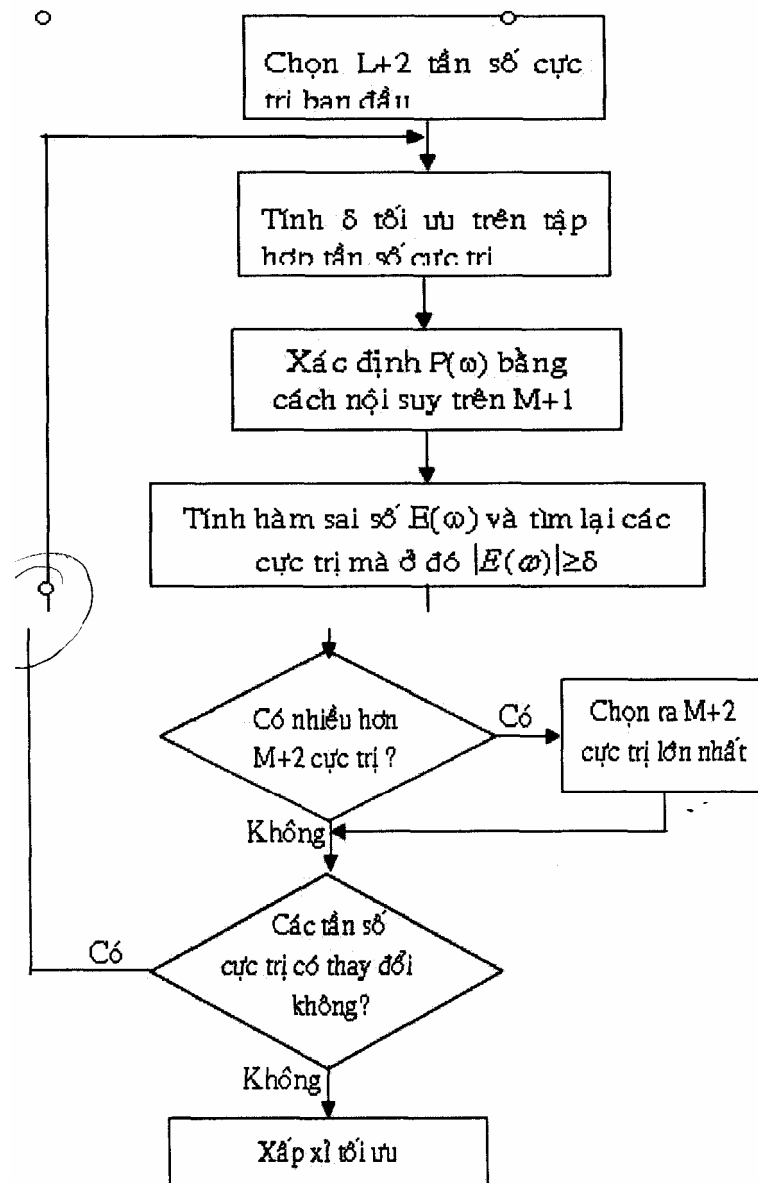
Nếu ta xem $\alpha(k)$ và δ (như là các tham số đã được xác định, pt(1.131) có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos L\omega_0 & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \dots & \cos L\omega_1 & \frac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\ 1 & \cos \omega_{L+1} & \cos 2\omega_{L+1} & \dots & \cos L\omega_{L+1} & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dr}(\omega_0) \\ \hat{H}_{dr}(\omega_1) \\ \hat{H}_{dr}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \quad (1.132)$$

Phương pháp lặp và thuật toán chuyển đổi Remez

Khởi đầu, chúng ta không biết tập các tần số cực trị $|\omega_n|$ cũng không biết các tham số $|\alpha(k)|$ và δ . Để tìm các tham số này, chúng ta dùng một thuật toán lặp, gọi là thuật toán chuyển đổi Remez. Nội dung của thuật toán này được tóm tắt như sau: trước tiên, chúng ta dự đoán một tập tần số cực trị $|\omega_n|$ sau đó lần lượt tính δ , $P(\omega)$ và hàm sai số $E(\omega)$. Từ hàm sai số $E(\omega)$ chúng ta xác định tập $(1+2)$ tần số cực trị mới và tiến trình này được lặp lại cho đến khi đạt được tập tần số cực trị tối ưu.

Thuật toán chuyển đổi Remez được trình bày ở dạng lưu đồ:



Áp dụng thuật toán Remez vào phương pháp lặp để thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính theo các bước như sau:

Bước 1: Chọn loại bộ lọc lý tưởng và xác định đáp ứng biên độ $|H_{dt}(\omega)|$, sau đó chọn hàm trọng số $W(\omega)$ (dựa theo các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thực tế), chọn chiều dài của bộ lọc số M , suy ra L theo pt(1.116).

Bước 2: Chọn loại bộ lọc theo các trường hợp trong bảng 1.4 và xác định bài toán gần đúng

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}(\omega) - P(\omega)].$$

Bước 3: Sử dụng thuật toán Remez để giải bài toán gần đúng này. Cụ thể như sau:

- Chọn ra tập hợp $L+2$ điểm tần số rời rạc ban đầu, trong dải tần số $[0, \pi]$.
- Tính δ : Ta có thể tính δ bằng phương trình ma trận (1.132), tuy nhiên theo cách

này ta phải tính ma trận nghịch đảo, việc tính ma trận nghịch đảo làm hao phí thời gian và không hiệu quả. Vì vậy, từ pt(1.132), Rabiner, McClellan,... và Parks (1971) đã đề ra công thức tính δ có hiệu quả hơn, như sau:

$$\delta = \frac{\gamma_0 \hat{H}_{dr}(\omega_0) + \gamma_1 \hat{H}_{dr}(\omega_1) + \dots + \gamma_{L+1} \hat{H}_{dr}(\omega_{L+1})}{\frac{\gamma_0}{\hat{W}(\omega_0)} - \frac{\gamma_1}{\hat{W}(\omega_1)} + \dots + \frac{(-1)^{L+1} \gamma_{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})}} \quad (1.133)$$

Trong đó:

$$\gamma_k = \prod_{n=0}^{L+1} \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_n} \quad (1.134)$$

Xác định $P(\omega)$ từ δ : Vì $P(\omega)$ là một đa thức lượng giác có dạng:

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) x^k \quad \text{với } x = \cos \omega$$

Ngoài ra, từ pt(1.128) ta có:

$$P(\omega_n) = \hat{H}_{dr}(\omega_n) - \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\omega_n)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, L+1 \quad (1.135)$$

Ta có thể dùng công thức nội suy Lagrange để tính $P(\omega)$, đó là:

$$P(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^L P(\omega_n) \left[\frac{\beta_n}{x - x_n} \right]}{\sum_{n=0}^L \left[\frac{\beta_n}{x - x_n} \right]} \quad (1.136)$$

với $x = \cos \omega$, $x_k = \cos \omega_k$ và $\beta_k = \prod_{n=0, n \neq k}^L \frac{1}{x_k - x_n}$

Xác định được hàm lỗi $E(\omega)$ bởi công thức sau:

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega) \left[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega) \right] \quad (1.137)$$

trên một tập dày đặc các điểm tần số. Thông thường, số điểm tần số để tính $E(\omega)$ là $16M$, với M là chiều dài của bộ lọc: Nếu $|E(\omega)| > \delta$ ở một hay nhiều tần số trên hơn thì một tập $(1+2)$ tần số cực trị mới được chọn và tiến trình được lặp lại từ pt(1.133). Và tập tần số cực trị mới được chọn tương ứng với các đỉnh của hàm sai số $|E(\omega)|$, nên theo thuật toán này, giá trị của δ tăng lên sau mỗi lần lặp cho tới khi nó hội tụ đến một giới hạn trên, và đạt được lời giải tối ưu cho bài toán xấp xỉ Chebyshev. Khi, $|E(\omega)| \leq \delta$ với tất cả các tần số trong tập các điểm tần số, thì lời giải tối ưu đã tìm được.

Bước 4: Xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thực tế. Ta có thể thực hiện bằng 2 cách:

Từ $P(\omega)$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ lấy mẫu $P(\omega)$ theo M điểm, sau đó xác định các hệ số run) và dùng IDFT để tính $h(n)$).

Từ $P(\omega)$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ tính trực tiếp $h(n)$ mà không cần tính qua bước trung gian là $\alpha(n)$, bởi vì ta đã có:

$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$ tại các tần số $\omega = 2\pi k/M$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)/2$ cho M lẻ hay $k = 0, 1, \dots, M/2$ cho M chẵn.

Sau đó hơn có thể được xác định bằng cách công thức trong bảng 1.3, tùy theo loại mạch lọc được thiết kế.

Thí dụ 1.12:

Một bộ lọc thông thấp có chiều dài $M = 61$ với tần số cạnh dải thông $f_p = 0.1$ và tần số cạnh dải chặn $f_s = 0.11$ và $\delta_1 = \delta_2 = 0.0011$.

Giải

Bộ lọc thông thấp có 2 dải, gọi là bộ lọc 2 dải, gồm: dải thông có tần số f chuẩn hóa từ 0 đến 0.1 (tần số góc ω tương ứng từ 0 đến $2\pi/10$), dải chặn từ 0.11 đến 0.1 (tương ứng với ω từ $3\pi/10$ đến π). Các biên tần của dải thông là (0, 0.1) và các biên tần của dải chặn là (0.11, 1). Bộ lọc thông thấp có đáp ứng biên độ trong dải thông là 1 và trong dải chặn là 0. Hàm trọng số được chọn trong dải thông là 1 và trong dải chặn cũng là 1, vì $\delta_1 = \delta_2$ chiều dài của bộ lọc là 61.

Ta sử dụng hàm `remez` trong Signal Processing Toolbox của MATLAB. Hàm này có chức năng thiết kế bộ lọc FIR độ gọn bằng nhau dựa trên thuật toán chuyển đổi Remez. Nó có nhiều cú pháp với số đối số vào và ra khác nhau. Ở đây, ta sử dụng cú pháp sau đây để thiết kế bộ lọc FIR đáp ứng xung đối xứng:

`[hn,Err] = remez(N,F,A,W)`

Các đối số vào: $N = M - 1$, với M là chiều dài của bộ lọc.

F = Vector các biên tần được tính theo tần số chuẩn hóa, được xếp theo thứ tự tăng dần từ 0 đến 1, 1 tương ứng với tần số Nyquist hay phân nửa tần số lấy mẫu. Vậy số phần tử của F là chẵn.

A = Vector giá trị đáp ứng biên độ tại các biên tần.

Vậy nó có cùng kích thước với F.

W = Vector các giá trị của hàm trọng số, ứng với mỗi dải tần có một giá trị trọng số. Vậy số phần tử của W bằng phân nửa số phần tử của F hoặc A.

Các đối số ra: hn = Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng có chiều dài M .

Err = Giá trị cực đại của hàm sai số có trọng số.

Trong ví dụ này, các đối số vào là:

$$N = 60, F = [0.2.3 \ 1], A = [1 \ 1 \ 0 \ 0], W = [1 \ 1]$$

Lưu ý: Như ta biết, tần số dao động cao nhất của tín hiệu rời rạc $f = 0.1$ (tương ứng với phân nửa tần số lấy mẫu). Tuy nhiên, chương trình remez trong MATLAB qui ước tần số dao động cao nhất là 1. Vì vậy dải tần phải được kéo dãn ra 2 lần, nghĩa là, thay vì nhập vector $F = [0. \ 1. \ 11. \ 1]$ ta phải nhập $F = [0.2. \ 3 \ 1]$.

Kết quả là: h_n = đáp ứng xung $h(n)$, được trình bày trong bảng 1.1.

$$\text{err} = 0.0011 = -16.3919\text{dB}$$

Đặc tuyến đáp ứng biên độ được vẽ trong hình 1.26. Ta thấy kết quả đã thỏa mãn một cách chính xác các chỉ tiêu đã đề ra. Ta thử tăng chiều dài của bộ lọc lên $M = 101$, khi đó sai số giảm xuống đến:

$$\text{err} = 0.00001 = -81.6402 \text{ dB}$$

đặc tuyến đáp ứng biên độ ứng với $M = 101$ được vẽ trong hình 1. 27.

Bảng 1.1

bảng 1.5

$$h(0) = h(60) = -0.0012$$

$$h(1) = h(59) = -0.0007$$

$$h(2) = h(58) = -0.0001$$

$$h(3) = h(57) = 0.0014$$

$$h(4) = h(56) = 0.0023$$

$$h(5) = h(55) = 0.0020$$

$$h(6) = h(54) = 0.0001$$

$$h(7) = h(53) = -0.0026$$

$$h(8) = h(52) = -0.0045$$

$$h(9) = h(51) = -0.0038$$

$$h(10) = h(50) = 0.0001$$

$$h(11) = h(49) = 0.0052$$

$$h(12) = h(48) = 0.0085$$

$$h(13) = h(47) = 0.0070$$

$$h(14) = h(46) = 0.0001$$

$$h(15) = h(45) = -0.0090$$

$$h(16) = h(44) = -0.0147$$

$$h(17) = h(43) = -0.0120$$

$$h(18) = h(42) = 0.00003$$

$$h(19) = h(41) = 0.0157$$

$$h(20) = h(40) = 0.0257$$

$$h(21) = h(39) = 0.0211$$

$$h(22) = h(38) = 0.0001$$

$$h(23) = h(37) = -0.0289$$

$$h(24) = h(36) = -0.0491$$

$$h(25) = h(35) = -0.0227$$

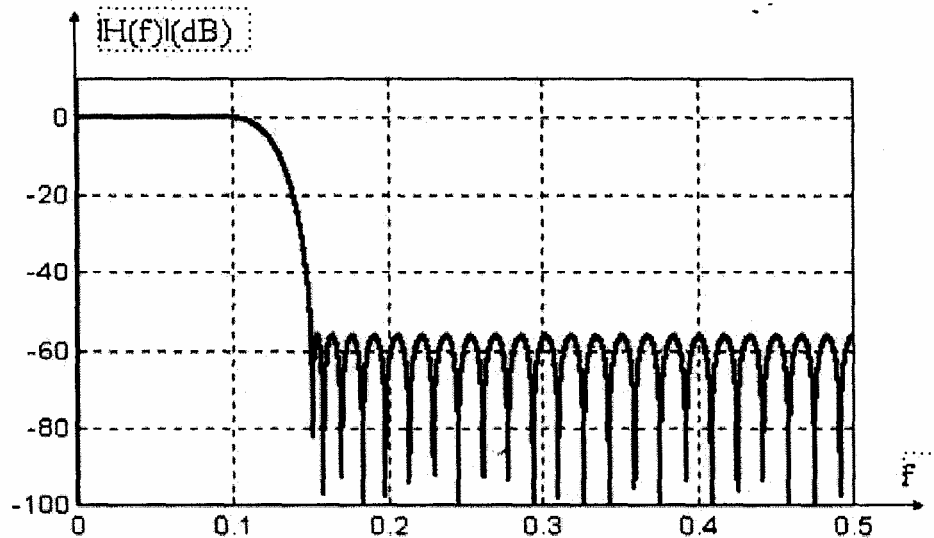
$$h(26) = h(34) = -0.0001$$

$$h(27) = h(34) = -0.0001$$

$$h(28) = h(32) = 0.1578$$

$$h(29) = h(31) = 0.2247$$

$$h(30) = h(30) = 0.2501$$



Hình 1.26: Đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR có độ gợn bằng nhau với hiệu dài $M=61$ trong ví dụ 5.12.

1.2.4. SO SÁNH CÁC PHƯƠNG PHÁP THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH

Về mặt lịch sử, phương pháp thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính sử dụng cửa sổ là phương pháp được đề xuất đầu tiên. Phương pháp lấy mẫu trong miền tần số và phương pháp xấp xỉ Chebyshev được phát triển vào những năm 1970 và trở nên rất phổ biến trong thực tế.

Điểm bất lợi chính của phương pháp cửa sổ là thiếu sự ấn định chính xác các tần số giới hạn, chẳng hạn như ω_p và ω_s . Nói chung, giá trị của ω_p và ω_s phụ thuộc vào loại cửa sổ và chiều dài của bộ lọc M .

Phương pháp lấy mẫu tần số cung cấp một sự cải tiến trên phương pháp cửa sổ khi $H_r(\omega)$ được xác định ở các tần số $\omega_k = 2\pi k/M$ và dải quá độ là bội số của $2\pi/M$. Phương pháp này đặc biệt tiện lợi khi bộ lọc FIR được thực hiện trong miền tần số bởi biến đổi Fourier rời rạc (DET). Một đặc điểm quan trọng là $H_r(\omega)_k$ có giá trị 1 hoặc 0 ở các dải tần, ngoại trừ dải quá độ.

Phương pháp xấp xỉ Chebyshev cung cấp sự điều khiển toàn bộ những chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số. Vì vậy phương pháp này thường được ưa chuộng hơn hai phương pháp trên. Chẳng hạn như với một bộ lọc thông thấp, các tham số được cho là ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 , chúng ta có thể xác định các tham số M , δ và tối ưu hoá các bộ lọc tương ứng với δ_2 , với việc trải đều sai số trên dải thông và dải chặn của bộ lọc, kết quả là ta thu được một bộ lọc tối ưu, đó là mức cực đại của méo bên được cực tiểu hoá. Phương pháp thiết kế Chebyshev trên cơ sở thuật toán chuyển đổi Remez, yêu cầu chúng ta xác định các tần số δ_p , δ_s và tỉ số δ_1/δ_2 . Nhưng thuận lợi hơn nếu chúng ta xác định được ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 . Và Chiều dài M của bộ lọc. Mặc dù không có công thức chính xác để tính chiều dài của bộ lọc, nhưng ta có thể xác định M một cách gần đúng từ ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 theo công thức khá

đơn giản của Rabiner (1971):

$$M \approx \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2}) - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad (1.138)$$

Trong đó: Δf là độ rộng của dải quá độ được định nghĩa như sau:

$$\Delta f = \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}$$

Một công thức chính xác hơn được đề xuất bởi Herrman (1973) là:

$$M \approx \frac{D_v(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \quad (1.139)$$

Trong đó

$$D_v(\delta_1, \delta_2) = \left[0.005309(\log_{10} \delta_1)^2 + 0.07114(\log_{10} \delta_1) - 0.4761 \right] (\log_{10} \delta_2) - \left[0.00266(\log_{10} \delta_1)^2 + 0.5941 \log_{10} \delta_1 + 0.42781 \right] \quad (1.140)$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.51244(\log_{10} \delta_1 - \log_{10} \delta_2) \quad (1.141)$$

Các công thức này thật sự hữu dụng để đạt được một sự ước lượng tốt chiều dài M của bộ lọc để thu được các tham số Δf , δ_1 , δ_2 mà ta mong muốn.

1.3. THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ IIR

Cũng như khi thiết kế bộ lọc số FIR, để thiết kế bộ lọc số IIR, ta có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Nói chung, có hai kỹ thuật thiết kế, một là kỹ thuật thiết kế bộ lọc số IIR từ các bộ lọc tương tự. Theo kỹ thuật lấy, trước tiên ta thiết kế một bộ lọc tương tự có đáp ứng tần số mong muốn, sau đó dùng các phương pháp gần đúng để chuyển đổi sang bộ lọc số. Việc truyền đổi này cũng có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, chẳng hạn như: phương pháp bất biến xung (Impulse invariance), phương pháp biến đổi song tuyến (Bilinear transformation), phương pháp tương đương vi phân (Approximation of derivatives), phương pháp biến đổi z tương thích (Matched- z transformation). Hai là kỹ thuật thiết kế trực tiếp bộ lọc số. Trong kỹ thuật thiết kế trực tiếp cũng có nhiều phương pháp khác nhau. Chẳng hạn như: phương pháp xấp xỉ Padé (Padé approximation), phương pháp bình phương cực tiểu (Least-squares), phương pháp thiết kế trong miền tần số.

Kỹ thuật thứ nhất ít phức tạp về mặt toán học và được sử dụng rộng rãi hơn kỹ thuật thứ hai, thêm vào đó, việc thiết kế bộ lọc tương tự đã có một quá trình phát triển lâu dài và hoàn thiện. Vì vậy, giáo trình này sẽ không trình bày kỹ thuật thiết kế trực tiếp, ta sẽ tập trung thảo luận về các phương pháp thiết kế bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự. Mặt khác, ta cũng chỉ nghiên cứu các bộ lọc FIR thực hiện được về mặt vật lý, đó là các bộ lọc số ổn định và nhân quả.

1.3.1. THIẾT KẾ BỘ LỌC IIR TỪ BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp chuyển đổi hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự $H_a(s)$ sang hàm truyền đạt của hệ thống số $H(z)$. Như vậy, trước đó chúng ta đã thiết kế được bộ lọc tương tự, như đã nói ở trên, việc làm này đã được phát triển từ lâu và đã đạt được các kết quả tốt đẹp, chúng ta sẽ tổng kết sơ lược trong phần sau.

1.3.1.1. Nguyên tắc:

Hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự (trong miền biến phức s) có dạng:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^M \alpha_k s^k} \quad (1.142)$$

trong đó $\{\alpha_k\}$ $\{\beta_k\}$ là các hệ số của bộ lọc.

Hàm truyền đạt cũng có thể được biểu diễn dưới dạng biến đổi Laplace của đáp ứng xung:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (1.143)$$

Một bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt được mô tả như (1.143) cũng có thể được biểu diễn bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{K=0}^n \alpha_K \frac{d^K y(t)}{dt^K} = \sum_{K=0}^n \beta_K \frac{d^K x(t)}{dt^K} \quad (1.144)$$

với $x(t)$, $y(t)$ lần lượt là tín hiệu vào và tín hiệu ra của bộ lọc.

Mỗi cách biểu hiện trong ba cách biểu diễn tương đương của bộ lọc tương tự như trên sẽ đưa đến một phương pháp chuyển đổi sang miền số.

Ta nhớ lại rằng một hệ thống tương tự tuyến tính bất biến theo thời gian với hàm truyền đạt $H(s)$ gọi là ổn định nếu tất cả các cực của $H(s)$ đều nằm ở nửa trái của mặt phẳng s . Vì vậy, một phương pháp chuyển đổi từ miền tương tự sang miền số phải thỏa các nguyên tắc sau:

Trục ảo in trong mặt phẳng s sẽ ánh xạ thành vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z . Nguyên tắc này bảo đảm có mối liên hệ trực tiếp giữa hai biến tần số trong hai miền.

Phần nửa trái của mặt phẳng s sẽ ánh xạ thành phần ở phía bên trong vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z . Nguyên tắc này bảo đảm một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được chuyển thành một bộ lọc số ổn định.

1.3.1.2. Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp tương đương vi phân

Một trong những phương pháp đơn giản nhất để chuyển đổi một bộ lọc tương tự sang bộ lọc số là xấp xỉ phương trình vi phân bằng một phương trình sai phân. Phương pháp này giống như cách giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng bằng phương pháp số trên máy tính.

Đạo hàm $dy(t)/dt$ tại $t = nT_s$, với T_s là chu kỳ lấy mẫu, được thay bằng sai phân lùi $[y(nT_s) - y(nT_s - T_s)]/T_s$. Tức là:

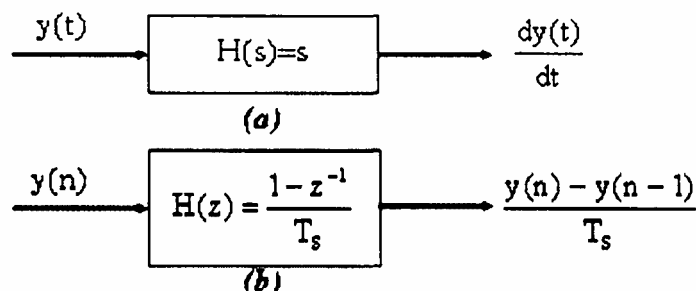
$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT_s} = \frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T_s}$$

$$\text{Với } y(n) \equiv y(nT_s) \quad (1.145)$$

Hệ thống vi phân tương tự với đáp ứng $dy(t)/dt$ có hàm truyền đạt là $H(s) = s$, tương đương trong miền số là một hệ thống số với đáp ứng $[y(n) - y(n-1)]/T_s$ sẽ có hàm truyền đạt là: $H(z) = (1 - z^{-1})/T_s$ (hình 1.29). Kết quả, ta thu được sự tương đương trong miền tần số của quan hệ (1.145) là:

$$S = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad (1.146)$$

Đạo hàm bậc hai $d^2y(t)/dt^2$ được thay bằng sai phân bậc hai:



$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = \frac{[y(nT_s) - y(nT_s - T_s)]/T_s - [y(nT_s - T_s) - y(nT_s - 2T_s)]/T_s}{T_s} \\ &= \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T_s^2} \end{aligned} \quad (1.147)$$

Trong miền tần số, pt(1. 1 43) tương đương với:

$$s^2 = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T_s^2} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s} \right)^2 \quad (1.148)$$

Từ đây có thể rút ra mối quan hệ tương đương trong miền tần số khi thay thế đạo hàm bậc k bằng sai phân bậc k như sau:

$$s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s} \right)^k \quad (1.149)$$

Kết quả là hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR có được từ phép xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân, đó là:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T_s} \quad (1.150)$$

trong đó $H_a(s)$ là hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự được đặc trưng bởi phương trình vi phân (1.144).

Ta hãy xem ý nghĩa của phép ánh xạ từ mặt phẳng s sang mặt phẳng z theo pt(1.46), ta viết lại:

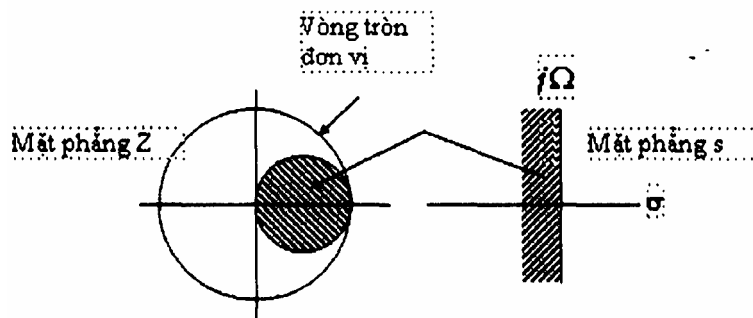
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad \text{hay} \quad z = \frac{1}{1 - sT_s} \quad (1.151)$$

Nếu thay $s = j\Omega$ vào pt(5.149) ta có:

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T_s} = \frac{1}{1 + \Omega^2 T_s^2} + j \frac{\Omega T_s}{1 + \Omega^2 T_s^2} \quad (1.152)$$

Khi thay đổi từ $-\infty \rightarrow +\infty$ thì quỹ tích tương ứng của các điểm trong mặt phẳng z là một vòng tròn có bán kính $\frac{1}{2}$ và tâm đặt tại điểm $z = \frac{1}{2}$, xem hình 1.27.

Dễ dàng chứng tỏ rằng phép ánh xạ Gbiến các điểm trong nửa trái trên mặt phẳng s thành các điểm tương ứng bên trong vòng tròn có bán kính $\frac{1}{2}$ và tâm $(1/2, 0)$ trong mặt phẳng z và các điểm ở nửa phải của mặt phẳng s sẽ chuyển thành các điểm tương ứng ở bên ngoài vòng tròn này, trong mặt phẳng z .



Hình 1.27. Phép ánh xạ $s = (1-z^{-1})/T_s$ biến nửa trái của mặt phẳng s thành miền trong vòng bán kính $\frac{1}{2}$, tâm $z = \frac{1}{2}$ trên mặt phẳng z

Điều này có nghĩa là một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được chuyển đổi thành một bộ lọc số ổn định. Tuy nhiên, vị trí có thể có của các cực của bộ lọc số bị giới hạn trong các dải tần số khá nhỏ. Vì vậy, phép ánh xạ cũng bị giới hạn trong phạm vi thiết kế các bộ lọc hạ thông và các bộ lọc dải thông có tần số cộng hưởng tương đối nhỏ. Vì vậy, phép ánh

xạ này chỉ có thể dùng để thiết kế các bộ lọc thông thấp và thông dải có tần số cộng hưởng khá nhỏ. Nó không có khả năng chuyển đổi từ bộ lọc thông cao tương tự thành bộ lọc thông cao số.

Ví dụ 1.13: Thay thế đạo hàm bằng sai phân ngược để chuyển đổi một bộ lọc thông thấp tương tự có hàm truyền đạt thành $H_a(s) = 1/(s + 1)$ bộ lọc số.

Giải

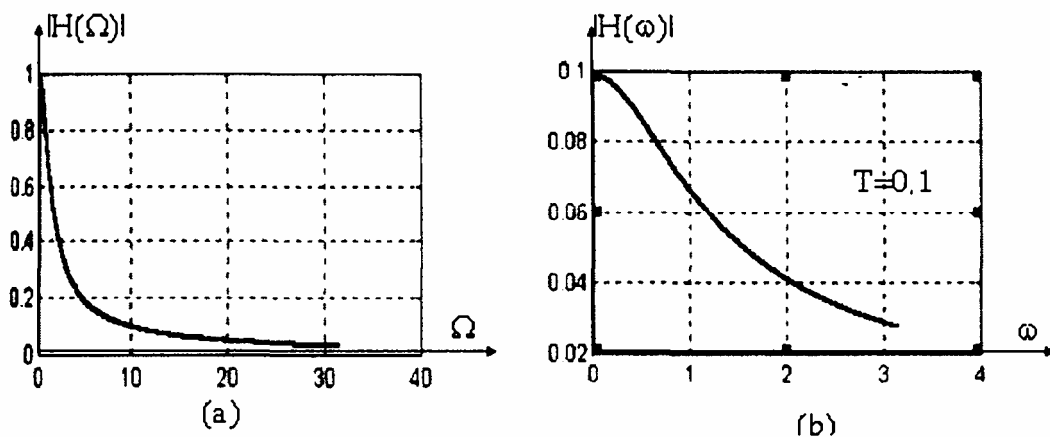
An dụng biểu thức ánh xạ từ miền s sang miền z : $s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$

$$\text{Ta có : } H(z) = \frac{1}{[(1 - z^{-1})/T_s] + 1} = \frac{zT_s / (1 + T_s)}{z - [1/(1 + T_s)]}$$

Bộ lọc số có một cực tại $z = 1/(1 + TS)$. Để đạt được tần số cộng hưởng thấp, ta phải chọn T_s đủ nhỏ để cho vị trí của cực nằm gần vòng tròn đơn vị. Chẳng hạn, ta có thể chọn $T_s = 0.1$, ta được:

$$H(z) = \frac{0.09z}{z - 0.909} = \frac{0.09}{1 - 0.909z^{-1}}$$

Do cực của $H(z)$ nằm ở tại điểm $z = 0.909$, nên đáp ứng tần số có một đỉnh tại (Hình 1.28).



Hình 1.28. Các đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự (a) và bộ lọc số (b) trong ví dụ 1.13

Ví dụ 1.14: Chuyển bộ lọc thông dải tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H_a(s) = 1/[(s + 0.1)^2 + 9]$$

thành bộ lọc số IIR bằng cách thay thế đạo hàm bằng sai phân ngược.

Giải: Thay $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ vào $H_a(s)$ ta được:

$$H(z) = \frac{1}{\left((1-z^{-1})/T_s + 0.1\right)^2 + 9} = \frac{T_s^2 / (1 + 0.2T_s + 9.01T_s^2)}{1 - \frac{2(1 + 0.1T_s)}{1 + 0.2T_s + 9.01T_s^2} z^{-1} + \frac{1}{1 + 0.2T_s + 9.01T_s^2} z^{-2}}$$

Ta thấy hàm truyền đạt thỏa mãn điều kiện để đa thức mẫu số có nghiệm phức.

Vì vậy, nó có dạng của một bộ cộng hưởng nếu T_s được chọn đủ nhỏ (ví dụ $T_s \leq 0.1$), để các cực nằm gần vòng tròn đơn vị. Chẳng hạn, nếu $T_s = 0.1$ thì các cực sẽ đặt tại các điểm:

$$P_{1,2} = 0.91 \pm j0.27 = 0.949e^{\pm j165^\circ}$$

1.3.1.3 Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp bất biến xung.

Phương pháp này xuất phát từ cách biểu diễn một hệ thống bằng ng xung. Theo đó, một bộ số IIR có đáp ứng xung hấp thụ được bằng cách lấy mẫu đáp ứng xung $h_a(t)$ của bộ lọc tương tự. Ta có:

$$h(n) = h(nT_s), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.153)$$

trong đó T là chu kỳ lấy mẫu.

Từ mục 3.1 chương 3, đã biết rằng khi một tín hiệu liên tục trong miền thời gian (tín hiệu tự $x_a(t)$) có phổ $X_a(F)$ được lấy mẫu với tốc độ $= 1/T$ (samples/second) thì phổ của tín hiệu lấy mẫu là sự tập lại tuần hoàn của $X_a(F)$ với chu kỳ F_s . Cụ thể thì quan hệ đó là:

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (1.154)$$

trong đó $f = F/F_s$ là tần số chuẩn hoá.

Hiện tượng biệt d./Anh xuất hiện nếu tốc độ lấy mẫu F_s nhỏ hơn hai lần thành phần tần số lớn nhất có trong $X_a(F)$.

Thể hiện dưới góc độ lấy mẫu đáp ứng xung của một bộ lọc tương tự có đáp ứng tần số $X_a(F)$ thì bộ lọc số với đáp ứng xung G sẽ có đáp ứng tần số là:

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a[(f - k)F_s] \quad (1.155)$$

$$\text{Hay} \quad H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a[(\omega - 2k\pi)F_s] \quad (1.156)$$

$$\text{Tương đương với :} \quad H(\Omega T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s}) \quad (1.157)$$

Có thể thấy rõ là bộ lọc số với đáp ứng tần số sẽ có các đặc tính đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng nếu chu kỳ lấy mẫu được chọn đủ nhỏ để tránh hoàn toàn hoặc

cực tiểu hóa hiện tượng biệt d./Anh. Ta cũng thấy rằng phương pháp bất biến xung là không thích hợp để thiết kế các bộ lọc thông cao, bởi vì hiện tượng biệt d./Anh sẽ xuất hiện từ quá trình lấy mẫu.

Để xem xét sự ánh xạ giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z được hàm chứa trong quá trình lấy mẫu, ta dựa vào sự tổng quát hóa pt(1.113) bằng cách liên kết biến đổi z của $h(n)$ với biến đổi Laplace của $h(n)$. Sự liên kết được thực hiện như sau:

$$H(z) \Big|_{x=1} T_s = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(s - j \frac{2k\pi}{T_s}) \quad (1.158)$$

Trong đó :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \quad (1.159)$$

Và

$$H(z) \Big|_{x=1} T_s = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)e^{-\Omega T_s} \quad (1.160)$$

Khi $s = j\Omega$, pt(1.118) được rút gọn thành pt(1.113) (thừa số j trong G được bỏ đi trong ký hiệu).

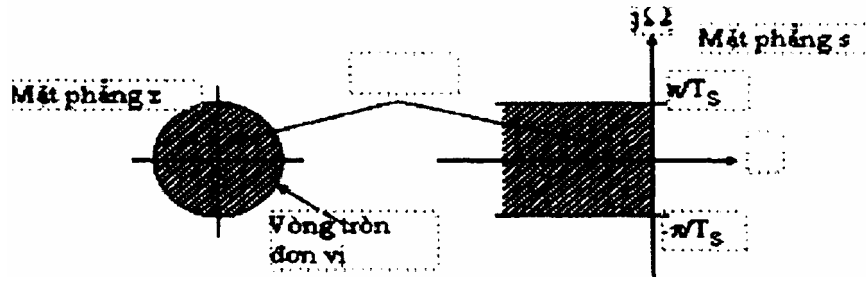
Tính chất tổng quát của phép ánh xạ:

$$z = e^{sT_s} \quad (1.161)$$

có thể có được bằng cách thay $s = \sigma + j\Omega$ và biểu diễn biến phức z dưới dạng cực $z = re^{j\omega}$ $= e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}$. Rõ ràng, ta có:

$$r = e^{\sigma T_s} \text{ và } \omega = \Omega T_s \quad (1.162)$$

Kết quả là khi σ thì $0 < r < 1$, và khi $\sigma > 0$ thì $r > 1$, khi σ thì $r = 1$. Vì vậy, nửa trái của mặt phẳng s được ánh xạ vào trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z , và nửa phải của mặt phẳng s sẽ được ánh xạ thành các điểm nằm ngoài vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z . Đây là một trong số các đặc tính mong muốn của một phép ánh xạ tốt. Trục ảo cũng được ánh xạ thành vòng tròn đơn vị như đã chỉ ra ở trên. Tuy nhiên, đây không phải là phép ánh xạ một một. Vì π , nên phép ánh xạ hàm ý rằng khoảng $-\pi/T_s \leq \Omega \leq \pi/T_s$ ánh xạ vào các giá trị tương ứng trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Hơn nữa, khoảng tần số $\pi/T_s \leq \Omega \leq 3\pi/T_s$ trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$ và điều này nói chung vẫn xảy ra đối với khoảng $(2k-1)\pi/T_s \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T_s$ với k là một số nguyên. Vì vậy phép ánh xạ từ biến tần số tương tự Ω sang biến tần số ω trong miền số là phép ánh xạ nhiều vào một (many-to-one), điều này thể hiện ảnh hưởng của hiện tượng biệt d./Anh do quá trình lấy mẫu. Hình 1.29 minh họa phép ánh xạ từ mặt phẳng s sang mặt phẳng z .



Hình 1.29. Phép ánh xạ $z = e^{sT_s}$. Sẽ ánh xạ dãy có độ rộng $2\pi/T_s$ ($\sigma < 0$) trong mặt phẳng s thành các điểm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z .

Để tìm hiểu sâu hơn nữa tác dụng của phương pháp bất biến xung lên các đặc tính của bộ lọc số IIR, ta hãy biểu diễn hàm hệ thống của bộ lọc tương tự dưới dạng tổng các phân thức. Với giả thiết là các cực của bộ lọc tương tự là khác nhau, ta có thể viết:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - P_k} \quad (1.163)$$

trong đó các cực của bộ lọc tương tự và các hệ số trong khai triển phân thức. Kết quả là:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{P_k t}, \quad t \geq 0 \quad (1.164)$$

Nếu ta lấy mẫu hàm một cách tuần hoàn tại các thời điểm ta sẽ được:

$$h(n) = h_a(nT_s) = \sum_{k=1}^N C_k e^{P_k T_s n} \quad (1.165)$$

Và hàm hệ thống của bộ lọc số IIR sẽ có dạng:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N C_k e^{P_k T_s n} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N C_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{P_k T_s} z^{-1})^n \quad (1.166)$$

$$\text{Vì } P_k < 0, \text{ nên } \sum_{n=0}^{\infty} (e^{P_k T_s} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{P_k T_s} z^{-1}} \quad (1.167)$$

$$\text{Và } H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{P_k T_s} z^{-1}} \quad (1.168)$$

Ta thấy bộ lọc số có các cực tại: $z_k = e^{P_k T_s}$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Với hàm hệ thống như pt(1.168), bộ lọc số IIR dễ dàng được thực hiện bằng một dải ghép song song của các bộ lọc đơn cực. Nếu một số cực là các giá trị phức, chúng có thể được ghép thành từng cặp với nhau để tạo thành các bộ lọc thành phần có hai cực. Ngoài ra, hai thừa số chứa các cực có giá trị thực cũng có thể được kết hợp lại để tạo thành các bộ lọc thành phần có hai cực. Nên bộ lọc số IIR có thể được thực hiện bằng một dải song song của các bộ lọc thành phần có hai cực.

Mặc dù sự khai triển để đưa đến biểu thức $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{P_k T_s} z^{-1}}$ được dựa trên một bộ lọc tương tự có các cực khác nhau, nhưng biểu thức trên cũng có thể tổng quát hóa đối với trường hợp các cực kép.

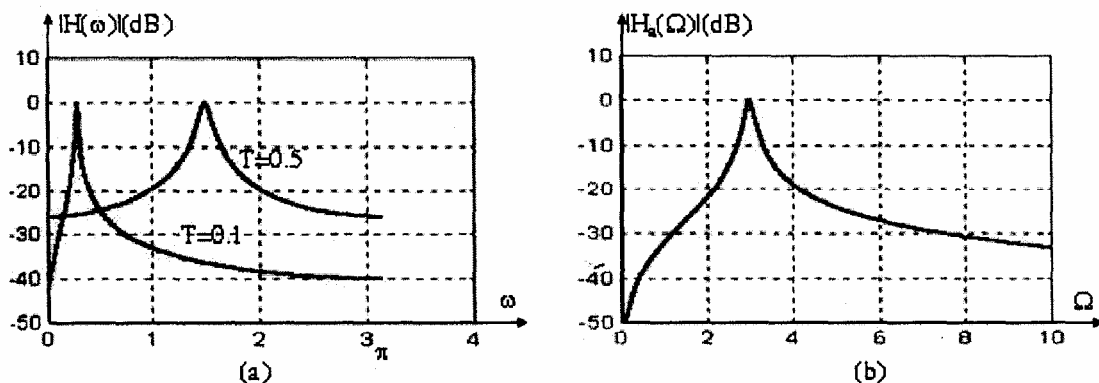
Ví dụ 1.11: Chuyển một bộ lọc tương tự có hàm truyền đậm thành bộ lọc số IIR bằng phương pháp bất biến xung.

Giải: Ta thấy bộ lọc tương tự có một zero tại $s = -0.1$ và một cặp cực liên hợp phức tại $P_k = -0.1 \pm j3$. Ta không phải xác định đáp ứng xung hàm để thiết kế bộ lọc số bằng phương pháp bất biến xung, mà thay vào đó ta sẽ xác định trực tiếp $H(z)$ bởi pt(1.16 8) từ khai triển phân thức cù. Ta có:

$$H(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - j3} + \frac{1/2}{s + 0.1 + j3} \Rightarrow H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{0.1T} e^{j3T_s} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{0.1T_s} e^{-j3T_s} z^{-1}}$$

Do hai cực là liên hợp phức, nên ta có thể kết hợp chúng lại với nhau để tạo thành một bộ lọc có hai cực đơn giản có hàm truyền đạt là:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc này được vẽ trong hình 1.30.a với hai trường hợp $T_s = 0.1$ và $T_s = 0.5$.



Hình 1.30.

(a) Đáp ứng biên độ của bộ lọc số

(b) Đáp ứng biên độ của bộ lọc số

Để có sự so sánh, ta vẽ thêm đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự trong hình 1.30.b. Từ đồ thị này, ta thấy sự ảnh hưởng hiện tượng biệt d./Anh (đáp ứng tần số bị biến đổi) khi $T_s = 0.1$ ảnh hưởng nhỏ hơn khi $T_s = 0.5$, và khi T_s thay đổi thì tần số cộng hưởng cũng thay đổi theo. Ví dụ trên cũng cho thấy tầm quan trọng trong việc chọn một giá trị T_s đủ nhỏ để giảm thiểu ảnh hưởng của hiện tượng biệt d./Anh. Do ảnh hưởng của hiện tượng biệt d./Anh nên phương pháp bất biến xung chỉ thích hợp trong việc thiết kế các ứng thấp và thông dải.

1.3.1.4. Thiết kế bộ lọc số IIR bằng phép biến đổi song tuyến.

Hai phương pháp thiết kế bộ lọc số IIR đã được giới thiệu có một hạn chế là chúng

chỉ thích hợp để thiết kế các bộ lọc hạ thông và một lớp hữu hạn các bộ lọc dải thông. Sự h(n) chế này là kết quả của việc ánh xạ để chuyển các điểm trong mặt phẳng s thành các điểm tương ứng trong mặt phẳng z.

Phương pháp biến đổi song tuyến khắc phục được những hạn chế của hai phương pháp trên. Phép biến đổi song tuyến liên quan với việc tính tích phân bằng phương pháp số theo qui tắc hình thang. Ví dụ, ta xét một bộ lọc tương tự tuyến tính có hàm truyền đạt là:

$$H(s)=b/(s+a) \quad (1.170)$$

Hệ thống này cũng có thể đặc trưng bằng phương trình vi phân:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (1.171)$$

Thay vì thay thế đạo hàm bằng một sai phân hữu hạn, ta hãy thử lấy tích phân của đạo hàm và tính xấp xỉ tích phân theo qui tắc hình thang. Ta có:

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau) d\tau + y(t_0) \quad (1.172)$$

trong đơn vị đạo hàm của y(t). Tích phân trên được tính xấp xỉ theo qui tắc hình thang tại t_0 và ta được:

$$y(nT_s) = \frac{T_s}{2} [y'(nT_s) + y'(nT_s - T_s)] + y(nT_s - T_s) \quad (1.173)$$

Tính phương trình vi phân (1.171) tại G ta được:

$$y'(nT_s) = -ay(nT_s) + bx(nT_s) \quad (1.174)$$

Thay pt(1.174) vào pt(1.173) ta được một phương trình sai phân cho hệ thống rời rạc tương ứng:

$$(1 + \frac{aT_s}{2})y(n) - (1 - \frac{aT_s}{2})y(n-1) = \frac{bT_s}{2} [x(n) + x(n-1)] \quad (1.175)$$

$$\text{với } \begin{cases} y(n) \equiv y(nT_s) \\ x(n) \equiv x(nT_s) \end{cases}$$

Biến đổi Z của phương trình vi phân này là:

$$(1 + \frac{aT_s}{2})Y(z) - (1 - \frac{aT_s}{2})z^{-1}Y(z) = \frac{bT_s}{2}(1 + z^{-1})X(z) \quad (1.176)$$

Kết quả, hàm truyền đạt của bộ lọc số tương đương là:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1+aT_s/2-(1-aT_s/2)z^{-1}} \quad (1.177)$$

hay

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a} \quad (1.178)$$

Như vậy, phép ánh xạ từ mặt phẳng s sang mặt phẳng z là:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad (1.179)$$

Phép ánh xạ này được gọi là phép biến đổi song tuyến. Mặc dù ta rút ra phép biến đổi song tuyến từ phương trình vi phân bậc nhất, nhưng điều này cũng đúng đối với phương trình vi phân bậc N.

Để tìm hiểu những tính chất của phép biến đổi song tuyến, ta đặt:

$$\begin{cases} z = re^{j\omega} \\ s = \sigma + j\Omega \end{cases}$$

Pt(1.173) có thể được viết lại như sau:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{re^{j\omega} - 1}{re^{j\omega} + 1} \right)$$

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} + j \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right)$$

Suy ra :

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right) \quad (1.180)$$

Và

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \left(\frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right) \quad (1.181)$$

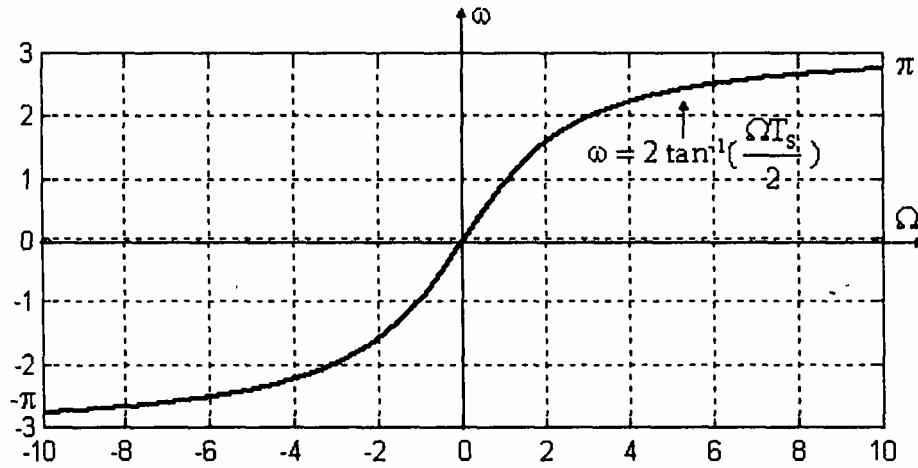
Ta thấy rằng nếu $r < 1$ thì, và nếu $r > 1$ thì $\sigma > 0$ nên nửa trái của mặt phẳng s ánh xạ vào bên trong vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng z, và nửa phải của mặt phẳng s ánh xạ thành các phần nằm ở phía ngoài vòng tròn đơn vị. Khi $r = 1$ thì $\sigma = 0$ và

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2} \quad (1.182)$$

hay

$$\omega = 2 \tan^{-1} (\Omega T_s / 2) \quad (1.183)$$

Quan hệ (1.183) giữa các biến tần số trong hai miền tương tự và số được minh họa ở hình 1.31.



Hình 1.31. Sự ánh xạ giữa miền tần số ω và miền tần số Ω trong phép biến đổi song tuyến.

Ta thấy toàn bộ miền Ω được ánh xạ chỉ một lần vào $\omega < \pi$, nên sẽ tránh được hiện tượng biệt d./Ảnh của các thành phần tần số. Tuy nhiên phép ánh xạ này có tính phi tuyến tính. Ta khảo sát sự nén tần số là do tính chất phi tuyến của hàm. Ngoài ra, phép biến đổi song tuyến sẽ ánh xạ điểm thành điểm $z = -1$. Vì vậy, bộ lọc thông thấp đơn cực $H(s) = b/(s+a)$ có một zero tại điểm $s = \infty$, sẽ đưa đến một bộ lọc số có một zero tại $z = -1$.

Ví dụ 1.16: Chuyển một bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là

$$H_a(s) = \frac{s+1}{(s+0.1)^2 + 16} \text{ thành bộ lọc số IIR có tần số cộng hưởng bằng phép biến đổi}$$

song tuyến.

Giải. Ta thấy bộ lọc tương tự có tần số cộng hưởng $\Omega = 4$, tần số này được ánh xạ thành tần số bằng cách chọn giá trị của thông số T_s . Từ pt(1.182) ta phải chọn $T_s = 1/2$ để có.

Vì thế biểu thức ánh xạ là: $s = 4 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$ và bộ lọc số có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$$

Ta thấy hệ số của số hạng gở mẫu của $H(z)$ là rất nhỏ và có thể tính gần đúng bằng 0, ta được:

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.975z^{-2}}$$

Bộ lọc này có các cực $P_{1,2} = 0.987.e^{\pm jn/2}$ và các zero $z_1 = -1; z_2 = 0.91$.

Trong ví dụ này, tần số T_s được chọn để ánh xạ tần số cộng hưởng của bộ lọc tương tự thành tần số mong muốn của bộ lọc số. Việc thiết kế bộ lọc số thường bắt đầu bằng các chỉ tiêu kỹ thuật trong miền tần số. Trong số các chỉ tiêu này có biến tần số ω . Những chỉ

tiêu này được chuyển sang miền tương tự nhờ pt(1.82). Sau đó, bộ lọc tương tự được thiết kế đã đáp ứng đúng các chỉ tiêu này. Sau cùng, bộ lọc tương tự được chuyển đổi sang bộ lọc số bằng biến đổi song tuyến (1.171). Trong tiến trình này, thông số G là "trong suốt" và có thể được gán cho bất cứ giá trị nào (chẳng hạn $T_s = 1$). Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Ví dụ 1.17: Hãy thiết kế một bộ lọc số IIR thông thấp đơn cực có dải thông 3 do tại tần số tại bộ lọc tương tự có hàm truyền là : $H(s) = \frac{\Omega_c}{1 + \Omega_c s}$, lai dải thông 3 dB của bộ lọc tương tự, bằng cách sử dụng phép biến đổi song tuyến.

Giải. Bộ lọc số có độ lợi -3 dB tại. Trong miền tần số của bộ lọc tương tự, tương ứng với:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2} = \frac{2}{T_s} \tan 0.1\pi = 0.65 / T_s$$

$$\text{Vì vậy, hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự là : } H(s) = \frac{\frac{0.65}{T_s}}{s + \frac{0.65}{T}}$$

Áp dụng phép biến đổi song tuyến, ta có : $H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$ trong đó T_s đã được đơn giản.

$$\text{Đáp ứng tần số của bộ lọc số là : } H(\omega) = \frac{0.245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.509e^{-j\omega}}.$$

Tại $\omega = 0$, $H(0) = 1$ và tại $\omega = 0.2\pi$, đó là đáp ứng mong muốn.

1.3.1.1. Thiết kế bộ lọc số IIR bằng biến đổi z-tương thích

Một phương pháp khác để chuyển đổi một bộ lọc tương tự thành một bộ lọc số tương đương là ánh xạ trực tiếp các cực và zero của $H(s)$ thành các cực và zero trong mặt phẳng z . Giả sử hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự được biểu diễn dưới dạng thừa số như sau :

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (1.184)$$

trong đó z_k và p_k là các cực và các zero của bộ lọc. Như vậy hàm truyền đạt của bộ lọc số là :

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T_s} z^{-1})}{\sum_{k=1}^N (1 - e^{p_k T_s} z^{-1})} \quad (1.185)$$

với T là chu kỳ lấy mẫu. Ta thấy các thừa số (s-a) trong H(s) được ánh xạ thành thừa số $(1 - e^{aT_s} z^{-1})$. Phép ánh xạ này được gọi là phép biến đổi z tương thích. Ta thấy các cực thu được từ phép biến đổi này thì giống như các cực có được từ phương pháp bất biến xung. Tuy nhiên, hai phương pháp này cho các zero khác nhau.

Để giữ lại đặc tính đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự thì chu kỳ lấy mẫu trong phép biến đổi z - tương thích phải được chọn thích hợp để vị trí các cực và zero nằm ở vị trí tương đương trong mặt phẳng z. Vì thế có thể loại bỏ hiện tượng biệt gian bằng cách chọn chu kỳ lấy mẫu T đủ nhỏ.

1.4. ĐẶC TÍNH CỦA CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ THÔNG DỤNG

Như đã giới thiệu, vấn đề thiết kế bộ lọc tương tự đã phát triển từ lâu, vì vậy có nhiều sách viết về chủ đề này. Với mục đích cung cấp tài liệu tham khảo cho việc thiết kế bộ lọc số IIR, trong phần này ta sẽ trình bày tóm tắt các đặc tính quan trọng của vài loại bộ lọc thông dụng và các tham số tương ứng. Mặt khác, ta cũng chỉ thảo luận giới hạn ở bộ lọc thông thấp, bởi vì có các phương pháp chuyển bộ lọc thông thấp thành lọc thông dải, thông cao hoặc triệt dải.

1.3.2.1. Bộ lọc Butterworth

Bộ lọc Butterworth là bộ lọc toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng biên độ bình phương:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (1.186)$$

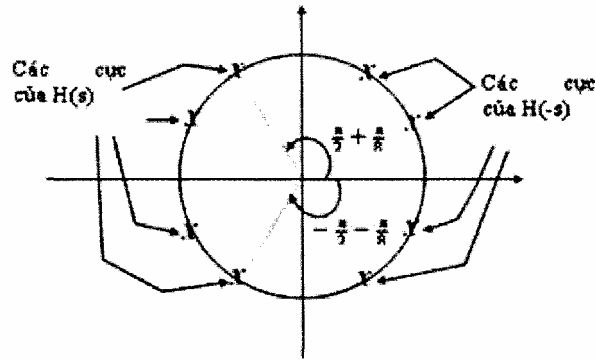
trong đó N là bậc của bộ lọc và Ω_c là tần số cắt. vì $H(s).H(-s)$ được tính tạo bằng với nên ta có thể viết:

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2/\Omega_c^2)^N} \quad (1.187)$$

Khoảng cách giữa các cực của $H(s).H(-s)$ xuất hiện trên vòng tròn đơn vị là bằng nhau. Từ (12) ta thấy rằng :

$$\frac{-S^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \text{ Vì thế :}$$

$$S_k = \Omega_c \cdot e^{jn/2} \cdot e^{j(2k+1)\pi/2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.188)$$

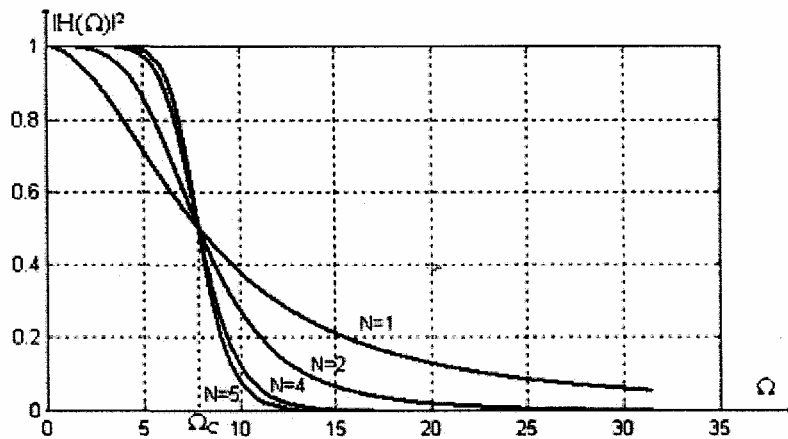


Hình 1.32. Các vị trí của các cực của bộ lọc Butterworth $N=4$.

Hình 1.32 minh họa vị trí của các cực của bộ lọc Butterworth với $N=4$. Đặc tuyến đáp ứng tần số của bộ lọc này với vài giá trị khác nhau của N ($N = 1, N=2, N=4, N=1$) được vẽ trong hình 1.32. Ta thấy đơn điệu ở dải thông và cả dải chặn. Bậc cần thiết của bộ lọc để đáp ứng yêu cầu về độ suy giảm δ_2 tại một tần số cụ thể Ω_3 có thể xác định một cách dễ dàng từ pt(1.186). Tại $\Omega = \Omega_3$, ta có:

$$\delta_2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} \Leftrightarrow N = \frac{\log_{10} [1 / \delta_2^2 - 1]}{2 \log_{10} (\Omega_s / \Omega_c)} \quad (1.189)$$

Như vậy, bộ lọc Butterworth hoàn toàn được đặc trưng bởi các thông số N , δ_2 và.



Hình 1.33: Đặc tuyến đáp ứng của bộ lọc Butterworth

Ví dụ 1.18: Xác định bậc và các cực của bộ lọc thông thấp Butterworth có tần số cộng hưởng 100 Hz và độ suy giảm 40 dB tại tần số 1000 Hz.

Giải:

Ta có: $\Omega_c = 1000\pi$, $\Omega_s = 2000\pi$

Với độ suy giảm 40 dB, ta có : $\delta_2 = 0.01$. Chọn $N=7$, và các cực là :

$$S_k = 1000\pi e^{j(n/2 + (2k+1)\pi/14)} \quad , k=0, 1, \dots, 6.$$

1.3.2.2. Bộ lọc Chebyshev

Có hai loại bộ lọc Chebyshev. Loại 1 là các bộ lọc toàn cực có tính chất gợn sóng đều ở dải thông và tính đơn điệu ở dải chặn. Loại 2 là các bộ lọc chứa cả cực và zero, có tính đơn điệu ở dải thông và tính gợn sóng đều ở dải chặn. Các zero của bộ lọc Chebyshev loại 2 nằm trên trục ảo trong mặt phẳng s.

Đặc tuyến đáp ứng biên độ bình phương của bộ lọc Chebyshev loại 1 được cho bởi biểu thức sau :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_C)} \quad (1.190)$$

trong đó δ là thông số của bộ lọc, nó có quan hệ với độ gợn sóng trong dải thông, và TN (xưa đa thức Chebyshev bậc N được định nghĩa như sau :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (1.191)$$

Đa thức Chebyshev có thể được thành lập bằng phương trình đệ qui như sau :

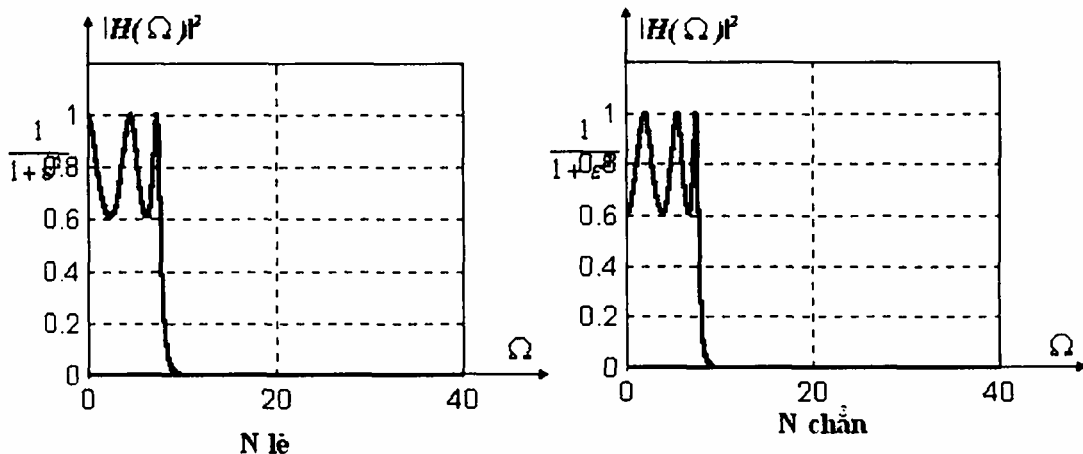
$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \quad N = 1, 2, \dots \quad (1.192)$$

trong đó $T_0(x) = 0$ và $T_1(x) = 1$

Các tính chất của đa thức Chebyshev :

1. $|T_N(x)| \leq 1$, với $|x| \leq 1$
2. $T_N(1) = 1$, với mọi N.
3. Tất cả các nghiệm của đa thức đều nằm trong khoảng.

Hình 1.34 minh họa sự ảnh hưởng của thông số lên độ gợn sóng dải thông tương ứng với hai trường hợp N chẵn và N lẻ.



Hình 1.34: Đặc tuyến tần số của bộ lọc Chebyshev loại 1, $\varepsilon = 0.8$

Khi N lẻ, $T_N(0) = 0 \Rightarrow |H(0)|^2 = 1$, khi N Chẵn $T_N(0) = 1, \Rightarrow |H(0)|^2 = \frac{1}{1+e^2}$. Ở tần số cạnh băng tần $\Omega = \Omega_C$, ta có :

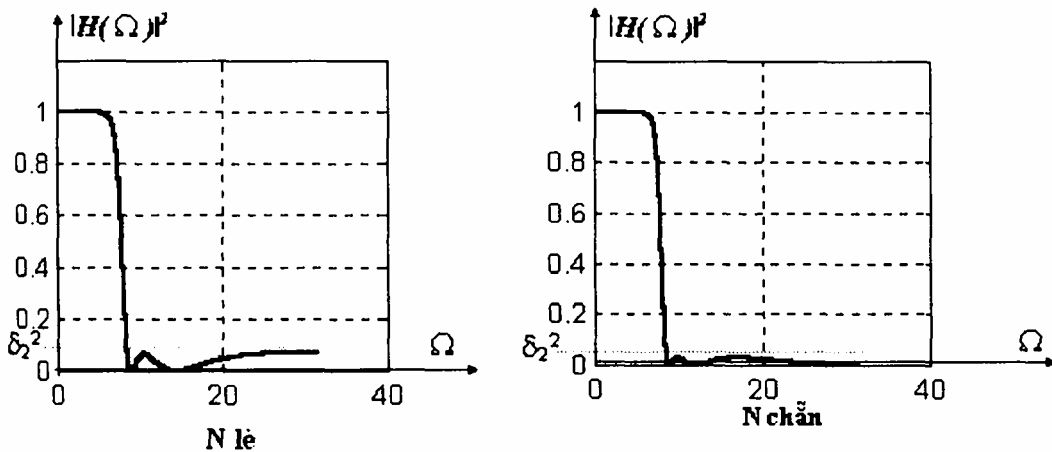
$$T_N(1) = 1, \Rightarrow 1 - \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Leftrightarrow e^2 = \frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \quad (1.193)$$

Trong đó, δ_1 là giá trị của độ gợn dải thông.

Bộ lọc Chebyshev loại 2 có cả zero lẫn cực. Đáp ứng biên độ bình phương là :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_S / \Omega_C) / T_N^2(\Omega_S / \Omega)]} \quad (1.194)$$

trong đó là đa thức Chebyshev bậc N và G là tần số cạnh dải chặn như được minh họa ở hình sau :



Hình 1.35. Đặc tuyến tần số của bộ lọc hebyshev loại 1

Ta thấy các bộ lọc Chebyshev được đặc trưng bởi các thông số N và ε và tỉ số Ω , với một tập đặc tính kỹ thuật ε và Ω ta có thể xác định được bậc của bộ lọc từ biểu thức:

$$N = \frac{\log_{10} \left[(\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\varepsilon^2)}) / \varepsilon \delta_2 \right]}{\log_{10} \left[(\Omega_S / \Omega_C + \sqrt{(\Omega_S / \Omega_C)^2 - 1}) \right]} \quad (1.195)$$

Nói chung, với cùng các chỉ tiêu kỹ thuật, bộ lọc Chebyshev có ít cực hơn (bậc thấp hơn) bộ lọc Butterworth. Nếu ta so sánh bộ lọc Butterworth với bộ lọc Chebyshev có cùng số cực, cùng dải thông và dải chặn thì bộ lọc Chebyshev có dải quá độ hẹp hơn.

1.3.3. CHUYỂN ĐỔI TẦN SỐ

1.3.3.1. Chuyển đổi tần số trong miền tương tự

Giả sử ta có một bộ lọc hạ thông với tần số cắt góc và ta muốn chuyển bộ lọc này thành một bộ lọc hạ thông khác có tần số cắt sắc. Sự chuyển đổi này được thực hiện bằng

phép biến đổi sau :

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c \cdot \Omega_c}{s} \text{ (Thông thấp thành thông thấp) (1.196)}$$

Hàm hệ thống của bộ lọc hạ thông này là : $H_1(s) = H_p(\Omega_c \cdot \Omega_c/s)$, với $H_p(s)$ là bộ lọc ban đầu có tần số cắt là WC.

Phép biến đổi để chuyển một bộ lọc thông thấp tương tự có tần số cắt ác thành một bộ lọc thông dải có tần số cắt dưới và tần số cắt trên có thể được thực hiện bằng cách sau: Trước tiên ta chuyển một bộ lọc thông thấp thành một bộ lọc thông thấp khác có tần số cắt $\Omega_c = 1$ và sau đó thực hiện phép biến đổi:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \text{ (Thông thấp thành thông dải) (1.197)}$$

Khi đó hàm hệ thống của bộ lọc dải thông là : $H_b(s) = H_p \left(\Omega_c \cdot \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \right)$. Để chuyển từ một bộ lọc thông thấp tương tự có tần số cắt Ω_c thành bộ lọc dải chặn, ta thực hiện phép biến đổi :

$$s \rightarrow \Omega_c \cdot \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \cdot \Omega_l} \text{ (thông thấp thành dải chặn). (1.198)}$$

$$\text{Hàm hệ thống của bộ lọc dải chặn : } H_{bs}(s) = \left(\Omega_c \cdot \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \cdot \Omega_u} \right).$$

Ví dụ 1.19. Chuyển bộ lọc thông thấp đơn cực Butterworth có hàm hệ thống $H(s)$: - thành một bộ lọc dải thông có tần số cắt trên Ω_u và tần số cắt dưới Ω_l .

Giải:

$$\text{Sử dụng phép biến đổi } s \rightarrow \Omega_c \cdot \frac{s^2 + \Omega_l \cdot \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)} \Rightarrow H(s) = \frac{(\Omega_u - \Omega_l) \cdot s}{s^2 + (\Omega_u - \Omega_l) \cdot s + \Omega_l \cdot \Omega_u}$$

Bộ lọc thông dải có một zero tại $s = 0$, và hai cực tại :

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-(\Omega_u - \Omega_l) \pm \sqrt{(\Omega_u - \Omega_l)^2 - 4\Omega_l \cdot \Omega_u} \right].$$

1.3.3.2. Chuyển đổi

Giống như trong miền tương tự, phép chuyển đổi tần số có thể được thực hiện trên một bộ lọc thông thấp số và chuyển nó thành một bộ lọc thông dải, dải chặn hay thông cao. Sự chuyển đổi này liên quan đến việc thay biến bằng một hàm hữu tỉ z^{-1} thỏa hai tính chất sau :

(1) Phép ánh xạ $z^{-1} \rightarrow z^{-1}$ phải ánh xạ các điểm bên trong vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z vào chính nó.

(2) Vòng tròn đơn vị cũng phải được ánh xạ vào chính nó.

Từ điều kiện (2) ta thấy khi $r=1$ thì $e^{j\omega} = g(e^{j\omega}) \equiv g(\omega) = |g(\omega)e^{j\arg g(\omega)}|$, rõ ràng ta phải có $|g(\omega)| = 1$.

Tức là phép ánh xạ phải là ánh xạ thông tắt (all_pass). Nghĩa là:

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k^* z^{-1}} \quad (1.199)$$

trong đó $|\alpha_k| < 1$ đảm bảo rằng một bộ lọc ổn định sẽ được chuyển thành một bộ lọc khác cũng ổn định (tức thỏa điều kiện 1).

Sau đây là các phép biến đổi để chuyển một bộ lọc hạ thông số có tần số cắt ω_c thành các bộ lọc khác (hạ thông, thượng thông, dải thông và dải chặn).

Thông thấp $\rightarrow$ thông thấp :

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha^* z^{-1}}, \text{ với } \alpha = \frac{\sin[(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\sin[(\omega_c + \omega'_c)/2]}, \omega'_c \text{ là tần số của bộ lọc mới.}$$

Thông thấp $\rightarrow$ thông cao :

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha^* z^{-1}}, \text{ với } \alpha = \frac{-\cos[(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\cos[(\omega_c + \omega'_c)/2]}, \omega'_c \text{ là tần số của bộ lọc mới.}$$

Thông thấp $\rightarrow$ thông dải :

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}, \quad \alpha_1 = -2\alpha k / (k+1), \quad \alpha_2 = (k-1)/(k+1),$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_l + \omega_u)/2]}{\cos[(\omega_n - \omega_l)/2]}, \quad k = \cos\left(\frac{\omega_n - \omega_l}{2}\right) \tan \frac{\omega_c}{2}$$

và ω_l, ω_u tương ứng là tần số cắt thấp và tần số cắt cao.

Thông thấp $\rightarrow$ Chặn dải :

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}, \quad \alpha_1 = \frac{-2\alpha k}{k+1}, \quad \alpha_2 = \frac{1-k}{1+k}$$

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_l + \omega_u)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}, \quad k = \tan\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right) \tan \frac{\omega_c}{2}$$

Ví dụ 1.20 :

Chuyển bộ lọc hạ thông đơn cực Butterworth có hàm hệ thống:

$$H(z) = \frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}} \text{ . thành một bộ lọc thông dải có tần số cắt dưới và tần số cắt}$$

trên tương ứng là bộ lọc thông thấp có dải tần 3-dB với tần số cắt là.

Giải :

Áp dụng công thức biến đổi từ bộ lọc thông thấp sang bộ lọc thông dài:

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1} \Rightarrow H(z) = \frac{0.245(1 - \alpha_2)(1 - z^{-2})}{(1 + 0.509\alpha_2) - 1.509\alpha_1 z^{-1} + (\alpha_2 + 0.509)z^{-2}}$$

Bộ lọc dải thông có các zero tại và một cặp cực tùy thuộc vào việc chọn. Giả sử

$$\omega_l = \frac{2\pi}{5}, \omega_u = \frac{3\pi}{5}, \omega_c = 0.2\pi \Rightarrow k = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \text{ Ta được :}$$

$$H(z) = \frac{0.245(1 - z^{-2})}{1 + 0.592z^{-2}} \text{ có các cực } z = \pm j0.71 \text{ và cộng hưởng ở tần số } \omega = \frac{\pi}{2}.$$

CHƯƠNG II

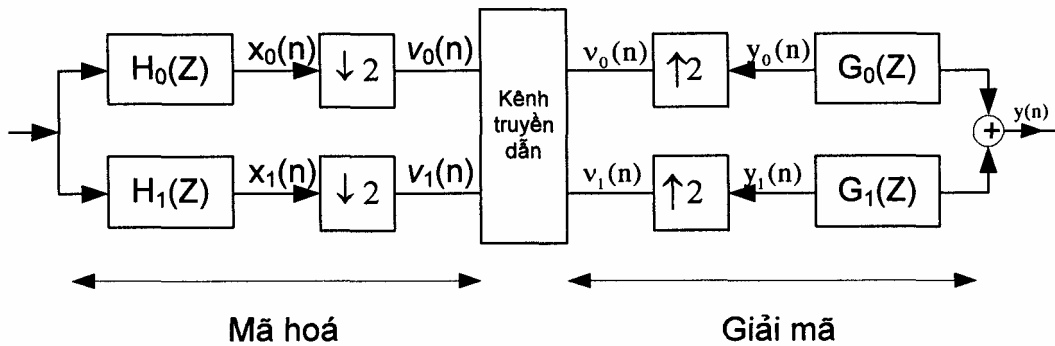
MÃ HOÁ BĂNG CON VÀ LÝ THUYẾT WAVELET

2.1. MÃ HOÁ BĂNG CON (SUBBAND CODING)

2.1.1. Cấu trúc.

Trong các phần trên chúng ta đã nghiên cứu các băng lọc số nhiều nhịp.

Một ứng dụng rất quan trọng của băng lọc số nhiều nhịp là dùng mã hóa băng con và giải mã băng con. Đơn giản nhất là dùng băng lọc số 2 kênh để mã hoá làm 2 băng con được minh hoạ trên hình 2.1 sau đây:



Hình 2.1

Mã hoá băng con rất thuận lợi cho việc nén tín hiệu tiếng nói bởi vì với tín hiệu tiếng nói thông thường năng lượng của phổ tín hiệu phân bố không đều. Năng lượng của phổ tiếng nói chủ yếu tập trung ở miền tần số thấp, còn ở miền tần số cao năng lượng phổ tiếng nói rất nhỏ. Vậy sau khi qua băng lọc số QMF trên hình 2.1 ta có hai tín hiệu băng con: $X_0(e^{j\omega})$ là phổ tần số thấp sẽ có năng lượng lớn do đó ta mã hoá tín hiệu băng con $x_0(n)$ với số ít, còn $X_1(e^{j\omega})$ là phổ tần số cao có năng lượng nhỏ do đó ta mã hoá tín hiệu băng con $x_1(n)$ với bít ít hơn.

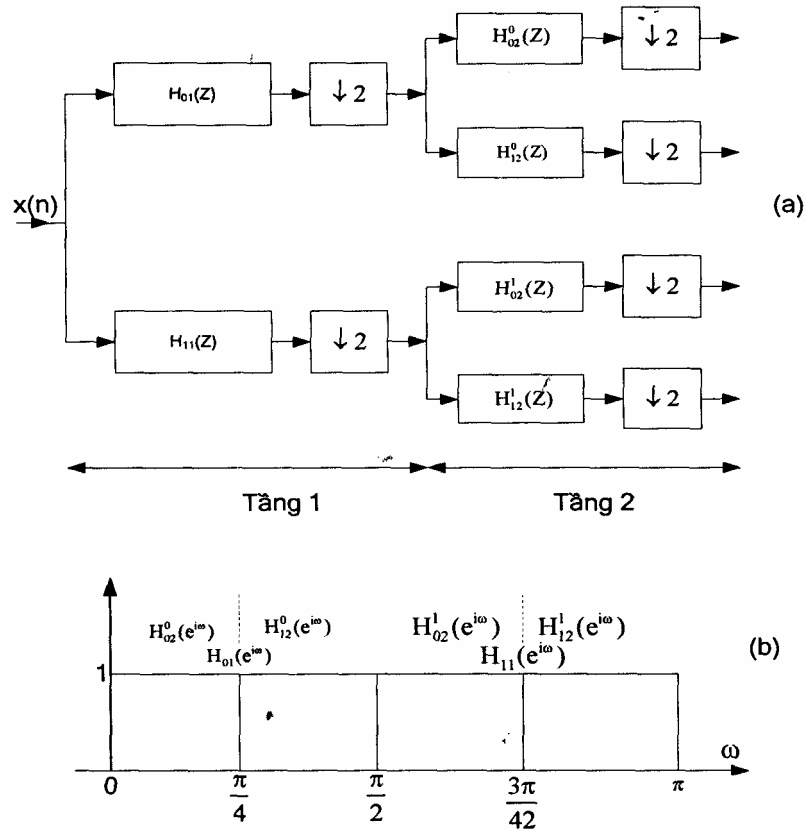
Vậy tính tổng cộng số bít để mã hoá tín hiệu xâu có phổ là $X(e^{j\omega})$ sẽ nhỏ hơn so với khi ta mã hoá cho toàn bộ dải phổ của $X(e^{j\omega})$.

Nói chung các tín hiệu trọng thực tế có phân bố phổ năng lượng là không đều nhau vì vậy mã hoá băng con rất thuận lợi cho việc nén tín hiệu.

2.1.2. Cấu trúc dạng cây đơn phân giải (Uniform Reslution)

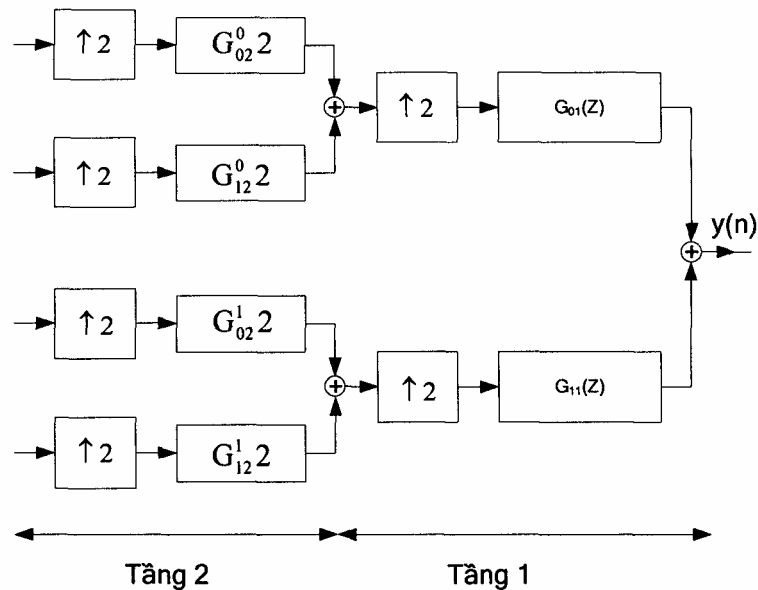
Vì năng lượng phổ tín hiệu thường phân bố rất không đồng đều trên toàn bộ dải tần số, do đó để mã hoá băng con hiệu quả cao chúng ta sẽ mã hoá làm nhiều tầng. Tầng thứ nhất chia làm hai băng con đều nhau (mỗi băng rộng là $\frac{\pi}{2}$), đến tầng thứ hai lại phân hai băng con của tầng thứ nhất thành các băng con có bề rộng bằng nửa tầng thứ nhất

(mỗi băng có bề rộng là $\frac{\pi}{4}$) cứ tiếp tục như vậy chúng ta sẽ dải phổ của tín hiệu thành rất nhiều dải và sau khi ra khỏi bank lọc phân tích bề rộng phổ của mỗi tín hiệu băng con là bằng nhau do đó ta gọi là đơn phân giải. Hình 2.2 cho ta thấy cấu trúc dạng cây đơn phân giải của bank lọc phân tích 4 kênh (hình a) và đồ thị tần số để giải thích đáp ứng tần số của bộ lọc có trong bank lọc số 4 kênh (hình b).



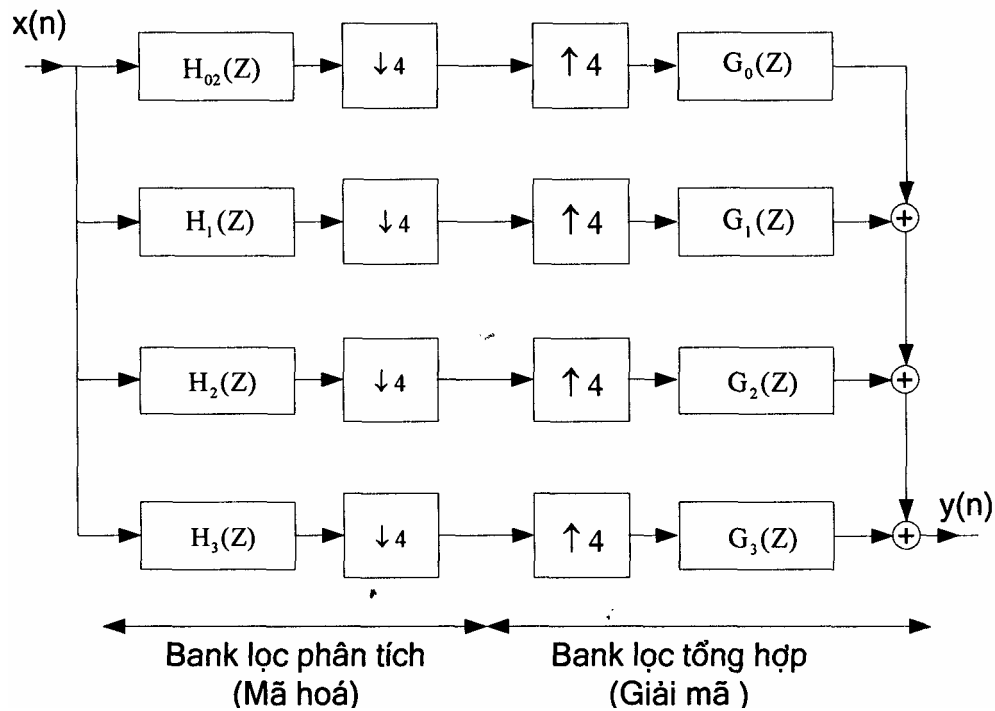
Hình 2.2

Hình 2.3 cho ta cấu trúc dạng cây đơn phân giải của bank lọc số tổng hợp 4 kênh:



Hình 2.3

Từ hình 2.2 (a) và hình 2.3 ta có cấu trúc tương đương cau banh lọc số 4 kênh phân tích và tổng hợp như trên hình 2.4.

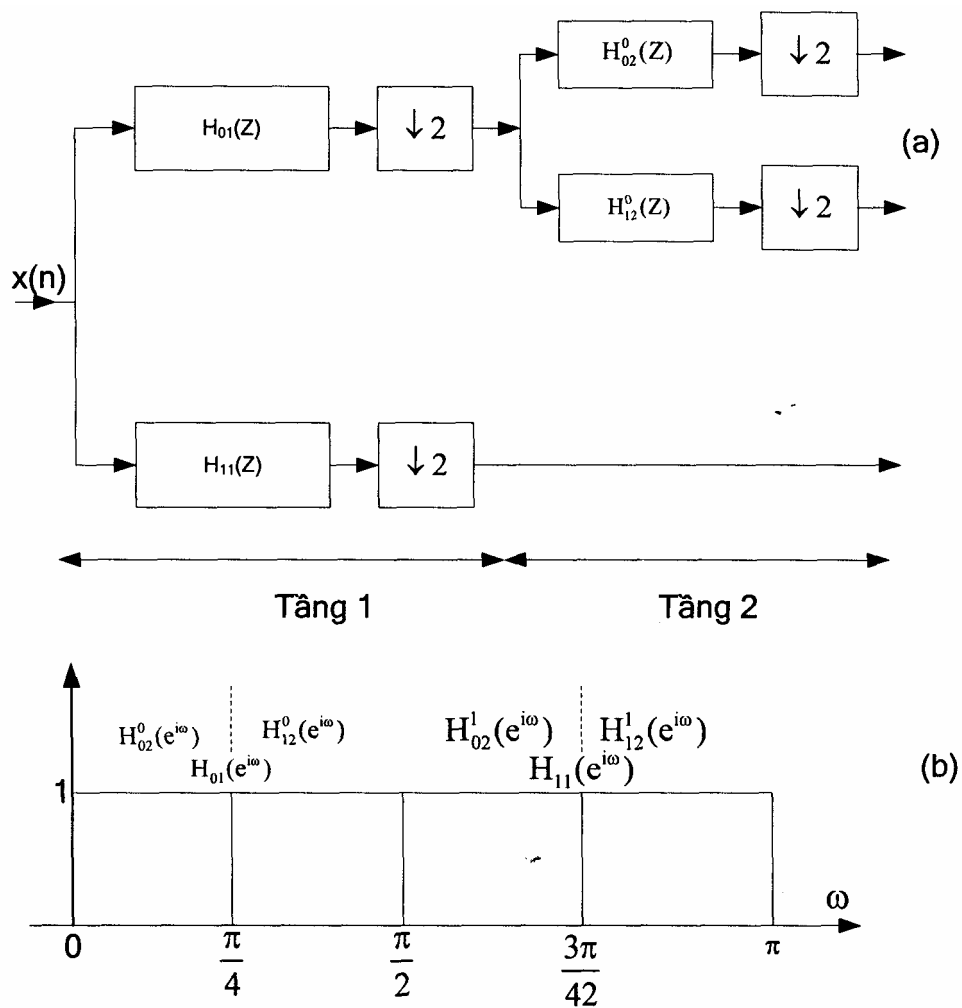


Hình 2.4

2.1.3. Cấu trúc dạng cây đa phân giải (Multiresolution)

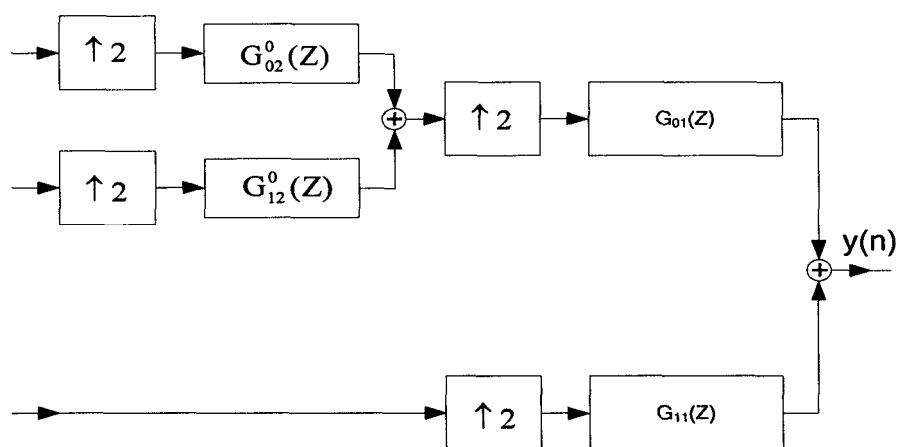
Cấu trúc dạng cây đa phân giải được dùng trong trường hợp chúng ta phân hiệu thành các tín hiệu băng con có bề rộng phổ không bằng nhau, vì vậy ta gọi là đa phân giải.

Hình 2.5 sẽ cho chúng ta cấu trúc dạng cây đa phân giải của banh lọc số phân tích 2 tầng (hình a) và đồ thị tần số giải thích đáp ứng tần số của các bộ lọc số có trong banh lọc số phân tích 2 tầng này.



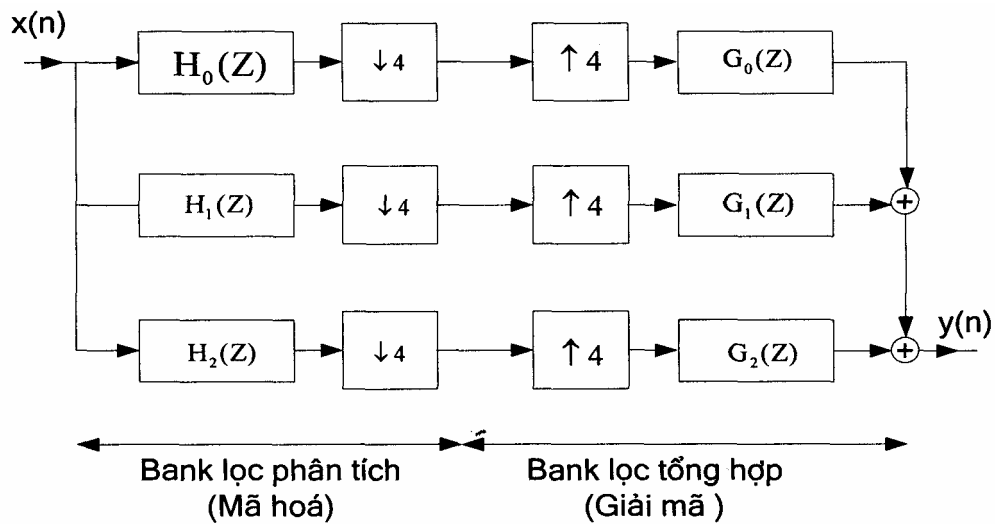
Hình 2.5

Cấu trúc dạng cây đa phân giải của banh lọc số tổng hợp 2 tầng được minh hoạ trên hình 2.6



Hình 2.6

Kết hợp hình 2.5(a) với hình 2.6 ta sẽ suy ra cấu trúc tương đương của banh lọc số 2 tầng phân tích và tổng hợp được minh hoạ trên hình 2.7



Hình 2.7. Cấu trúc tương đương của bank lọc số 2 tầng phân tích và tổng hợp

2.2. WAVELET VÀ MỤC ĐÍCH CỦA PHÂN TÍCH WAVELET

Biến đổi wavelet thực chất là một sự biểu diễn tín hiệu thành các băng tần Octave, nó dựa trên cơ sở của các bank lọc số và mã hoá băng con. Để hiểu rõ hơn về wavelet, chúng ta sẽ xét qua một số biến đổi truyền thống biểu diễn tín hiệu trong miền tần số và miền thời gian - tần số.

2.2.1. Biến đổi Fourier.

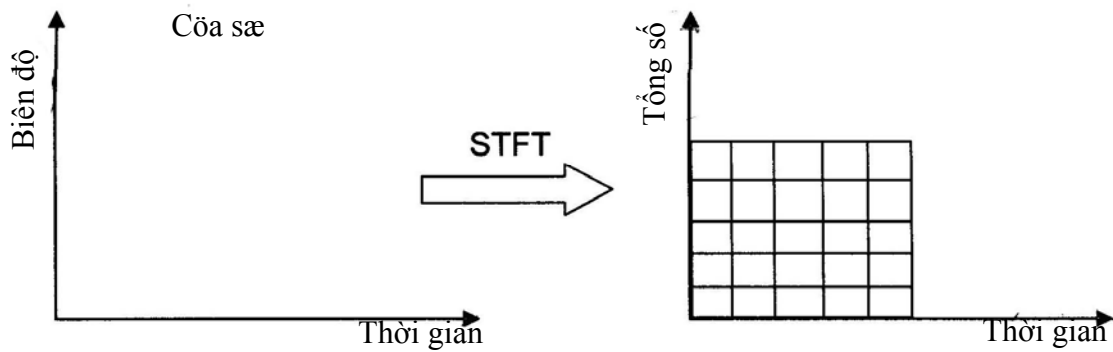
Ta biết biến đổi Fourier truyền thống phân tích tín hiệu thành những đường sin liên tục ở các tần số khác nhau. Về mặt toán học, biến đổi này chuyển việc bảo dưỡng tín hiệu ở miền thời gian sang miền tần số.

Đối với nhiều tín hiệu, phân tích Fourier rất có lợi do nội dung tần số của tín hiệu đóng vai trò rất quan trọng. Nhưng phân tích Fourier cũng có một hạn chế rất lớn là khi chuyển sang miền tần số thì thông tin thời gian bị mất đi. Nhìn vào biến đổi Fourier của một tín hiệu ta không thể xác định thời điểm xảy ra một sự kiện nào đó. Nếu tính chất của tín hiệu không thay đổi theo thời gian hay tín hiệu là ánh thì hạn chế này không quan trọng. Tuy nhiên, hầu hết các tín hiệu đều có những đặc tính động hay nhất thời, chớp nhoáng như là sự dịch chuyển, tạo các xu hướng khác nhau, những thay đổi đột ngột từ các thời điểm bắt đầu đến kết thúc của các sự kiện.

Những đặc tính này thường là phần quan trọng nhất của tín hiệu và phân tích Fourier rõ ràng là không thích hợp để phát hiện chúng.

2.2.2. Biến đổi Fourier thời gian ngắn (STFT)

Để khắc phục nhược điểm trên, Dennis Gabor (1946) đã sử dụng biến đổi Fourier để phân tích một vùng nhỏ của tín hiệu tại một thời điểm và gọi là kỹ thuật lấy cửa sổ tín hiệu. Đây chính là biến đổi Fourier thời gian ngắn, thực hiện ánh xạ một tín hiệu thành một hàm hai chiều thời gian - tần số



Hình 2.8. Biến đổi Fourier thời gian ngắn

STFT sử dụng các hàm cơ sở là những hàm mũ phức đã lấy cửa sổ và các hàm dịch của chúng để tạo nên biến đổi. Để có được biến đổi Fourier cục bộ, ta thực hiện như sau trước tiên, tín hiệu được nhân với một hàm cửa sổ $\omega(t - \tau)$ và sau đó thực hiện biến đổi Fourier. Kết quả tạo ra một biến đổi hai chiều STFT (ω, τ) .

$$\text{STFT}(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^*(t - \tau) \cdot f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Các tính chất của STFT

- Biến đổi này đo lường sự giống nhau giữa tín hiệu với hàm cửa sổ ban đầu đã được dịch đi và điều chế, vậy biểu thức (2.1) có thể được viết lại.

$$\text{STFT}(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^*(t - \tau) \cdot f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \langle (t), f(t) \rangle \quad (2.1)$$

Trong đó: $g_{lt} = \omega(t - \tau) \cdot e^{j\omega t}$

- Ảnh phổ là sự phân bố năng lượng và liên quan đến STFT.

$$S(\omega, \tau) = |\text{STFT}((\omega, \tau))|^2 \quad (2.2)$$

Do STFT có thể được xem như là một bánh lọc với các đáp ứng xung $g_{\omega, \tau}(-t) = \omega(-t - \tau)e^{j\omega t}$, nên ảnh phổ là bình phương biên độ của các đầu ra bộ lọc

- Hàm $f(t)$ có thể khôi phục lại được theo công thức sau:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}(\omega, \tau) \cdot g_{\omega, \tau}(t) \omega d\tau$$

- STFT cũng có tính chất bảo toàn năng lượng

Để có được sự phân giải thời gian - tần số tốt, ta sử dụng cửa sổ Gaussian và khi đó STFT được gọi là biến đổi Gabor. STFT được sử dụng để tạo ra giản đồ phổ trong phân tích thoại và cửa sổ hay được dùng là cửa sổ Hamming vì nó yêu cầu tính toán ít hơn so với cửa sổ Gaussian.

2.2.3. Biến đổi khối (Block Transform)

Trong một vài ứng dụng và mã hoá biến đổi, tín hiệu được phân tích thành các khối gần kề không chồng sát lên nhau. Sau đó áp dụng mã hoá biến đổi trên mỗi khối độc lập. Để thực hiện biến đổi ta dùng một hàm cửa sổ nhân với tín hiệu là một hàm chỉ thị trong khoảng $[nT, (n+1)T]$, chu kỳ hoá mỗi tín hiệu đã lấy cửa sổ với chu kỳ T và áp dụng khai triển như chuỗi Fourier trên mỗi tín hiệu đã lấy chu kỳ.

Việc xử lý các khối một cách độc lập gây nên kết quả không mong muốn gọi là hiệu ứng *blocking*. Hiệu ứng blocking xuất hiện do các mẫu cuối cùng của một khối hầu như không phù hợp với các mẫu đầu tiên của khối tiếp theo. Điều này có thể hiểu là do việc phân đoạn tùy ý tại các điểm ni và dẫn đến vấn đề đường biên giả tạo. Tuy nhiên cũng có những biến đổi được sử dụng dựa trên tính toán đơn giản hoá này. Ví dụ, biến đổi Karhunen - Loeve và phép tính xấp xỉ của nó là một trong các biến đổi khối được sử dụng phổ biến cho các tín hiệu rời rạc theo thời gian.

Để hạn chế hiệu ứng blocking, các nhà nghiên cứu đã đưa ra phép biến đổi trực giao xếp chồng LOT. Các hàm cơ sở được sử dụng trong biến đổi

LOT dài hơn chiều dài biến đổi và có sự chuyển tiếp xung quanh giá trị không ở cuối mỗi khối trơn hơn. Như vậy, những hàm cơ sở của một khối sẽ xếp chồng với các hàm cơ sở qua các khối gần kề. Ban đầu các hàm cơ sở được chọn có chiều dài gấp đôi chiều dài các khối, khi đó biến đổi LOT của một khối tín hiệu x được tính bằng:

$$X = P^T X$$

Trong đó x là khối mở rộng có $2N$ mẫu, P là ma trận LOT ($2N \times N$) Để thoả mãn yêu cầu khôi phục hoàn hảo (PR) của hệ thống, ma trận P phải thoả mãn các quan hệ.

$$P^T \cdot P = I \text{ và } P^T \cdot W \cdot P = 0$$

Trong đó I là ma trận đơn vị, W là toán tử dịch có dạng:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Phân bố Wigner - Ville

Thay thế các khai triển tuyến tính tín hiệu là khai triển song tuyến tính và phân bố Wigner - Ville là một đặc trưng cho kiểu khai triển đó. Việc biểu diễn song tuyến tính thay thời gian - tần số bậc hai xuất phát từ ý tưởng về phổ công suất tức thời, ví dụ là ảnh

phổ. Ngoài ra phân bố thời gian - tần số $\text{TFD}_f(\omega, \tau)$ của một tín hiệu $f(t)$ có thể biến đổi Fourier $F(\omega)$ phải thoả mãn các tính chất đường biên.

Tích phân theo τ với co cho trước phải bằng $|F(\omega)|^2$ và tích phân theo ω với τ cho trước phải bằng $|F(\tau)|^2$

Phải thoả mãn tính bất biến dịch chuyển thời gian - tần số, nghĩa là nếu $g(t) = f(t - \tau_0) \cdot e^{j\omega\tau}$ thì $\text{TFD}_g(\omega, \tau) = \text{TFD}_f(\omega - \omega_0, \tau - \tau_0)$.

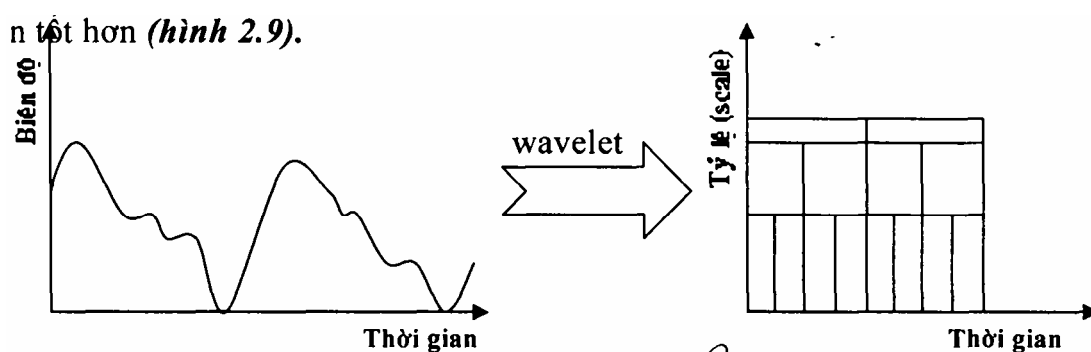
Phân bố Wigner - Ville phải thoả mãn những điều kiện trên và một số điều kiện khác. Phân bố Wigner - Ville cho một tín hiệu $f(t)$ được định nghĩa.

$$\text{WD}_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau - \frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) e^{j\omega t} dt$$

Đặc tính nổi bật của phân bố Wigner - Ville là khả năng nâng cao độ phân giải thời gian - tần số. Với các tín hiệu đơn thì phân bố này cho ra dãy năng lượng tập trung và rất rõ ràng trong mặt phẳng thời gian - tần số. Tuy nhiên ưu điểm này dẫn đến nhiều giao thoa đối với các tín hiệu nhiều thành phần. Mặc dù có thể loại bỏ các nhiễu này nhưng nó sẽ lại dẫn đến làm giảm sự phân giải.

2.2.5. Biến đổi Wavelet.

Phân tích Wavelet ưu việt hơn STFT ở chỗ nó cung cấp một kỹ thuật lấy cửa sổ với kích thước cửa sổ có thể thay đổi được. Phân tích wavelet cho phép sử dụng khoảng thời gian dài trên một đoạn tín hiệu mà chúng ta mong muốn có thông tin tần số thấp chính xác hơn. Và ngược lại sử dụng khoảng thời gian ngắn hơn ở nơi mà chúng ta muốn có thông tin tần số cao rõ ràng hơn. Nói cách khác, phân tích wavelet cung cấp khả năng định vị tần số và định vị thời



Hình 2.9

Có một điểm chú ý ở đây là phân tích Wavelet không ánh xạ tín hiệu sang miền thời gian - tần số mà thay vào đó là miền thời gian - tỷ lệ (time-scale).

2.3. KHÁI NIỆM VỀ WAVELET

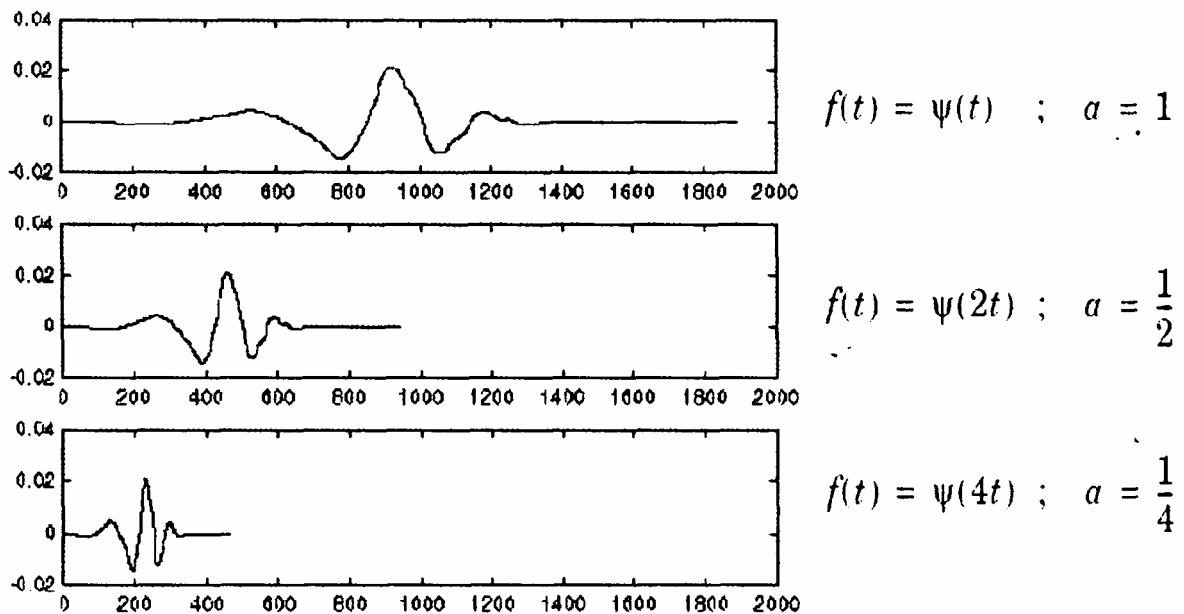
Wavelet là những hàm cơ sở $\psi_{mn}(t)$ liên tục theo thời gian. Cơ sở là tập các hàm độc lập tuyến tính dùng tạo ra hàm $f(t)$ nào đó:

$$f(t): \text{tổ hợp các hàm cơ sở} = \sum_{m,n} b_{mn} \psi_{mn}(t)$$

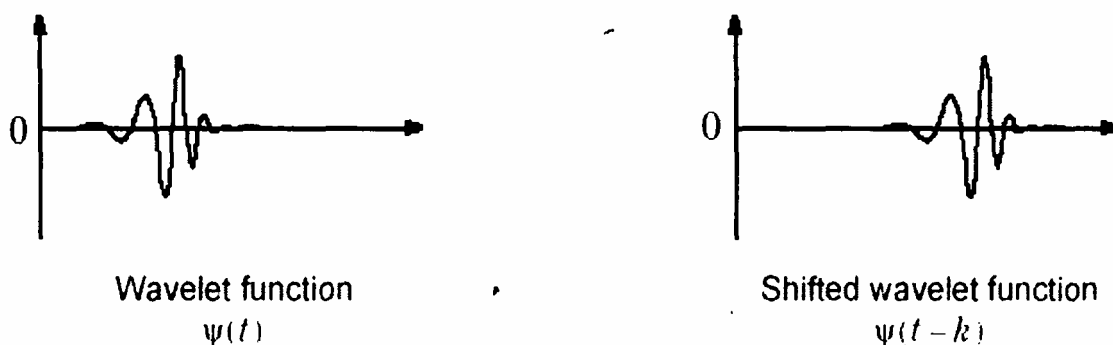
(2.3)

Tính chất đặc biệt của cơ sở wavelet là tất cả các hàm $\psi_{mn}(t)$ này được xây dựng từ một wavelet mẹ $\psi(t)$. Wavelet này là một sóng nhỏ được định vị, thay vì dao động mãi mãi, nó suy giảm nhanh xuống không. Thông thường nó bắt đầu thời điểm $t = 0$ và kết thúc tại $t = N$.

Wavelet dịch $\psi_{0n}(t)$ bắt đầu tại $t = n$ và kết thúc tại $t: n + N$, đồ thị của chúng được dịch sang phải n lần. Wavelet tỷ lệ $\psi_{0n}(t)$ bắt đầu tại $t = 0$ và kết thúc tại $t = N.2^m$, đồ thị của chúng được nén lại 2^m lần.



Mức phân tích với hệ số $a < 1$ tương ứng với tần số cao tần số sóng mẹ



Hình 2.10

Một wavelet thuần $\psi_{mn}(t)$ được nén lại 2^m lần và dịch n lần

$$\psi_{mn}(t) = \psi(2^m t - n)$$

Một thuộc tính nổi bật của wavelet là tính trực giao (orthogonality). Các wavelet trực giao khi tích vô hướng của chúng bằng không.

$$\int_{-m}^n \psi_{mn}(t)\psi_{MN}(t)dt = \text{tích vô hướng của } \psi_{mn} \text{ và } \psi_{MN}(t) = 0$$

Nhờ đó, có thể tính được hệ số bình một cách đơn giản hơn: nhân $f(t)$ trong biểu thức (4.3) với $\psi_{MN}(t)$ và lấy tích phân ta được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{MN}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_{MN}(t))^2 dt$$

(2.4)

Nhờ tính trực giao, biểu thức (4.4) loại bỏ tất chuyển các tích phân ** với ψ_{MN} trừ trường hợp $m = M$ và $n = N$, tương ứng sẽ tạo ra thành phần $(\psi_{MN}(t))^2$. Khi đó b_{MN} là tỷ số của hai tích phân trong biểu thức (2.4).

2.4. XÂY DỰNG WAVELET BẰNG PHÂN TÍCH ĐA PHÂN GIẢI

Hầu hết các kỹ thuật phân tích ngày nay đều mong muốn tìm ra phương pháp để phân tích các hàm tùy ý thành tổng của những hàm riêng có đầy đủ các ưu điểm của phân tích Fourier và phân tích Haar. Mỗi phân tích này đều có những hạn chế.

- Các hàm cơ sở của phân tích Fourier có tính định vị tần số, nhưng không định vị chính xác theo thời gian.

- Ngược lại các hàm cơ sở của phân tích Haar thì định vị hoàn hảo theo không gian nhưng không định vị theo tần số.

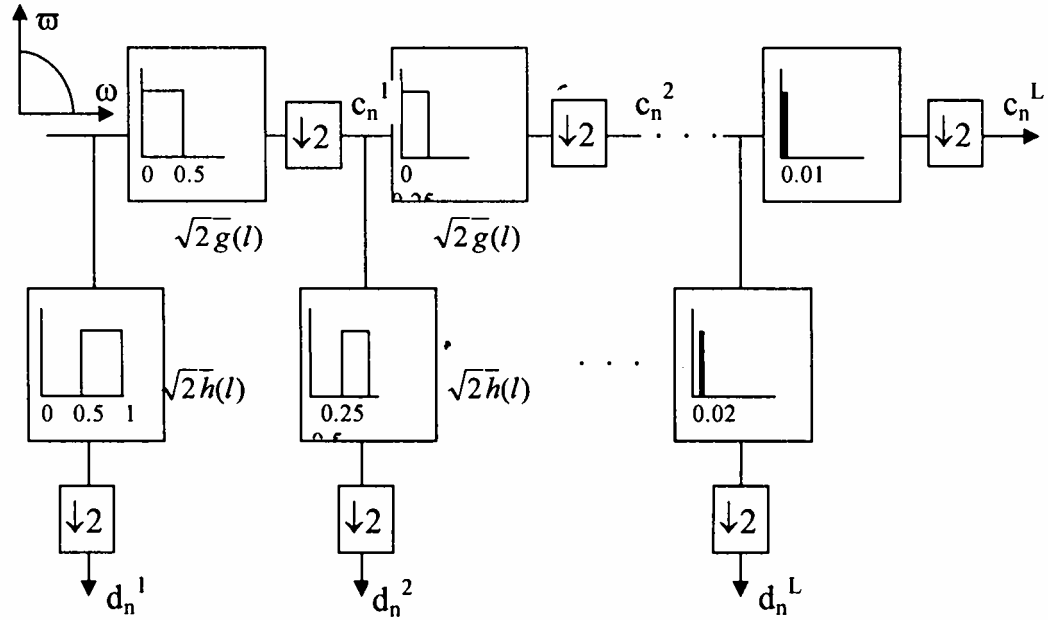
Biến đổi wavelet ưu việt ở chỗ nó tạo ra một lớp trực giao mở rộng của các hàm trong $L_2(R)$ với các tính chất đều, xấp xỉ và định vị tốt theo thời gian và tần số. Trong khi đó, STFT không đáp ứng được một hệ thống trực chuẩn hoàn hảo của các hàm định vị trong R . Chúng ta sẽ làm rõ đặc điểm này ở phần dưới đây.

2.4.1. Phân tích đa phân giải (MRA)

Kỹ thuật phân tích đa phân giải cũng giống như hoạt động phân tích bằng con và mã hoá. Để mã hoá một cách hiệu quả tín hiệu được phân chia thành tập hợp các băng con. Khi đó số lượng bit/pixel để mã hoá các thành phần tần số thấp sẽ nhiều hơn đối với các thành phần tần số cao, điều này sẽ dẫn đến số lượng bit tổng cộng dùng để mã hoá tín hiệu sẽ giảm xuống.

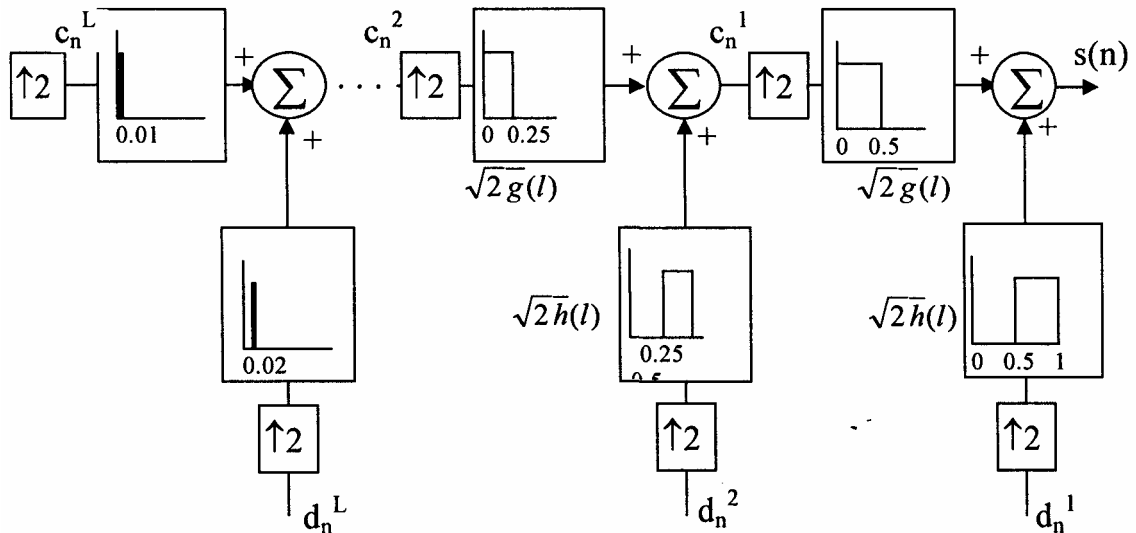
Tín hiệu cho trước sẽ được biểu diễn dưới dạng một xấp xỉ trung bình (phần thô) cộng với các chi tiết (phần mịn) hay còn gọi là sai số dự đoán bằng hiệu số giữa tín hiệu gốc với phần dự đoán dựa trên phần thô. Các không gian xấp xỉ và không gian chi tiết trực giao. Khi áp dụng các phép xấp xỉ liên tiếp đệ quy, ta sẽ thấy không gian của các tín hiệu vào $L_2(R)$ có thể được bao bởi các không gian chi tiết liên tiếp ở tất cả các mức phân giải. Lý do là khi cấp phân giải chi tiết tăng tới vô cùng, sai số xấp xỉ (phần thô) sẽ tiến tới giá trị không.

Trong hình 2.11, dãy tín hiệu vào sao với $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ được giới hạn bằng từ 0 đến 1. Hệ thống có sơ đồ như trên chỉ sử dụng các bộ lọc thông thấp $\bar{g}(l)$, các bộ lọc thông cao $\bar{h}(l)$ và các bộ phân chia (decimation) thực hiện phép phân tích sau thành các thành phần chi tiết $d_n^1, \dots, d_n^L$ (phần mịn) và có đại diện cho phần thô nhất khi $L \rightarrow \infty$ thì có thể xin như thành phần một chiều.



Hình 2.11. Sơ đồ phân tích đa phân giải

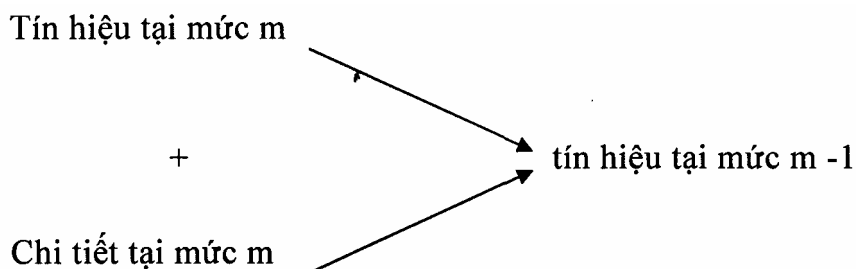
Bộ thu có thể khôi phục tín hiệu gốc $s(n)$ ở đầu bên kia từ các thành phần bằng con theo sơ đồ trên hình 2.12. Sau bộ nội suy là các bộ lọc thông dải hay thông thấp để loại bỏ thành phần hư danh (aliasing).



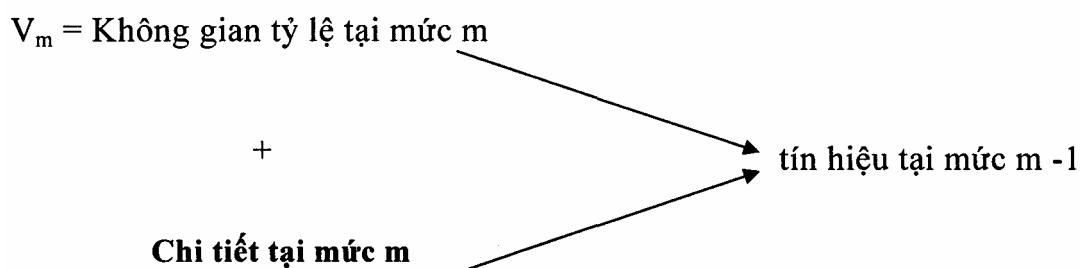
Hình 2.12. Khôi phục giải

Trong cấu trúc trên, tại mỗi mức phân giải m của tín hiệu thì bước thời gian tại mức đó là 2^m . Các hàm tỷ lệ $\Psi(2^m t - n)$ là một cơ sở cho tập các tín hiệu dùng để biểu diễn lại

thành phần trung bình. Các chi tiết tại mức m được biểu diễn lại bởi các wavelet $\Psi(2^m t - n)$. Khi đó tín hiệu trung bình kết hợp với các chi tiết tại mức j để cho ra tín hiệu tại mức $m - 1$. Các giá trị trung bình thu được từ các hàm tỷ lệ và các chi tiết thu được từ các wavelet. Cấu trúc đa phân giải cho một tín hiệu như sau;



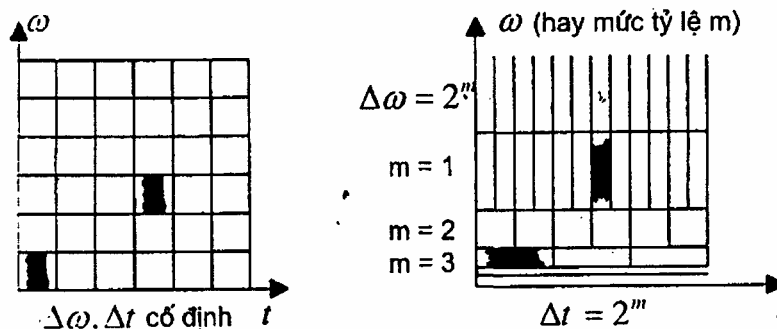
Khi chúng ta áp dụng cấu trúc này cho tất cả các tín hiệu thì ta có được độ phân giải cho không gian các hàm:



Cấu trúc đa phân giải là một cơ sở tất yếu cho phân tích tỷ lệ phân giải khác nhau hơn các tần số khác nhau. Mặt phẳng thời gian - tỷ lệ đặc trưng cho các Wavelet mặt phẳng thời gian - tần số đặc trưng cho các bộ lọc. Đa phân giải tần số thành các băng octave (quãng tám), từ ω đến 2ω , thay cho các băng đều từ ω đến $\omega + \Delta\omega$.

Đồ thị được nén lại khi $f(t)$ được thay bởi $f(2t)$, nghĩa là biến đổi F của nó thay đổi từ $F(\omega)$ đến $\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Giá trị tần số được dịch lên trên một octave khi giá trị thời gian được chia 2. Khi đó mặt phẳng tần số - thời gian được phân chia lại thành các ô chữ nhật.

Sự kết hợp hài hoà giữa khoảng cách thời gian dài với tần số thấp và khoảng thời gian ngắn với tần số cao xảy ra một cách tự nhiên trong wavelet. Đó là một trong những điểm hấp dẫn của phân tích wavelet.



Hình 2.13: Các ô vuông cố định trong mặt phẳng thời gian - tần số trong phân tích Fourier trở thành các ô chữ nhật trong phân tích wavelet.

2.4.2. Các tiền đề của phân tích đa phân giải (MRA)

Kỹ thuật phân giải trực giao phân tích một tín hiệu sai lệch các thành phần tỷ lệ tần số khác nhau 2^m (với m nguyên). Tương ứng với mỗi tỷ lệ (dải tần) là một khoảng không gian con V_m , $m \in \mathbb{Z}$, các không gian con này là các hàm thời gian thỏa mãn các tiền đề sau:

1. Tính bao hàm (containment)

Kết hợp với tính toàn vẹn (completeness) và tính rỗng (emptiness)

$$V_m \subset V_{m-1} \quad (2.5)$$

$$\overline{U_m V_m} = L_2(\mathbb{R}) \quad (2.6)$$

$$\bigcap_m V_m = \{0\} \quad (2.7)$$

Mỗi không gian con tỷ lệ V_m được chứa trong không gian con kề cận V_{m-1} . Nghĩa là nếu một hàm ở trong không gian con đó thì nó cũng ở trong tất cả các không gian con mức cao hơn. Các không gian con này bắt đầu với không gian rỗng $\{0\}$ và khai triển theo tỷ lệ 2 để đạt tới không gian của tất cả các hàm khả tích bình phương $L_2(\mathbb{R})$.

Tính rỗng nghĩa là $\|f_m(t)\| \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow +\infty$ và tính toàn vẹn nghĩa là $f_m(t) \rightarrow f(t)$ khi $m \rightarrow -\infty$.

$$\{0\} \rightarrow \dots V_m \subset V_{m-1} \subset \dots \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \rightarrow L_2(\mathbb{R}).$$

Một hàm $f(t)$ nghĩa trong không gian toàn vẹn sẽ có một ảnh $f_m(t)$ trong mỗi không gian con V_m . Đây chính là chiếu của $f(t)$ lên không gian con V_m :

$$f_m(t) = \sum_{|k| \geq m} c_k e^{ikl}$$

Các hàm e^{ikl} trực giao nhau nên năng lượng trong $(f_m(t))$ bằng $\sum_{|k| \geq m} |c_k|^2$ một tổng trong miền tần số thấp trong miền tần số thấp $|k| \geq m$, và năng lượng trong $f(t) - f_m(t)$ bằng một tổng trên miền tần số cao $|k| < m$, nó sẽ bằng 0 khi $m \rightarrow \infty$. Vì vậy chuỗi V_m trọn vẹn trong toàn bộ không gian $L_2(\mathbb{R})$ tuần hoàn 2π .

Tiếp theo xác định họ không gian con thứ hai là không gian Wavelet W_m chứa chi tiết tại mức m : $\Delta f_m(t) = f_{m-1}(t) - f_m(t)$. Nếu xét về khía cạnh không gian thì:

$$V_m \oplus W_m = V_{m-1}$$

Khi trong đó mỗi hàm trong V_{m-1} là tổng của 2 thành phần trực giao $f_m(t)$ trong V_m

và W_m . Khai triển công thức cho đến giá trị tối đa $m = M$, ta có:

$$V_m \oplus W_m \oplus W_{M-1} \oplus \dots \oplus W_{m-1} \oplus W = V_{m-1}.$$

Và đối với hàm trong các không gian con đó, phương trình trở thành:

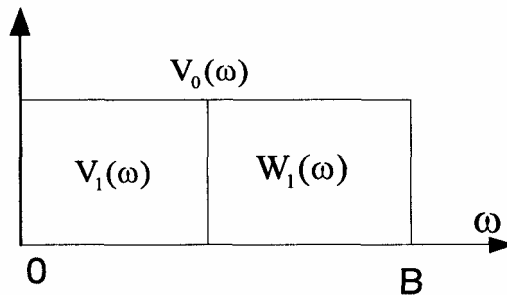
$$F_M(t) = \Delta F_M(t) - \Delta F_{M-1}(t) + \dots + \Delta F_m(t) = \Delta F_{m-1}(t)$$

Ta rút ra được nhận xét quan trọng:

- Không gian W_m là hiệu số giữa các không gian V_m
- Không gian V_m chính là tổng của các W_m .
- Từ tính trực giao của mỗi mảnh $f_m(t)$ với chi tiết $\Delta f_m(t)$ dẫn đến những không gian con này là trực giao nhau. Nếu W_m trực giao với V_m thì W_m sẽ tự động trực giao với tất cả V_k ($k > m$). Điều kiện toàn vẹn có thể được phát triển lại như sau:

$$V_m \oplus \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_m = L_2(R)$$

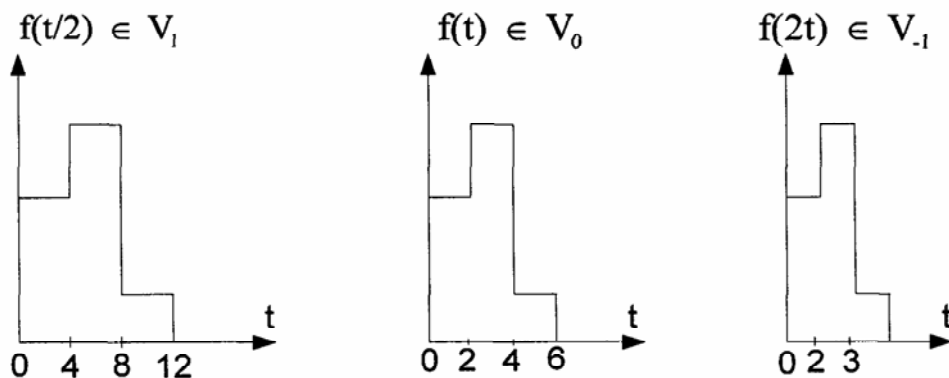
Tuy nhiên điều kiện trực giao là không cần thiết, Giả sử với một cơ sở không trực giao bình) thì ta vẫn có được không gian con V_{m-1} là tổng trực tiếp của V_m và W_m giao nhau tại véc tơ không và khi đó góc giữa các không gian nhỏ hơn 90° .



Hình 2.14: Phổ của các không gian con

2. Tính bất biến tỷ lệ

$$f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m-1} \quad 2.8$$



Hình 2.15: Tính bất biến tỷ lệ của hàm hằng từng mẫu $f(t)$

Nếu một hàm $f(t)$ nằm trong không gian con V_m thì $f(2t)$ nằm trong không gian V_{m-1} . Điều này xuất phát từ điều kiện giãn: V_{m-1} chứa tất cả các hàm tỷ lệ trong V_m . Đồ thị của $f(2t)$ thay đổi nhanh gấp 2 lần so với đồ thị của $f(t)$. Ví dụ minh họa điều kiện giãn của một hàm hằng mẫu $f(t)$ trên hình 2.15.

3. Tính bất biến dịch chuyển.

$$F(t) \in V_m \Leftrightarrow f(t-n) \in V_m$$

(2.9)

Là yêu cầu cơ bản về tính bất biến thời gian trong xử lý tín hiệu. Gọi $f(t)$ nằm trong V_1 thì $f(2t)$ và cả $f(2t-n)$ cũng nằm trong V_0 (với $n \in \mathbb{Z}$). Đây chính là tính bất biến dịch chuyển của các không gian con, nghĩa là các hàm trong các không gian con đó không thay đổi trên từng khoảng tịnh tiến. Nhờ sự dịch chuyển mà ta có thể làm việc trên toàn bộ trục thời gian $-\infty < t < +\infty$.

4. Sự tồn tại của các hàm tỷ lệ trực chuẩn

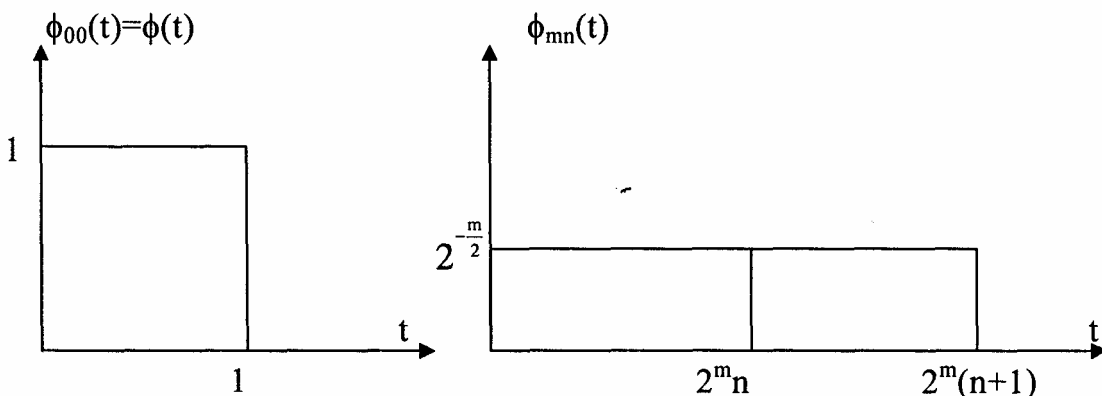
Yêu cầu tồn tại một hàm tỷ lệ $\phi(t) \in V_0$, nó thuộc tập

$$\left\{ \phi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^m t - n) \right\} \text{ n là số nguyên}$$

(2.10)

Là một hàm cơ sở trực chuẩn để bao không gian V_m . Ví dụ gọi V_m là không gian con của các hàm hằng từng mẫu, khi đó hàm tỷ lệ có dạng.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$



Hình 2.16. Các hàm cơ sở trực chuẩn

Từ đồ thị ta dễ dàng thấy hàm $\phi_{mn}(t)$ hình thành nên một cơ sở trực chuẩn trong không gian con V_m để cho $\int \phi_{mn}(t) \phi_{mk}(t) dt = \delta_{n-k}$

Do đó, bất kỳ một tín hiệu $f(t)$ nào trong không gian V_m cũng có thể biểu diễn

lại một cách chính xác như là một tổ hợp tuyến tính của $\phi_{mn}(t)$.

5. V_0 có một cơ sở ổn định (cơ sở Riesz)

Điều kiện 4 và 5 có thể hoán đổi cho nhau. Một cơ sở ổn định có thể được trực giao hoá trong một đoạn có sự dịch chuyển bất biến. Ta định nghĩa: ổn định = Riesz = độc lập đồng dạng. Thực tế, ta chọn một cơ sở thích hợp, trực giao hoặc không. Khi đó V_m có một cơ sở $\phi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - m)$ và $f_m(t) = \sum_{mn} a_{mn} \phi_{mn}(t)$.

Trong trường hợp trực giao năng lượng của mảnh này là:

$$\|f_m\|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_m|^2$$

Nhận xét

- Nếu chúng ta ký hiệu $\text{Proj}_{V_m}[f(t)]$ là hình chiếu trực giao của $f(t)$ lên V_m thì (4.6) có thể được phát biểu lại như sau: $\lim_{n \rightarrow -\infty} \text{Proj}_{V_m}[f(t)] = f(t)$.

- Khái niệm đa phân giải có hiệu lực chỉ với (4.8) vì tất cả các không gian đều là bản ảnh tỷ lệ của không gian trung tâm V_0 .

- Hàm $\phi(t)$ trong (2.10) được gọi là hàm tỷ lệ

- Khi dùng công thức Poisson, tính trực giao trong (2.10) của $\left\{ \phi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^m t - n) \right\}$ là một cơ sở của không gian V_m , nó chỉ thu được nếu sử dụng các điều kiện (2.5 - 2.10).

- Tính trực giao của $\phi(t)$ là không cần thiết vì một cơ sở không trực giao (với tính chất dịch) luôn luôn có thể được trực giao hoá.

2.4.3. Xây dựng wavelet bằng MRA

Các wavelet xây dựng trên phương pháp phân tích đa phân giải cần đến các phương trình giãn và phương trình wavelet. Mục đích của phương trình giãn dùng để giải ra các nghiệm $\phi(t)$ và $\psi(t)$ (dẫn theo nghĩa bước thời gian $\Delta t = 2^m$ dẫn ra. Khi dịch chuyển từ mức m thấp sang mức m cao trong phân tích MRA).

* Phương trình giãn (the dilatioin equitioin)

Vì $\phi_{0n}(t)$ bao không gian V_0 và $\phi_{-1n}(t)$ bao không gian V_{-1} , đồng thời $V_0 \in V_{-1}$, nên hàm tỷ lệ $\phi_{0n}(t)$ cũng nằm trong V_{-1} . Như vậy $\phi_{00}(t) = \phi(t)$ phải là một tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở trực chuẩn $\phi_{-1n}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \phi(2t - n)$ của không gian V_{-1} :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(n) \phi(2t - n)$$

(2.11)

Phương trình (2.11) gọi là phương trình sai phân tỷ lệ 2 hay phương trình giãn với $g_0(n)$ là hệ số của phương trình. Nó cũng được gọi là phương trình lọc (refinement equation) bởi vì nó biểu diễn $\phi(t)$ trong không gian lọc tinh hoàn là V_{-1} . Không gian đó có tỷ lệ tinh hơn $\Delta t = 1/2$ và nó chứa $\phi(t)$ có tỷ lệ $\Delta t = 1$. Phương trình giãn là kết quả trực tiếp của $V_0 \subset V_{-1}$.

Lấy biến đổi Fourier 2 vế ta được:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \int \phi(t) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{2} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(n) \phi(2t - n) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(n) \frac{1}{2} \int \phi(t) e^{-\frac{j\omega t}{2}} e^{-\frac{j\omega n}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum g_0(n) e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)n} \int \phi(t) e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)t} dt \\ (2.12)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} G_0 \left(e^{j\frac{\omega}{2}} \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

$$\text{Trong đó: } G_0(e^{j\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_0(n) e^{-j\omega n}$$

Hàm này đặc trưng cho phân tích đa phân giải. Nó là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và có thể được xem là biến đổi Fourier rời rạc của một bộ lọc thời gian rời rạc $g_0(n)$. Nhận xét này biểu hiện sự kết nối giữa thời gian rời rạc và liên tục từ đó cho phép xác định cơ sở wavelet thời gian liên tục từ các bộ lọc lặp rời rạc. Nó cũng cho phép tính toán các khai triển wavelet thời gian liên tục sử dụng các giải thuật thời gian rời rạc. Một tính chất quan trọng nữa của $G_0(e^{j\omega})$ cũng biểu hiện được liên kết giữa thời gian rời rạc và liên tục:

$$\begin{aligned}\left| G_0(e^{j\omega}) \right|^2 + \left| G_0(e^{j(\omega+\pi)}) \right|^2 &= 2 \\ (2.13)\end{aligned}$$

* Xây dựng wavelet:

Chúng ta nghiên cứu phương pháp xác định wavelet bắt đầu từ định lý sau:

Định lý: Bất kỳ dãy không gian nào thỏa mãn các tiên đề từ (2.5) đến (4.10) đều tồn tại một cơ sở trực chuẩn của không gian W_m :

$$\left\{ \psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - m) \quad m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Trong đó: W_m là không gian bù trực giao với V_m trong không gian V_{m-1} . Các bản âm dịch của $\psi(2^{-m}t)$ tạo ra không gian W_m . Không gian các wavelet đó trực giao với nhau vì $W_0 \subset V_m$ và $V_m \perp W_m$. Từ các không gian trực giao, ta có các hàm cơ sở trực giao. Và từ tính trọn vẹn (4.6) sẽ tạo ra một cơ sở trực chuẩn $\psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$ của $L^2(\mathbb{R})$.

Mục đích của chúng ta là xác định wavelet $\psi(t) \in W_0$, tức là một cơ sở trực chuẩn $\psi(t-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ cho không gian W_0 . Vì $W_0 \subset V_{-1}$, nghĩa là $\psi(t)$ có thể được biểu diễn dưới dạng tổ hợp của cơ sở trực chuẩn trong không gian V_{-1} .

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_0(n) \phi(2t - n)$$

Biến đổi Fourier cả hai vế ta được:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0 \left(e^{j\frac{\omega}{2}} \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

(2.14)

Trong đó $H_0(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π từ $L^2[0, 2\pi]$. Ta có $\psi(t) \in W_0$ mà W_0 thì lại trực giao với V_0 nên:

$$\langle \phi(t - k), \psi(t) \rangle = 0 \text{ với } \forall k$$

Chuyển sang biểu diễn trong miền Fourier như sau:

$$\int \psi(\omega) \Phi^*(\omega) e^{j\omega k} d\omega = 0$$

hoặc tương đương với

$$\int_0^{2\pi} e^{j\omega k} d\omega \sum_l \psi(\omega + 2\pi l) \Phi^*(\omega + 2\pi l) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_l \psi(\omega + 2\pi) \Phi^*(\omega + 2\pi) = 0$$

(2.15)

Thay (2.12) và (2.14) vào (2.15), rồi chia tổng theo 1 thành 2 tổng theo 1 chẵn và 1 lẻ.

$$\frac{1}{2} \sum_l H_0 \left(e^{j\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)} \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi \right) G_0^* \left(e^{j\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)} \right) \Phi^* \left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi \right) + \quad (2.16)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_l H_0 \left(e^{j\left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi\right)} \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi \right) G_0^* \left(e^{j\left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi\right)} \right) \Phi^* \left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi \right) = 0$$

vì G_0 và H_0 tuần hoàn chu kỳ 2π , thay $\Omega = \frac{\omega}{2}$ ta được:

$$H_0(e^{j\Omega})G_0^*(e^{j\Omega})\sum_l|\Phi(\Omega+2l\pi)|^2+H_0(e^{j(\Omega+\pi)})\sum_l|\Phi(\Omega+(2l+1)\pi)|^2=0$$

áp dụng biểu thức (4.12), ta có tổng $\Phi(\omega)=1$, do đó:

$$H_0(e^{j\Omega})G_0^*(e^{j\Omega})+H_0\{e^{j(\Omega+\pi)}\}G_0^*(e^{j(\Omega+\pi)})=0$$

Phương trình trên cho ta thấy sự liên kết giữa thời gian rời rạc và thời gian liên tục. Vì $G_0^*(e^{j\omega})$ và $G_0^*(e^{j(\omega+\pi)})$ không thể đồng thời bằng không (theo 2.12), suy ra:

$$H_0(e^{j\omega})=\lambda(e^{j\omega})G_0^*(e^{j(\omega+\pi)})$$

Hoặc biểu diễn trong miền thời gian:

$$h_0(n)=(-1)^n g_0(-n+1)$$

Như vậy wavelet thu được có dạng như sau

$$\psi(\omega)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}}G_0^*\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n g_0(-n+1)\phi(2t-n)$$

(2.17)

2.4.4. Ví dụ xây dựng wavelet bằng phân tích đa phân giải

2.4.4.1. Xây dựng wavelet Haar

Gọi V_m là không gian của các hàm hằng trong từng khoảng

$$[2^m n, 2^m (n+1)]. \text{ Khi đó: } f^{(m)} \in V_m \Leftrightarrow f^{(m)} = \sum f_n^{(m)} \phi_{mn}(t)$$

Quá trình lấy trung bình của hai khoảng liên tiếp tạo ra một hàm $f^{(m+1)} \in V_{m+1}$ (vì nó là một hàm hằng trên các khoảng $[2^m n, 2^m (n+1)]$). Phép tính trung bình thực chất là phép chiếu trực giao của $f^{(m)} \in V_m$, vì hiệu số $d^{(m+1)} = f^{(m)} - f^{(m+1)}$ thì trực giao với V_{m+1} (tích vô hướng của $d^{(m+1)}$ thuộc vào một không gian W_{m+1} trực giao với V_{m+1} , Không gian W_{m+1} được trải ra nhờ các hàm dịch $\psi_{m+1,n}(t)$

Hàm này lại là hình chiếu trực giao của $f^{(m)}$ lên W_{m+1} . Như vậy hàm $f^{(m)}$ bất kỳ đều có thể viết dưới dạng một hàm trung bình cộng với một hàm hiệu.

$$f^{(m)} = f^{(m+1)}(t) + d^{(m+1)}(t)$$

Từ đó, ta nhận thấy rằng W_{m+1} là phần bù trực giao với V_{m+1} trong V_m .

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

và (4.20) có thể được viết lại:

$$f^{(m)}(t) = \text{Proj}_{V_{m+1}} [f^{(m)}(t)] + \text{Proj}_{W_{m+1}} [f^{(m)}(t)].$$

Thực hiện lặp lại quá trình trên, phân tích V_{m+1} thành V_{m+2} và W_{m+2} . Cứ thế tiếp tục ta được:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+2} \oplus W_{m+3} \oplus \dots$$

Vì các hàm hằng từng mẫu dày đặc trong $L_2(\mathbb{R})$, khi chiều dài của mẫu tiến tới không thì tiên đề (2.6) được thỏa mãn nên các Wavelet Haar hình thành nên một cơ sở của $L_2(\mathbb{R})$. Bây giờ chúng ta xây dựng Wavelet Haar sử dụng kỹ thuật phân tích đa phân giải để trình bày ở trên. Cơ sở của V_0 là $\{\phi(t-n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t \text{ khác} \end{cases}$$

Để tìm $G_0(e^{j\omega})$, ta có thể viết: $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$

$$\text{Biến đổi Fourier hai vế ta có: } \Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + e^{-j\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.18)$$

áp dụng (4.18) để tìm $H_0(e^{j\omega})$.

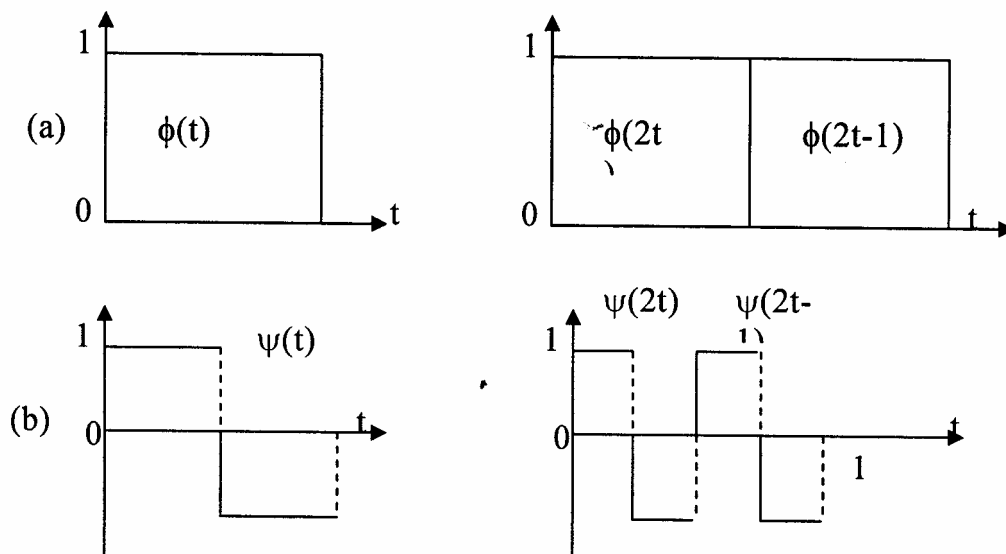
$$H_0(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} G_0^*(e^{j(\omega+\pi)}) = -e^{j\omega} \frac{(1 + e^{j(\omega-\pi)})}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - e^{j\omega})}{\sqrt{2}}$$

Thay $H_0(e^{j\omega})$ vào $\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ta tìm được $\psi(\omega)$

Biến đổi Fourier ngược để tìm lại wavelet $\psi(t)$

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & t \text{ còn lại} \end{cases}$$



Hình 2.17. (a) Hàm tỷ lệ với các bản ảnh giãn và dịch của Haar

(b) Wavelet Haar với các Wavelet tỷ lệ và dịch.

Nhận xét.

Wavelet Haar $\psi(t)$ dạng sóng vuông có giá compact. Chúng ta sử dụng từ "giá" cho một khoảng khép kín và liên tục theo thời gian, ở đây là $[0, 1]$ có kể cả 2 biên, ngoài khoảng đó thì $\psi(t) = 0$. Từ "giá compact" ý muốn nói đến tập hợp kín này được bao lại. Wavelet bằng không ở ngoài khoảng được bao cho thấy giá compact tương ứng với bộ lọc FIR có chiều dài hữu hạn.

- Thực ra các wavelet không cần phải có giá compact. Chúng có thể thu được từ bộ lọc IIR thay vì bộ lọc FIR. Trước đây Wavelet Haar được xây dựng theo cách khác, không liên quan đến bộ lọc. Chúng dao động trên và dưới điểm không dọc theo toàn bộ trục thời gian và suy giảm về không khi $t \rightarrow \infty$. Chúng vẫn có đầy đủ các tính chất của một wavelet.

- Ingrid Daubechies đã chỉ ra rằng giá compact dễ có hơn đối với các Wavelet khác

Wavelet Haar.

Wavelet Haar có được một thuộc tính rất quan trọng là tính trực giao, nghĩa là $\psi(t)$ trực giao với các bản ảnh giãn và dịch chuyển của nó.

Wavelet cơ sở chứa tất cả các hàm $\psi(2^{-m}t-n)$ là một cơ sở trực giao.

Trên hình (2.16) cho các wavelet Haar đầu tiên, ta nhận thấy:

$$\langle \psi(t), \psi(2t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(2t) dt = 0 \quad (2.19)$$

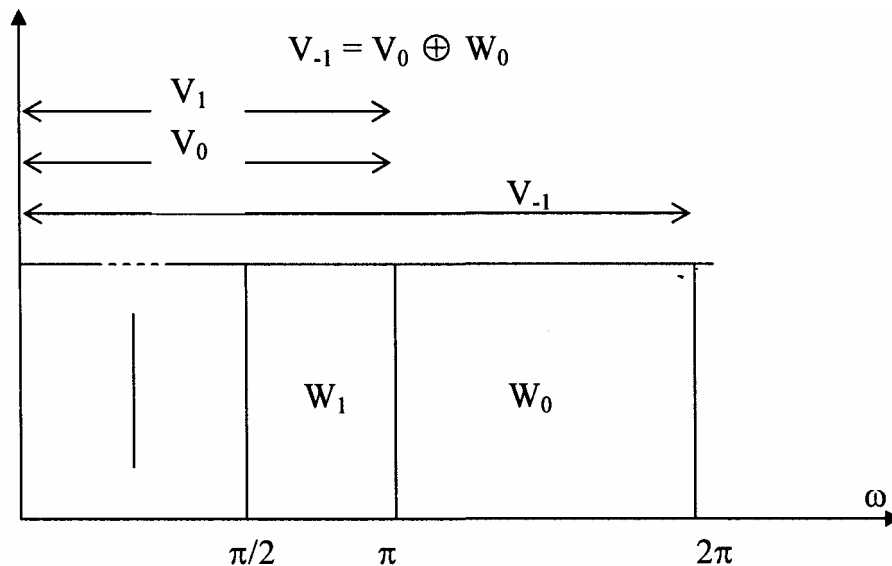
$$\langle \psi(t), \psi(2t-1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(2t-1) dt = 0$$

$$\langle \psi(2t), \psi(2t-1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2t) \psi(2t-1) dt = 0$$

2.4.4.2. Xây dựng wavelet Sinc.

Để tìm được wavelet Sinc, chúng ta sẽ bắt đầu với chuỗi các không gian được gắn vào nhau. Thay vì dùng các hàm hằng từng mẫu, ta xét các hàm bị giới hạn băng tần.

Gọi V_0 là không gian các hàm bị giới hạn băng $[-\pi, \pi]$ chính xác hơn là V_0 chứa $\cos(\pi t)$ nhưng không chứa $\sin(\pi t)$. Do đó V_{-1} là không gian của các hàm bị giới hạn băng $[-2\pi, 2\pi]$. Khi đó gọi W_0 là không gian của các hàm bị giới hạn băng $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ (W_0 chỉ chứa $\sin(\pi t)$ nhưng không chứa $\cos(\pi t)$) thì:



Hình 2.18: Phân tích V_0 thành các băng octave liên tiếp

Ta có V_0 trực giao với W_0 và cùng thuộc không gian V_{-1} , hình chiếu của nội hàm $f^{(-1)}$ từ V_{-1} lên V_0 là một xấp xỉ thông thấp $f^{(0)}$, và sai lệch $d^{(0)} = f^{(-1)} - f^{(0)}$ sẽ tồn tại trong W^0 . Tiếp tục lặp lại sự phân tích trên ta được:

$$V_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} W_m V$$

Quá trình trên gọi là sự phân tích octave của V_{-1} , và cũng được gọi là quá trình lọc hằng số Q do mỗi băng có độ rộng băng thông tương đối cố định. Cơ sở trực giao của V_0 được ca bởi $\{\sin c(t - n)\}$ hay $\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi}$

Đây là hàm tỷ lệ cho không gian V_0 của các hàm bị giới hạn băng $[-\pi, \pi]$. áp dụng (4.14) ta có:

$$g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \quad (2.20)$$

$$\text{Và } G_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega \text{ khác} \end{cases}$$

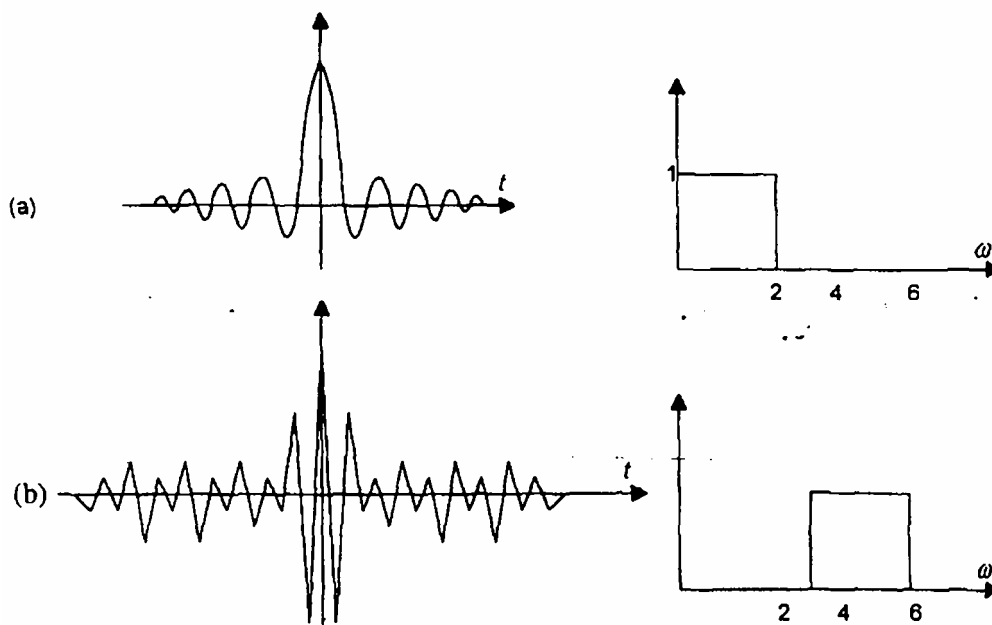
Nghĩa là $G_0(e^{j\omega})$ là một bộ lọc thông thấp lý tưởng, áp dụng (4.18) ta có:

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{-j\omega} & \omega \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 0 & \omega \text{ khác} \end{cases}$$

là một bộ lọc thông thấp lý tưởng có dịch pha

Dãy hoàn nhận được là: $h_0(n) = (-1)^n g_0(-n+1)$

Ta xây dựng được wavelet Sinc: $\psi(t) = \sqrt{2} \sum (-1)^{-n+1} g_0(n) \phi(2t - n + 1)$



Hình 2.19. (a) Hàm tỷ lệ và biến đổi Fourier của nó
(b) Wavelet Sinc và biểu diễn trong miền tần số.

2.4.4.3. Wavelets Daubechies.

Từ ví dụ về Haar wavelet, chúng ta có thể thấy rằng biến đổi wavelet là tương đương với lọc sử lý cùng một lúc trong hai bộ lọc.

Năm 1988 Daubechies khám phá ra một lớp hữu ích và quan trọng của hệ số lọc, tập hợp đơn giản nhất chỉ có 4 hệ số (DAUB4).

Chúng ta hãy nghiên cứu chúng theo việc biến đổi hoạt động trên một vector dữ liệu

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & & & & & & & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & & & & & & & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}$$

Hoạt động của ma trận này sẽ thực hiện hai quan hệ chéo nhau, nhưng có quan hệ, lọc.

(c_0, c_1, c_2, c_3) - H và $(c_3, -c_2, c_1, -c_0)$ - G, Chúng ta có thể coi H như bộ lọc (trơn) và G như là một bộ lọc wavelet. Chúng đưa ra những thông tin tổng thể và chi tiết. Bộ lọc G được chọn làm bộ lọc hồi đáp, nó đưa ra những thông tin đầy đủ nhất, điều này được thực hiện bởi việc tạo các giá trị G không tức thời. Khi p tức thời bằng không chúng ta nói rằng, G thỏa mãn điều kiện tương ứng của yêu cầu p.

$$c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0$$

$$0c_3 - 1c_2 + 2c_1 - 3c_0 = 0$$

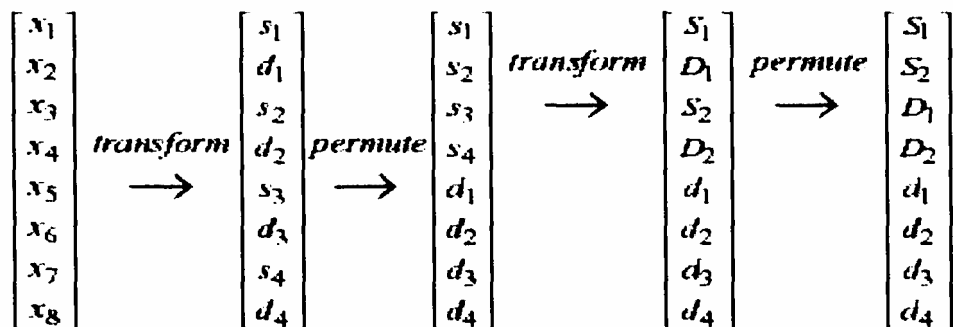
Như vậy việc biến đổi vector dữ liệu đã có hiệu quả, vấn đề là ta phải có khả năng tái lập lại tín hiệu gốc từ các thành phần hỗn hợp tổng thể và chi tiết, điều này có thể đảm bảo bởi ma trận trên là trực giao, như vậy nó chỉ việc hoán đổi. Trong không gian rời rạc điều này tương ứng của điều kiện trực giao đối với chức năng liên tục. Điều kiện trực giao đặt ra hai điều kiện ràng buộc về hệ số. Chúng có thể được dẫn xuất bởi phép nhân, bởi hoán đổi với yêu cầu rằng sản phẩm phải là một đơn vị của ma trận.

$$c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 + c_0^2 = 1$$

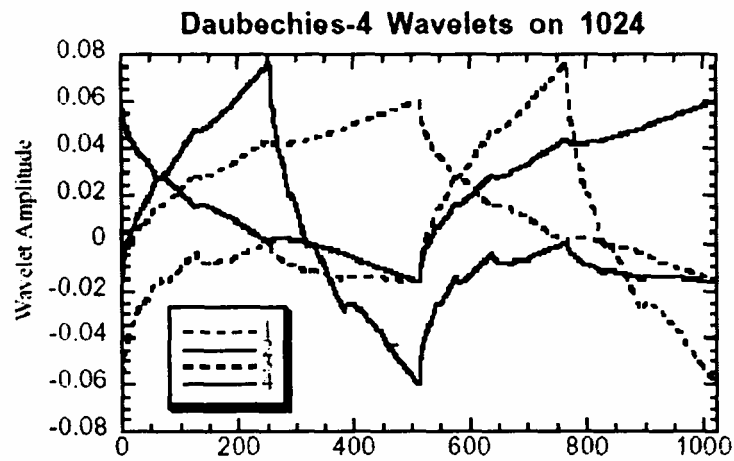
$$c_3 c_1 + c_2 c_0 = 0$$

Bốn phép toán cho các hệ số có phương án duy nhất. DAUB4 chỉ là cái đơn giản nhất trong họ wavelet với giá trị của hệ số tăng lên hai mỗi lần phân tích (4, 6, 8, 12... 20,...). Mỗi lần chúng ta tăng thêm 2 nữa cho hệ số, như vậy chúng ta đã tăng ràng buộc trực giao và tăng giá trị không tức thời, hay những điều kiện tương ứng. Daubechies đã sắp xếp thành bảng các hệ số cho nhiều trường hợp và chúng có thể chèn vào trong các chương trình của máy tính.

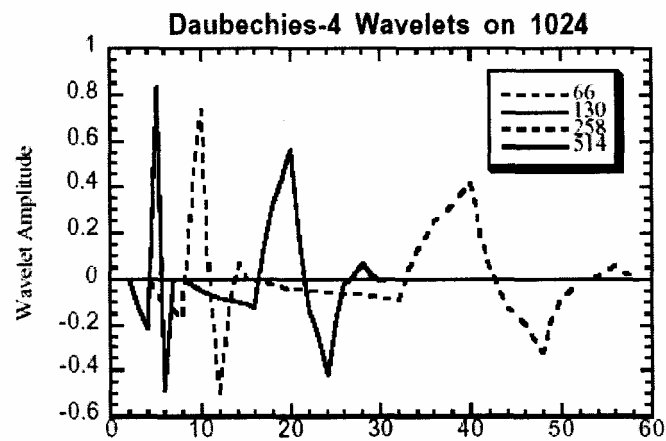
Biến đổi wavelet rời rạc được xử lý bởi giải thuật hình chóp, hệ số ma trận được áp dụng theo thứ bậc, sau phép biến đổi đầu tiên của vector dữ liệu có chiều dài N, thông tin được lưu giữ trong phần tử N/2 cuối cùng của phép biến đổi vector, và phép biến đổi khác của hỗn hợp phẳng N/2 sẽ thực hiện cùng các các vector chi tiết và các vector phẳng cho mỗi chiều dài N/4. Thông tin chi tiết tại mức này được lưu giữ và các biến đổi vector phẳng N/4 khác được thực hiện.



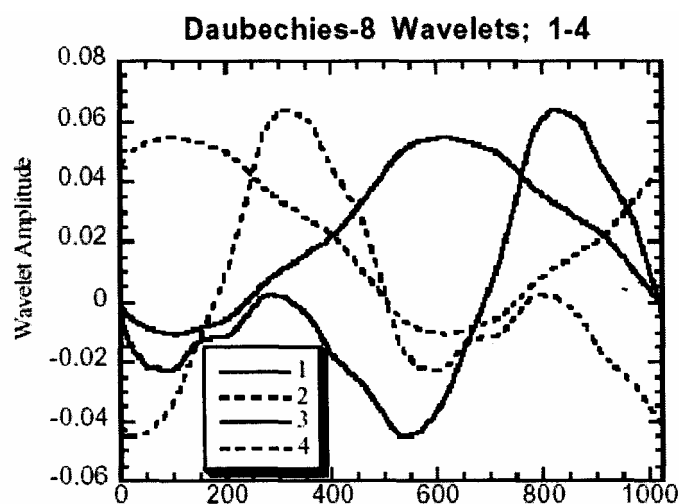
Nếu tín hiệu gốc cao hơn năng lượng mức hai thì sẽ có nhiều giai đoạn hơn trong biến đổi hình chóp, nhưng cuối cùng luôn có hai hệ số là hệ số chi tiết và hệ số phẳng cho mức cuối. "d" được gọi là hệ số wavelet; s được gọi là hệ số wavelet mẹ. Mỗi giai đoạn xử lý là một hoạt động trực giao tuyến tính, tổng tất cả các biến đổi cũng là một hoạt động trực giao. Để chuyển thủ tục và thay đổi hệ số ngược lên vector dữ liệu gốc rất đơn giản, chỉ việc sử dụng đối chỗ biến đổi ma trận tại mỗi mức của hình chóp.



Wavelet có hệ số 514 là thang đo nhỏ nhất và nó nằm gần với thời điểm khởi đầu, trên sơ đồ là wavelet với các hệ số 514, 258, 130 và 66.

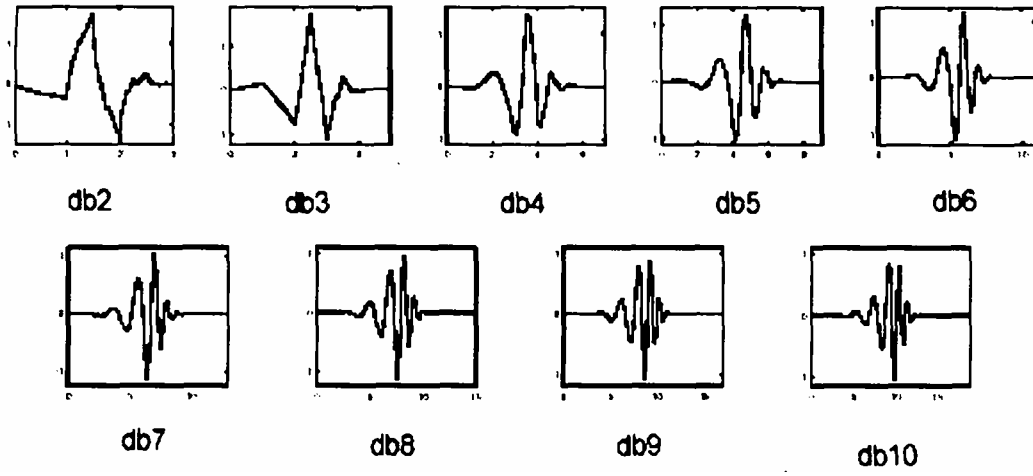


Yêu cầu với wavelet cao hơn như DAUB8 có sơ đồ như hình sau



Với họ wavelet này được ký hiệu là dBN trong đó db là họ wavelet Daubechies, N là mức phân tích yêu cầu.

Sau đây là một số chức năng wavelet của một số thành viên trong họ.



CHƯƠNG III

LỌC SỐ NHIỀU NHỊP

3.1. MỞ ĐẦU:

Kỹ thuật lọc số nhiều nhịp ngày càng được ứng dụng nhiều trong lĩnh vực xử lý số tín hiệu, như là nó có thể dùng để tăng tốc độ tính toán trong các bộ lọc số bằng cách giảm số lượng các phép nhân phải thực hiện trong 1 giây.

Chúng ta biết rằng trong quá trình xử lý số tín hiệu, bề rộng của dải tần số có thể thay đổi, như là các phép lọc sẽ triệt tiêu các thành phần tần số không mong muốn, thì bề rộng của dải tần của tín hiệu xử lý sẽ được giảm đi và chúng ta giảm tần số lấy mẫu cho phù hợp với bề rộng phổ của tín hiệu và như vậy sẽ giảm được số lượng các phép tính trong bộ lọc số.

Do những tính chất ưu việt của nó, kỹ thuật lọc số nhiều nhịp được nghiên cứu trong những năm gần đây và thu được những kết quả khả quan về lý thuyết cũng như ứng dụng kỹ thuật như trong viễn thông, xử lý tiếng nói, xử lý hình ảnh, hệ thống antenna, kỹ thuật audio số, đặc biệt là hai ứng dụng chính vẫn là mã hóa bằng con(subband coding) dùng trong xử lý tiếng nói và phân đường dùng trong viễn thông.

Thành tựu của kỹ thuật lọc số nhiều nhịp trong những năm vừa qua thể hiện ở việc nghiên cứu các hệ thống số nhiều nhịp, như là tổng hợp các bộ lọc phân chia và các bộ lọc nội suy, các bank lọc phân tích và tổng hợp, biểu diễn nhiều pha và cấu trúc nhiều pha.

3.2. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

3.2.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Để làm quen với khái niệm nhiều nhịp và để theo dõi các quá trình tiếp theo chúng ta cần phải định nghĩa một số khái niệm mới.

a) Định nghĩa hệ thống nhiều nhịp

Nếu trong một hệ thống xử lý số tín hiệu, tần số (hoặc nhịp) lấy mẫu được thay đổi trong quá trình xử lý, thì hệ thống số này được gọi là hệ thống xử lý nhiều nhịp

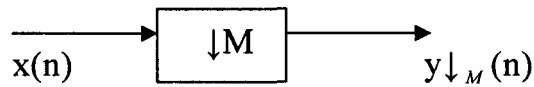
b) Định nghĩa phép phân chia

Việc giảm tần số lấy mẫu từ giá trị F_s về một giá trị $F's$ ($F's < F_s$) được định nghĩa là phân chia.

Nếu $F's = F_s/M$ ($M > 1$ và nguyên dương) thì ta gọi là phép phân chia theo hệ số M và M gọi là hệ số phân chia.

c) Định nghĩa bộ phân chia

Hệ thống chỉ làm nhiệm vụ giảm tần số lấy mẫu được gọi là bộ phân chia
Bộ phân chia được ký hiệu như hình 3.2.1.1



M: là hệ số phân chia

Hình 3.2.1.1

Để thuận tiện chúng ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép phân chia như sau:

$$\downarrow M[x(n)] = y_{\downarrow}(n) \equiv y_{\downarrow M}(n) \quad (3.2.1.1)$$

Hay:

$$X(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow}(n) \equiv y_{\downarrow M}(n) \quad (3.2.1.2)$$

d) Định nghĩa phép nội suy

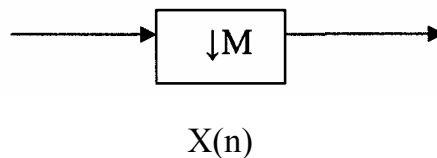
Việc tăng tần số lấy mẫu từ giá trị F_s đến một giá trị F'_s ($F_s < F'_s$) được định nghĩa là phép nội suy.

Nếu $F'_s = LF_s$ ($L > 1$ và nguyên dương) thì ta gọi là phép nội suy cho hệ số L . và L là phép nội suy.

e) Định nghĩa bộ nội suy

Hệ thống chỉ làm nhiệm vụ tăng tần số lấy mẫu ta gọi là bộ nội suy

Bộ nội suy được ký hiệu như trên hình 3.2.1.2



$Y_{\uparrow L}(n)$

L: hệ số nội suy

Hình 3.2.1.2

Để thuận tiện ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép nội suy như sau:

$$\uparrow L[x(n)] = y \uparrow_L(n)$$

(3.2.1.3)

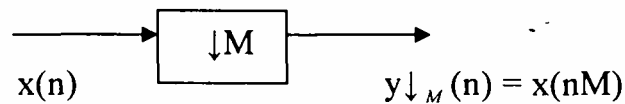
$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y \uparrow_L(n)$$

(3.2.1.4)

3.2.2. PHÉP PHÂN CHIA THEO HỆ SỐ M

a) Biểu diễn phép phân chia trong miền biến số n

giả sử ta có bộ phân chia theo



$$F_s \rightarrow F'_s$$

$$\Omega_s \rightarrow \Omega'_s$$

$$F_s \rightarrow F'_s$$

Hình 3.2.2.1

Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu rời rạc xâu sau khi đi qua bộ phân chia này sẽ bị giảm đi M lần, tức là:

$$F'_s = \frac{F_s}{M}; \quad \Omega_s = 2\pi F; \quad \Omega'_s = 2\pi F = 2\pi \frac{F_s}{M} = \frac{\Omega_s}{M}$$

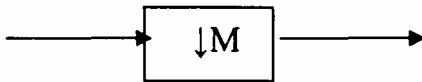
(3.2.2.1)

Hoặc là chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{1}{F_s}$ sẽ tăng lên M lần:

$$T'_s = M T_s$$

(3.2.2.2)

Để hiểu rõ bản chất của quá trình phân chia này ta sẽ biểu diễn dãy vào và dãy ra của bộ phân chia này ở dạng không chuẩn hóa như trên hình 9.2.2.2 (chuẩn hóa ở đây được hiểu là chuẩn hóa bởi chu kỳ lấy mẫu).



$$x(n T_s) \quad x(n T'_s) = x(nM T_s) = y_{\downarrow M}(n)$$

nM : số nguyên

Hình 3.2.2.2

Như vậy tín hiệu rời rạc trước khi vào bộ phân chia là $x(n T_s)$ và Sau khi ra khỏi bộ phân chia là $x(n T_s)$.

Ví dụ 3.2.2.1: Cho tín hiệu rời rạc sau đây

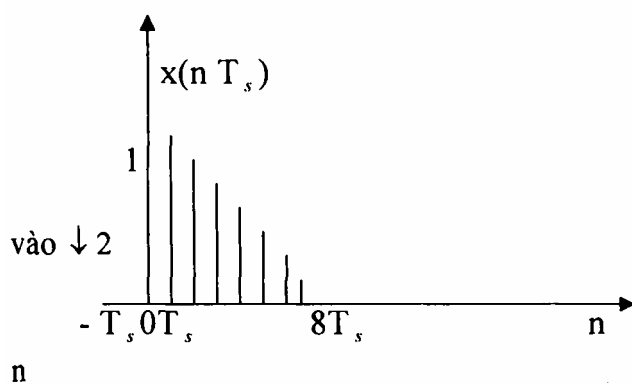
$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{8} & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy vẽ xâu bằng đồ thị dưới dạng không chuẩn hoá (theo chu kỳ lấy mẫu) và chuẩn hoá trước khi vào và sau khi ra khỏi bộ phận chia theo hệ số $M = 2$.

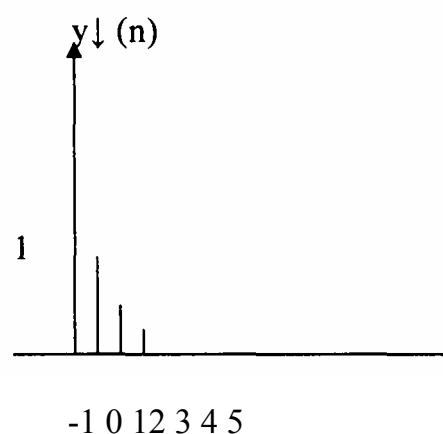
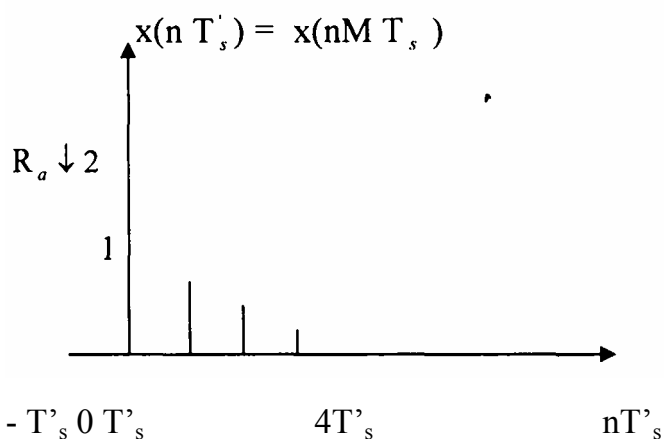
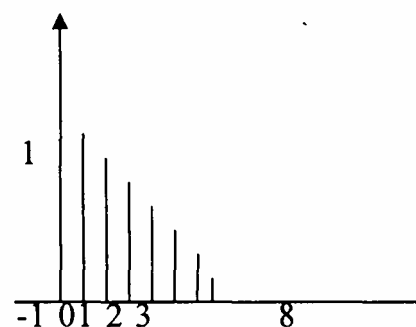
Giải

Lời giải được cho trên hình 3.2.2.3

chưa chuẩn hóa



chuẩn hóa



(a) ra không chuẩn hoá

(b) tín hiệu vào không chuẩn

(c) tín hiệu vào chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu T_s

(d) tín hiệu tín hiệu ra chuẩn hoá theo chu kỳ lấy mẫu $T'_s = M T_s$

Hình 3.2.2.3

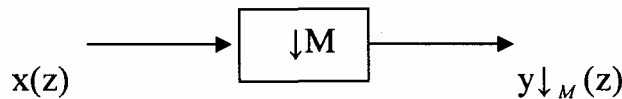
Chú ý:

- Ta thấy rằng tín hiệu ra $y \downarrow_M(n)$ chỉ lấy các giá trị của tín hiệu vào $x(n)$ ở các mẫu nM , bởi vì tần số lấy mẫu bị giảm đi M lần sau khi tín hiệu đi qua bộ phân chia theo hệ số M .

- Chiều dài của $x(n)$ bị co lại M lần, tức là $L[x(n)]/L[y \downarrow_M(n)] = M$

b) Biểu diễn phép phân chia trong miền z .

Chúng ta có thể biểu diễn quá trình phân chia bằng bộ phân chia trong miền z như sơ đồ trên hình 3.2.2.4



Hình 3.2.2.4

Ta biết rằng trong miền biến số độc lập ta có:

$$y \downarrow_M(n) = x(nM) \quad (3.2.2.3)$$

vậy :

$$Y \downarrow_M(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y \downarrow_M(n) z^{-n} = \sum_{M=-\infty}^{\infty}$$

$$x(nM) z^{-n}$$

Đổi biến số ta có:

$$m = n.M \text{ và } n = \frac{m}{M} :$$

$$Y \downarrow_M(z) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{M}} \quad \text{với } m =$$

$n.M, n$: số nguyên

Ta đã biết rằng dãy $p(m)$ được định nghĩa như sau:

$$p(m) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W_M^{-lm} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} lm} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (3.2.2.4)$$

Từ đây ta có :

$$Y \downarrow_M(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m).p(m). z^{-\frac{m}{M}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} lm} . x(m) z^{-\frac{m}{M}}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{M-1} x(m). \left[z^{\frac{1}{M}} e^{-j \frac{2\pi}{M} l} \right]^{-m}$$

$$Y \downarrow_M(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

(3.2.2.5)

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} W_M^l\right)$$

hoặc có thể viết dưới dạng sau đây:

$$M Y \downarrow_M(z) = \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

(3.2.2.6)

Ví dụ 3.2.2.2

Một tín hiệu $x(n)$ có biến đổi z là $X(z)$ đi qua bộ phân chia với hệ số $M=2$, ở đầu ra của bộ phân chia này ta thu được $Y \downarrow_2(z)$. Hãy tìm quan hệ giữa $X(z)$ và $Y \downarrow_2(z)$ nếu $x(n)$ có dạng sau đây:

$$X(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

→
Giải

Trước hết ta tìm $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} =$$

$$z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

Áp dụng hệ thức (3.2.2.6) với $M=2$ ta có :

$$Y \downarrow_2(z) = \frac{1}{2} X(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}$$

$$X(z^{-\frac{1}{2}})$$

Tính $X(z^{\frac{1}{2}})$ và $X(z^{-\frac{1}{2}})$:

$$X(z^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}} + 2z^{-1} + 3z^{\frac{3}{2}} + 2z^{-2} + z^{\frac{5}{2}}$$

$$X(z^{-\frac{1}{2}}) = z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{-1} - 3z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-2} - z^{-\frac{5}{2}}$$

Vậy ta có :

$$Y \downarrow_2(z) = 2z^{-3} + 2z^{-2}$$

c. Biểu diễn phép phân chia trong miền tần số.

Biểu diễn phép phân chia trong miền tần số chính là việc tìm quan hệ giữa:

$$Y \downarrow(e^{j\omega}) = \text{FT}[y \downarrow_M(n)]$$

Và:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]()$$

Nếu ta đánh giá trị $Y \downarrow_M(z)$ là $X(z)$ trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z thì ta sẽ tìm được quan hệ giữa $Y \downarrow_M(e^{j\omega})$ và $X(e^{j\omega})$, tức là:

$$Y \downarrow_M(e^{j\omega}) = Y \downarrow(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Vậy ta thu được quan hệ sau :

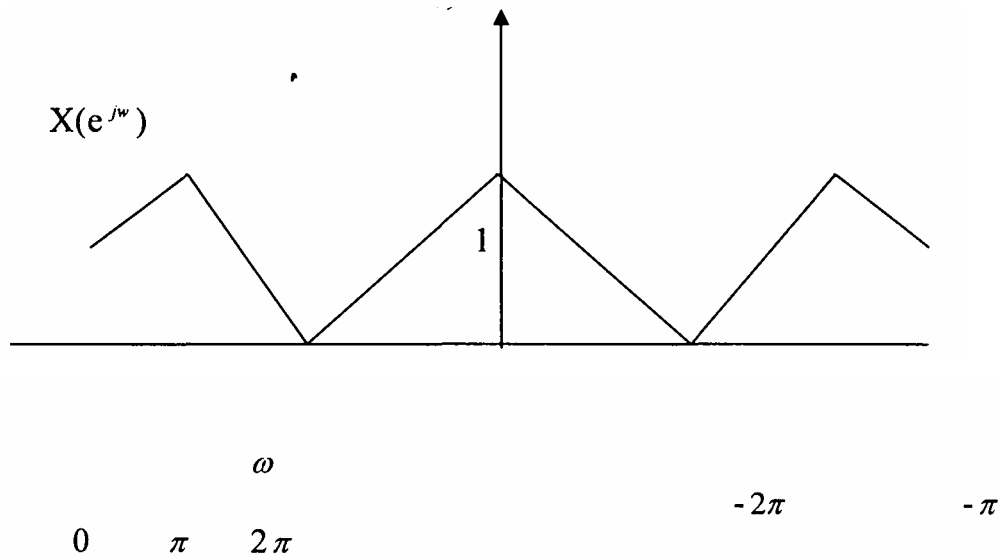
$$Y \downarrow_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right) \quad (3.2.2.7)$$

Hay :

$$M Y \downarrow_M(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$$

Ví dụ 3.2.2.3

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ được lấy mẫu từ một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist F_{Ny} , $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ cho trên hình (3.2.2.5)



Hình 3.2.2.5

Tín hiệu này được truyền qua một bộ phân chia có hệ số $M = 2$ và ở đầu ra ta thu được $Y \downarrow_2(n)$. Hãy vẽ phổ của $Y \downarrow_2(n)$, tức là vẽ $Y \downarrow_2(e^{j\omega})$ theo phổ của $X(e^{j\omega})$

Giải

Thay $M=2$ vào biểu thức (3.2.2.7) ta có:

$$Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}\right)$$

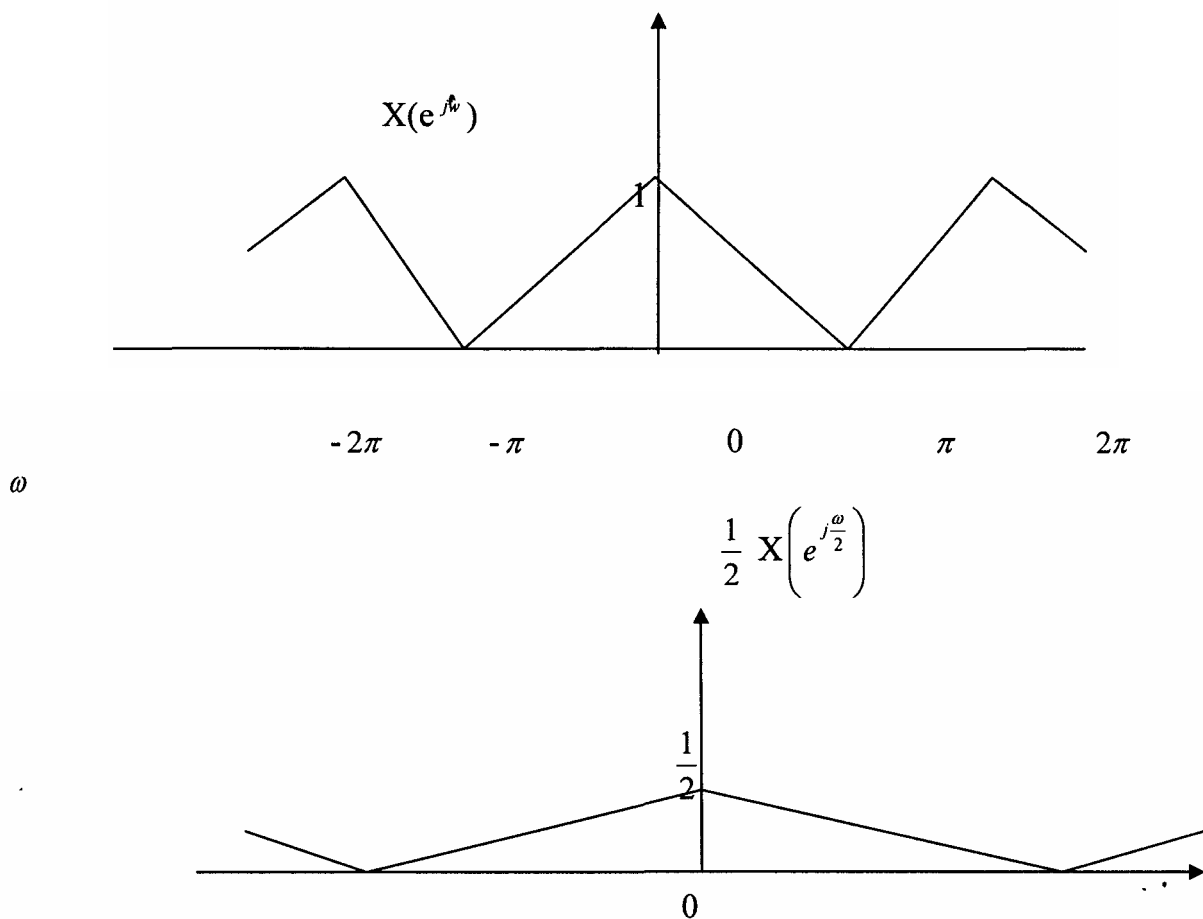
$$= \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) +$$

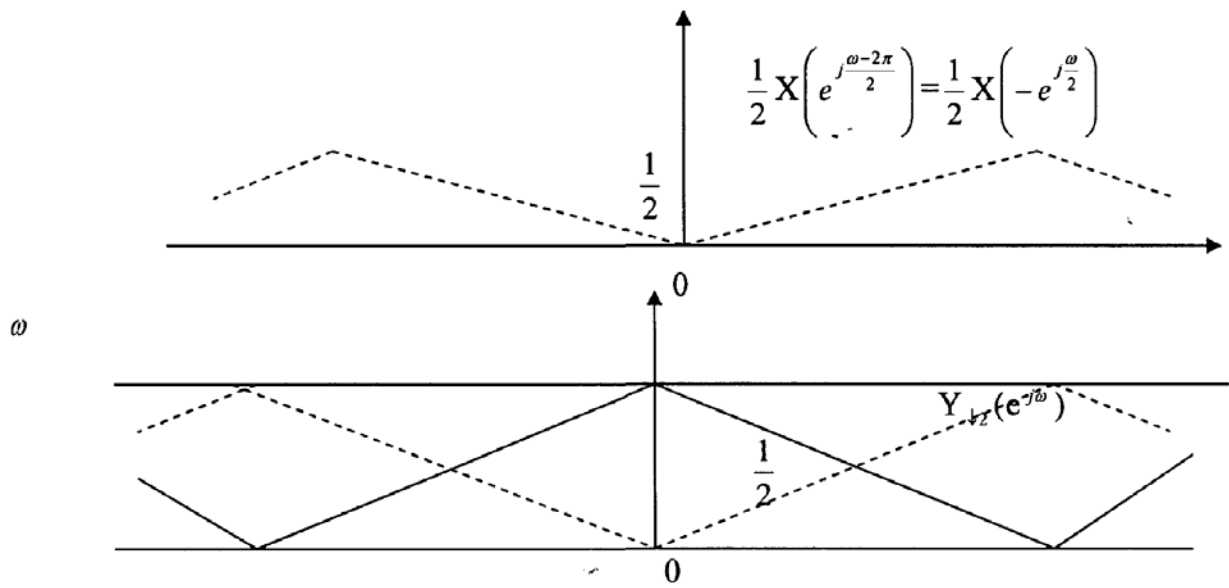
$$\frac{1}{2}X\left(-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$$

$$Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) +$$

Như vậy phổ $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$ sẽ là sự xếp chồng phổ của hai thành phần trên kết quả được minh họa như trên hình 3.2.2.6



ω  ω **Hình 3.2.2.6**

Nhận xét:

+ Thành phần với $L=0$ $X\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)$ chính là bản ảnh version giãn rộng M lần của $X(e^{j\omega})$

+ $M-1$ thành phần với $1 \leq l \leq M-1$ $X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$ là bản ảnh trể đồng dạng của bản ảnh rộng $X\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)$.

+ $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$ cũng có chu kỳ là 2π theo ω , là kết quả tổ hợp của M thành phần, bởi vì thực chất nó là tổ hợp biến đổi Fourier của các dãy hợp lại.

+ Từ ví dụ với $M=2$ ở trên ta thấy rằng thành phần với $L=0$ $X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$ là bản ảnh giãn rộng 2 lần của $X(e^{j\omega})$ tức là bề rộng phổ lớn hơn 2 lần nhưng bản thân $X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$ không gây chồng phổ. Nhưng vì còn thành phần $L=1$ $X\left(-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$ là bản ảnh trể đồng dạng với $X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$. Chính thành phần $l=1$ sẽ xấp sếp chồng với thành phần $l=0$ gây hiện tượng chồng phổ và như vậy hiện tượng này sẽ làm mất thông tin chứa trong xâu khi đi qua bộ phân chia.

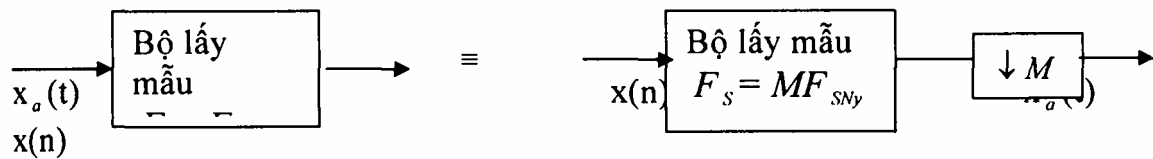
- Vì lý do làm hư thông tin nên thành phần với $1 \leq l \leq M-1$ được gọi là thành phần

hư danh (aliasing).

- Nhưng thành phần hư danh (với $1 \leq l \leq M - 1$) này cũng có thể không gây hiện tượng chồng phổ nếu tín hiệu vào bộ phân chia xâu có dải tần hữu hạn là $-\frac{\pi}{M} < \omega < \frac{\pi}{M}$.

Tức là xâu được lấy mẫu với tần số lấy mẫu F_s gấp M lần tần số Nyquist ($F_s = M F_{Ny}$) từ một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có bề rộng phổ hữu hạn F_a ($F_{Ny} = 2 F_a$) tức là $F_s = 2 M F_a$ (Xem ví dụ 3.2.2.4)

- Vậy một logic đơn giản là nếu tăng tần số lấy mẫu lên M lần, tức là ta cho $x_a(t)$ qua bộ lấy mẫu với $F_s = M F_{Ny}$ sau đó ta lại cho qua bộ phân chia hệ số M tức là giảm đi M lần thì ta thu được kết quả như cho $x_a(t)$ qua bộ lấy mẫu với $F_s = F_{Ny}$ như hình 3.2.2.7



Hình 3.2.2.7

- Phép phân chia làm $x(n)$ co hẹp trong miền thời gian (nếu n là thời gian) thì sẽ dẫn đến hiện tượng giãn rộng trong miền tần số.

Ví dụ 3.2.2.4

Một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ đi qua bộ lấy mẫu với tần số $F_s = 2 F_{Ny} = 4 F_a$ (F_a : bề rộng của phổ $x_a(t)$ ta có xâu, $x_a(t)$ có phổ là $x_a(\omega_a)$, $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$, $x(n)$ đi qua bộ phân chia với hệ số $M = 2$ và ở đầu rất a thu được $y_{\downarrow}(n)$ có phổ là $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$. Hãy tìm quan hệ giữa $x_a(\omega_a)$, $X(e^{j\omega})$ và $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$ bằng đồ thị.

Giải

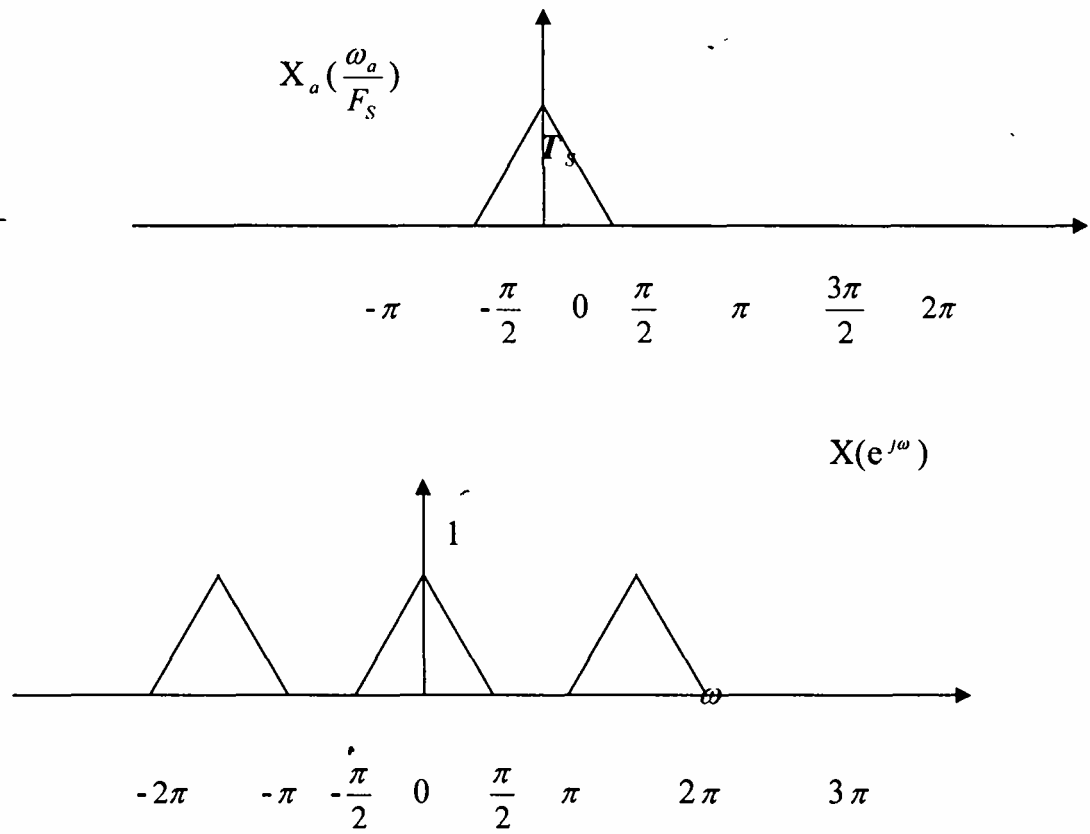
Ta có :

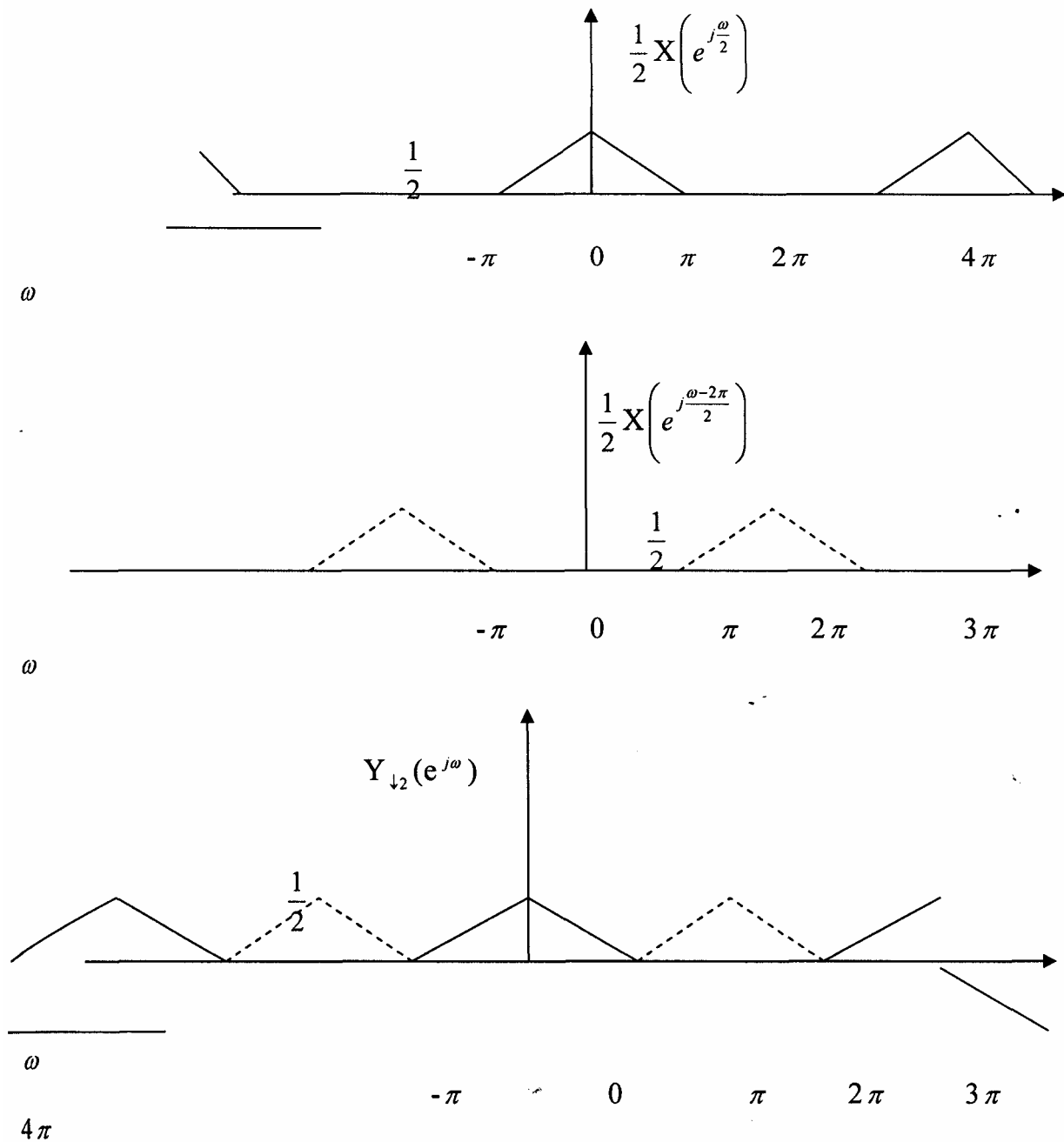
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\omega_a - n\Omega_s) ; \Omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}\right)$$

Kết quả cho trên hình 3.2.2.8

$$\frac{\omega_a}{F_s} = \frac{\omega}{4F_a}$$





Hình 3.2.2.8

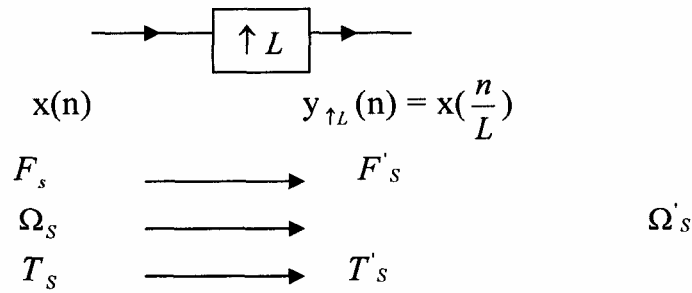
Nhận xét

Từ ví dụ 3.2.2.4 ta thấy rằng phần hư danh $X\left(-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$ (aliasin) tuy có xuất hiện nhưng không gây hiện tượng chồng phổ. Vì vậy nó không làm hư tín hiệu của chúng ta.

3.2.3. PHÉP NỘI SUY VỚI HỆ SỐ NGUYÊN L

a) Biểu diễn phép nội suy trong miền biến số n

Giả sử ta có bộ nội suy theo hình 9.2.3.1 sau đây:



Hình 3.2.3.1

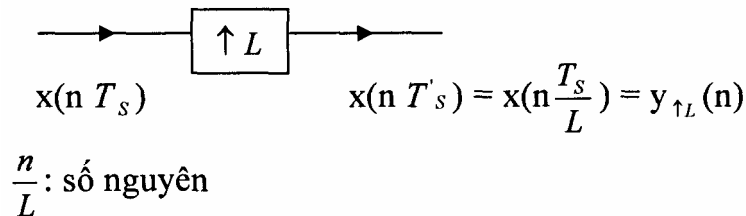
Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau khi qua bộ nội suy với hệ số L sẽ tăng lên L lần, tức là:

$$(3.2.3.1) \quad F'_s = L F_s, \quad \Omega_s = 2\pi F_s, \quad \Omega'_s = 2\pi F'_s = 2\pi L \Omega_s.$$

Hoặc chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{1}{F_s}$ sẽ giảm đi L lần :

$$(3.2.3.2) \quad T'_s = \frac{T_s}{L}$$

Để hiểu rõ phép nội suy về mặt bản chất, ta sẽ biểu diễn tín hiệu vào và ra của bộ nội suy này ở dạng không chuẩn hóa như trên hình 3.2.3.2 (chuẩn hóa được hiểu là chuẩn hóa theo chu kỳ lấy mẫu 1).



Hình 3.2.3.2

Tín hiệu vào bộ nội suy là $x(n T_s)$, và tín hiệu ra trở thành $x(n T'_s) = x(n \frac{T_s}{L})$

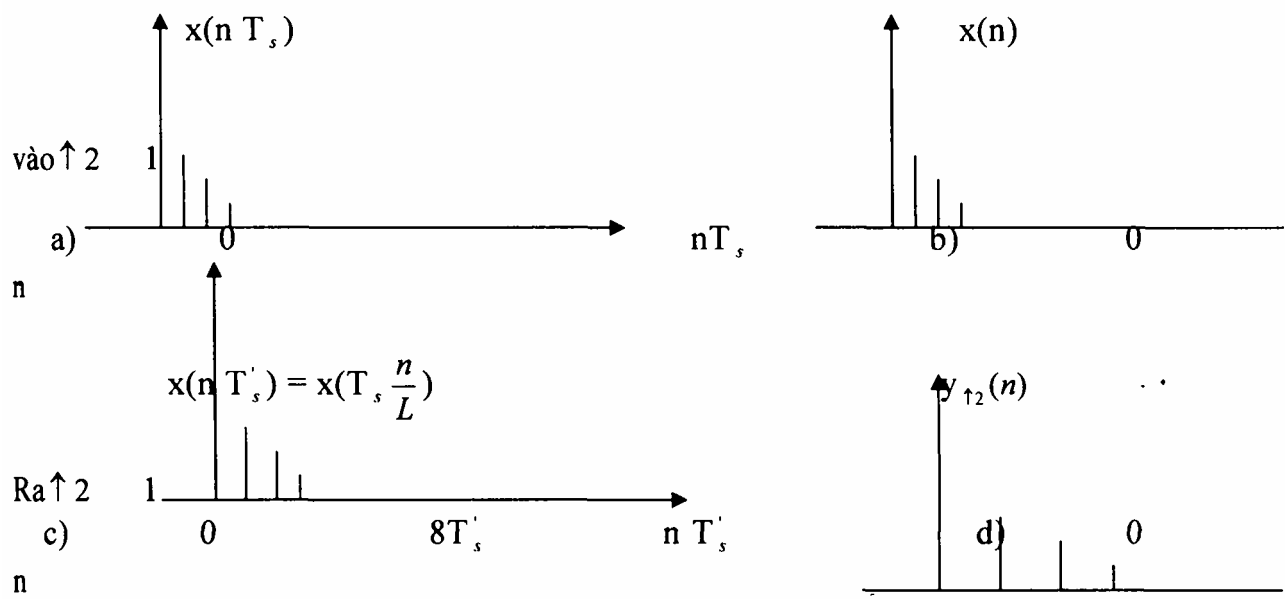
Ví dụ 3.2.3.1

Cho dãy $x(n)$:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tín hiệu $x(n)$ này đi qua bộ nội suy với hệ số nội suy $L = 2$. Hãy vẽ dạng của $x(n)$ và $y_{\uparrow 2}(n)$ ở dạng không chuẩn hóa (theo chu kỳ lấy mẫu) và chuẩn hóa.

Giải: Lời giải được cho trên hình 3.2.3.3



Hình 3.2.3.3

- a) tín hiệu vào không chuẩn hóa
- b) tín hiệu vào chuẩn hóa theo chu kỳ lấy mẫu T_s
- c) tín hiệu ra không chuẩn hóa
- d) tín hiệu ra chuẩn hóa theo chu kỳ lấy mẫu $T'_s = \frac{T_s}{L}$

Chú ý:

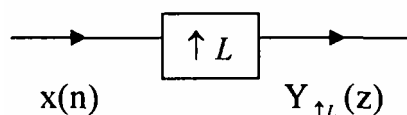
- Ta thấy rằng tín hiệu ra $y_{\uparrow L}(n)$ chính là tín hiệu vào $x(n)$ mà giữa L lấy mẫu bất kì của nó được chèn thêm $(L - 1)$ mẫu có biên độ là 0, là do tần số lấy mẫu được tăng lên L lần khi tín hiệu đi qua bộ nội suy có hệ số L .

- Chiều dài của $x(n)$ bị giãn ra L lần tức là:

$$L[y_{\uparrow L}(n)] / L[x(n)] = L$$

b) Biểu diễn phép nội suy trong miền z

Bây giờ chúng ta biểu diễn quá trình nội suy trong miền z như trên hình 3.2.3.4



Hình 3.2.3.4

Trong miền biến số độc lập n ta có:

$$Y_{\uparrow L}(z) = \begin{cases} x(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

(3.2.3.3)

Vậy :

$$Y_{\uparrow L}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$x(\frac{n}{L}) z^{-n}$$

đổi biến $m = \frac{n}{L}$ và $n = mL$

Ta có

$$Y_{\uparrow L}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mL} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m) (z^L)^{-m}$$

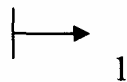
$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L) \quad (3.2.3.4)$$

Hoặc $Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L)$
(3.2.3.5)

Ví dụ 3.2.3.2

Cho tín hiệu $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$$



$x(n)$ đi qua bộ nội suy hệ số $L = 2$, ở đầu ra ta có $y_{\uparrow 2}(n)$ hãy tìm $X(z) = ZT[x(n)]$

và tìm $Y_{\downarrow 2}(z) = ZT[y_{\uparrow 2}(n)]$

Giải:

Trước hết ta tìm $X(z)$

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

$$+ 2z^{-4} + z^{-5}$$

Với $L = 2$ ta có :

$$Y_{\uparrow 2}(z) = X(z^2) = z^{-2} +$$

$$2z^{-4} + 3z^{-6} + 2z^{-8} + z^{-10}$$

c) Biểu diễn phép nội suy trong miền tần số

Đánh giá $Y_{\uparrow L}(z)$ và $X(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta thu được quan hệ giữa $Y_{\downarrow L}(e^{j\omega})$ và $X(e^{j\omega})$

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow L}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Vậy :

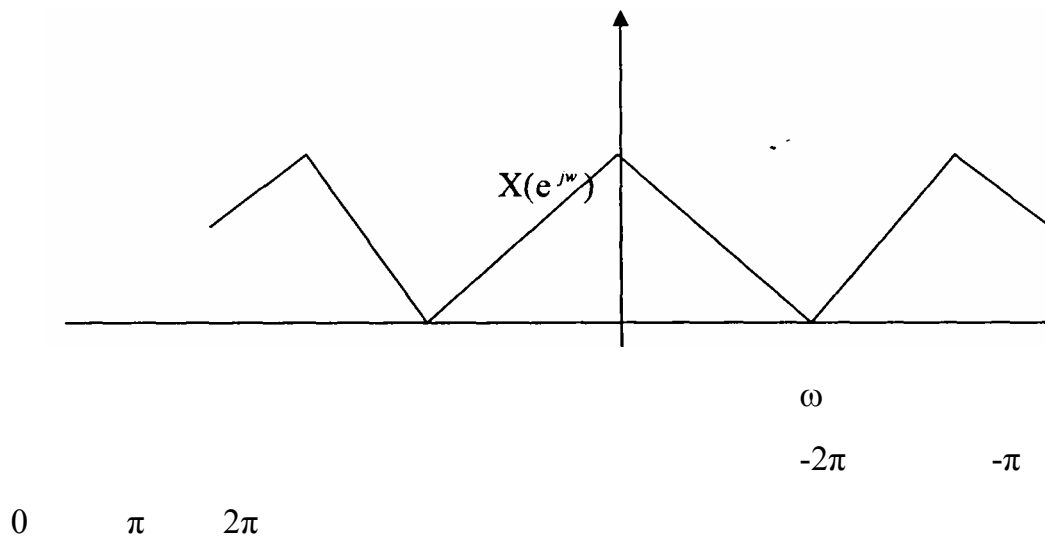
$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (3.2.3.6)$$

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\frac{\omega}{L}}) = X(e^{j\omega}) \quad (3.2.3.7)$$

Ch

Ví dụ 3.2.3.3

Cho tín hiệu rời rạc $x(n]$ được lấy mẫu từ tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist, $x(n]$ có phổ như sau (hình 3.2.3.5)



Hình 3.2.3.5

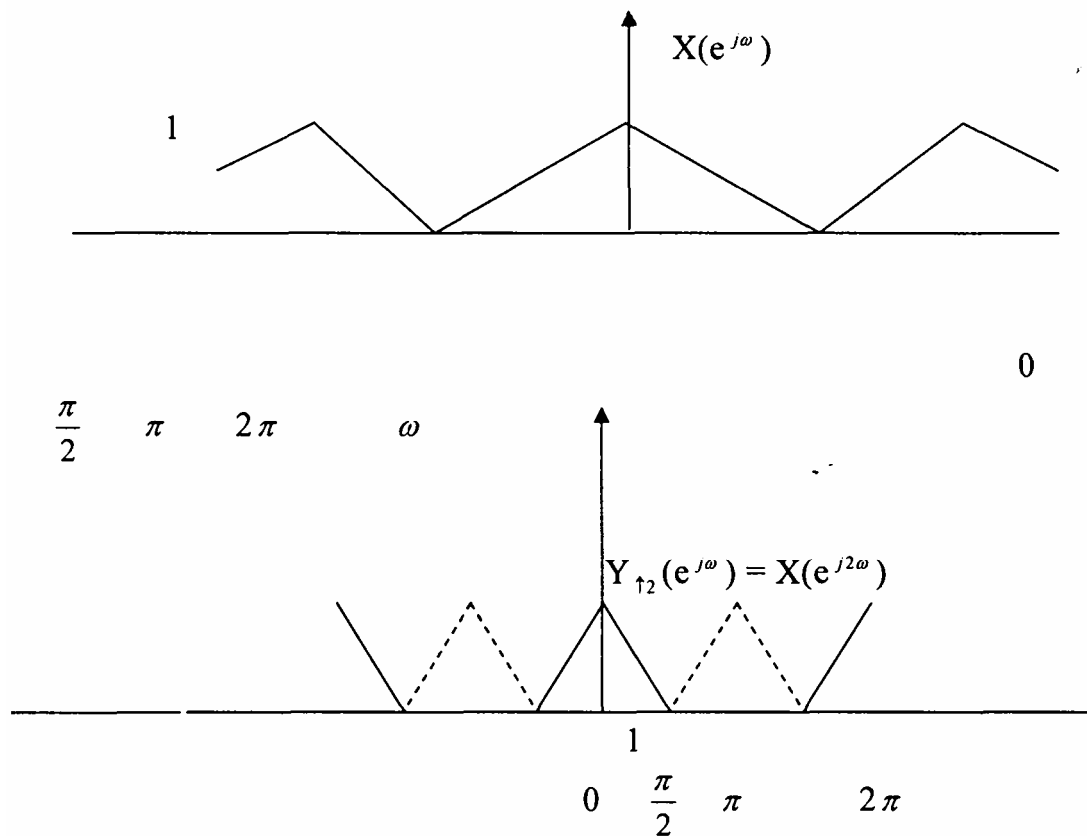
Tín hiệu này đi qua bộ nội suy hệ số $L = 2$ ở đầu ra thu được $y_{\uparrow 2}(n)$. Hãy vẽ phổ của $y_{\uparrow 2}(n)$, tức là vẽ $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega})$.

Giải

Từ biểu thức $Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$

Ta có với $L = 2$ $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$

Kết quả được minh họa trên hình 3.2.2.6



Hình 3.2.3.6

Nhận xét

- $Y_{\uparrow L}(e^{j\omega})$ là bản ảnh (version) co hẹp L lần của $X(e^{j\omega})$, nhưng lại xuất hiện $(L - 1)$ bản sao chụp phổ cơ bản, $(L - 1)$ bản sao chụp phụ này là các ảnh được tạo ra bởi bộ nội suy hệ số L . Hiện tượng xuất hiện các bản sao chụp phụ này gọi là hiệu ứng tạo ảnh (imaging)

- Từ ví dụ với $L = 2$ ở trên ta thấy rằng hiệu ứng tạo ảnh này không gây hiện tượng chồng phổ và như vậy nó không làm mất thông tin.

- Phép nội suy làm tín hiệu trải rộng trong miền thời gian (nếu n là thời gian) thì sẽ dẫn đến hiện tượng co hẹp trong miền tần số, đây là tính chất của biến đổi Fourier.

- Phép nội suy tằm chen. thêm $(L - 1)$ mẫu có biên độ 0 vào giữa hai mẫu của tín hiệu thì trong miền tần số sẽ tạo ra $(L - 1)$ bản sao chụp phụ phổ cơ bản, tức là $L - 1$ bản sao chụp này sẽ chen vào giữa hai phổ cơ bản.

- Từ nội suy ở đây có nghĩa là nếu tín hiệu trải rộng với tần số lấy mẫu F_s sau khi qua bộ nội suy sẽ có tần số lấy mẫu $F'_s = LF_s$ và với các mẫu có biên độ 0. Sau đó ta cho qua bộ lọc có tần số cắt là $\frac{\pi}{L}$ thì ở đầu ra của bộ lọc ta sẽ thu được tín hiệu với tần số lấy mẫu LF_s nhưng các mẫu biên độ 0 đã được nội suy từ các mẫu biên độ khác 0 của tín hiệu, tức là ta có tín hiệu trải rộng có tần số lấy mẫu LF_s với các mẫu biên độ khác 0, quá trình nội suy này được thực hiện bằng mạch lọc nội suy mà ta sẽ nghiên cứu kỹ ở phần sau.

3.2.4. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU VỚI HỆ SỐ $\frac{M}{L}$

a) Biểu diễn trong miền tần số n

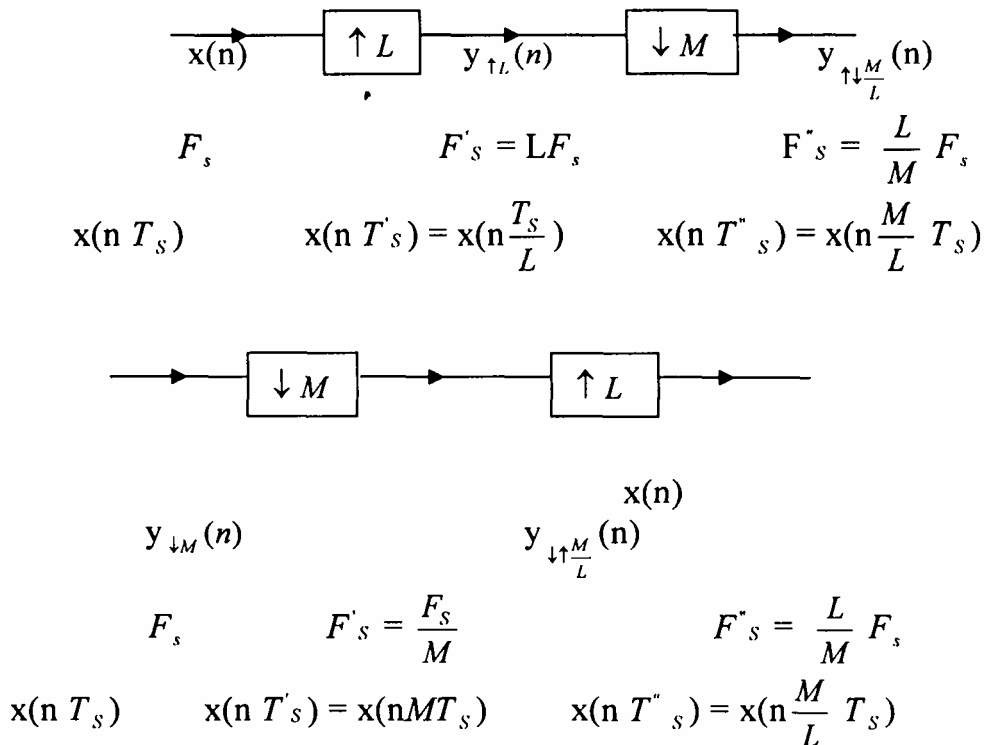
Trong kỹ thuật nhiều khi để thực hiện một nhiệm vụ nào đó chúng ta cần phải thay đổi nhịp lấy mẫu với hệ số là phân số $\frac{M}{L}$. Để thực hiện nhiệm vụ này chúng ta sẽ ghép nối tiếp giữa hai bộ nội suy và phân chia với nhau hoặc theo thứ tự ngược lại, bộ này ta gọi là bộ biến đổi nhịp với hệ số $\frac{M}{L}$. Xem hình 3.2.4.1.

Ta thấy rằng tần số lấy mẫu F_s của tín hiệu vào sau khi qua khỏi bộ biến đổi nhịp với hệ số $\frac{M}{L}$ thì tần số lấy mẫu sẽ bị thay đổi $\frac{M}{L}$ lần tức là:

$$F'_s = \frac{L}{M} F_s \quad (3.2.4.1)$$

Hoặc Chu kỳ lấy mẫu sẽ thay đổi $\frac{M}{L}$ lần:

$$(3.2.4.2) \quad T'_s = \frac{M}{L} T_s$$



Hình 3.2.4.1

Chúng ta có thể dùng ký hiệu toán tử để biểu diễn phép biến đổi nhịp lấy mẫu hệ số

$\frac{M}{L}$ như sau

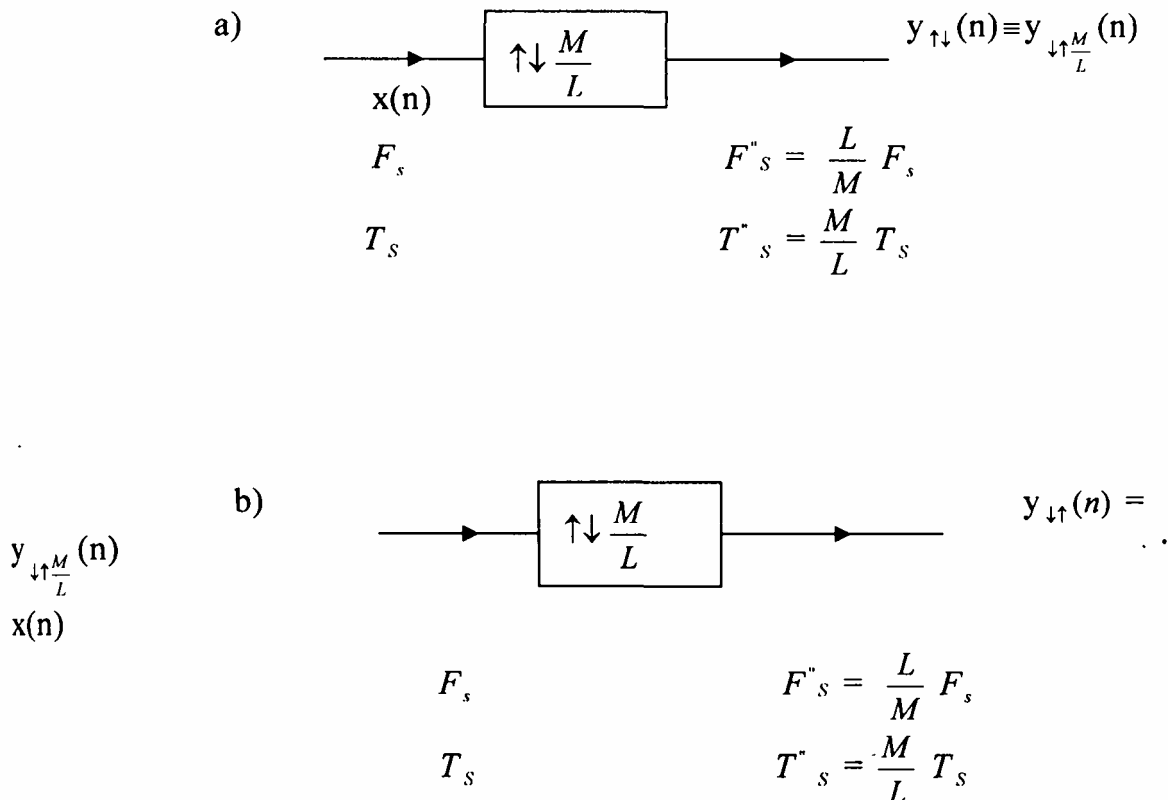
$$\uparrow\downarrow \frac{M}{L} [x(n)] = y_{\uparrow\downarrow \frac{M}{L}}(n) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{\uparrow\downarrow \frac{M}{L}} y_{\uparrow\downarrow \frac{M}{L}}(n) \quad (3.2.4.3)$$

$$\downarrow\uparrow \frac{M}{L} [x(n)] = y_{\downarrow\uparrow \frac{M}{L}}(n) \text{ hay } x(n) \xrightarrow{\downarrow\uparrow \frac{M}{L}} y_{\downarrow\uparrow \frac{M}{L}}(n) \quad (3.2.4.4)$$

Để thuận tiện ta ký hiệu lại bộ biến đổi nhịp hệ số $\frac{M}{L}$ như hình 3.2.4.2. Nếu mũi tên lên $\uparrow$ đặt trước mũi tên xuống $\downarrow$ thì tức là bộ nội suy đặt trước bộ phân chia. Còn nếu mũi tên xuống $\downarrow$ đặt trước mũi tên lên $\uparrow$ thì tức là bộ phân chia đặt trước bộ nội suy. Trong hệ số $\frac{M}{L}$ thì tử số là hệ số của bộ phân chia, mẫu số là hệ số của bộ nội suy.

Sở dĩ ta phải phân biệt trước sau giữa bộ phân chia và bộ nội suy bởi vì phép phân chia và nội suy không có tính chất giao hoán. Bộ phân chia, bộ nội suy và bộ biến đổi nhịp là những hệ thống không phải là bất biến theo biến số n , tức là, chúng là các hệ thống thay đổi theo n (nếu n là thời gian, thì là thay đổi theo thời gian).

Như vậy nói chung thì $y_{\uparrow\downarrow \frac{M}{L}}(n) \neq y_{\downarrow\uparrow \frac{M}{L}}(n)$ mặc dù tỉ lệ thay đổi nhịp lấy mẫu đều là $\frac{M}{L}$. Tuy nhiên cũng có trường hợp $y_{\uparrow\downarrow \frac{M}{L}}(n) = y_{\downarrow\uparrow \frac{M}{L}}(n)$ nếu quan hệ giữa M và L thỏa mãn một số điều kiện (ta sẽ xét sau).



a) bộ biến đổi nhíp $\uparrow\downarrow \frac{M}{L}$

b) bộ biến đổi nhíp $\downarrow\uparrow \frac{M}{L}$

hình 3.2.4.2

nếu $M > L$ thì bộ thay đổi nhíp làm nhiệm vụ nén tín hiệu theo tỷ lệ $\frac{M}{L}$

nếu $M < L$ thì bộ thay đổi nhíp làm nhiệm vụ giãn tín hiệu theo tỷ lệ $\frac{M}{L}$

Ví dụ 3.4.2.1

Cho $x(n)$ như sau

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{5} & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

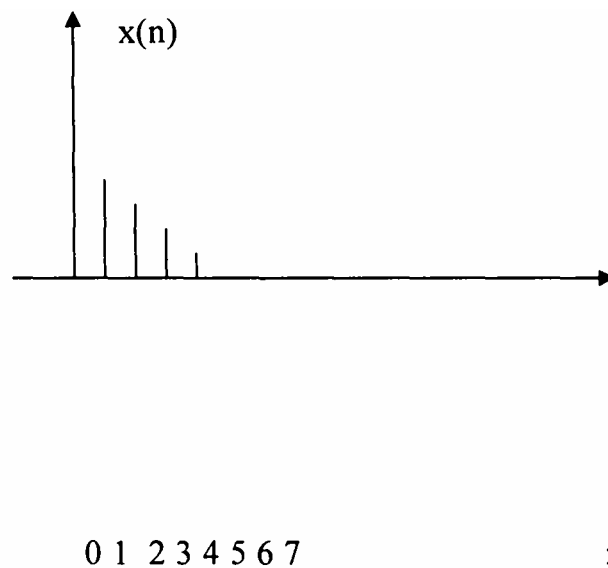
$x(n)$ đi qua bộ biến đổi nhíp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L} = \frac{2}{3}$. Hãy vẽ tín hiệu ra $y(n)$ với:

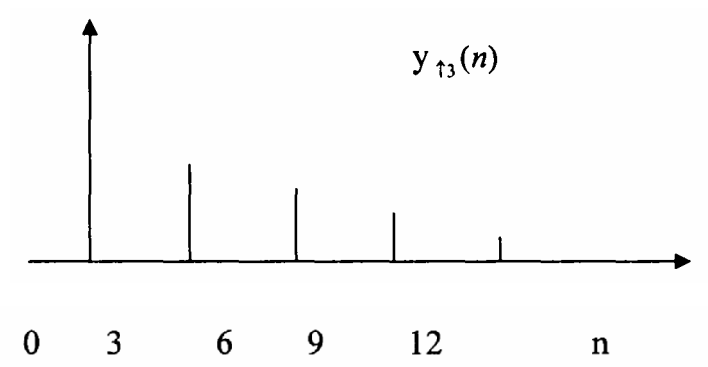
a) bộ biến đổi nhíp $\uparrow\downarrow \frac{M}{L}$

b) bộ biến đổi nhíp $\downarrow\uparrow \frac{M}{L}$

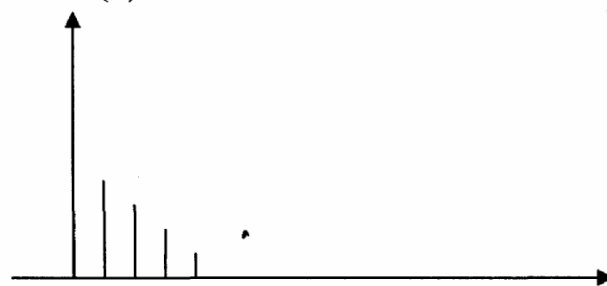
Giải

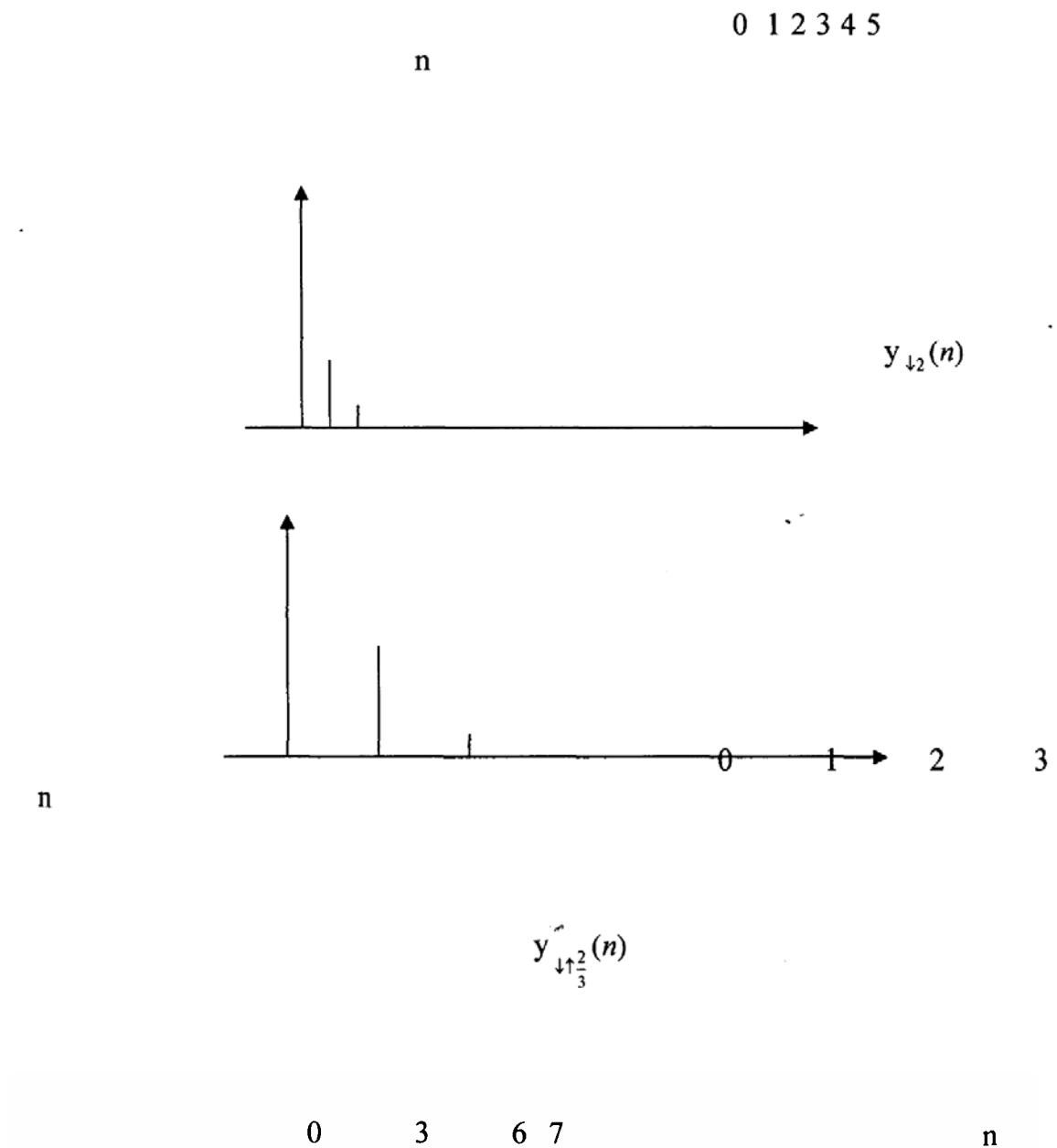
Ta giải bằng đồ thị, xâu được chuẩn hóa bởi $T'_s = \frac{2}{3} T_s$





$$y_{\uparrow \downarrow \frac{2}{3}}(n)$$





Hình 3.2.4.3

Nhận xét:

- Trong trường hợp của ví dụ 3.2.4.1 ta thấy rằng nếu $M = 2, L = 3$ thì $y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(n) \dots$

(không nhìn thấy vì phông mờ)

$n_0 L = n_1 M + 1$ và n_1 là các số nguyên

hoặc:

$$n_1 M = n_0 L + 1$$

Thì

$$y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n) = y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(n)$$

Ta có thể ký hiệu sự tương đương này như sau:

$$y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n) \equiv y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(n) \quad (3.2.4.5)$$

Nếu L và M thỏa mãn điều kiện:

$$n_0 L - n_1 M = 1$$

Hoặc:

$$n_1 M - n_0 L = 1 \quad (3.2.4.6)$$

ở đây n_0 và n_1 là các số nguyên.

(3.2.4.6) chính là nội dung của định lý Euclid.

b) Biểu diễn trong miền z

Trong phần này ta sẽ dùng biến đổi z để nghiên cứu quan hệ vào ra của các bộ biến đổi nhíp, và cũng từ đây chúng ta sẽ giải thích được nhiều tính chất của phép biến đổi nhíp lấy mẫu.

Trước tiên ta xét quan hệ vào ra của bộ biến đổi nhíp $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)$, ta có phép biến đổi nhíp như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)$$

vậy trong miền z ta cũng có :

$$ZT[x(n)] = X(z) \xrightarrow{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) = ZT[y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)] \quad (3.2.4.7)$$

Với phép phân chia ta có :

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(z) = ZT[y_{\downarrow M}(n)]$$

$$y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l})$$

sau đó $y_{\downarrow M}(n)$ đi qua bộ nội suy $\uparrow L$ ta có :

$$y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) = ZT[y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)]$$

$$\begin{aligned}
y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) &= y_{\downarrow M}(z^L) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{l}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} W_M^{lL})
\end{aligned}$$

Bây giờ ta xét quan hệ vào ra của bộ biến đổi nhíp $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)$, ta có phép biến đổi nhíp như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)$$

Trong miền z ta có :

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z)$$

(3.2.4.8)

Với phép nội suy $\uparrow L$ ta có :

$$\begin{aligned}
X(z) &\xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(z) \\
Y_{\uparrow L}(z) &= X(z^L)
\end{aligned}$$

Sau đó $y_{\uparrow L}(n)$ đi qua bộ phân chia $\downarrow M$ ta có :

$$\begin{aligned}
Y_{\uparrow L}(z) &\xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) = ZT[y_{\downarrow \uparrow M}(n)] \\
y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow L}(z^{\frac{l}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l})
\end{aligned}$$

$$Y_{\uparrow L}(z^{\frac{l}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) = X \left[z^{\frac{l}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}lL} \right]$$

Vậy :

$$\begin{aligned}
y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{l}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}lL}) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} W_M^{lL})
\end{aligned} \tag{3.2.4.9}$$

- Dựa vào biểu thức $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z)$ và $Y_{\uparrow L}(z)$ ta thấy rằng $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) \neq y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z)$, tức là nói chung $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n) \neq y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z)$, như mục trên chúng ta có nhận xét.

- Nhưng cũng có những khả năng $y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) = y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z)$ nếu:

$$\sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} W_M^{l'}) = \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} W_M^{Ll})$$

Điều này có thể xảy ra nếu và chỉ nếu $W_M^{l'} = W_M^{Ll}$ hoặc tập hợp M số hạng W_M^{Ll} trùng với tập hợp M số hạng $W_M^{l'}$ với $0 \leq l \leq M-1$.

-Trong trường hợp $1 = M$ ta có:

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow \uparrow M/M} Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z)$$

Vậy :

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z W_M^l) \quad (3.2.4.10)$$

Và :

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow \uparrow M/M} Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z)$$

Vậy :

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z W_M^{lM})$$

bởi vì :

$$W_M^{lM} = W_M^l = e^{j2\pi l} = 1$$

Do đó :

$$Y_{\downarrow \uparrow M/M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z) = X(z) \quad (3.2.4.11)$$

Ví dụ 3.2.4.2

Một tín hiệu $x(n)$ có biến đổi z như sau :

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6}$$

$x(n)$ đi qua bộ biến nhịp $\downarrow \uparrow 2/3$ và $\uparrow \downarrow 2/3$ hãy tìm $Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$ và $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z)$ và so sánh kết quả.

Giải

Từ biểu thức của $X(z)$ ta tính $Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$ như sau :

$$Y_{\downarrow 2/3}(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3}$$

$$Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z) = 1 + 3z^{-3} + 5z^{-6} + 7z^{-9}$$

Bây giờ ta tính $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z) = Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z)$

$$Y_{\uparrow 3}(z) = 1 + 2z^{-3} + 3z^{-6} + 4z^{-9} + 5z^{-12} + 6z^{-15} + 7z^{-18}$$

$$Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z) = 1 + 3z^{-3} + 5z^{-6} + 7z^{-9}$$

So sánh kết quả ta thấy rằng $Y_{\uparrow \downarrow 2/3}(z) = Y_{\downarrow \uparrow 2/3}(z)$

c) Biểu diễn phép biến đổi nhịp trong miền tần số

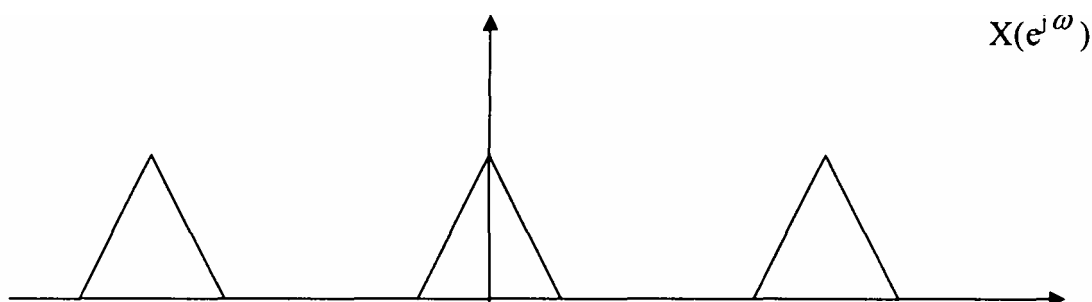
Đánh giá $X(z)$, $Y_{\downarrow M/L}(z)$ và $Y_{\uparrow M/L}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta có:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 Y_{\downarrow M/L}(e^{j\omega}) &= Y_{\downarrow M/L}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X e^{j \frac{\omega L - 2\pi l}{M}}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4.12}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{\uparrow M/L}(e^{j\omega}) &= Y_{\uparrow M/L}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
 \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X e^{j \frac{\omega L - 2\pi l}{M}}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4.13}$$

Ví dụ 3.2.4.3

Cho tín hiệu xấp xỉ có phổ là như trên hình 3.2.4.4 sau đây:



Hình 3.2.4.4

Giải

Giải bằng đồ thị trên hình 3.2.4.4 sau đây:

Từ hình 3.2.4.4 ta thấy rằng $Y_{\downarrow 2/3}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow 2/3}(e^{j\omega})$

3.3. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI LẤY MẪU

3.3.1. BỘ LỌC PHÂN CHIA

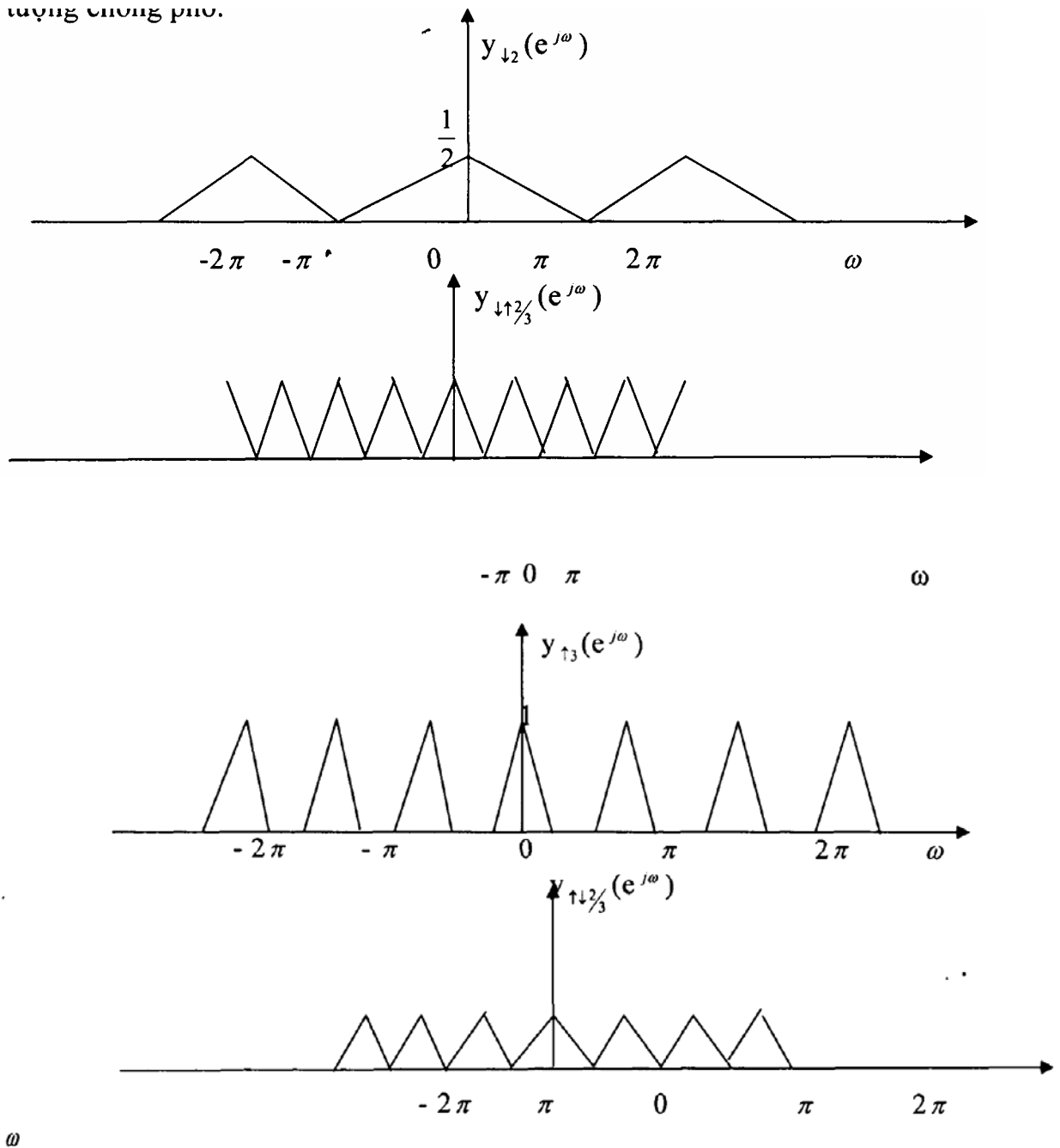
a) Tổng quan

Ở phần trên ta đã nghiên cứu phép phân chia và bộ phân chia, kết quả cho thấy tín hiệu $x(n)$ khi đi qua bộ phân chia $\downarrow M$, trong miền tần số sẽ tạo ra $M-1$ thành phần hư danh (aliasing), các thành phần hư danh này sẽ gây hiện tượng chồng phổ, Nhưng nếu $x(n)$

có band tần nằm trong khoảng $\frac{\pi}{M} \sim \frac{\pi}{M}$ tức là tần số giới hạn dải chặn (Stopband edge)

$\omega = \frac{\pi}{L}$ sẽ gây hiện tượng chồng phổ

hiện tượng chồng phổ.

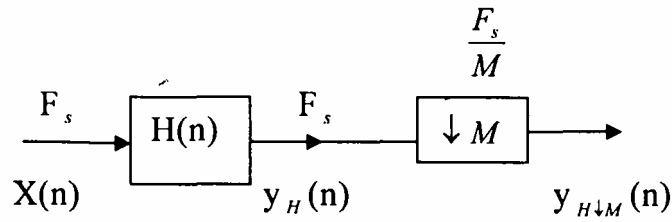


Hình 3.2.4.5

Để làm điều này chúng ta có thể đặt trước bộ phân chia $\downarrow M$ một bộ lọc thông thấp có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$

Bộ lọc thông thấp này làm nhiệm vụ loại bỏ các thành phần tần số $|\omega| < \frac{\pi}{M}$ như vậy ta sẽ tránh được hiện tượng chồng phổ.

Sơ đồ tổng quát của bộ lọc phân chia cho trên hình 3.3.1.1



$h(n)$: đáp ứng xung của bộ lọc

Hình 3.3.1.1

Để ngắn gọn chúng ta có thể dùng cách biểu diễn toán tử như sau:

$$X(n) \xrightarrow{H \downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (3.3.1.1)$$

$$X(n) \xrightarrow{H} y_H(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (3.3.1.2)$$

b) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền biến số n

Các phép toán trong phép lọc phân chia xảy ra như sau trong miền biến số n :

$$x(n) \xrightarrow{h(n)} y_H(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{H \downarrow M}(n) \quad (3.3.1.3)$$

ở đây :

$$\begin{aligned} y_H(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned}$$

$$y_{H \downarrow M}(n) = \downarrow M[x(n) * h(n)] = \downarrow M[y_H(n)]$$

Cần lưu ý một điều là phép chia không có tính chất phân phối vào phép chập, tức là:

$$\downarrow M[x(n) * h(n)] \neq \downarrow M[x(n)] * \downarrow M[h(n)]$$

Bởi vì:

$$\begin{aligned} y_{H \downarrow M}(n) &= \downarrow M[x(n) * h(n)] = \downarrow M \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Mn-k) \quad (3.3.1.4) \\ \downarrow M[x(n)] * \downarrow M[h(n)] &= x(Mn) * h(Mn) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(Mk)h(Mn - Mk)$$

Ví dụ 3.3.3.1

cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

Hãy tìm $y_{H\downarrow 2}(n)$

Giải

$$X(n) = \{1,1,1\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$H(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$X(n)*h(n) = h(n) = \{1, 1,75, 2,25, 1,5, 0,75, 0,25\} = y_H(n)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\downarrow 2[y_H(n)] = y_{H\downarrow 2} = \{1, 2,55, 0,75\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$0$$

Bây giờ ta thử tính $\downarrow 2[x(n)] * \downarrow 2[h(n)] = x_{\downarrow 2}(n) * h_{\downarrow 2}(n)$

$$x_{\downarrow 2}(n) = \{1,1\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$0$$

$$h_{\downarrow 2}(n) = \{1, 0,5\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$0$$

$$x_{\downarrow 2}(n)*h_{\downarrow 2}(n) = \{1, 1,5, 0,5\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}$$

Như vậy rõ ràng là

$$\downarrow M[x_{\downarrow 2}(n)*h_{\downarrow 2}(n)] \neq \downarrow M[x(n)] * \downarrow M[h(n)]$$

c) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền z

Trong miền z phép lọc phân chia được mô tả như sau:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(z) = \downarrow M[Y_H(z)] \quad (3.3.1.5)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)], Y_H(z) = ZT[Y_H(n)] \\ H(z) &= ZT[h(n)], Y_{H\downarrow M}(z) = ZT[Y_H(n)] \\ Y_H(z) &= X(z).H(z) = H(z).X(z) \\ Y_{H\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l). \downarrow M[Y_H(z)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l).H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \end{aligned} \quad (3.3.1.6)$$

Cũng như trong miền biến số n ta lưu ý một điều là phép phân chia không có tính chất phân phối vào phép nhân trong miền z tức là:

$$\downarrow M[X(z).H(z)] \neq \downarrow MX(z). \downarrow M[H(z)]$$

Ví dụ 3.3.1.2

Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$H(n) = \{1, 0,75, 0,5, 0,25\}$$

$\downarrow 2$

Hãy tìm $y_{H\downarrow 2}(z)$

Giải

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ H(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} \\ X(z).H(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + \\ &0,25z^{-3} + \\ &+ z^{-1} + 0,75z^{-2} + 0,5z^{-3} + 0,25z^{-4} + \\ &+ z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5} \\ Y_H(z) &= 1 + 1,75z^{-1} + 2,25z^{-2} + 1,5z^{-3} + 0,75z^{-4} + 0,25z^{-5} \\ \downarrow M[Y_H(z)] &= y_{H\downarrow 2}(z) = 1 + 2,25z^{-1} + 0,75z^{-2} \end{aligned}$$

Hoặc ta có thể tính theo công thức:

$$y_{H\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \left[X(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}}) \right]$$

Chú ý: Xét phép lọc phân chia sau đây:

$$X(z) \xrightarrow{H(z^M)} Y_H(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(z)$$

Ta có

$$\begin{aligned} Y_H(z) &= X(z).H(z^M) \\ Y_{H\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l).H(z) \\ &= H(z) \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \end{aligned} \quad (3.3.1.7)$$

Bây giờ ta xét phép lọc phân chia sau đây:

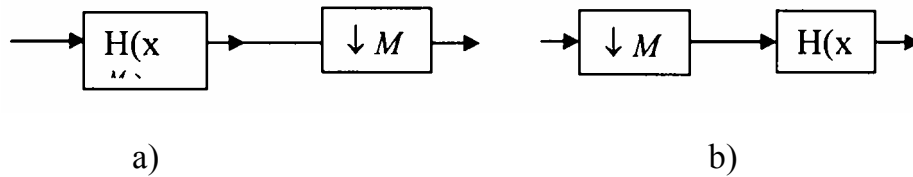
$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\downarrow MH}(z) \quad (3.3.1.8)$$

Ta có :

$$Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l)$$

$$Y_{H\downarrow M}(z) = H(z) \cdot \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \quad (3.3.1.9)$$

Ta thấy rằng $Y_{H\downarrow M}(z) = Y_{\downarrow MH}(z)$ vậy hai phép lọc này là tương đương nhau. Do đó sơ đồ thực hiện hai phép này là đồng nhất, xem hình 3.3.1.2



Hình 3.3.1.2

- Sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.1.2 là rất có giá trị trong các ứng dụng thực tế để thực hiện các bộ lọc và các bank lọc.

- Để ngắn gọn ta kí hiệu phép lọc trên hình 3.3.1.2 (a) và (b) là $|H(z^M) \downarrow M|$ và $|\downarrow MH(z)|$. Vậy ta có thể viết:

$$H(z^M) \downarrow M \equiv \downarrow MH(z) \quad (3.3.1.10)$$

d) Biểu diễn phép lọc phân chia trong miền tần số

đánh giá $X(z)$, $H(z)$ và $Y_{H\downarrow M}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta có sẽ có cách biểu diễn phép lọc phân chia trong miền tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_H(e^{j\omega}) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) \quad (3.3.1.11)$$

ở đây:

$$Y_H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})})$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})}) H(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})}) \quad (3.3.1.12)$$

Nếu $Y_H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ thì các thành phần hư danh sẽ không gây hư thông tin, tức là không có hiện tượng chồng phổ. Do đó ta có thể tách thành phần đầu tiên ($l = 0$) ra mà dạng của nó sẽ không bị méo:

$$Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) \Big|_{|\omega| \leq M} = \frac{1}{M} X(e^{j\frac{\omega}{M}}) \cdot H(e^{j\frac{\omega}{M}})$$

và nếu $H(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp lý tưởng tức là ô dải thông $|H(e^{j\omega})|=1$ dải chắn $|H(e^{j\omega})|=0$ thì ta có thành phần đầu tiên ($I = 0$) như sau:

$$Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) \Big|_{|\omega| \leq \pi} = \frac{1}{M} X(e^{j\frac{\omega}{M}}) \quad |\omega| \leq \pi$$

Chú ý

Trong ví dụ trên ở bộ phân chia $\downarrow M = 2$ đã không gây hiện tượng chồng phổ, bởi vì tần số ω_s của bộ lọc thông thấp bằng $\frac{\pi}{2}$, nó đã cắt bỏ đi thành phần tần số cao $|\omega| > \frac{\pi}{2}$.

Vậy nếu thông tin của chúng ta chỉ chứa trong thành phần phổ $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ thì bộ lọc sẽ không làm mất mát thông tin. Còn nếu thông tin của chúng ta có chứa cả trong các thành phần phổ có $|\omega| > \frac{\pi}{2}$ thì việc cắt bỏ thành phần tần số cao đã làm mất mát thông tin của chúng ta.

e) Tính chất của phép lọc phân chia

Nếu

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

Thì

$$Y_H(z) = Y(z)[H_1(z) + H_2(z)]$$

$$= X(z) \cdot H_1(z) + X(z) \cdot H_2(z)$$

$$Y_{H\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) =$$

$$\downarrow M[Y_H(z)]$$

=

$$\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \left[X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \cdot H_1(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) + X(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \cdot H_2(z^{\frac{1}{M}} W_M^l) \right]$$

$$= \downarrow M[X(z) \cdot H_1(z)] + \downarrow M[X(z) \cdot H_2(z)] \quad (3.3.1.13)$$

Vậy phép phân chia có tính phân phối vào phép cộng

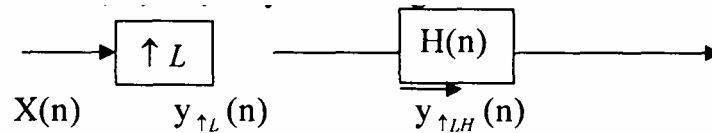
3.3.2. BỘ LỌC NỘI SUY

a) Tổng quan

Chúng ta đã nghiên cứu phép nội suy và bộ nội suy, kết quả phép nội suy đã chèn thêm

$L-1$ mẫu biên độ 0 vào giữa hai mẫu của tín hiệu vào $x(n)$ trong miền biến số n . Và tương ứng trong miền tần số sẽ tạo ra $L-1$ ảnh phụ của phổ cơ bản sau khi đã co hẹp lại L lần để nhường chỗ cho $L-1$ ảnh phụ mà không gây hiện tượng chồng phổ. Như vậy phép nội suy $\uparrow L$ không làm hư thông tin, nhưng để nội suy ra các mẫu có biên độ 0 ta phải đặt sau bộ nội suy một bộ lọc có $\omega_c = \frac{\pi}{L}$. Trong miền biến số n bộ lọc này làm nhiệm vụ nội suy ra các mẫu có biên độ 0 còn trong miền tần số nó làm nhiệm vụ loại bỏ các ảnh phụ của phổ cơ bản.

Sơ đồ tổng quát của bộ lọc nội suy cho trong hình 3.3.2.1.



Bộ lọc thông thấp có $\omega_c = \frac{\pi}{L}$

$H(n)$: đáp ứng xung của bộ lọc

Hình 3.3.2.1

Chúng ta có thể hình dung cách biểu diễn toán tử sau đây để biểu diễn một cách ngắn gọn phép lọc nội suy.

$$X(n) \xrightarrow{\uparrow LH} y_{\uparrow LH}(n) \quad (3.3.2.1)$$

$$X(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{\uparrow H} y_{\uparrow LH}(n) \quad (3.3.3.2)$$

b) Biểu diễn phép lọc nội suy trong miền biến số n .

Quá trình lọc nội suy được biểu diễn trong miền biến số n như sau:

$$X(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \quad (3.3.3.3)$$

ở đây: $y_{\uparrow L}(n) = \uparrow L[x(n)]$

$$= \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \neq \dots \end{cases}$$

$$y_{\uparrow LH}(n) = y_{\uparrow L}(n) * h(n) =$$

$(n) * y_{\uparrow L}(n)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k) h(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{L}\right) h(n-k) \quad k=0, \pm L, \pm 2L, \dots$$

Đổi biến số $r = \frac{k}{L}$, vậy $k = rL$

Ta có :

$$y_{\uparrow LH}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-rL)$$

Ví dụ 3.3.2.1

Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$\rightarrow$

0

Hãy tìm $y_{\uparrow 2H}(n)$

Giải

$\rightarrow$

$$X(n) = \{ 1, 1, 1 \}$$

0

$$y_{\uparrow 2}(k) = \{ 1, 0, 1, 0, 1 \}$$

|

$\rightarrow$

0

$$H(-k) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

0 $\leftarrow$

$$y_{\uparrow 2H}(n) = y_{\uparrow 2H}(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow 2}(k)h(n-k)$$

$$= \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{4}, 1, \frac{6}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$\rightarrow$

0

c) Biểu diễn phép lọc nội suy trong miền z .

Chúng ta mô phỏng phép lọc nội suy trong miền z bằng cách sau đây :

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z) \quad (3.3.2.5)$$

Ở đây:

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)]; & Y_{\uparrow L}(z) &= ZT[y_{\uparrow L}(n)] \\ X(z) &= ZT[h(n)]; & Y_{\uparrow L}(z) &= ZT[y_{\uparrow LH}(n)] \end{aligned}$$

Ta đã có:

$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L) \quad ; \quad Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z).H(z)$$

Vậy :

$$Y_{\uparrow LH}(z) = X(z^L).H(z)$$

Ví dụ 3.3.3.2

Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy tìm $Y_{\uparrow 2H}(z) \sim$

Giải

$$X(z^2) = 1 + z^{-2} + z^{-4} = Y_{\uparrow 2}(z)$$

$$H(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3}$$

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow 2}(z)H(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} + \\ &\quad + z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5} + \\ &\quad + z^{-4} + 0,75z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \\ Y_{\uparrow 2H}(z) &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + z^{-3} + 1,5z^{-4} + z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \end{aligned}$$

Chú ý

- xét phép lọc nội suy sau :

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z^L)} Y_{\uparrow LH}(z) \quad (3.3.2.6)$$

Ta có:

$$Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z).H(z^L) = X(z^L).H(z^L) \quad (3.3.2.7)$$

- Bây giờ ta xét phép lọc nội suy sau:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{L\uparrow H}(z) \quad (3.3.2.8)$$

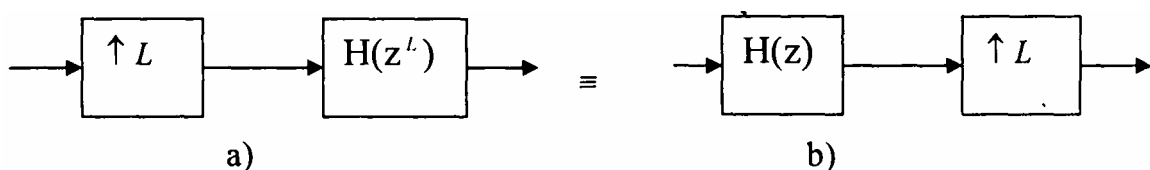
Ta có:

$$Y_H(z) = X(z).H(z) = H(z).X(z)$$

$$\begin{aligned} Y_{L\uparrow H}(z) &= Y_H(z^L) \\ &= X(z^L).H(z^L) \end{aligned}$$

(3.3.2.9)

Ta thấy rằng $Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{L\uparrow H}(z)$. Vậy hai phép lọc nội suy này là tương đương, do đó sơ đồ thực hiện hai phép này cũng tương đương nhau, ta muốn dùng sơ đồ nào cũng được, xem hình 3.3.3.2.



Hình 3.3.3.2

- Cũng giống như trong phần lọc phân chia, sự tương đương giữa hai sơ đồ này rất quan trọng trong các ứng dụng thực tế để xây dựng các bộ lọc cũng như các bank lọc.

Để ngắn gọn ta kí hiệu phép lọc trên hình 3.3.3.2 (a) và (b) là $\uparrow L H(z^L)$ và $H(z)\uparrow L$, vậy ta có thể viết :

$$\uparrow L H(z^L) \equiv H(z)\uparrow L \quad (3.3.2.10)$$

d) Biểu diễn phép nội suy trong miền tần số

Đánh giá $X(z)$, $H(z)$, $Y_{\uparrow L}(z)$ và $Y_{\uparrow LH}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z (tức là thay $z = e^{j\omega}$) ta có thể biểu diễn phép lọc nội suy trong miền tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) \quad (3.3.2.11)$$

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (3.3.2.12)$$

Ví dụ 3.3.2.3

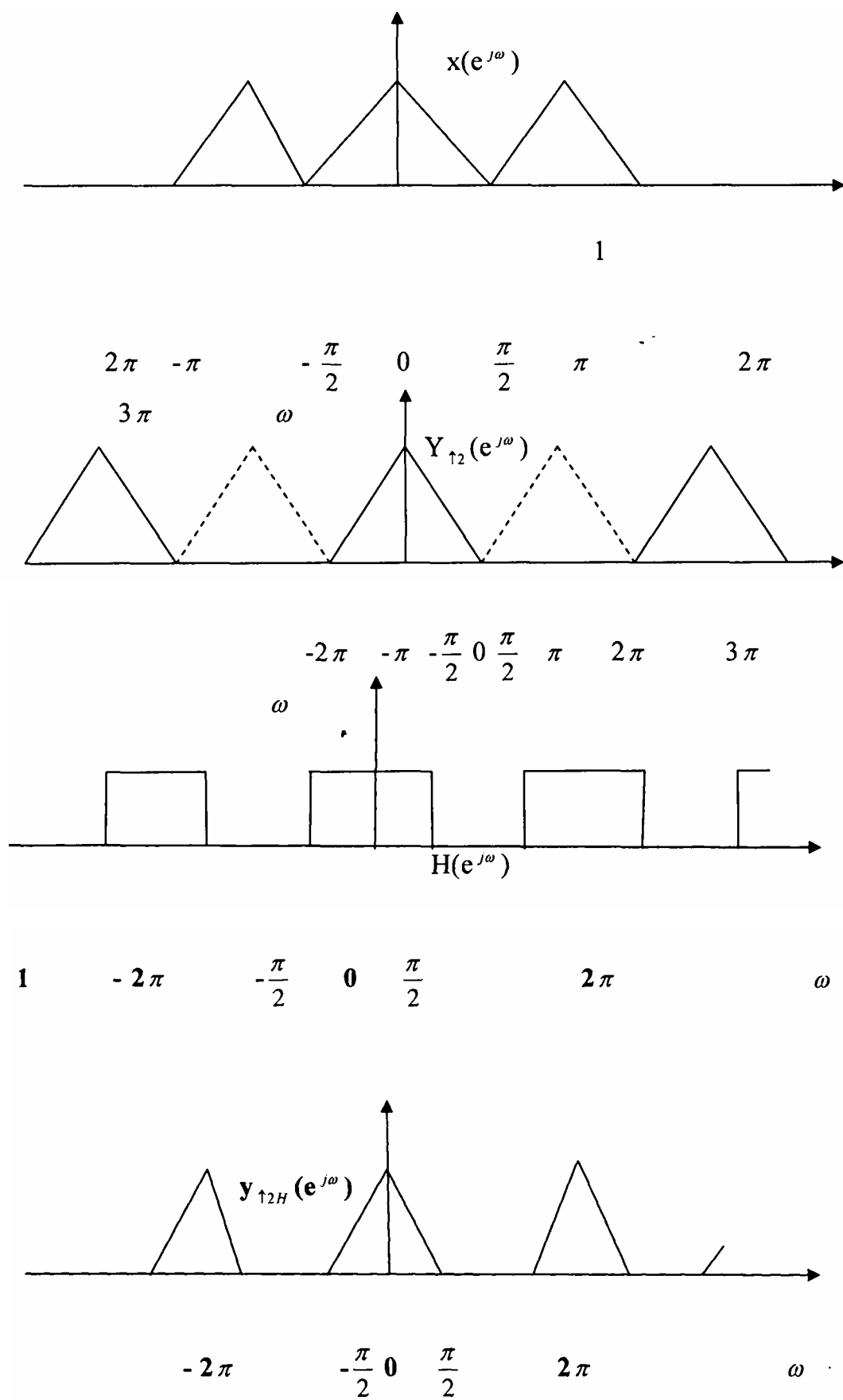
Cho tín hiệu $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$, bề rộng phổ là $-\pi < \omega < \pi$ (xem hình 3.3.2.3a), $x(n)$ đi qua bộ nội suy $\uparrow L=2$, sau đó đi qua bộ lọc thông thấp $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Hãy tính $Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega})$.

Giải

$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}); Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

Cụ thể giải bằng đồ thị trên hình 3.3.2.3



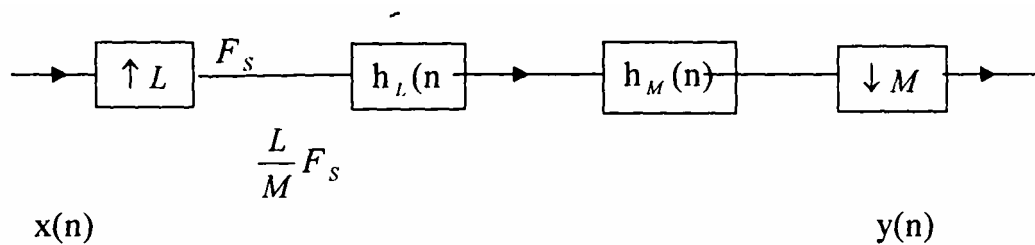
Hình 3.3.2.3

3.3.3. Bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số M/L không nguyên

a) Tổng quan

Chúng ta đã nghiên cứu bộ lọc phân chia và bộ lọc nội suy và chúng ta đã nghiên cứu bộ biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số M/L . Từ đây chúng ta có thể xây dựng bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số không nguyên M/L . bộ lọc biến đổi nhịp này có thể đảm bảo biến đổi nhịp theo hệ số không nguyên M/L nhưng không gây hiện tượng chồng phổ tức là không làm hư hỏng thông tin của chúng ta.

Bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L được xây dựng bằng cách ghép nối tiếp hai bộ phận nội suy và bộ lọc phân chia như trên hình 3.3.3.1.



Hình 3.3.3.1

Do cách ghép nối tiếp bộ lọc nội suy trước với bộ lọc phân chia như trên hình 3.3.3.1 cho ta thấy rằng bộ lọc $h_L(n)$ được ghép nối tiếp với bộ lọc $h_M(n)$, vậy ta có thể kết hợp hai bộ lọc này lại làm một bộ lọc chung có đáp ứng xung hậu bộ lọc này phải làm cả hai nhiệm vụ đối với phép nội suy và phép phân chia, do đó ta phải chọn bộ lọc hạn sao cho cùng một lúc nó thực hiện được cả hai nhiệm vụ này.

Hai bộ lọc này ghép nối tiếp vì vậy đáp ứng tần số $H(e^{j\omega}) = FT[h(n)]$ sẽ là

$$H(e^{j\omega}) = h_L(e^{j\omega}) \cdot H_M(e^{j\omega}) \quad (3.3.3.1)$$

ở đây:

$$H_L(e^{j\omega}) = FT[h_L(n)] \text{ và } H_M(e^{j\omega}) = FT[h_M(n)]$$

Vậy ta cũng có :

$$|H(e^{j\omega})| = |H_L(e^{j\omega})| \cdot |H_M(e^{j\omega})| \quad (3.3.3.2)$$

Ta biết rằng $H_L(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp (giả sử là lý tưởng) có $\omega_c = \frac{\pi}{L}$ còn $H_M(e^{j\omega})$

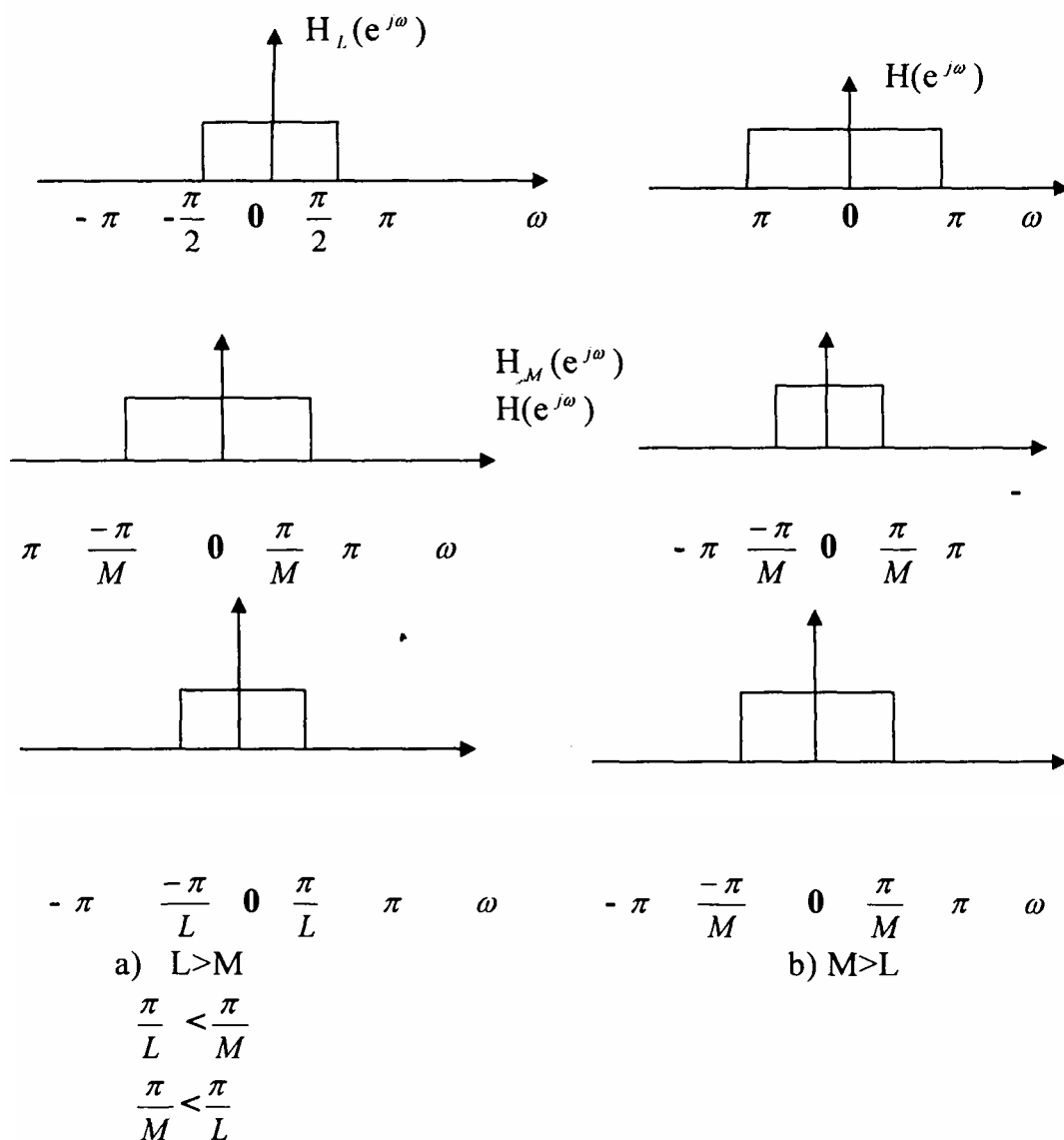
cũng là bộ lọc thông thấp (giả sử là lý tưởng) có $\omega_c = \frac{\pi}{M}$.

Vậy $H(e^{j\omega})$ cần được chọn như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

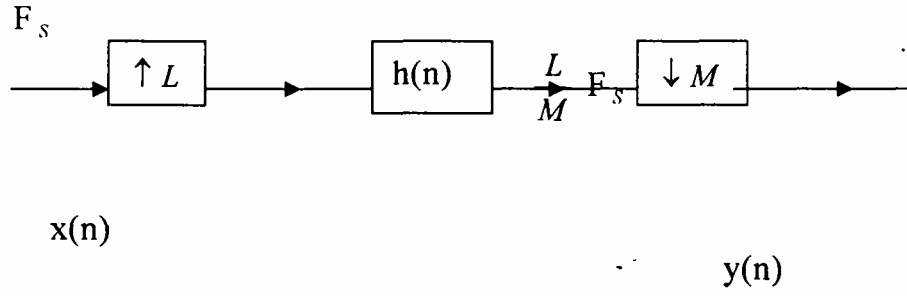
ở đây C là hằng số

Hình 3.3.3.2 minh hoạ cách chọn ω_c của $H(e^{j\omega})$



Hình 3.3.3.2

Kết quả cho ta bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L với chỉ một bộ lọc thông thấp có tập ứng xung $h(n)$ và đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$. Hình 3.3.3.3 cho ta sơ đồ khối của mạch nhịp này



Hình 3.3.3.3

Để ngắn gọn chúng ta có thể dùng cách biểu diễn toán tử như sau :

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (3.3.3.3)$$

hoặc ngắn gọn hơn :

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow H \downarrow M/L} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (3.3.3.4)$$

b) Biểu diễn phép lặn biến đổi nhĩp trong miền biến số n:

Trong miền biến số n, các phép toán của phép lọc biến đổi nhĩp được mô tả như sau:

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{h(n)} y_{\uparrow LH}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) \quad (3.3.3.5)$$

Ở đây:

$$\begin{aligned} y_{\uparrow L}(n) &= \uparrow L [x(n)] \\ &= \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \neq \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} y_{\uparrow LH}(n) &= y_{\uparrow L}(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k) \cdot h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-kL) \\ y_{\uparrow H \downarrow M/L}(n) &= \downarrow M [y_{\uparrow L}(n) * h(n)] \\ &= \downarrow M \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-kL) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(nM - kL) \end{aligned} \quad (3.3.3.6)$$

Ví dụ 3.3.3.1

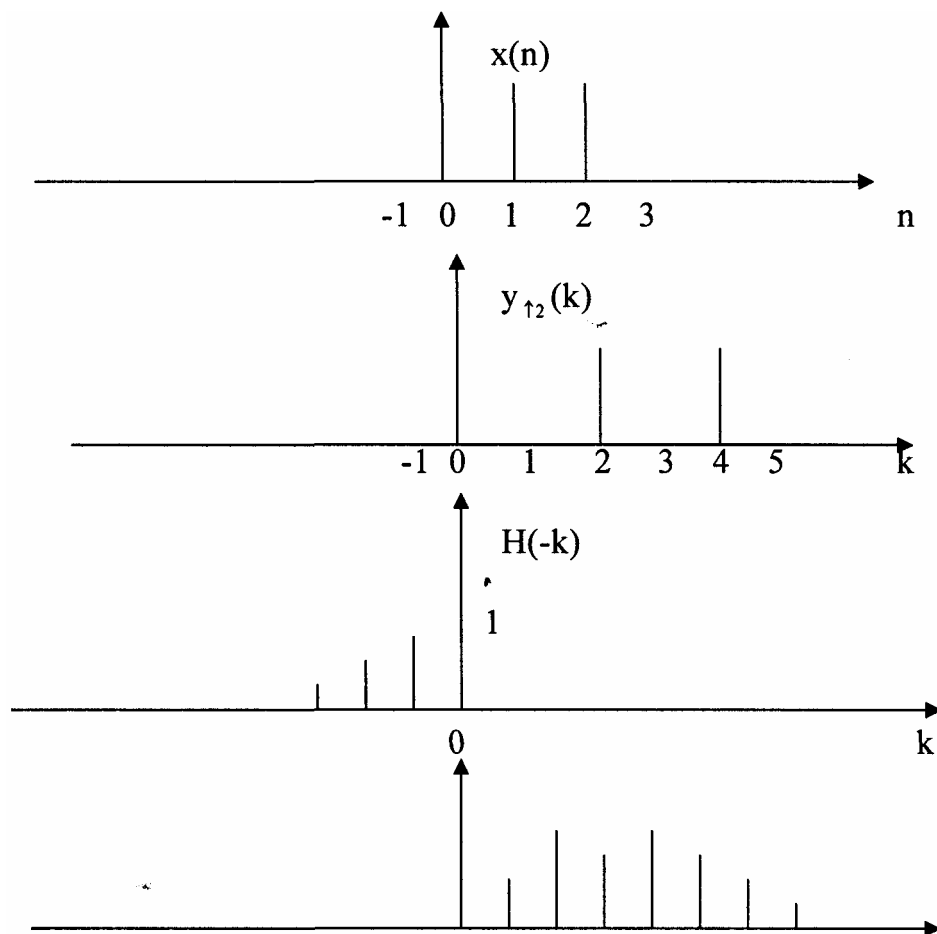
Cho $x(n) = \text{rect}_3(n)$

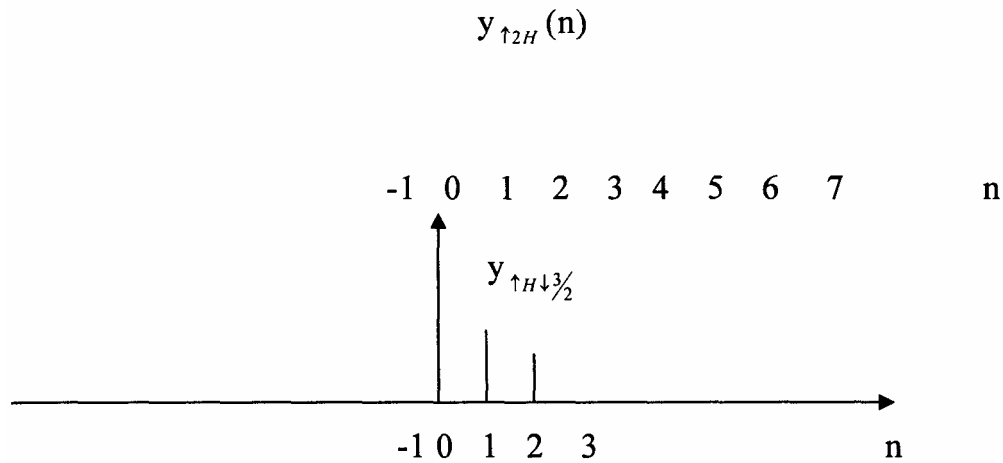
$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

hãy tìm $y_{\uparrow H \downarrow 3/2}(n)$

Giải

Giải bằng đồ thị cho trên hình 3.3.3.4.





Hình 3.3.3.4

c) Biểu diễn phép lọc biến đổi nhíp trong miền z

Trong miền z phép lọc biến đổi nhíp được mô tả như sau:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(z) \quad (3.3.3.7)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)] & H(z) &= ZT[h(n)] \\ Y_{\uparrow LH}(z) &= ZT[y_{\uparrow L}(n)] & Y_{\uparrow LH}(z) &= ZT[y_{\uparrow LH}(n)] \\ Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(z) &= ZT[y_{\uparrow H\downarrow M/L}(n)] \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow L}(z) &= X(z^L) \\ Y_{\uparrow LH}(z) &= X(z^L).H(z) \\ Y_{\uparrow H\downarrow M/L}(z) &= \downarrow M[X(z^L).H(z)] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow LH}(z^{\frac{1}{M}} w_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X[z^{\frac{1}{M}} w_M^l]^L . H(z^{\frac{1}{M}} w_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{L}{M}} w_M^l) H(z^{\frac{1}{M}} w_M^l) \end{aligned} \quad (3.3.3.8)$$

Ví dụ 3.3.3.2

Cho

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3}$$

Hãy tìm $Y_{\uparrow H\downarrow 3/2}(z)$.

Giải

$$Y_{\uparrow 2}(z) = X(z^2) = 1 + z^{-2} + z^{-4}$$

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow 2}(z) &= X(z^2) \cdot H(z) = (1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3})(1 + z^{-2} + z^{-4}) \\ &= 1 + 0,75z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,25z^{-3} + \\ &\quad + z^{-2} + 0,75z^{-3} + 0,5z^{-4} + 0,25z^{-5} + \\ &\quad + z^{-4} + 0,75z^{-5} + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \\ &= 1 + 0,75z^{-1} + 1,5z^{-2} + z^{-3} + 1,5z^{-4} + z^{-5} + \\ &\quad + 0,5z^{-6} + 0,25z^{-7} \\ &= \downarrow 3 [Y_{\uparrow 2}(z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow H \downarrow \frac{3}{2}}(z) &= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 Y_{\uparrow 2H}(z^{\frac{1}{3}} e^{-j\frac{2\pi l}{3}}) \\ &= 1 + z^{-1} + 0,5z^{-2} \end{aligned}$$

d) Biểu diễn phép lọc biến đổi nhíp trong miền tần số

Đánh giá $X(z)$, $H(z)$, $Y_{\uparrow LH}(z)$ và $Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(z)$ trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z , z ta sẽ có biểu diễn phép lọc biến đổi nhíp trong miền tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(e^{j\omega}) \quad (3.3.3.9)$$

Ta có

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} Y_{\uparrow H \downarrow M/L}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow LH}(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega L-2\pi l}{M}}) \cdot H(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}) \end{aligned} \quad (3.3.3.10)$$

Ví dụ 3.3.3.3

Cho tín hiệu $x(n)$ có $X(e^{j\omega})$ cho trên hình 3.3.3.5 (a) hãy tìm cách giảm nhíp lấy mẫu đi $\frac{3}{2}$ lần, tức là nén tín hiệu $x(n)$ lại $\frac{3}{2}$ lần nhưng không được làm mất thông tin chứa trong $x(n)$

Giải

Vì phổ $X(e^{j\omega})$ có bề rộng $-\frac{2\pi}{3} < \omega < \frac{2\pi}{3}$ vậy ta có thể dùng bộ lọc biến đổi nhíp

$\uparrow H \downarrow \frac{3}{2}$, $M=3$, $L=2$, ta chọn tần số cắt ω_c của bộ lọc $H(e^{j\omega})$ là $\frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{3}$ có như vậy sẽ không làm mất thông tin của $x(n)$ hình 3.3.3.5 sẽ minh họa cho ta rõ.

$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$$

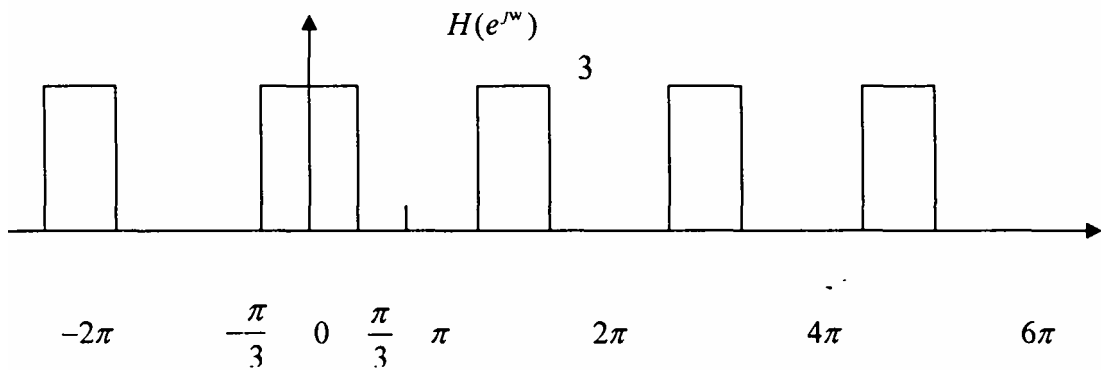
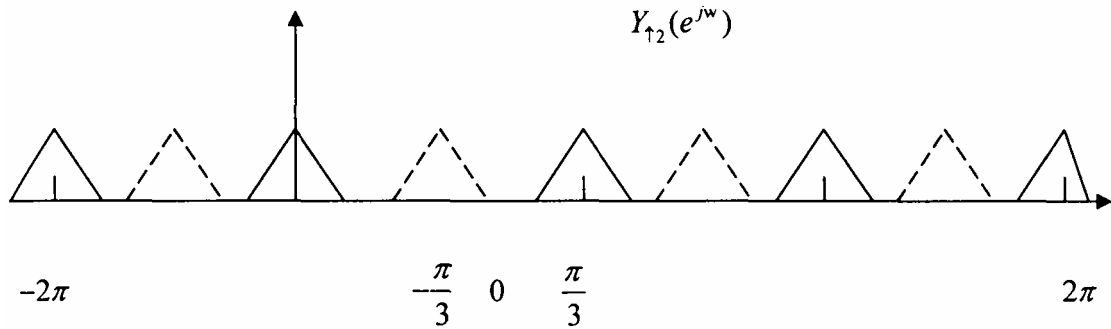
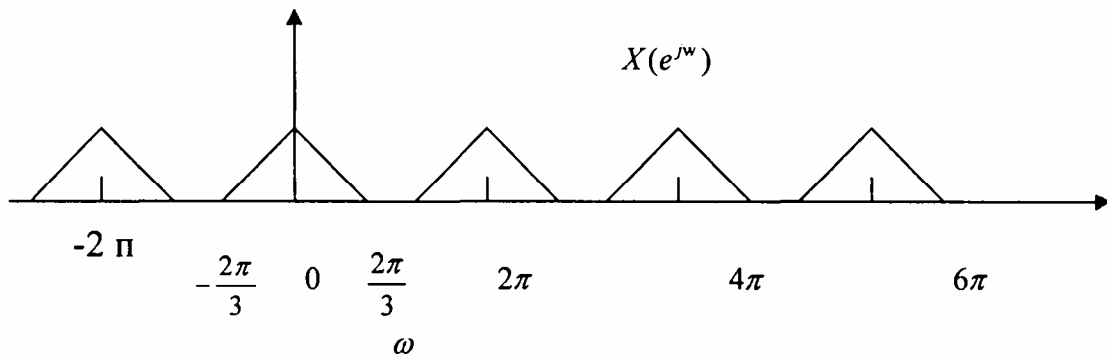
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 3 & 0 \leq |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega \end{cases}$$

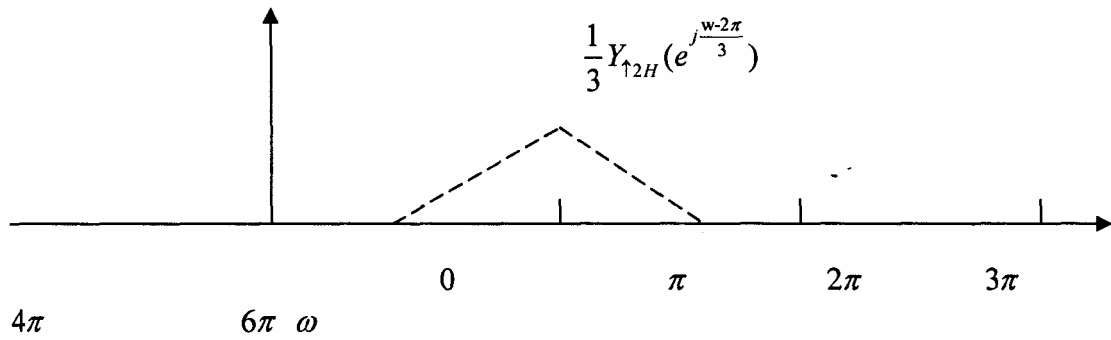
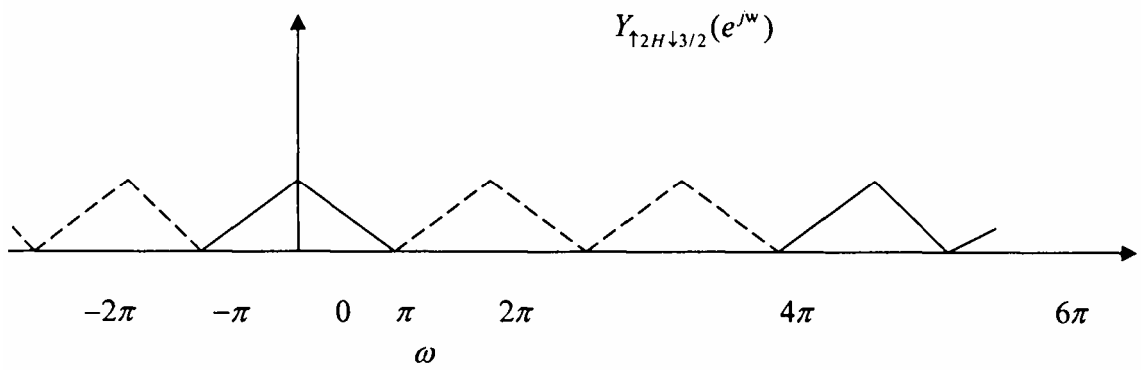
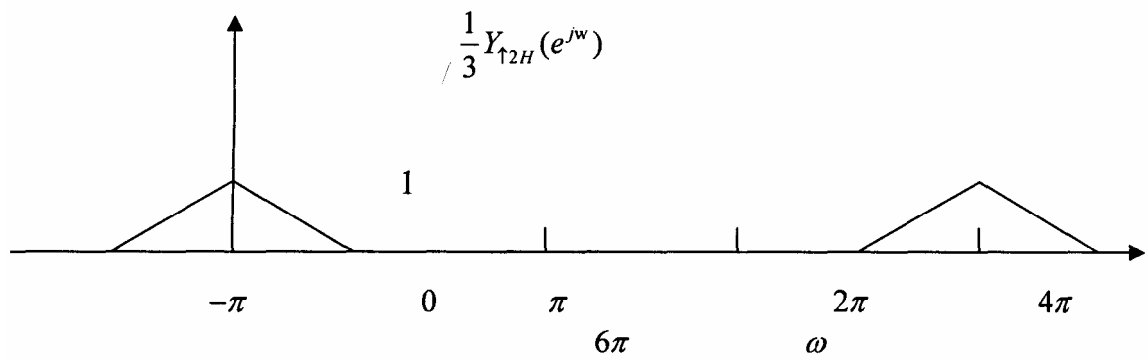
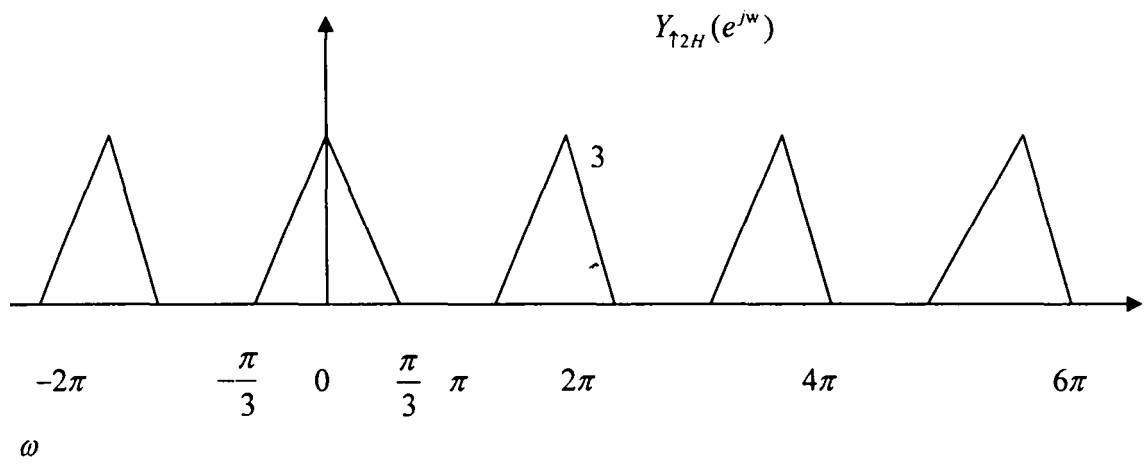
$$Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

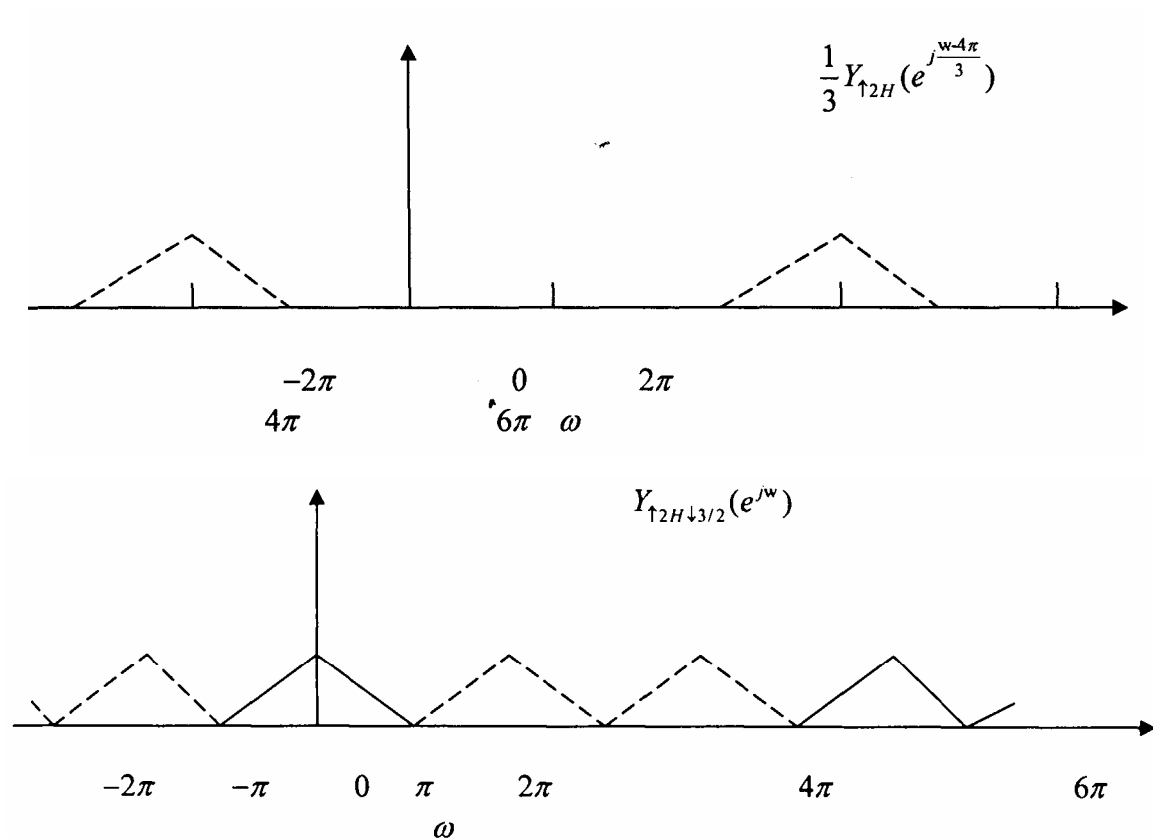
$$= \begin{cases} 3X(e^{j2\omega}) & 0 \leq |\omega| \leq \min(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3} \\ 0 & \omega \end{cases}$$

$$Y_{\uparrow H \vee 3/2}(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 Y_{\uparrow 2H}(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{3}})$$

$$= \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j\frac{\omega}{3}}) + \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j\frac{\omega-2\pi}{3}}) + \frac{1}{3} Y_{\uparrow 2H}(e^{j\frac{\omega-4\pi}{3}})$$







Hình 3.3.3.5

3.4. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA (POLYPHASE DECOMPOSITION)

3.4.1. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA HAO THÀNH PHẦN

a) Phân hoạch hàm truyền đạt $H(z)$.

Ta biết một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là:

$$H(n) \quad n = -\infty, \dots, +\infty$$

Và có hàm truyền đạt là $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

Bây giờ ta phân dãy $h(n)$ làm hai phần ứng với n chẵn và n lẻ, vậy ta có:

$$h(n) \rightarrow h(2r) \text{ và } h(2r+1)$$

$$H(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-(2r+1)}$$

$$H(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} + z^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-2r}$$

Gọi $e_0(r) = h(2r)$ và $e_1(r) = h(2r+1)$

và đặt

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r)z^{-2r} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r)z^{-2r} \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r)(z^2)^{-r} = E_0(z^2) \\
 \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(2r+1)z^{-2r} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_1(r)z^{-2r} \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_1(r)(z^2)^{-r} = E_1(z^2)
 \end{aligned}$$

cuối cùng ta có:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \quad (3.4.1.1)$$

$$\sum_{m=0}^{2-1} z^{-m} E_m(z^2)$$

Việc biểu diễn $H(z)$ dưới dạng (3.4.1.1) này gọi là phân hạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$. Hay nói cách khác, chúng ta đã biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha hai thành phần. $E_0(z^2)$ và $E_1(z^2)$ được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$ và ta cũng có: $E_0(z)$ và $E_1(z)$ cũng được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$.

Một tính chất quan trọng của phân hoạch nhiều pha hai thành phần đó là:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \\
 H(-z) &= E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2)
 \end{aligned}$$

Vậy

$$H(z) + H(-z) = 2E_0(z^2) \quad (3.4.1.2)$$

Hay:

$$\begin{aligned}
 E_0(z^2) &= \frac{1}{2} [H(z) + H(-z)] \\
 E_0(z) &= \frac{1}{2} [H(\sqrt{z^2}) + H(-\sqrt{z^2})]
 \end{aligned}$$

$$E_1(z^2) = \frac{1}{2} z [H(z) - H(-z)]$$

$$E_1(z) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} [H(z^{\frac{1}{2}}) - H(-z^{\frac{1}{2}})]$$

Ví dụ 3.4.1.1

Cho bộ lọc số IIR có đáp ứng xung như sau:

$$H(n) = a^n U(n)$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$

Giải

Ta phân $h(n)$ thành hai thành phần đáp ứng với n chẵn và n lẻ, sao đó lấy biến đổi Z ta có:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$|z| > |a|$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} h(2r) z^{-2r} + \sum_{r=0}^{\infty} h(2r+1) z^{-(2r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} z^{-2r} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r+1} z^{-(2r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (a^2 z^{-2})^r + az^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (a^2 z^{-2})^r$$

$$= \frac{1}{1 - a^2 z^{-2}} + \frac{az^{-1}}{1 - a^2 z^{-2}}$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2)$$

Vậy

$$E_0(z^2) = \frac{1}{1 - a^2 z^{-2}} \quad \text{và} \quad E_1(z^2) = \frac{a}{1 - a^2 z^{-2}}$$

Từ đây ta có:

$$E_0(z) = \frac{1}{1 - a^2 z^{-1}} \quad \text{và} \quad E_1(z) = \frac{a}{1 - a^2 z^{-1}}$$

Ví dụ 3.4.1.2

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có đáp ứng xung như sau:

$$H(n) = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$$

$$\rightarrow 0$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha hai thành phần của $H(z)$.

Giải

Phân $h(n)$ thành hai thành phần ứng với n chẵn và n lẻ và lấy biến đổi Z ta có :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} \\ &= 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6} + z^{-1}(2 + 4z^{-2} + 2z^{-4}) \\ &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \end{aligned}$$

ở đây

$$\begin{aligned} E_0(z^2) &= 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6} \\ E_1(z) &= 2 + 4z^{-2} + 2z^{-4} \end{aligned}$$

vậy ta cũng có :

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3} \\ E_1(z) &= 2 + 4z^{-1} + 2z^{-2} \end{aligned}$$

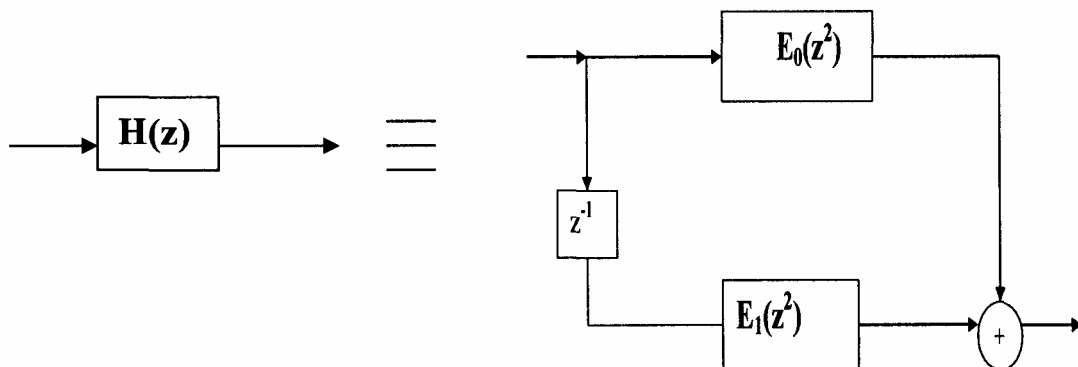
b) Cấu trúc nhiều pha hai thành phần

Định nghĩa: Cấu trúc thực hiện biểu thức của $H(z)$ dưới dạng phân hoạch nhiều pha được gọi là cấu trúc nhiều pha của hệ thống số.

Ta đã có dạng nhiều pha hai thành phần của $H(z)$ như sau:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

Từ đây ta có thể vẽ sơ đồ cấu trúc nhiều pha tổng quát như trên hình 3.4.1.1



Hình 3.4.1.1

Ví dụ 3.4.1.3

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có hàm truyền đạt $H(z)$ ở dạng phân hoạch nhiều pha hai thành phần sau:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

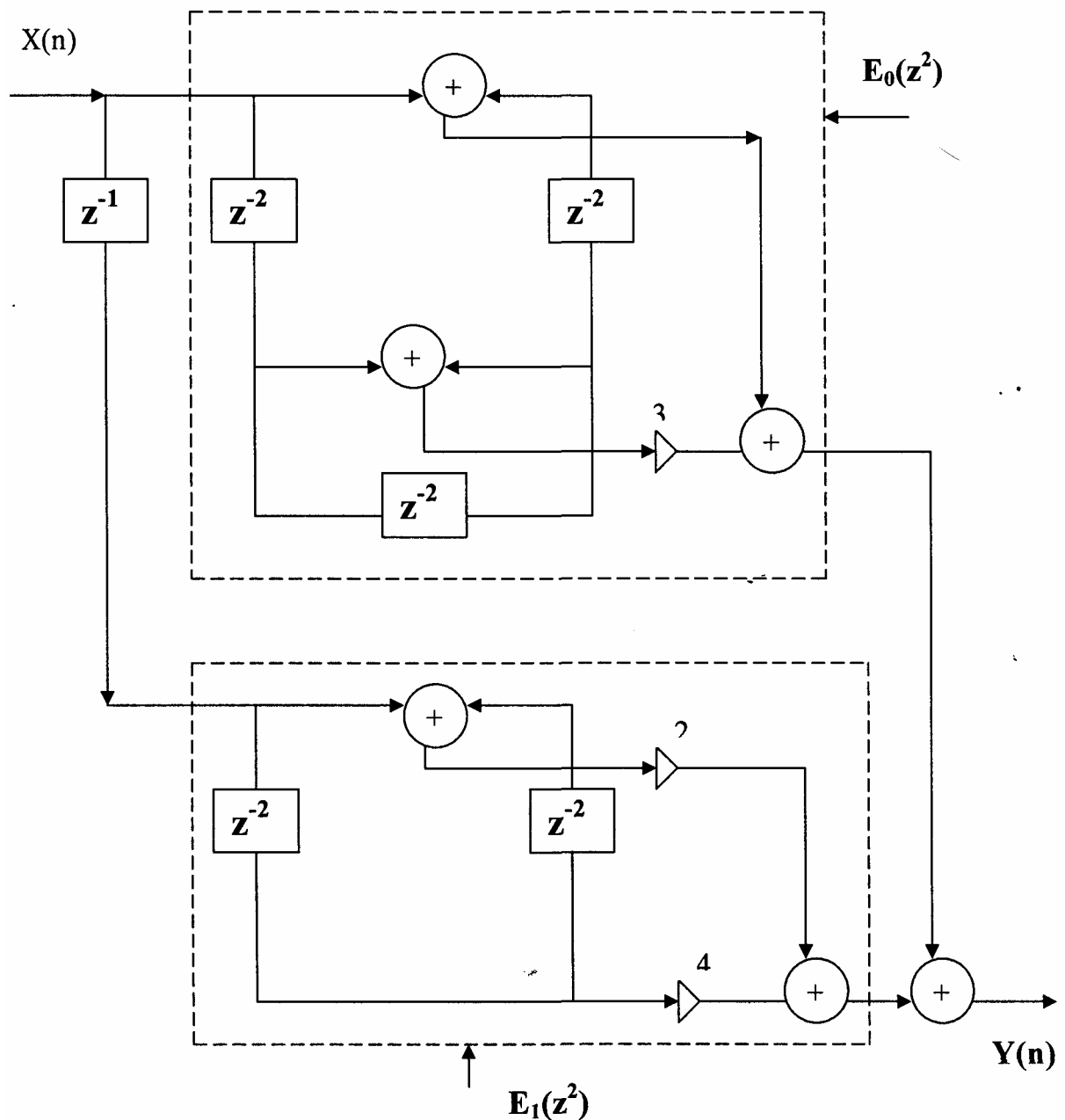
$$E_0(z^2) = 1 + 3z^{-2} + 3z^{-4} + z^{-6}$$

$$E_1(z^2) = 2 + 4z^{-2} + 2z^{-4}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha của $H(z)$.

Giải

Vì là pha tuyến tính nên $e_0(r)$ và $e_1(r)$ là đối xứng, cấu trúc nhiều pha của $H(z)$ pha tuyến tính được cho bởi hình 3.4.1.2.



Hình 3.4.1.2

3.4.2. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA M THÀNH PHẦN

a) Phân hoạch hàm truyền đạt $H(z)$

Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát tức là biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha M thành phần.

Tương tự như trên ta cũng có thể phân $h(n)$ thành M thành phần như sau:

$$H(n) \rightarrow h(Mr), h(Mr + 1), \dots, h[Mr + (M - 1)]$$

Vậy hàm truyền đạt $H(z)$ sẽ có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr)z^{-Mr} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+1)z^{-(Mr+1)} + \dots + \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[Mr+(M-1)]z^{-[Mr+(M-1)]} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+m)z^{-(Mr+m)} \\
H(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr+m)z^{-Mr}
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
e_m(r) &= h(Mr+m) \\
0 \leq m &\leq M-1
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)(z^M)^{-r} \\
H(z) &= \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M)
\end{aligned} \tag{3.4.2.1}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
E_m(z^M) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)(z^M)^{-r} \\
0 \leq m &\leq M-1
\end{aligned} \tag{3.4.2.2}$$

$E_m(z^M)$ được gọi là các thành phần nhiều pha của $H(z)$. Ta cũng rút ra được biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
E_m(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_m(r)z^{-r} \\
0 \leq m &\leq M-1
\end{aligned} \tag{3.4.2.3}$$

Việc biểu diễn $H(z)$ dưới dạng (3.4.2.3) gọi là phân hoạch nhiều pha M thành phần của $H(z)$.

Ví dụ 3.4.2.1

Cho bộ lọc số IIR có đáp ứng xung như sau:

$$H(n) = a^n U(n)$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha $M = 3$ thành phần của $H(z)$

Giải

Phân $h(n)$ thành ba phần ứng với $n = 3r$, $n = 3r + 1$, $n = 3r + 2$, và lấy biến đổi Z $h(n)$ ta có:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$|z| > |a|$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\infty} h(3r)z^{-3r} + \sum_{r=0}^{\infty} h(3r+1)z^{-(3r+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} h(3r+2)z^{-(3r+2)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r} z^{-3r} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r+1} z^{-(3r+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} a^{3r+2} z^{-(3r+2)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r + az^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r + a^2 z^{-2} \sum_{r=0}^{\infty} (a^3 z^{-3})^r \\ &= \frac{1}{1-a^3 z^{-3}} + z^{-1} \frac{a}{1-a^3 z^{-3}} + z^{-2} \frac{a^2}{1-a^3 z^{-3}} \\ H(z) &= E_0(z^3) + z^{-1} E_1(z^3) + z^{-2} E_2(z^3) \end{aligned}$$

Vậy

$$E_0(z^3) = \frac{1}{1-a^3 z^{-3}} \quad ; \quad E_1(z^3) = \frac{a}{1-a^3 z^{-3}} \quad \text{và}$$

$$E_2(z^3) = \frac{a^2}{1-a^3 z^{-3}}$$

$$E_0(z) = \frac{1}{1-a^3 z^{-1}} \quad ; \quad E_1(z) = \frac{a}{1-a^3 z^{-1}} \quad \text{và} \quad E_2(z) = \frac{a^2}{1-a^3 z^{-1}}$$

Ví dụ 3.4.2.2

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = \{ \underset{\mapsto}{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1} \}$$

hãy tìm phân hoạch nhiều pha $M = 3$ thành phần của $H(z)$.

Giải

Phân $h(n)$ thành 3 thành phần ứng với $n = 3r$, $n = 3r + 1$, $n = 3r + 2$ và lấy biến đổi z ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} \\ &= 1 + 4z^{-3} + z^{-6} + z^{-1}(2 + 3z^{-3}) + z^{-2}(3 + 2z^{-3}) \\ H(z) &= E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3) \end{aligned}$$

ở đây:

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 + 4z^{-3} + z^{-6} \quad \text{và} \quad E_0(z) = 1 + 4z^{-1} + z^{-2} \\ E_1(z) &= 2 + 3z^{-3} \quad \text{và} \quad E_1(z) = 2 + 3z^{-1} \\ E_2(z) &= 3 + 2z^{-3} \quad \text{và} \quad E_2(z) = 3 + 2z^{-1} \end{aligned}$$

Từ cách biểu diễn $H(z)$ ở dạng nhiều pha M thành phần chúng ta có thể rút ra một tính chất quan trọng như sau:

Ta đã có:

$$e_0(r) = h(Mr)$$

Lấy biến đổi z^M hai vế ta có :

$$z^M T[e_0(r)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_0(r) z^{-Mr} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(Mr) z^{-Mr} = E_0(z^M)$$

Đổi biến số:

$$\begin{aligned} m &= Mr \quad \text{và} \quad r = \frac{m}{M} \\ E_0(z^M) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m} \end{aligned}$$

Với $m = Mr$, r : nguyên

Ta đã có định nghĩa dãy $p(m)$ như sau:

$$p(m) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{+j\frac{2\pi}{M}lm}$$

Với $m = M.n$, n : nguyên

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} E_0(z^M) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) p(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{+j\frac{2\pi}{M}lm} h(m) z^{-m} \\ ME_0(z^M) &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) [ze^{-j\frac{2\pi}{M}l}]^m \\ ME_0(z^M) &= \sum_{l=0}^{M-1} H(ze^{-j\frac{2\pi}{M}l}) \end{aligned}$$

Hoặc

$$E_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l})$$

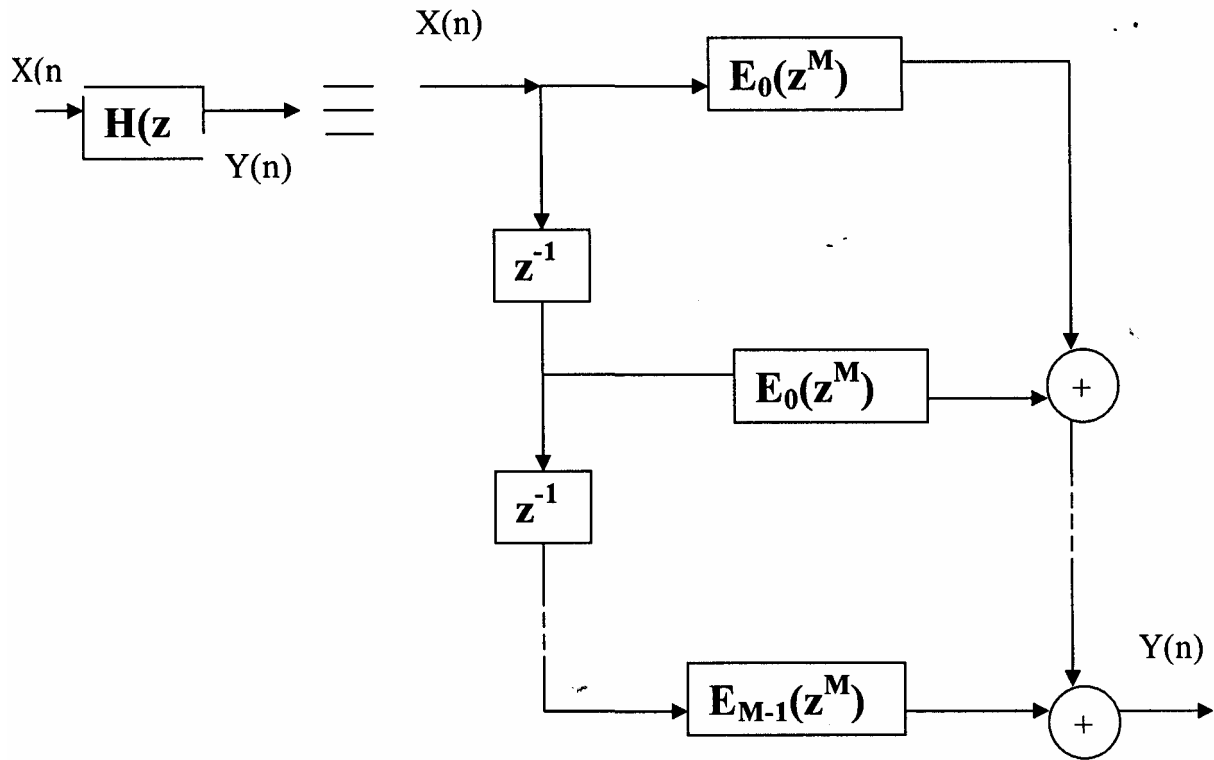
b) Cấu trúc nhiều pha M thành phần

Phân hoạch nhiều pha M thành phần của $H(z)$ là cơ sở để xây dựng cấu trúc nhiều

pha M thành phần, mà hàm truyền đạt của cấu trúc này là $H(z)$.

Hình 3.4.2.1 minh họa cấu trúc nhiều pha M thành phần tổng quát để thực hiện hàm $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M)$$



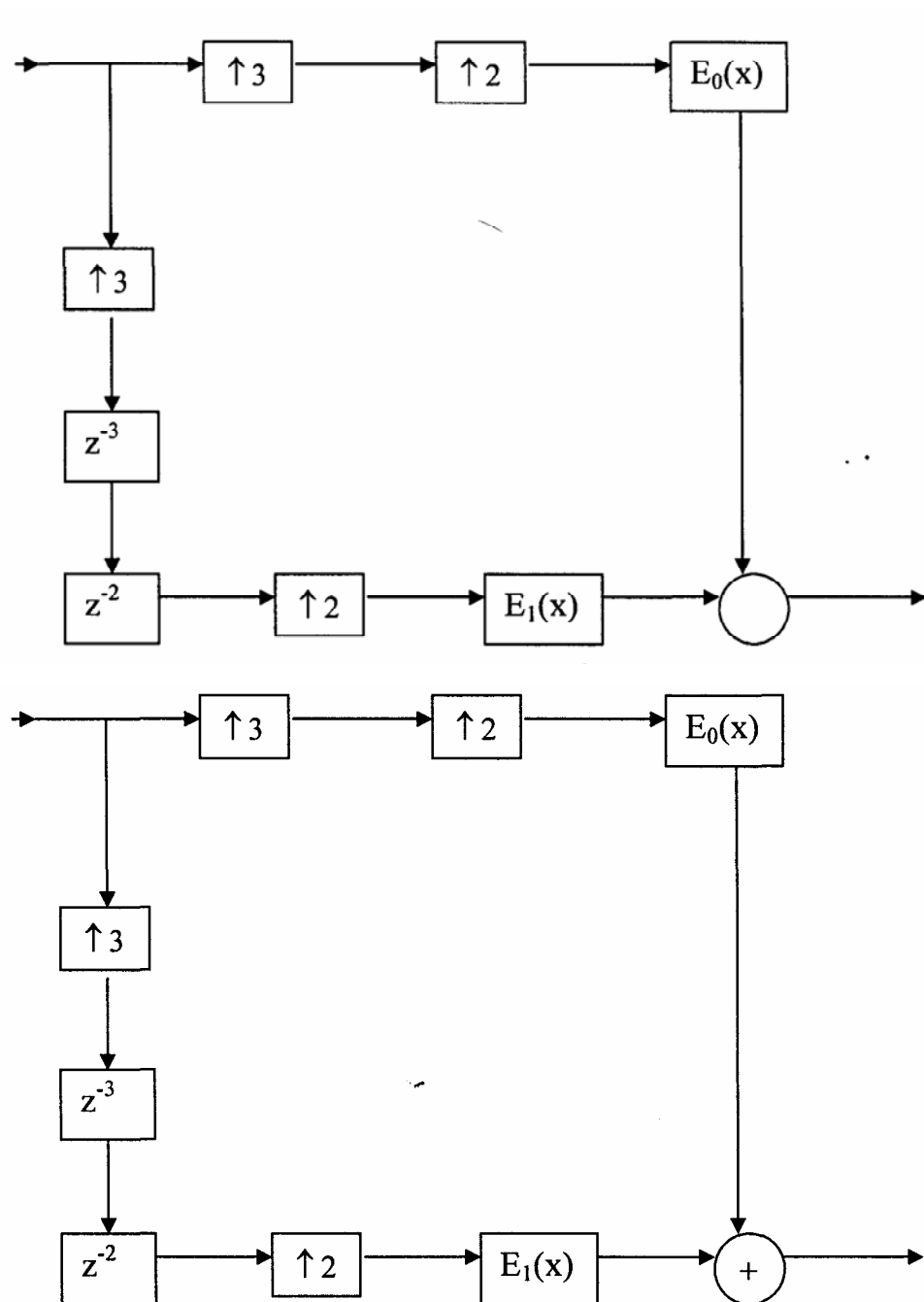
Hình 3.4.2.1

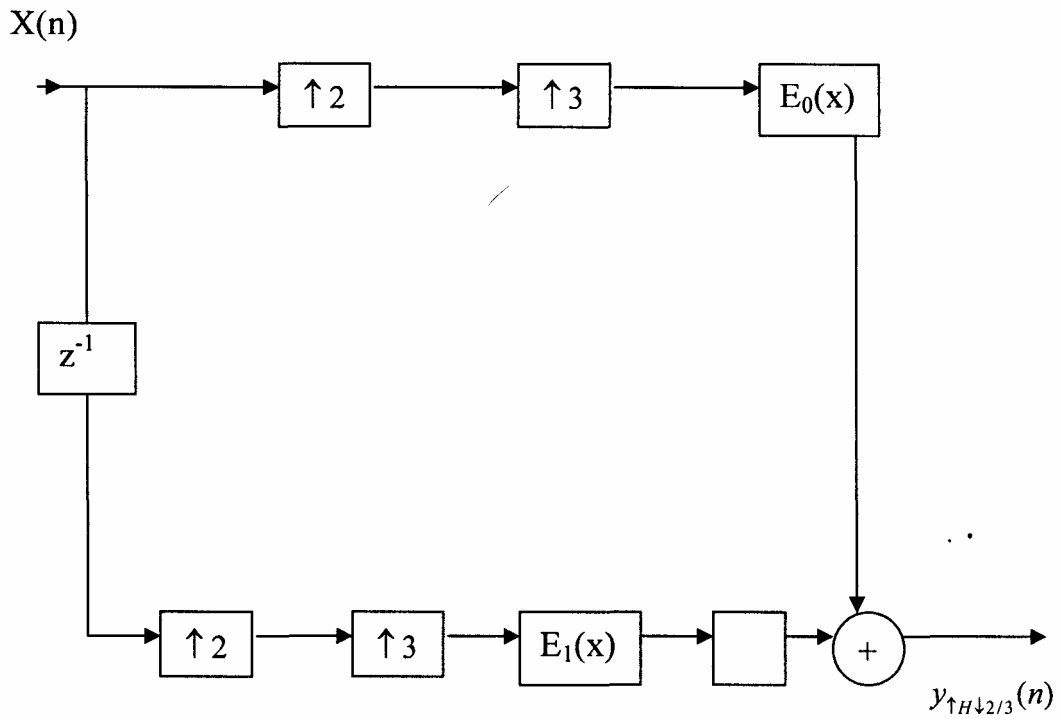
Ví dụ 3.4.2.3

Cho bộ lọc số IIR của hàm truyền đạt $H(z)$ cho ở dạng phân hoạch nhiều pha 3 thành phần như sau:

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$

thì kết quả là tương đương nhau, kết quả ta thu được như cấu trúc hình 3.5.3.7 (a), (b), và (c).





Hình 3.5.3.7

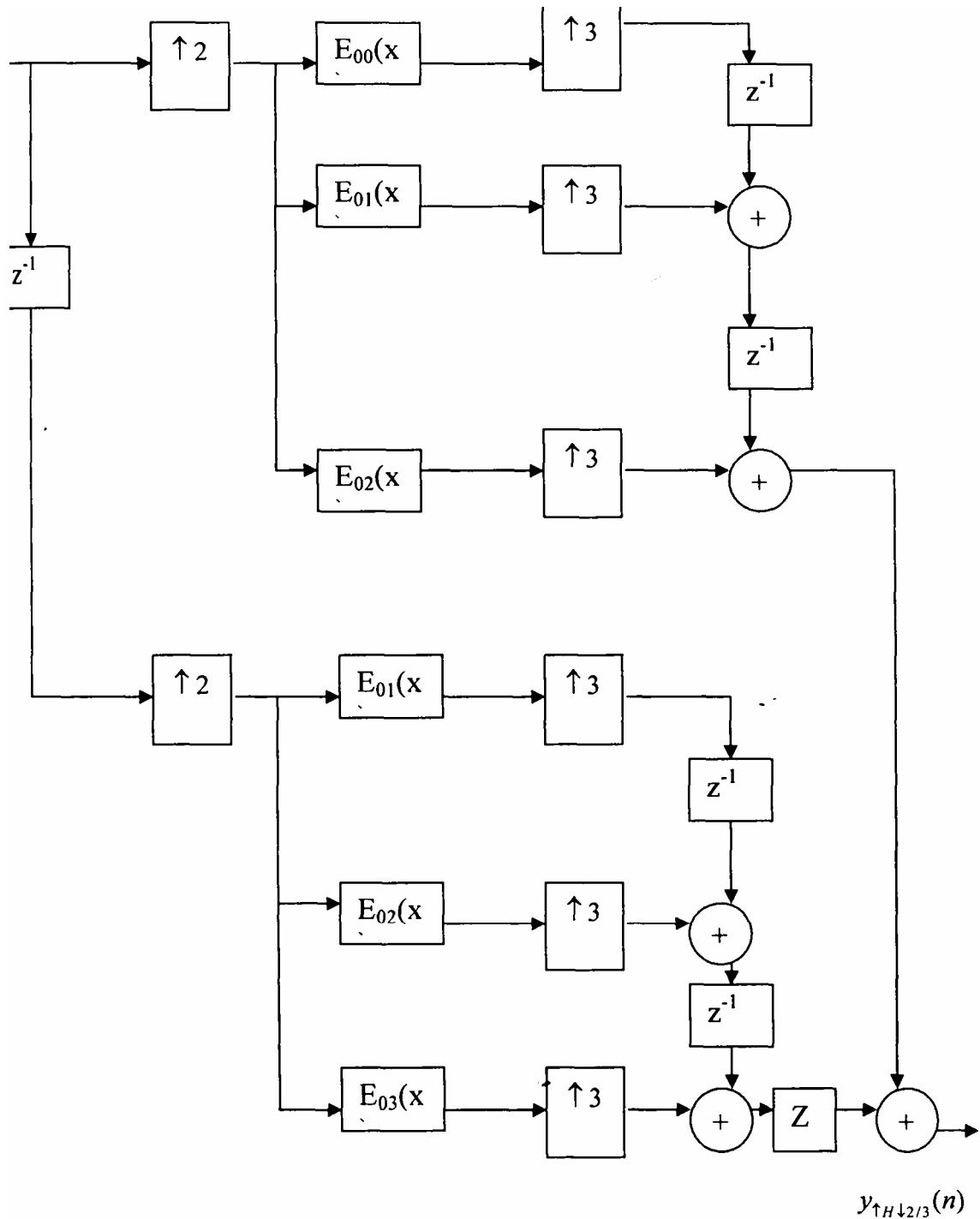
(a) Cấu trúc thực hiện thủ tục $z^{-1} = z^{-3}z^{-2}$ và đưa bộ $\uparrow 3$ vào 2 nhánh theo tính chất phân bố vào phép cộng của phép nội suy; (b) Cấu trúc thực hiện sự đồng nhất (3.3.2.11) và (3.3.1.11) tức là $\uparrow 3 \equiv z^{-1}\uparrow$ và $z^2 \downarrow 2 = \downarrow 2^2$; c) Cấu trúc thực hiện sự tương đương (3.2.4.5) tức là $\uparrow \downarrow 2/3 \equiv \downarrow \uparrow 2/3$.

Đối với hình 3.5.3.7 (c) ta lại dùng phân hoạch nhiều pha loại 2 cho các thành phần nhiều pha $E_0(z)$ và $E_1(z)$ như sau:

$$E_0(z) = z^{-2}E_{00}(z^3) + z^{-1}E_{01}(z^3) + E_{02}(z^3)$$

$$E_1(z) = z^{-2}E_{10}(z^3) + z^{-1}E_{11}(z^3) + E_{12}(z^3)$$

Sau đó sử dụng sự đồng nhất (3.3.2.11) chúng ta sẽ có cấu trúc trên hình 3.5.3.8.



Hình 3.5.3.8

Rõ ràng là cấu trúc trên hình 3.5.3.8 là cấu trúc ưu việt nhất, chúng ta không thể cải tiến thêm được nữa. Với cấu trúc này nhịp của tín hiệu vào $x(n)$ trước khi vào các bộ lọc sẽ giảm đi 2 lần (tổng quát là M lần) tức là chu kỳ lấy mẫu tăng 2 lần: $2T_s$. Nếu giả sử $h(n)$ là bộ lọc FI có chiều dài $N = H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$ thì các bộ lọc con $E_{01}(z)$ và $E_{11}(z)$ sẽ có chiều dài giảm đi $2 \times 3 = 6$ lần (tổng quát là $M \times L$ lần).

3.4.3. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA LOẠI HAI

a) Phân hoạch nhiều pha loại hai hàm $H(z)$

Trong mục nhỏ này chúng ta đưa khái niệm phân hoạch nhiều pha loại hai, trong một số trường hợp cách phân hoạch này sẽ thuận lợi hơn.

Từ biểu thức của phân hoạch nhiều pha loại 1 ta có:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \quad 0 \leq l \leq M-1$$

Đổi biến số: $l = M - 1 - m$

Ta có:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} E_{M-1-m}(z^M)$$

$$E_{M-1-m}(z^M) = F_m(z^M)$$

(3.4.3.1)

Vậy:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_m(z^M)$$

$$0 \leq m \leq M-1 \quad (3.4.3.2)$$

Biểu thức (3.4.3.2) là biểu diễn của $H(z)$ dưới dạng phân hoạch nhiều pha M thành phân loại hai.

Nhận xét:

- Ta thấy rằng $F_m(z^M) \equiv E_{M-1-m}(z^M)$ là biểu diễn của $H(z)$ $F_m(z^M) \equiv E_m(z^M)$ chỉ là việc đánh số lại các thành phần mà thôi. Vì vậy về mặt bản chất thì phân, hoạch nhiều pha loại 2 và loại 1 không có gì khác nhau, chúng chỉ khác nhau về mặt hình thức.

- Phân hoạch nhiều pha loại 2 rất có lợi khi thực hiện bộ lọc nội suy.

Ví dụ 3.4.3.1

Cho bộ lọc FIR pha tuyến tính, hàm $H(z)$ có phân hoạch pha loại 1 như sau:

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1} E_1(z^3) + z^{-2} E_2(z^3)$$

$$E_0(z^3) = 1 + 4z^{-3} + z^{-6}$$

$$E_1(z^3) = 2 + 3z^{-3}$$

$$E_2(z^3) = 3 + 2z^{-3}$$

Hãy tìm phân hoạch nhiều pha loại 2 của $H(z)$.

Giải:

Áp dụng hệ công thức (3.4.3.1) và (3.4.3.2) ta có:

$$F_0(z^3) = E_2(z^3) = 3 + 2z^{-3}$$

$$F_1(z^3) = E_1(z^3) = 2 + 3z^{-3}$$

$$F_2(z) = E_0(z^3) = 1 + 4z^{-3} + z^{-6}$$

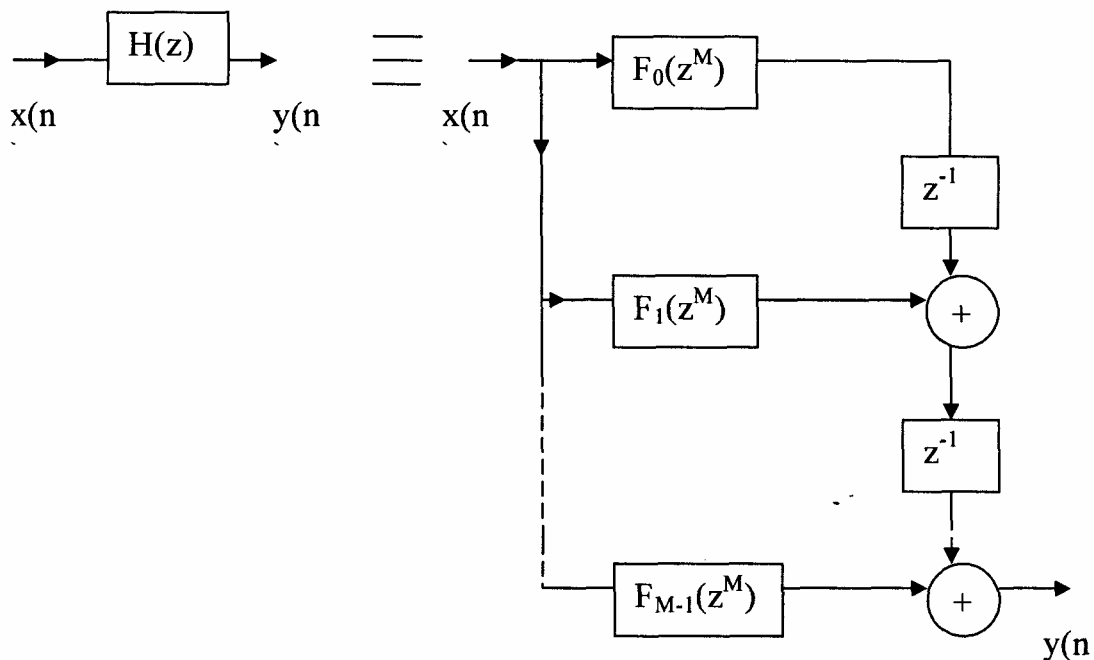
$$H(z) = z^{-2}F_0(z^3) + z^{-1}F_1(z^3) + E_2(z^3)$$

b) Cấu trúc nhiều pha loại 2:

trên cơ sở biểu thức (3.4.3.2) của phân hoạch nhiều pha loại 2 của hàm $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} Z^{-(M-1-m)} F_m(Z^M)$$

Chúng ta xây dựng được sơ đồ cấu trúc nhiều pha loại 2 M thành phần xem hình 3.4.3.1.

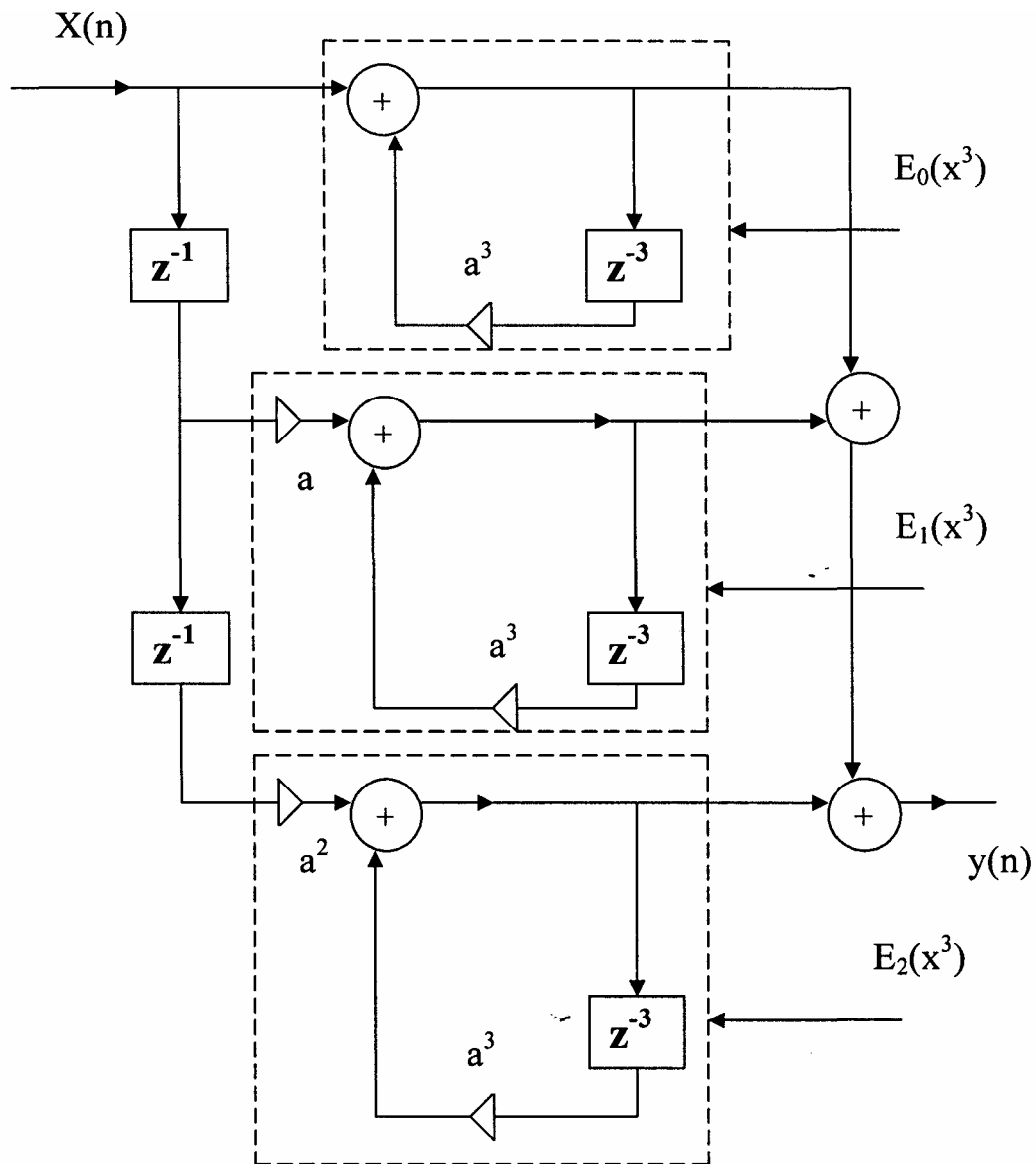


Hình 3.4.3.1

Nhận xét:

- Thực chất cấu trúc nhiều pha loại 2 chính là cấu trúc chuyển vị của cấu trúc nhiều pha loại mức là nếu ta coi cấu trúc loại 1 là một graphe có hướng, nếu ta đổi hướng giữa đầu vào và đầu ra, nút cộng sẽ thành nút phân tán, nút phân tán trở thành nút cộng thì hàm truyền đạt $H(z)$ của cấu trúc sẽ không thay đổi, lúc đó ta sẽ thu được cấu trúc loại 2 gọi là cấu trúc chuyển vị.

- Cấu trúc nhiều pha loại 2 rất thuận lợi cho việc xây dựng bộ lọc nội suy



Hình 3.4.2.2

3.5. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA BỘ LỌC LẤY MẪU

3.5.1. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc phân chia

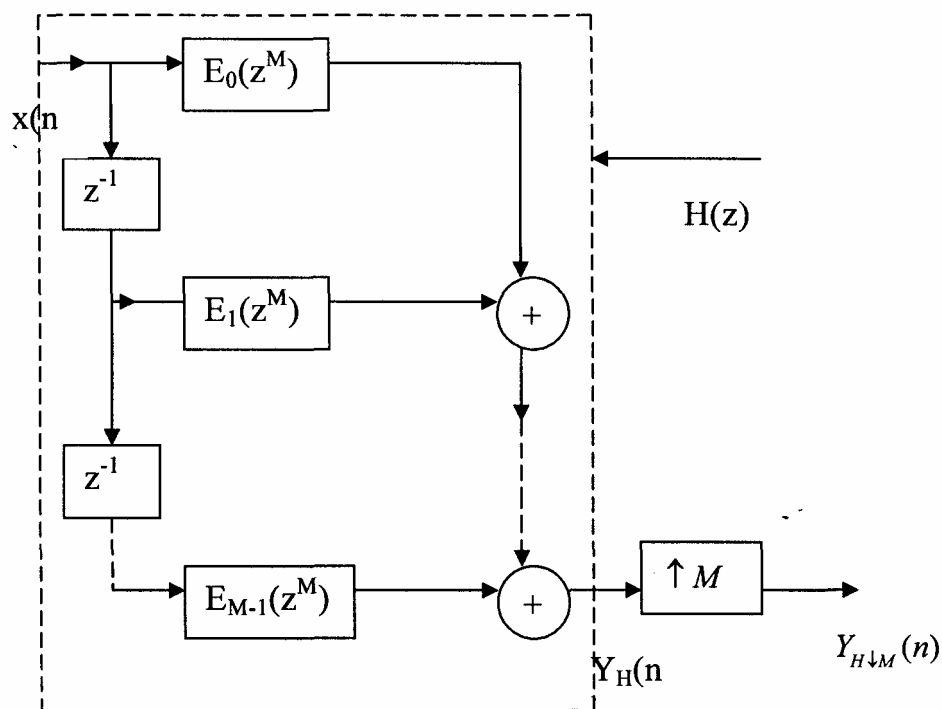
Từ hình 3.3.3.1 và hình 3.4.2.2 ta có thể thực hiện được bộ lọc phân chia nhiều pha như hình vẽ 3.5.1.1.

Nhận xét:

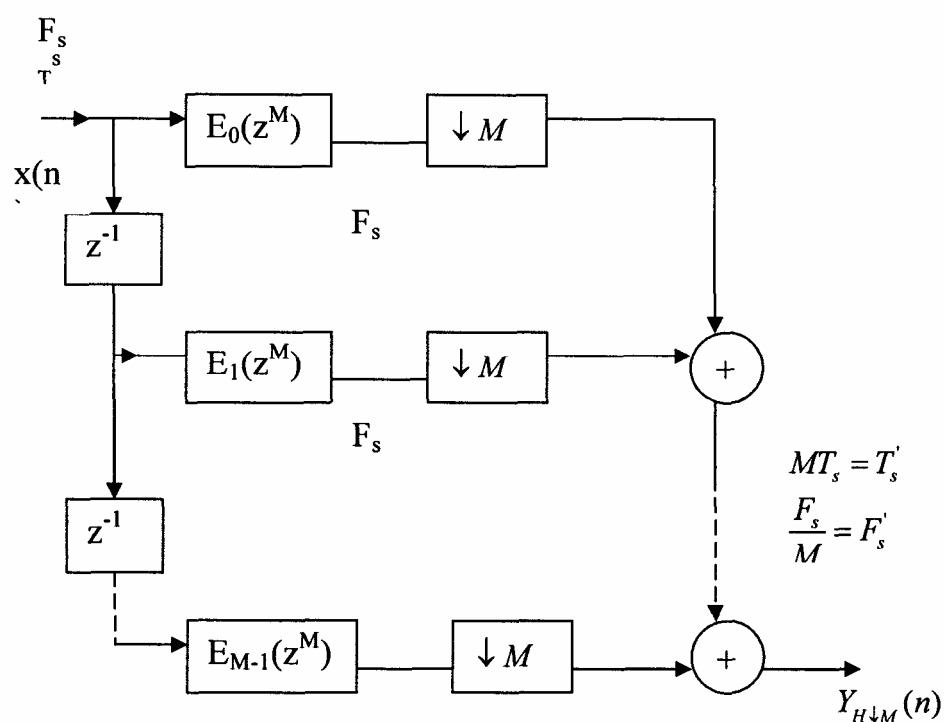
- Thực chất cấu trúc trên hình 3.5.1.1 này là dựa trên cơ sở cấu trúc hình 3.3.1.1 vì nó không nói lên được tính ưu việt của cấu trúc nhiều.

- Nói chung bộ lọc phân chia hệ số M sẽ được thực hiện trên cơ sở sử dụng cấu trúc nhiều pha M thành phần, có như vậy ta sẽ lợi dụng sự đồng nhất của 2 sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.1.2.

- Vì phân chia có tính phân phối vào phép cộng nên ta có thể chuyển cấu trúc hình 3.5.1.1 thành cấu trúc 3.5.1.2 mà kết quả vẫn như nhau.

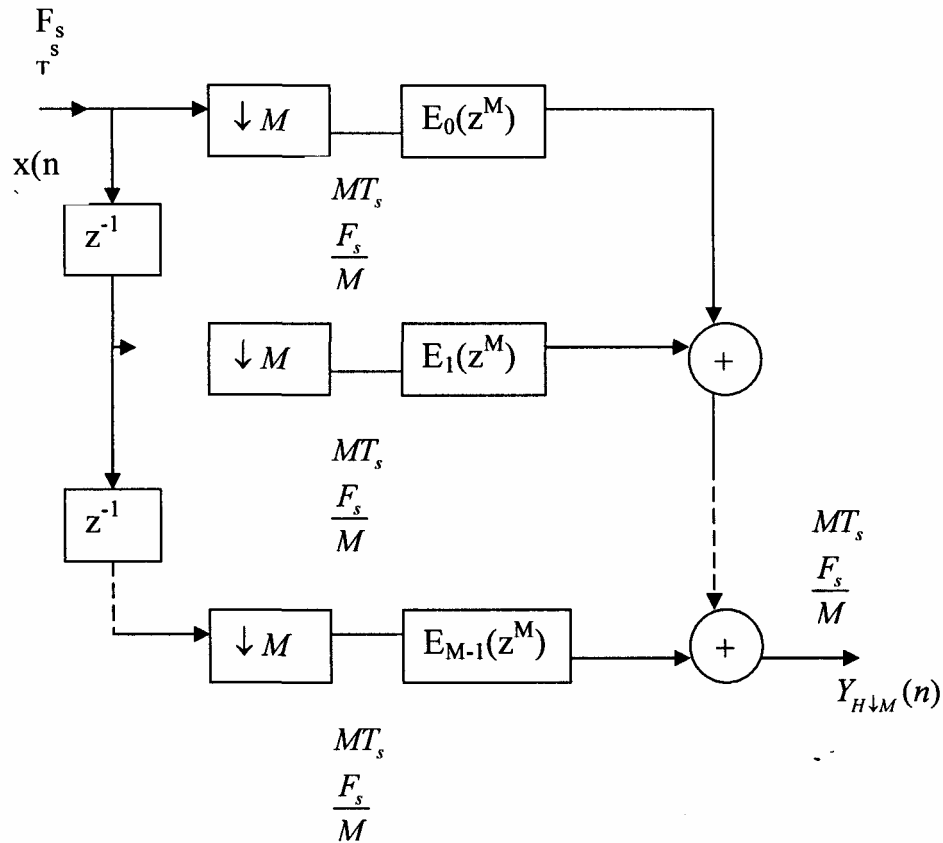


Hình 3.5.1.1



Hình 3.5.1.2

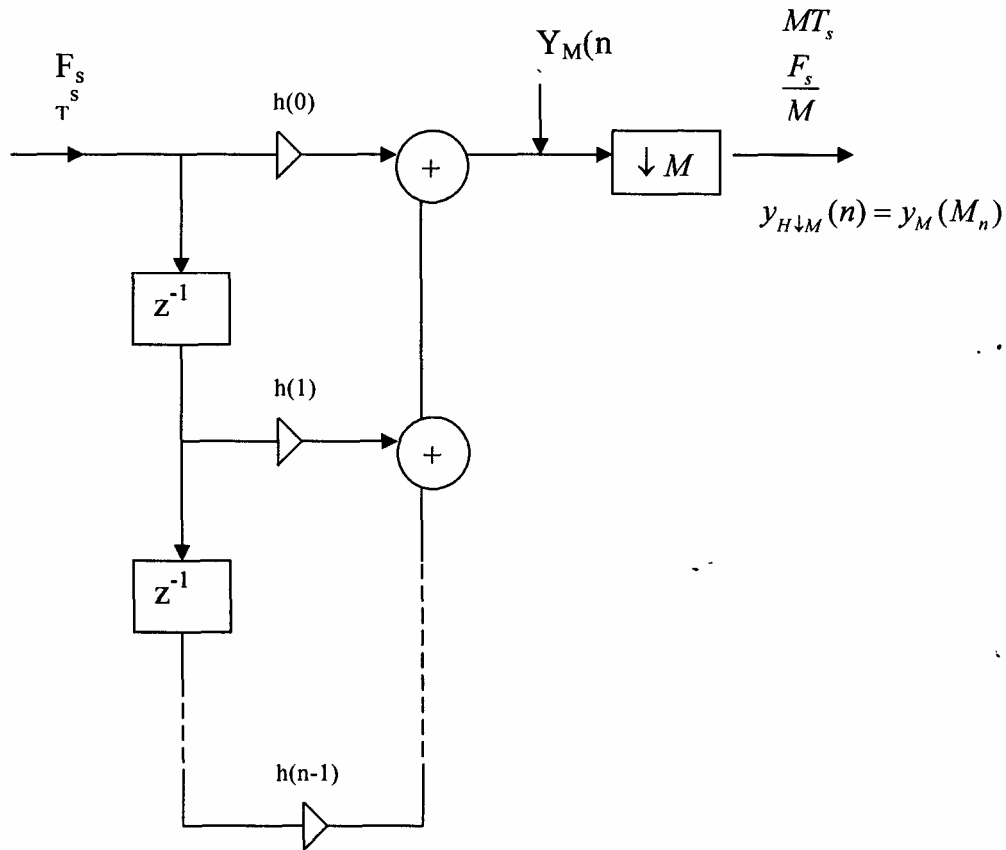
Sử dụng sự đồng nhất của sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.1.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 3.5.1.2 thành cấu trúc trên hình 3.5.1.3.



Hình 3.5.1.3

Cấu trúc trên hình 3.5.1.3 là cấu trúc ưu việt nhất, nó chính là cấu trúc nhiều pha M thành phần của bộ lọc phân chia hệ số M . Để thấy được ưu điểm của cấu trúc nhiều pha như trên hình chúng ta cũng so sánh với cấu trúc trực tiếp của bộ lọc phân chia HÔM. Giả sử chúng ta đồng bộ lọc FIR có chiều dài N , cấu trúc trực tiếp của HÔM được cho trên hình 3.5.1.4. Ta viết tắt bộ lọc phân chia FIR là $\text{FIRH}\downarrow M$. Bây giờ ta tiến hành so sánh.

Ta thấy rằng đối với $\text{FIRH}\downarrow M$ trực tiếp, để tính mỗi một đầu ra $y_{H\downarrow M}(n)$ chúng ta cần N phép nhân và $(N - 1)$ phép cộng. Trong sơ đồ hình 3.5.1.4 ta thấy rằng tín hiệu vào $x(n)$ qua các bộ trễ z^{-1} rồi được nhân với hệ số $h(n)$, sau đó cộng lại ta được một giá trị của $y_H(n)$. Còn trong thời gian thực (in real time) các bộ trễ z^{-1} chính là bộ ghi dịch, $x(n)$ đi vào các bộ ghi dịch theo từng thời điểm của xung đồng bộ, ta gọi là xung nhịp, khoảng cách thời gian giữa 2 xung nhịp liên tiếp nhau là T_s . Vậy sau mỗi nhịp ta phải thực hiện xong N phép nhân và $N - 1$ phép cộng trước khi xung nhịp mới thực hiện, tức là $\text{FIRH}\downarrow M$ trực tiếp chỉ tính giá trị $y(Mn)$ chứ không cần tính cả $y_H(n)$, vậy hệ thống sẽ nghỉ trong thời gian $(M-1)T_s$, sau đó bộ ghi dịch sẽ dịch một bước dài M nhịp để tính giá trị tiếp theo của $y_H(n)$ như vậy rõ ràng là rất bất tiện.



Hình 3.5.1.4

Còn đối với FIR $H\downarrow M$ nhiều pha M thành phần thì trước khi đi vào các khối lọc $E_m(z)$ thì các mẫu nằm giữa hai mẫu Mn và $M(n+1)$ không còn nữa, tức là nhịp lấy mẫu đã được giảm đi M lần, thời khoảng giữa hai mẫu trước khi đi vào $E_m(z)$ bây giờ là MT_s . Như vậy các phép tính nhân và cộng sẽ được thực hiện trong khoảng thời gian MT_s . Hơn nữa chiều dài các bộ lọc $E_m(z)$ bây giờ là trung bình N/M vậy số phép nhân và cộng phải thực hiện trong khoảng thời khoảng MT_s chỉ còn trung bình là N/M và $N/M - 1$.

Như vậy FIR $H\downarrow M$ nhiều pha M thành phần ưu việt hơn hẳn FIR $H\downarrow M$ trực tiếp.

Ví dụ 3.5.1.1:

Cho bộ lọc phân chia FIR $H\downarrow 2$ với hầu như sau:

$$h(n) = \left\{ 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

$\begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix}$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của FIR $H\downarrow 2$.

Giải

Ta tìm $H(z)$ sau đó tìm $E_0(z)$ và $E_1(z)$:

$$H(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{3}{6}z^{-3} + \frac{2}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5}$$

$$= 1 + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{2}{6}z^{-4} + z^{-1}\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-4}\right)$$

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

Vậy :

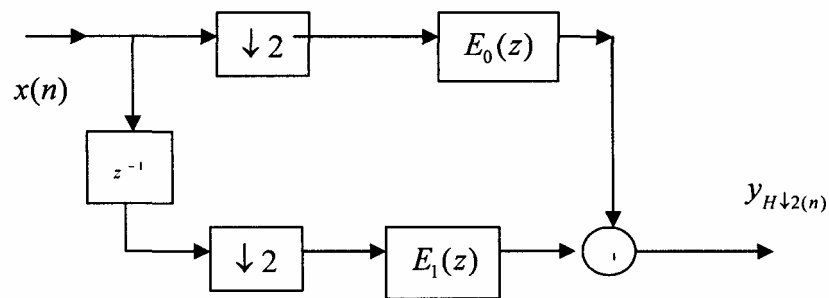
$$E_0(z^2) = 1 + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{2}{6}z^{-4}$$

$$E_1(z^2) = \frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-4}$$

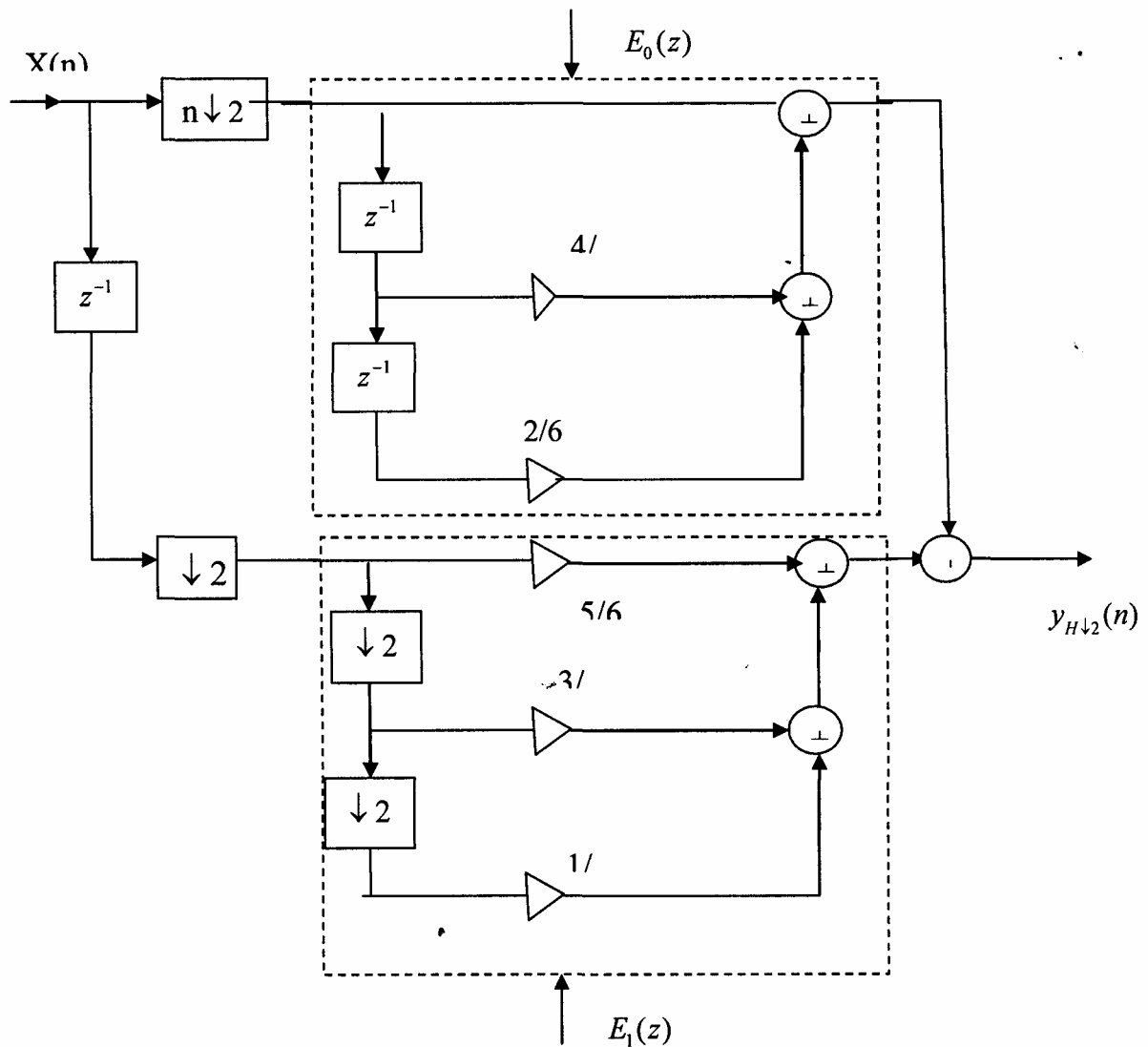
$$E_0(z) = 1 + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{2}{6}z^{-4}$$

$$E_1(z) = \frac{5}{6} + \frac{3}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}$$

Từ đây ta có cấu trúc nhiều pha hai thành phần tối ưu nhất của FIR $H_{\downarrow 2}$ minh hoạ trên hình 3.5.1.5 (a) và 3.5.1.5 (b).



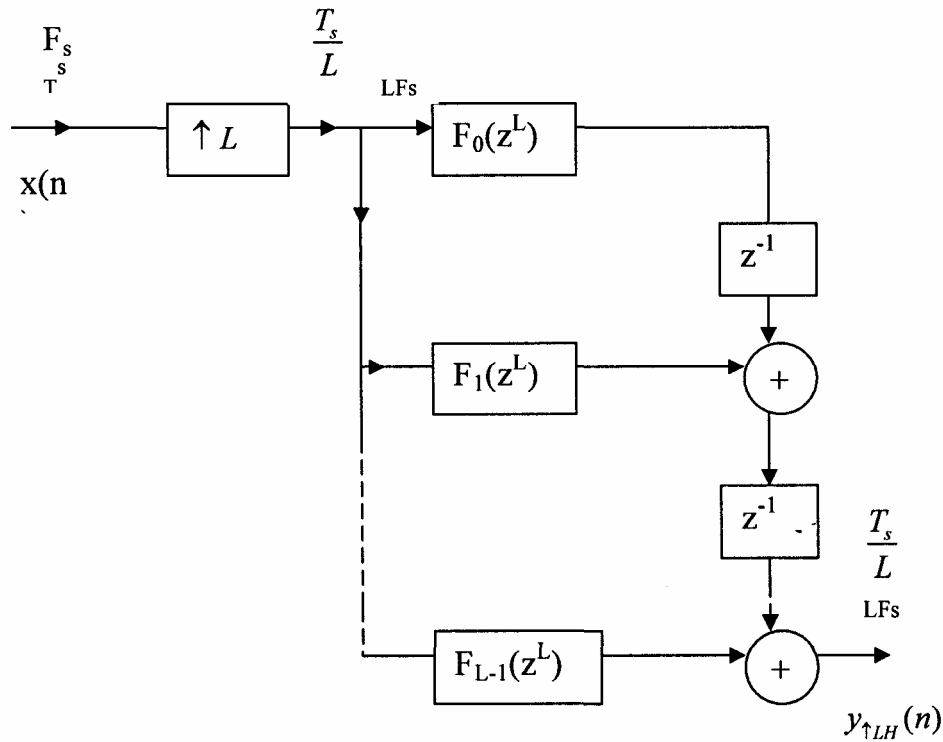
Hình 3.5.1.5



Hình 3.5.1.5

3.5.2. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc nội suy

Chúng ta sẽ dùng cấu trúc nhiều pha loại 2 cho trên hình 3.4.3.1 để xây dựng cấu trúc nhiều pha L thành phần của bộ lọc nội suy hệ số $L \uparrow LH$. Kết hợp với hình 9.3.2.1 ta nhận được bộ lọc nội suy $\uparrow LH$ có cấu trúc nhiều pha L thành phần được minh họa trên hình 3.5.2.1.



Hình 3.5.2.1

Nhận xét:

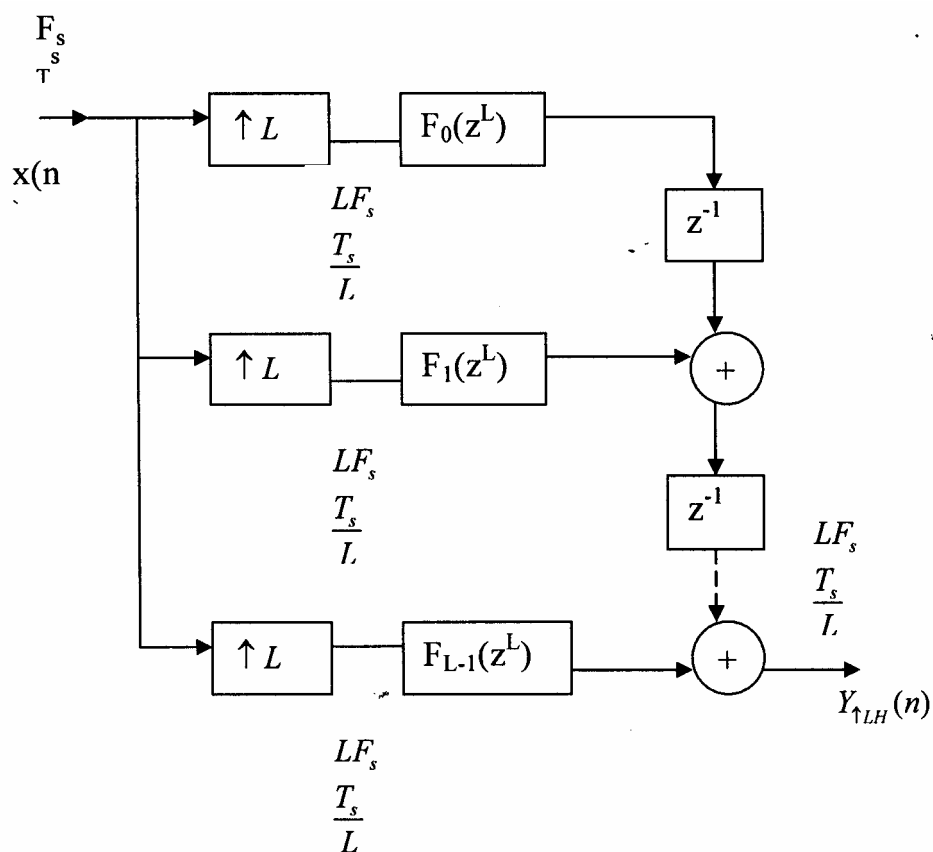
- Cấu trúc trên hình 3.5.2.1 không nói lên được sự ưu việt của các cấu trúc nhiều pha vì nó dựa trên cấu trúc trên cơ sở cấu trúc 3.3.2.1.

- Bộ lọc nội suy hệ số LTLM sẽ được xây dựng trên cơ sở cấu trúc nhiều pha L thành phần, như vậy nó sẽ bị lợi dụng được sự đồng nhất của 2 sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.2.2.

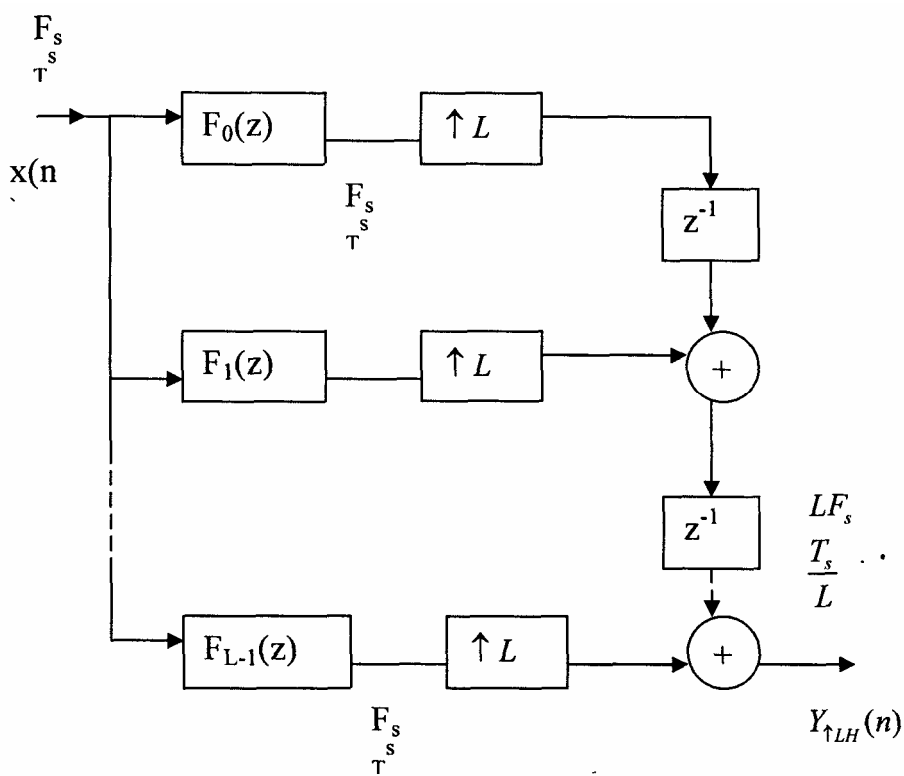
Do phép nội suy có tính chất phân phối vào phép cộng nên ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 3.5.2.1 thành cấu trúc trên hình 3.5.2.2 mà kết quả vẫn như nhau.

Sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.2.2 ta sẽ chuyển cấu trúc trên hình 3.5.2.2 thành cấu trúc trên hình 3.5.2.3.

Cấu trúc nhiều pha L thành của bộ lọc nội suy $\downarrow LH$ cho trên hình 3.5.2.3 là cấu trúc ưu việt nhất. Để thay được nhưng ưu điểm của cấu trúc nhiều pha loại này chúng ta hãy so sánh với cấu trúc trực tiếp bộ lọc nội suy TLH. Chúng ta lấy bộ lọc FIR có chiều dài N làm ví dụ minh họa. Cấu trúc trực tiếp của $\downarrow LH$ cho trên hình 3.5.2.4. Ta có thể tắt bộ lọc nội suy FIR là FIR $\uparrow LH$. Bây giờ ta tiến hành so sánh.



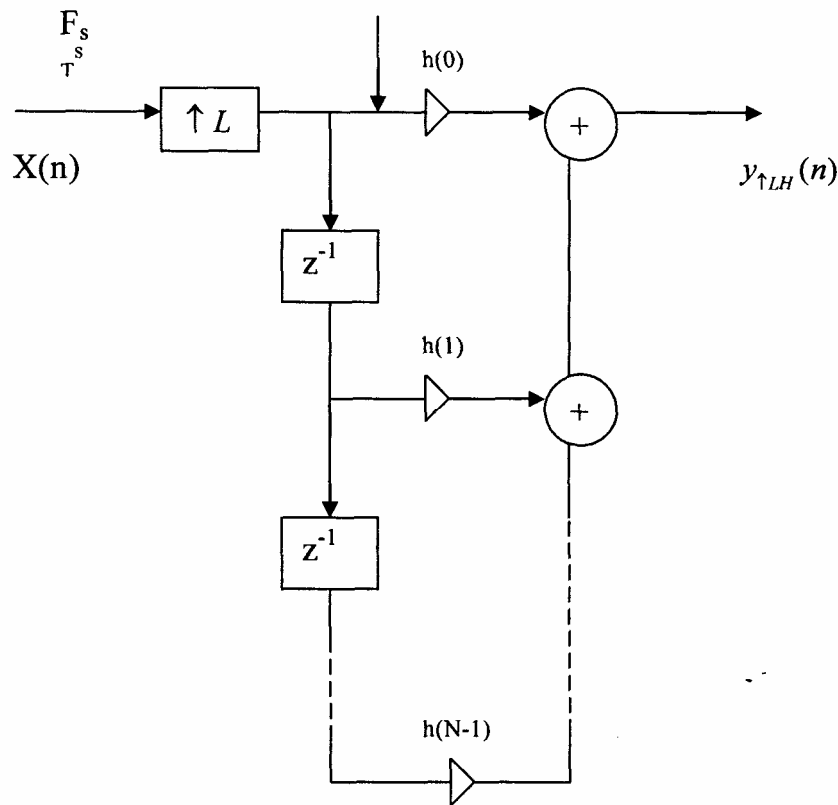
Hình 3.5.2.2



Hình 3.5.2.3

Ta thấy rằng tín hiệu vào xử lý trước khi vào bộ lọc FIR đối với FIR $\uparrow LH$ trực tiếp, phải đi qua bộ nội suy $\uparrow L$, chiều dài của xử lý tăng lên L lần, và cứ L mẫu thì có $L-1$

mẫu giá trị không, khoảng thời gian giữa hai mẫu của $y_{\uparrow LH}(n)$ bây giờ là T_s/L .



Hình 3.5.2.4

Hơn nữa chiều dài của bộ lọc FIR là N . Vậy để có một giá trị của $y_{\uparrow LH}(n)$ trong thời gian T_s/L ta phải hoàn thành N phép nhân và $N-1$ phép cộng. Như vậy ta không tận dụng được các nhân tố để giảm các tính toán yêu cầu trong một đơn vị thời gian.

Còn đối với FIR $\uparrow LH$ nhiều pha qua L thành phần thì xấu đi trực tiếp vào các khối lọc $F_m(z)$ với chu kỳ lấy mẫu là T_s , và chiều dài của $F_m(z)$ trung bình bây giờ là N/L . Vậy trong khoảng thời gian T_s ta chỉ hoàn thành số phép nhân và phép cộng trung bình N/L và $N/L - 1$.

Vậy rõ ràng là FIR $\uparrow LH$ nhiều pha L thành phần ưu việt hơn hẳn FIR $\uparrow LH$ trực tiếp

Ví dụ 3.5.2.1

Cho bộ lọc nội suy FIR $\uparrow 3H$ với $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6} \\ 0 \end{cases}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha tối ưu nhất của FIR $\uparrow 3H$.

Giải:

Ta tìm $H(z)$ sau đó tìm $E_0(z^3)$; $E_1(z^3)$; $E_2(z^3)$ rồi tìm $F_0(z^3) = E_2(z^3)$ $F_1(z^3) = E_1(z^3)$;

$$F_2(z^3) = E_0(z^3).$$

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{4}{6}z^{-2} + \frac{3}{6}z^{-3} + \frac{2}{6}z^{-4} + \frac{1}{6}z^{-5} \\ &= 1 + \frac{3}{6}z^{-3} + z^{-1}\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-3}\right) + z^{-2}\left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-3}\right) \\ &= E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3) \end{aligned}$$

vậy:

$$F_2(z^3) = E_0(z^3) = 1 + \frac{3}{6}z^{-3} \text{ và } E_0(z) = 1 + \frac{3}{6}z^{-1} = F_2(z)$$

$$F_1(z^3) = E_1(z^3) = \frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-3} \text{ và } E_1(z) = \frac{5}{6} + \frac{2}{6}z^{-1} = F_1(z)$$

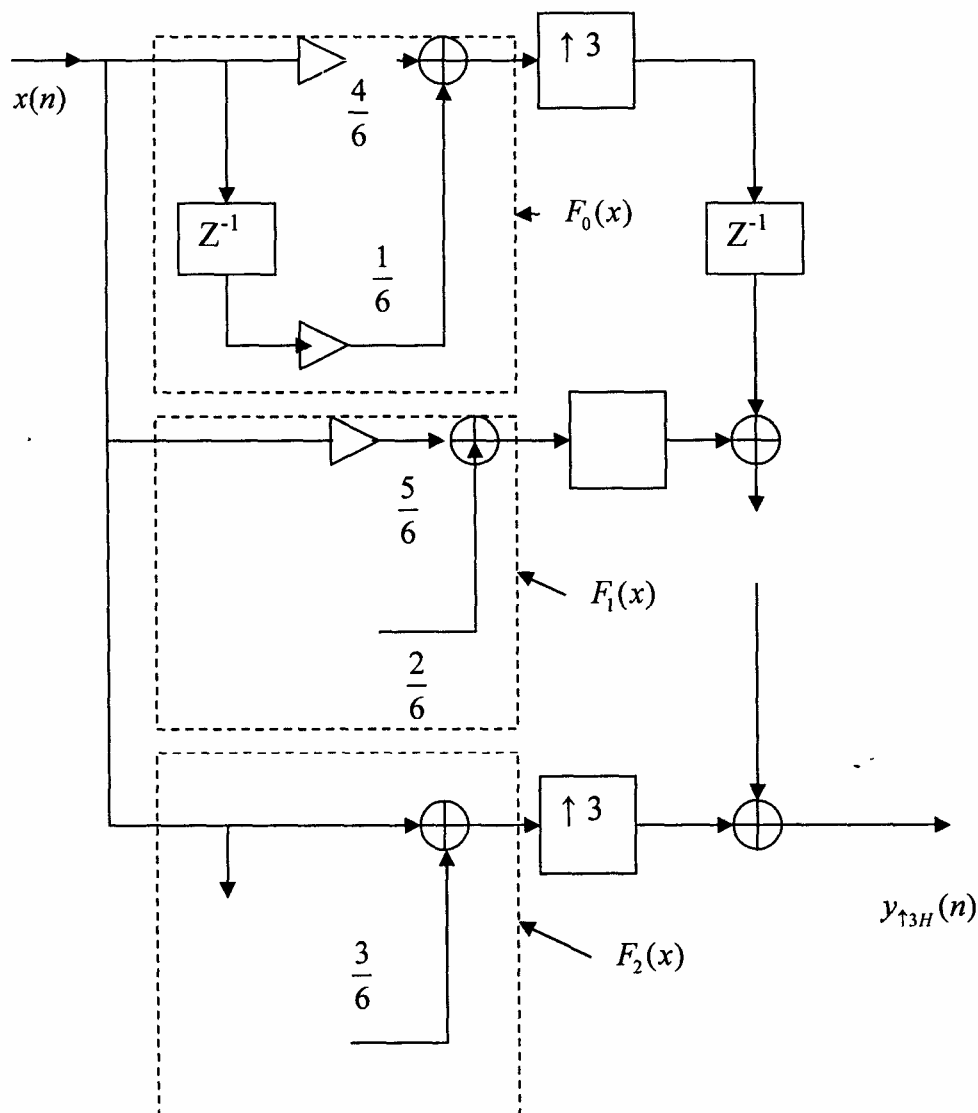
$$F_0(z^3) = E_2(z^3) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-3} \text{ và } E_2(z) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}z^{-1} = F_0(z)$$

Từ đây ta có thể xây dựng cấu trúc nhiều pha 3 thành phần tối ưu nhất của $\uparrow\text{IR}$.

3.5.3. Cấu trúc nhiều pha của các bộ lọc biến đổi nhíp hệ số M/L không nguyên

a) Tổng quan

Trên hình 3.3.3.3 chúng ta đã có sơ đồ khối của các bộ lọc biến đổi nhíp hệ số M/L với chỉ một bộ lọc số có đáp ứng xung $h(n)$, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ van tần số cắt $\omega = \min(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M})$. Nếu chúng ta tiến hành thực hiện bộ lọc biến đổi nhíp hệ số M/L $\uparrow H \downarrow M/L$ bằng cấu trúc trực tiếp của bộ lọc số hơn thì ta hoàn toàn không khai thác được nhân tố để làm giảm khối lượng tính toán đòi hỏi trong một thời gian và những phức tạp khác. Hình 3.5.3.2 minh họa bộ lọc biến đổi nhíp FIR có cấu trúc trực tiếp gọi tắt là FIR $\uparrow H \downarrow M/L$ trực tiếp.



Hình 3.5.2.5

Để thu được sự thực hiện bộ lọc biến đổi nhịp $\uparrow H \downarrow M/L$ ưu việt chúng ta sẽ dùng cấu trúc nhiều pha L hoặc M thành phần phụ thuộc vào ta dùng phân hoạch nhiều pha loại 1 hay loại 2.

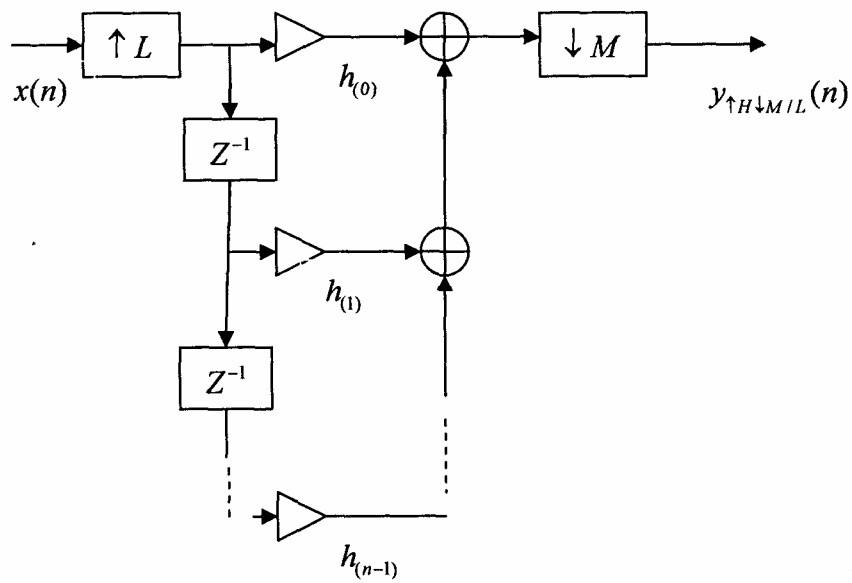
b) Cấu trúc nhiều pha loại 1 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L không nguyên

Cấu trúc nhiều pha loại 1 của bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L cho bởi hình

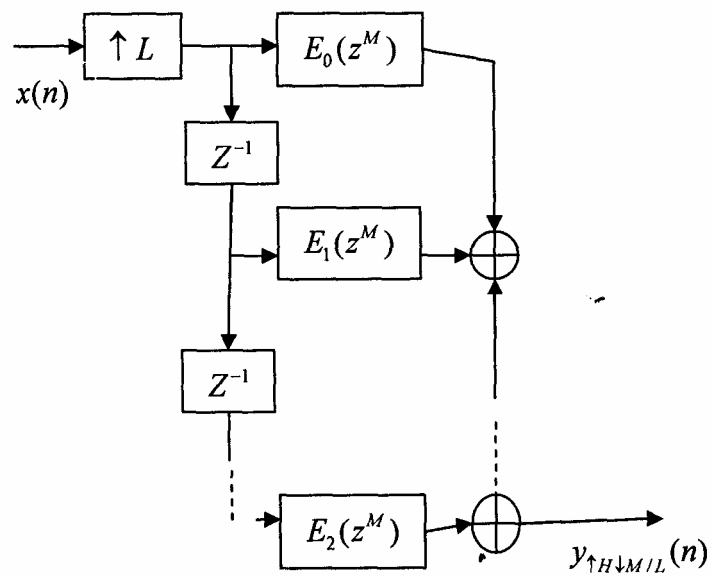
Nhận xét:

- Cấu trúc trên hình 3.5.3.2 là cấu trúc nhiều pha loại 1 M thành phần của $\uparrow H \downarrow M/L$, gọi tắt là $\uparrow H \downarrow M/L$ nhiều pha M thành phần.

- Cấu trúc nhiều pha loại này không nói lên được những ưu việt của cấu trúc nhiều pha, vì vậy chúng ta phải biến đổi sơ đồ này đi.

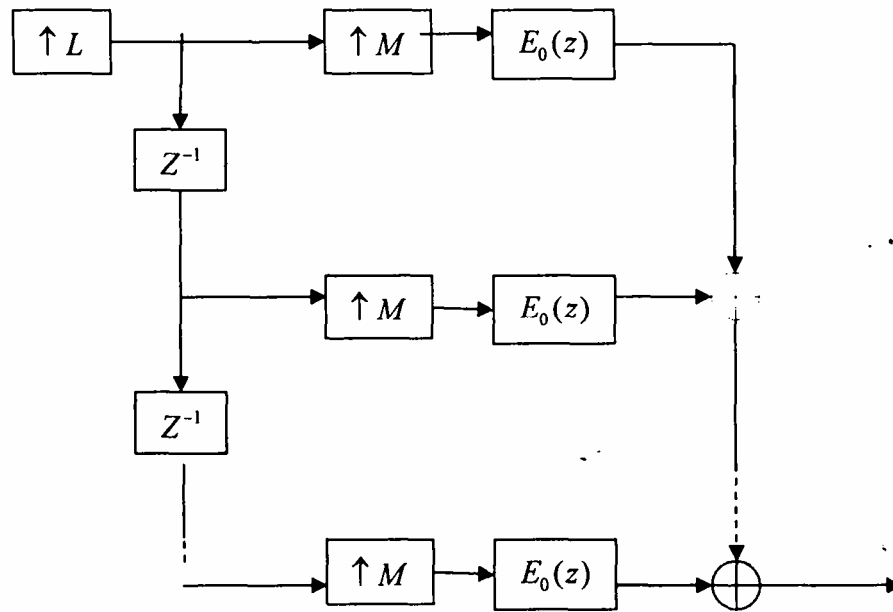


Hình 3.5.3.1



Hình 3.5.3.2

Áp dụng phân phối vào phép công của phép phân chia và sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.1.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 3.5.3.2 thành cấu trúc trên hình 3.5.3.3.



Hình 3.5.3.3

Rõ ràng cấu trúc trên hình 3.5.3.3 hơn hẳn cấu trúc trên hình 3.5.3.2 vì chúng ta tận dụng được hết khả năng ưu việt có thể khai thác được.

c) Cấu trúc nhiều pha loại 2 của bộ lọc biến đổi nhíp hệ số M/L không nguyên

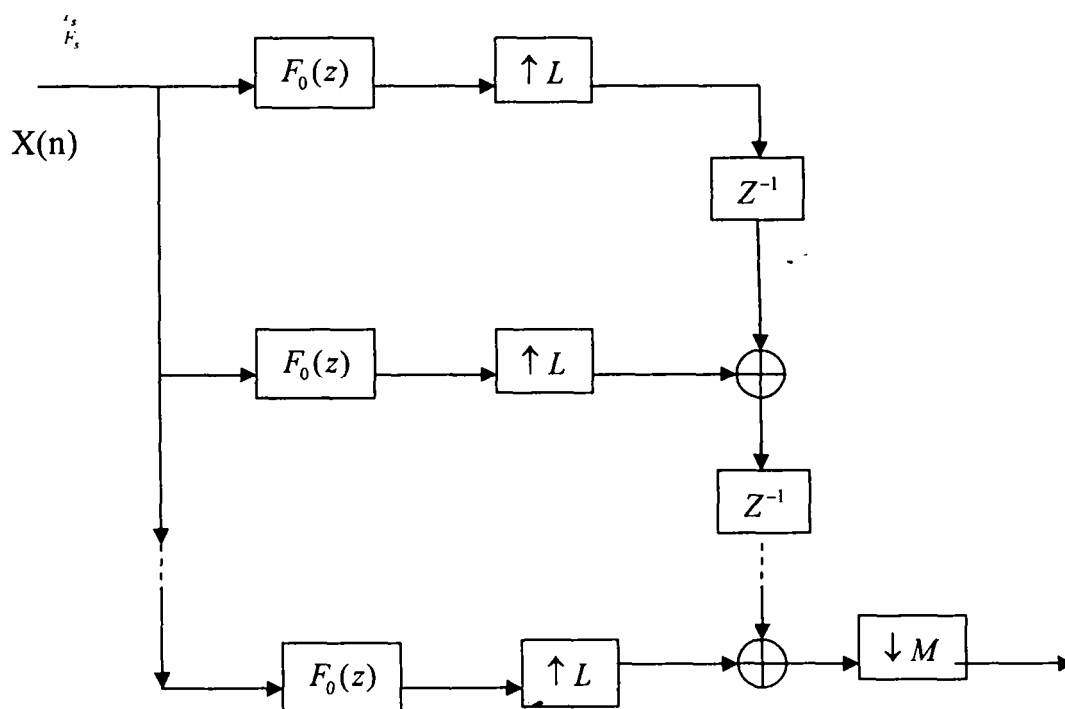
Cấu trúc nhiều pha loại 2 của bộ lọc biến đổi nhíp hệ số M/L cho trên hình 3. 5.3.4.

Nhận xét:

- Cấu trúc trên hình 3.5.3.4 là cấu trúc nhiều pha loại 2 L thành phần của $\uparrow H \downarrow M/L$ gọi tắt là $\uparrow H \downarrow M/L$ nhiều pha L thành phần.

- Cấu trúc nhiều pha loại 2 này không cho ta những ưu việt cấu trúc nhiều pha, vì vậy chúng ta phải biến đổi sơ đồ này đi.

Áp dụng tính phân phối vào phép cộng của phép nội suy và sử dụng sự đồng nhất của hai sơ đồ (a) và (b) trên hình 3.3.2.2 ta có thể chuyển cấu trúc trên hình 3.5.3.4 thành cấu trúc trên hình 3.5.3.5 mà kết quả ở đầu ra cũng vẫn không có gì thay đổi.



Hình 3.5.3.5

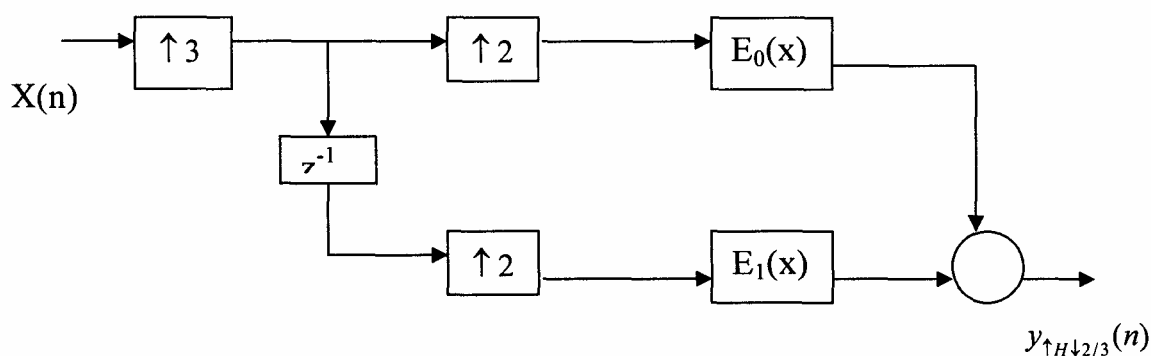
Ta thấy rằng cấu trúc trên hình 3.5.3.5 hơn hẳn cấu trúc trên hình 3.5.3.4 vì chúng ta tận dụng được hết những khả năng ưu việt có thể khai thác được.

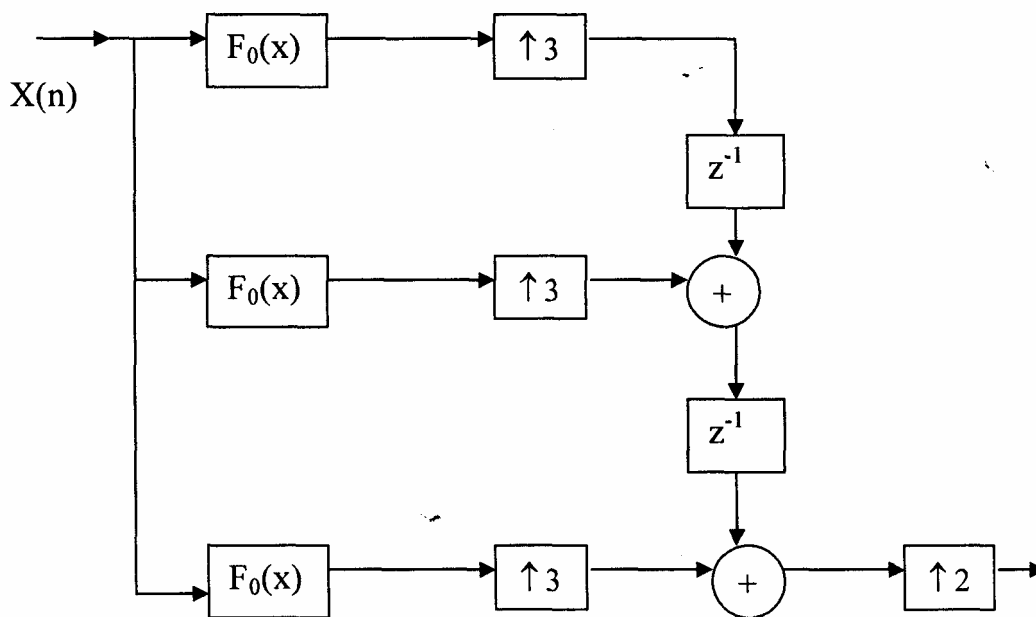
Ví dụ 3.5.3.1

Hãy tìm cấu trúc nhiều pha loại 1 hai thành phần và loại 2 ba thành phần của bộ lọc biến đổi $\uparrow H \downarrow 213$.

Giải

Dựa vào cấu trúc cho trên hình 3.5.3.3 và hình 3.5.3.5 chúng ta có kết quả cho trên hình 3.5.3.6.





Hình 3.5.3.6

Ta thấy rằng kết quả của hai cấu trúc trên hình 3.5.3.6 (a) và (b) là như nhau, ta có thể dùng cấu trúc nào cũng được. Nhưng đối với hình 3.5.3.6 (a) nếu ta dùng thêm một thủ thuật nhỏ là $z^{-1} = z^{-3}z^{-2}$ thì ta sẽ có kết quả khả quan hơn. Cụ thể nếu ta dùng thủ thuật này sau đó lợi dụng sự đồng nhất (3.3.2.11) và (3.3.1.11) sau đó lợi dụng sự tương đương (3.2.4.5) tức là đổi chỗ $\uparrow L$ và $\downarrow M$.

3.6. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỐNG LỌC SỐ NHIỀU NHỊP

Bây giờ chúng ta sẽ nêu một ứng dụng tiêu biểu của các hệ thống lọc số nhiều nhịp.

3.6.1. BANK LỌC SỐ

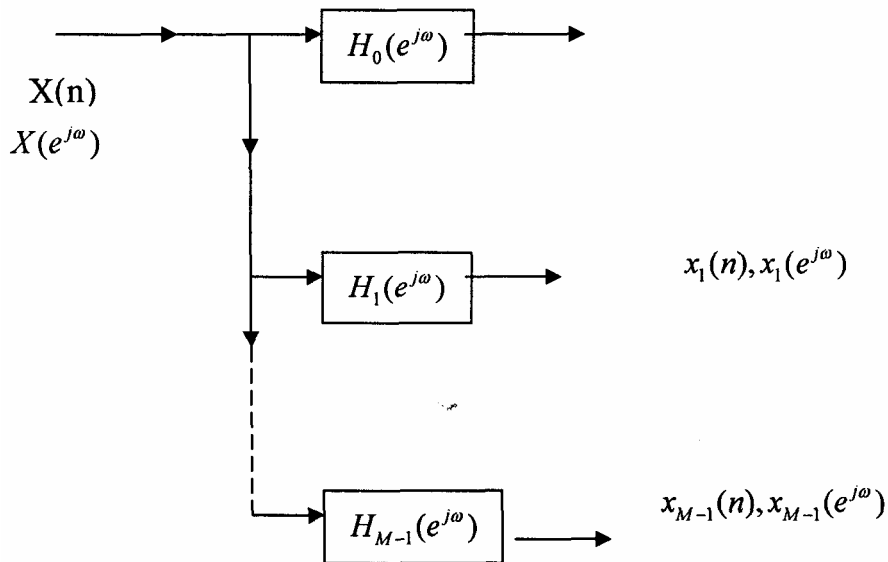
a) Định nghĩa bank lọc số.

Bank lọc số là môn tập hợp các bộ lọc số với cùng chung một đầu vào và nhiều đầu ra hoặc với nhiều đầu vào và chung một đầu ra.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng có hai loại bank lọc số là bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp.

b) Định nghĩa bank lọc số phân tích

Bank lọc số phân tích là tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là $H_k(e^{j\omega})$ được nối với nhau theo kiểu một đầu vào nhiều đầu ra, cấu trúc của bank lọc số phân tích được minh họa trên hình 3.6.1.1.



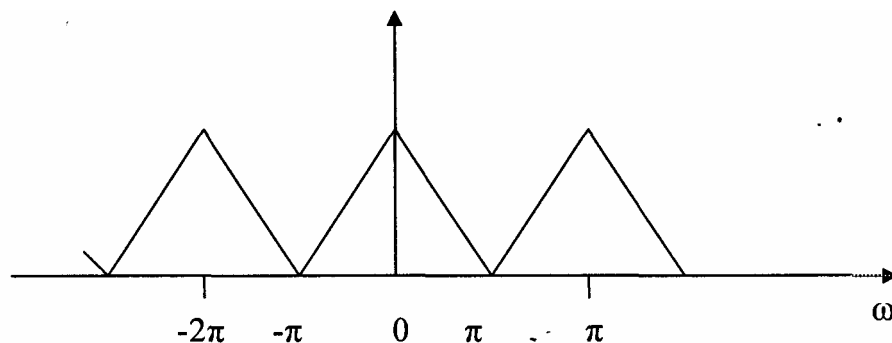
Hình 3.6.1.1

Theo hình 3.6.1.1 ta thấy rằng tín hiệu $x(n)$ đưa vào đầu vào và được phân tích thành M tín hiệu ở đầu ra là $x_k(n)$ ($0 \leq k \leq M - 1$), như vậy trong miền tần số mỗi tín hiệu $X_k(n)$ sẽ chiếm một dải tần số con trong dải tần của $X(n)$ nên M tín hiệu $X_k(n)$ được gọi là tín hiệu dải con (Subband).

Còn các bộ lọc số $H_0(e^{j\omega})$ sẽ là bộ lọc thông thấp, $H_1(e^{j\omega})$ đến $H_{M-2}(e^{j\omega})$ sẽ là các bộ lọc số thông dải còn $H_{M-1}(e^{j\omega})$ sẽ là bộ lọc thông cao, mà các tần số cắt của các bộ lọc số này sẽ kế tiếp nhau. Như vậy các bộ lọc $H_0(e^{j\omega})$, $H_1(e^{j\omega})$, ..., $H_{M-1}(e^{j\omega})$ được gọi là các bộ lọc phân tích, còn tập hợp các bộ lọc hay $\{H_0(e^{j\omega}), H_1(e^{j\omega}), \dots, H_{M-1}(e^{j\omega})\}$ được gọi là bánh lọc phân tích.

Ví dụ 3.6.1.1

Cho bộ lọc số phân tích lý tưởng với hệ số $M = 2$, tín hiệu vào bank lọc là $X(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ được cho trên hình 3.6.1.2 sau đây:



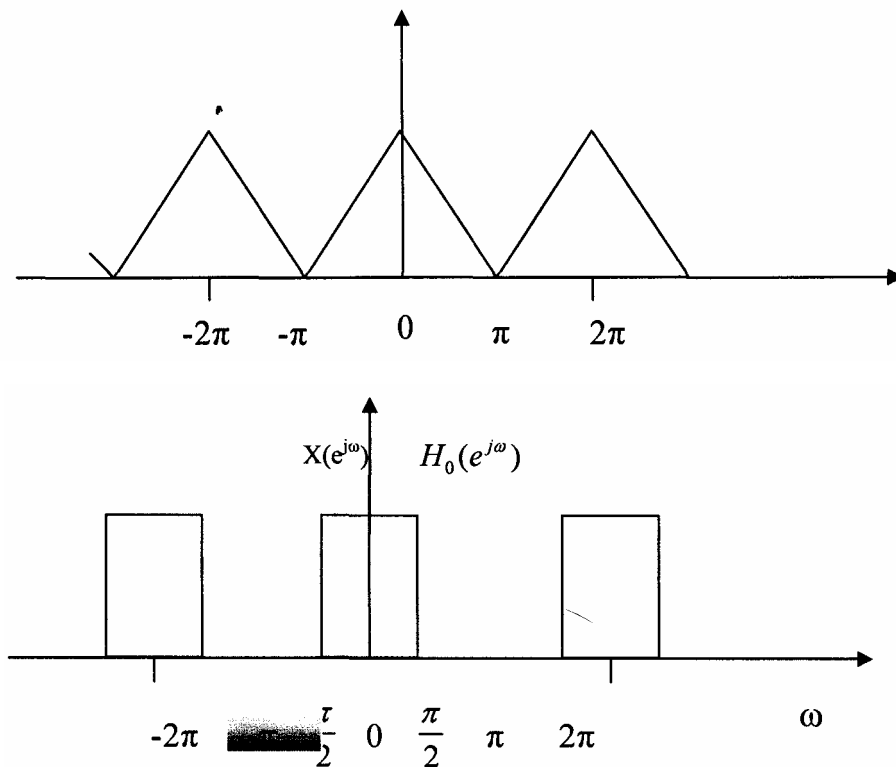
Hình 3.6.1.2.

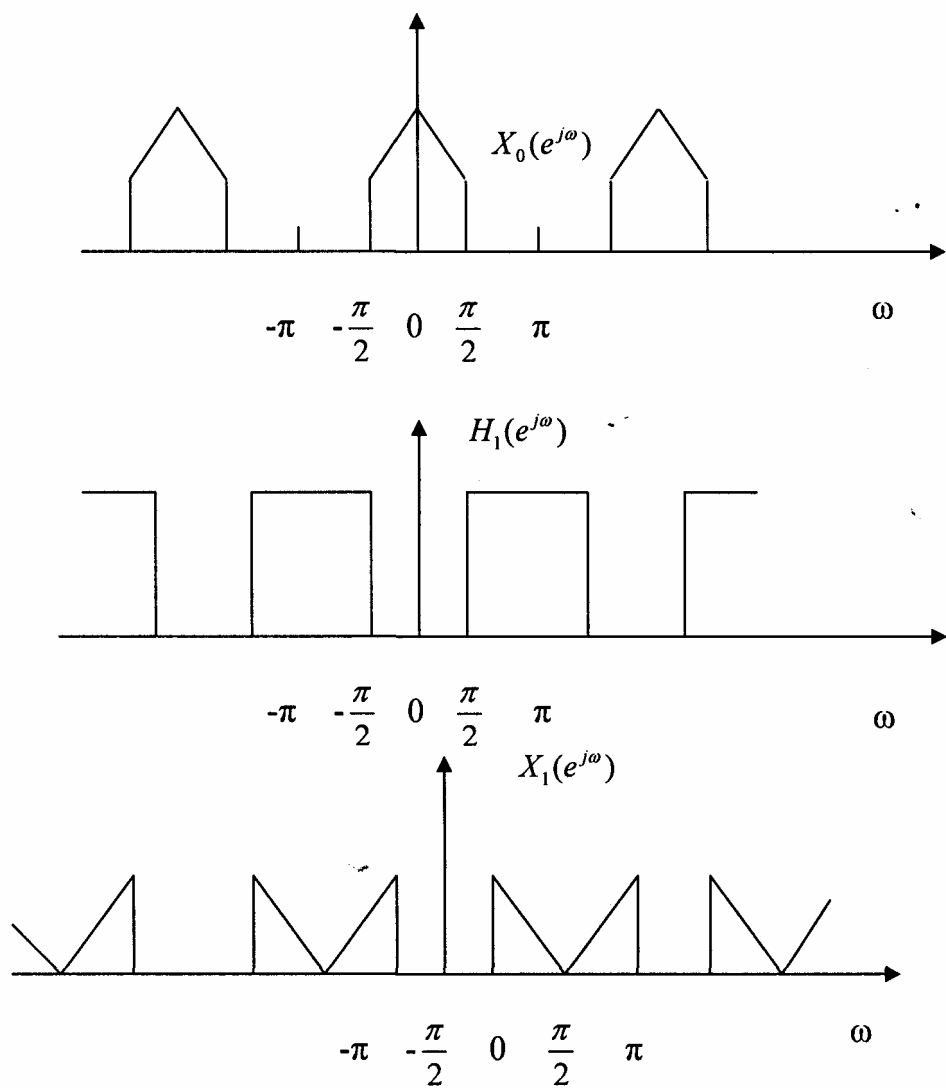
- + Hãy vẽ sơ đồ bank lọc số phân tích này.
- + Hãy dùng đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu ra.

Giải

Theo sơ đồ tổng quát của bank lọc phân tích cho trên hình 3.6.1.1 thay $M=2$ ta sẽ có bank lọc phân tích 2 kênh được minh họa trên hình 3.6.1.3 trong đó có hai bộ lọc số lý tưởng ; $H_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông thấp lý tưởng với tần số cắt là $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ $H_1(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông cao lý tưởng với tần số cắt là $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu ra là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$ được cho trên hình 3.6.1.4 sau đây:

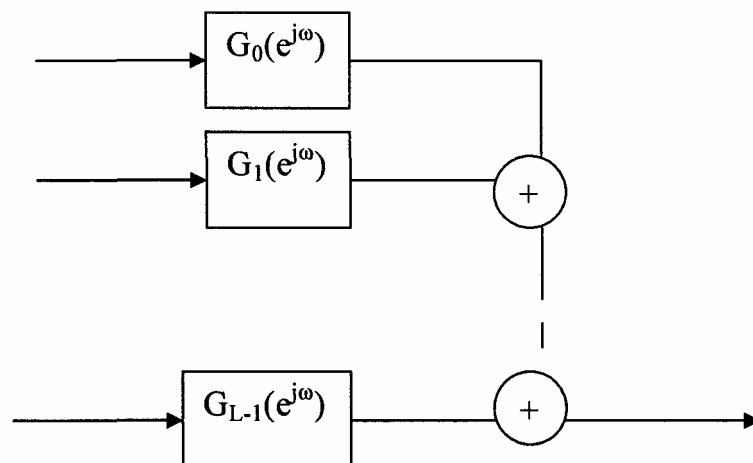




Hình 3.6.1.4

c) Định nghĩa bank lọc số tổng hợp:

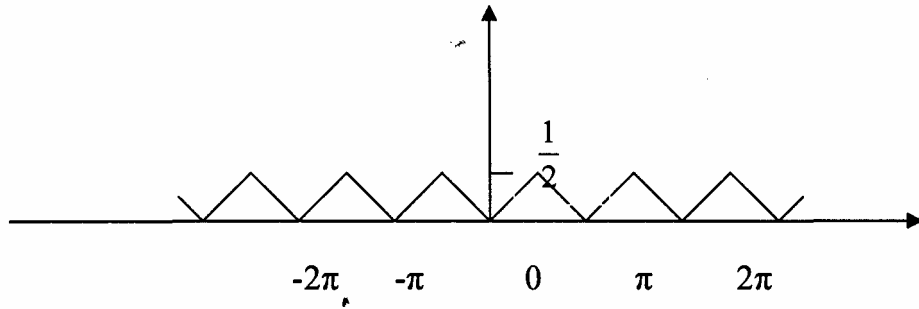
Bank lọc số tổng hợp là tập hợp các bộ lọc số có đáp ứng tần số là $G_k(e^{j\omega})$ được nối với nhau theo kiểu nhiều đầu vào và một đầu ra, cấu trúc của bank lọc số tổng hợp được minh họa trên hình 3.6.1.5:



Hình 3.6.1.5

Ví dụ:

Cho bank lọc số tổng hợp lý tưởng với hệ số $M=2$ có hai tín hiệu vào bank lọc số này có phổ tần là $Y_0(e^{j\omega})$ và $Y_1(e^{j\omega})$ có dạng cho trên hình 3.6.1.6 cần tổng hợp với nhau để được tín hiệu có phổ là $Y(e^{j\omega})$.

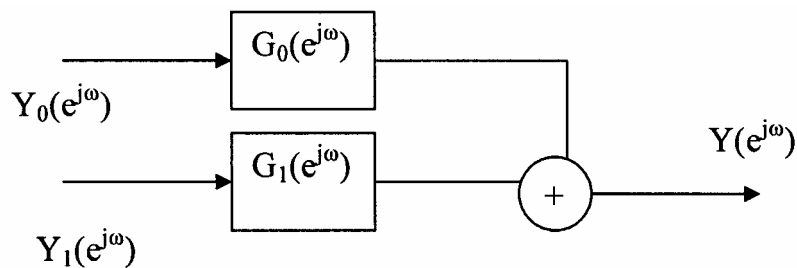


Hình 3.6.1.6

- + Hãy vẽ sơ đồ bank lọc số tổng hợp
- + Hãy dùng đồ thị tần số để giải thích dạng phổ của tín hiệu đầu ra

Giải

Theo sơ đồ tổng quan của bank lọc số tổng hợp cho trên 3.6.1.5 thay $m=2$ ta có bank lọc tổng hợp hai kênh được minh họa trên hình 3.6.1.7 trong đó $G_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông thấp lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; $G_1(e^{j\omega})$ là bộ lọc thông cao lý tưởng $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.



Hình 3.6.1.7

Đồ thị tần số để giải thích dạng phổ tần của tín hiệu ra được cho trên hình 3.6.1.7.

d) Bank lọc số DFT

Trong chương 4 chúng ta đã nghiên cứu biến đổi Fourier rời rạc (DFT) và chúng ta đã biểu diễn DFT dưới dạng ma trận như sau:

$$\underline{X}(k)_M^* = \underline{\underline{w}}_M \underline{x}(m)_M \quad (3.6.1.1)$$

$\underline{\underline{w}}_M$ là ma trận vuông $M \times M$ gồm các phần tử w_M^{km} . Ở đây $w_M^{km} = e^{-j\frac{2\pi}{M}km}$. Tương tự ta có biến đổi Fourier rời rạc ngược (IDFT)

$$\underline{x}(m)_M \frac{1}{M} \underline{w}_M^* = \underline{X}(k)_M \quad (3.6.1.2)$$

ở đây $\underline{w}_M$ là liên hợp phức của ma trận $\underline{w}_M$.

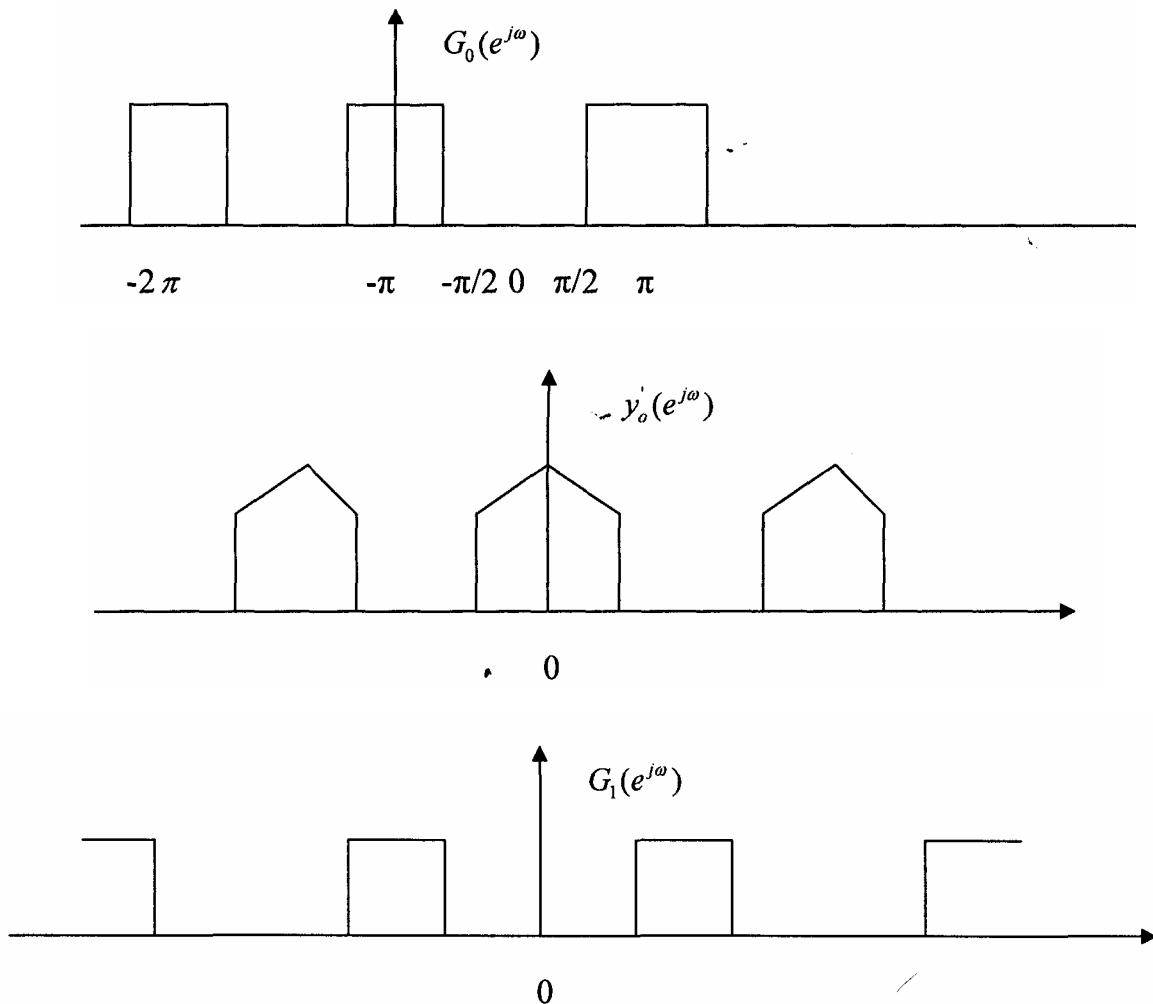
Để hình thành bank lọc số DFT, giả sử ta có dãy $X(n)$ là dãy vào, từ dãy $X(n)$ này chúng ta tạo ra M dãy giảm bằng cách cho dãy $X(n)$ qua một đường dây trễ cụ thể ta có :

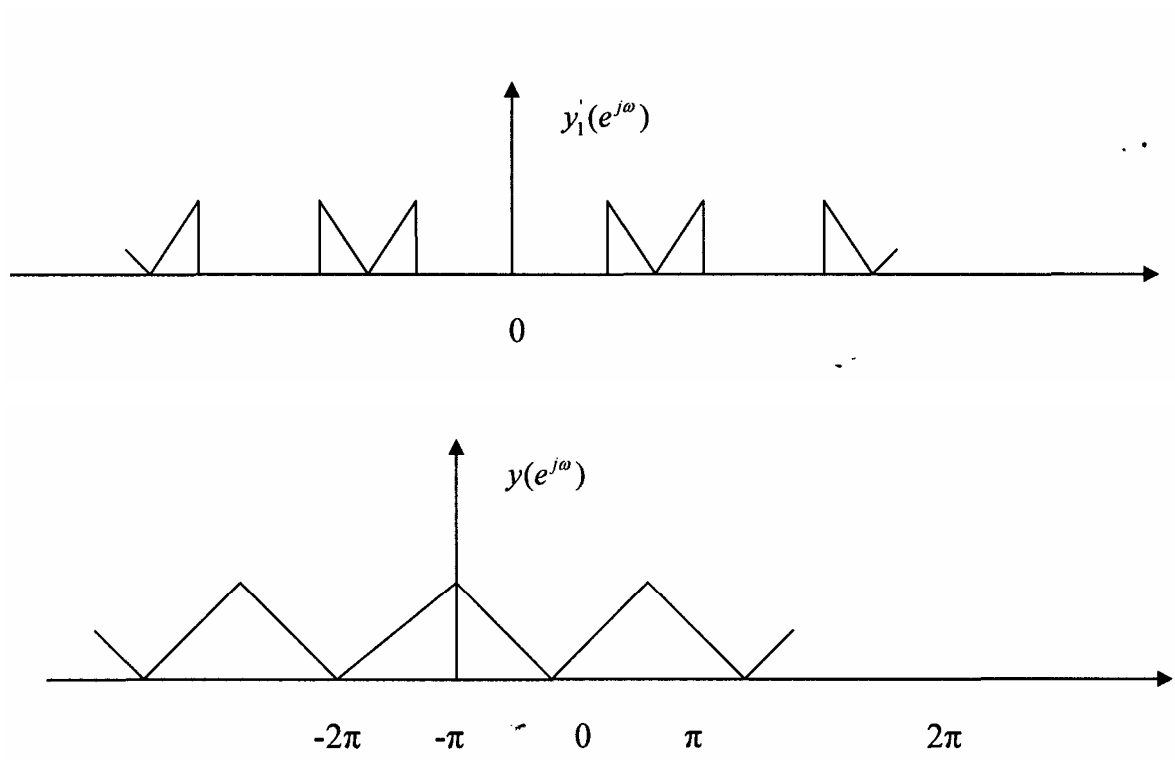
$$g_i(n) = x(n-i)$$

Đầu ra của bank lọc số DFT này sẽ là các tín hiệu $X_k(n)$ có dạng như sau:

$$X_k(n) = \sum_{i=0}^{M-1} g_i(n) w_M^{-ki}$$

$$X_k(n) = \sum_{i=0}^{M-1} (n-i) w_M^{-ki} \quad (3.6.1.3)$$





Hình 3.6.1.8

biểu diễn dưới dạng ma trận ta có:

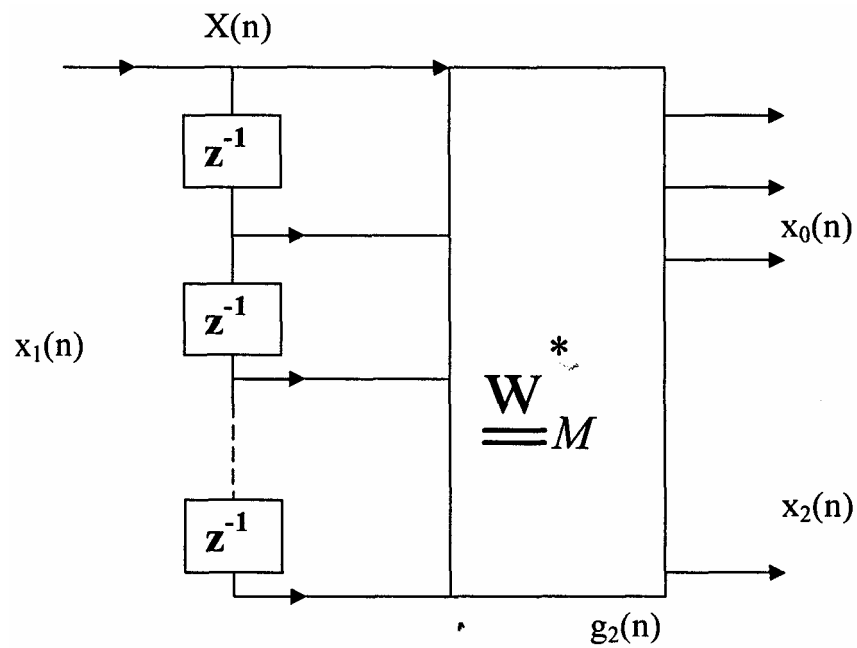
$$\underline{X}_k(n) = \underline{w}_M^* g_1(n)$$

$$\underline{X}_k(n) = \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_{M-1}(n) \end{bmatrix}$$

$$\underline{g}_1(n) = \begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \\ \vdots \\ g_{M-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x[n-(M-1)] \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_M^* = \begin{pmatrix} W_M^{-0} & W_M^{-0} & \dots & w_M^0 \\ W_M^{-0} & W_M^{-1} & \dots & W_M^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_M^{-0} & W_M^{-(M-1)} & \dots & W_M^{-(M-1)(M-1)} \end{pmatrix}$$

từ đây hình thành bank lọc DET cho trên hình 3.6.1.9 như sau:



Hình 3.6.1.9

lấy biến đổi z biểu thức (3.6.1.3) ta có:

$$\begin{aligned}
 ZT[x_k(n)] &= ZT\left[\sum_{i=0}^{M-1} x(n-i)w_M^{-ki}\right] \\
 \Rightarrow X_k(z) &= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} X(z) w_M^{-ki} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (z \cdot w_M^k)^{-i} X(z) \\
 &= X(z) \sum_{i=0}^{M-1} (z w_M^k)^{-i}
 \end{aligned}$$

Ta gọi

$$H_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} (z w_M^k)^{-i} \quad , (0 \leq k \leq M-1) \quad (3.6.1.4)$$

$$\Rightarrow x_k(z) = X(z) \cdot H_k(z) \quad (3.6.1.5)$$

vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 H_0(z) &= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} \\
 &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(M-1)} \\
 h_0(n) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \\
 H_0(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{M-1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3.6.1.8}$$

Từ đây ta có thể biết quan hệ giữa $H_0(z)$ và $H_k(z)$ như sau:

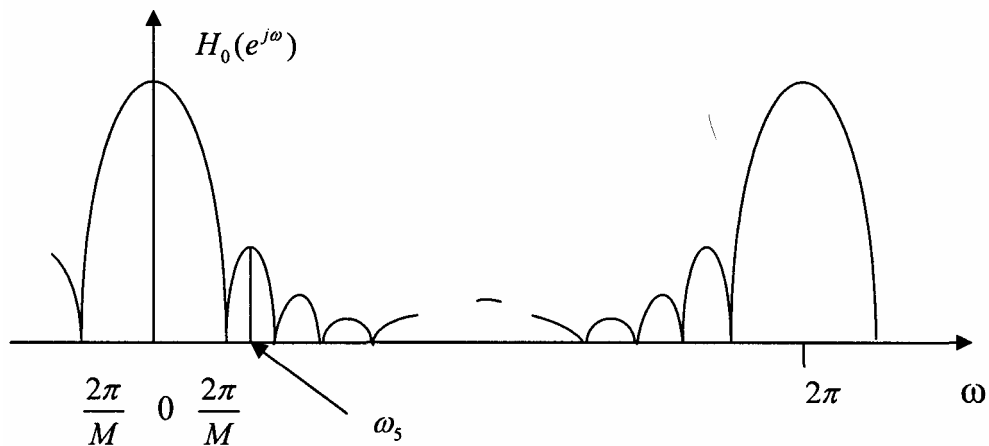
$$H_k(z) = H_0(z w_M^k) \tag{3.6.1.9}$$

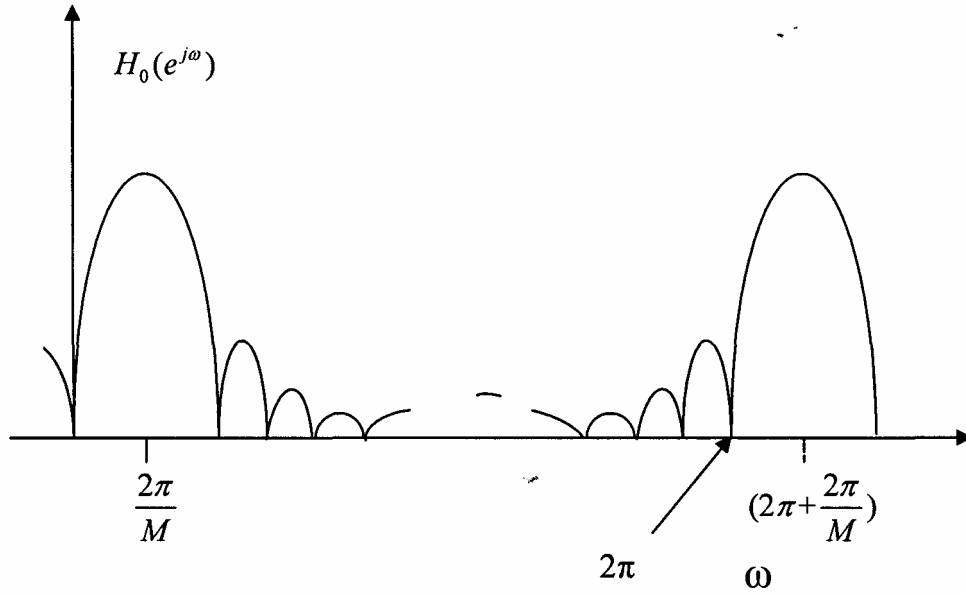
và

$$H_k(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)}) \tag{3.6.1.10}$$

vậy $H_k(e^{j\omega})$ chính là phiên bản trễ tần số đi một lượng $-\frac{2\pi}{M}k$ của $H_0(e^{j\omega})$

Hình (3.6.1.8) sẽ minh họa cho ta rõ quan hệ giữa $H_0(e^{j\omega})$ và $H_1(e^{j\omega})$. Từ đây chúng ta có thể suy ra mối quan hệ giữa các $H_k(e^{j\omega})$ với $(0 \leq k \leq M-1)$.





Hình 3.6.1.10

e) Biểu diễn nhiều pha bank lọc số

*Biểu diễn nhiều pha loại 1 đối với bank lọc phân tích

Trong biểu thức (3.4.2.1) chúng ta có thể biểu diễn nhiều pha loại 1 M thành phần đối với hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} E_i(z^M)$$

Đối với bank lọc số phân tích gồm M bộ lọc có hàm truyền đạt là $H_0(z)$, $H_1(z)$, ..., $H_{M-1}(z)$ vậy với mỗi hàm truyền đạt $H_k(z)$ chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng phân hoạch nhiều pha như sau:

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} \cdot E_{km}(z^M) \quad (3.6.1.11)$$

Chúng ta có thể viết biểu thức (3.6.1.11) dưới dạng sau đây đối với từng $H_k(z)$:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 \cdot E_{00}(z^M) + z^{-1} \cdot E_{01}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)} \cdot E_{0,M-1}(z^M) \\ H_1(z) &= 1 \cdot E_{10}(z^M) + z^{-1} \cdot E_{11}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)} \cdot E_{1,M-1}(z^M) \\ &\vdots \\ H_{M-1}(z) &= 1 \cdot E_{M-1,0}(z^M) + z^{-1} \cdot E_{M-1,1}(z^M) + \dots + z^{-(M-1)} \cdot E_{M-1,M-1}(z^M) \end{aligned}$$

Từ đây chúng ta có thể biểu diễn biểu thức (3.6.1.13) dưới dạng ma trận sau :

$$\underline{H}(z) = \underline{E}(z^M) \cdot \underline{z}^{-m} \quad (3.6.1.12)$$

với

$$\underline{H}(z) = \begin{pmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{pmatrix}; \quad \underline{z}^{-m} = \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}}(z^M) = \begin{pmatrix} E_{00}(z^M) & E_{01}(z^M) & \dots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{10}(z^M) & E_{11}(z^M) & \dots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \dots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{pmatrix}$$

Ma trận $\underline{\underline{E}}(z^M)$ gọi là ma trận loại một M thành phần đối với bank lọc phân tích.

Hình 3.6.1.11 sẽ minh họa cấu trúc nhiều pha loại một M thành phần đối với bank lọc phân tích.

* *Biểu diễn nhiều pha loại 2 đối với bank lọc tổng hợp.*

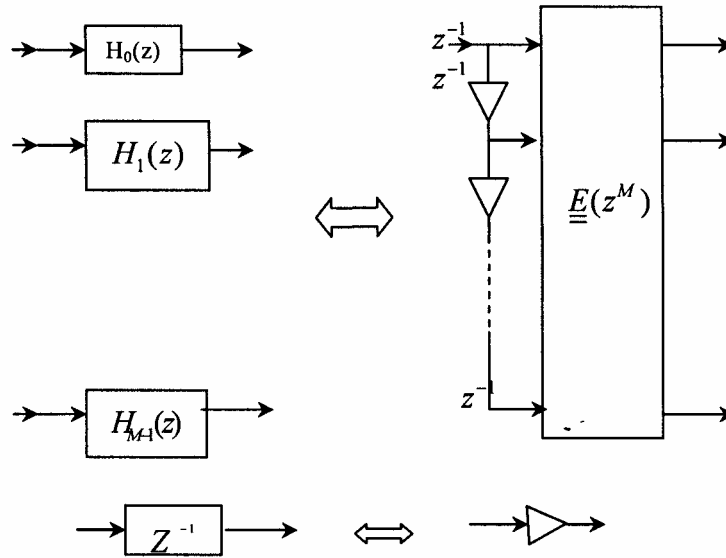
Trong biểu thức (3.4.3.2) chúng ta đã có biểu diễn nhiều pha loại hai M thành phần đối với một hàm truyền đạt $G(z)$ như sau :

$$G(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_m(z^M) \quad 0 \leq m \leq M-1$$

Đối với bank lọc số tổng hợp gồm M bộ lọc có hàm truyền đạt là $G_0(z), G_1(z), \dots, G_{M-1}(z)$. vậy đối với mỗi hàm truyền đạt $G_k(z)$ chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng phân hoạch nhiều pha loại hai M thành phần như sau:

$$G_k(z) = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-(M-1-m)} F_{mk}(z^M)$$

(3.6.1.13)



Hình 3.6.1.11

Khai triển biểu thức (3.6.1.13) đối với từng hàm truyền đạt $G_k(z)$ chúng ta có các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
 G_0(z) &= z^{-(M-1)} F_{00}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{10}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,0}(z^M) \\
 G_1(z) &= z^{-(M-1)} F_{01}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{11}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,1}(z^M) \\
 &\vdots \\
 G_{M-1}(z) &= z^{-(M-1)} F_{0,M-1}(z^M) + z^{-(M-2)} F_{1,M-1}(z^M) + \dots + 1 \cdot F_{M-1,M-1}(z^M)
 \end{aligned}$$

Từ đây chúng ta có thể biểu diễn biểu thức (3.6.1.13) dưới dạng ma trận sau:

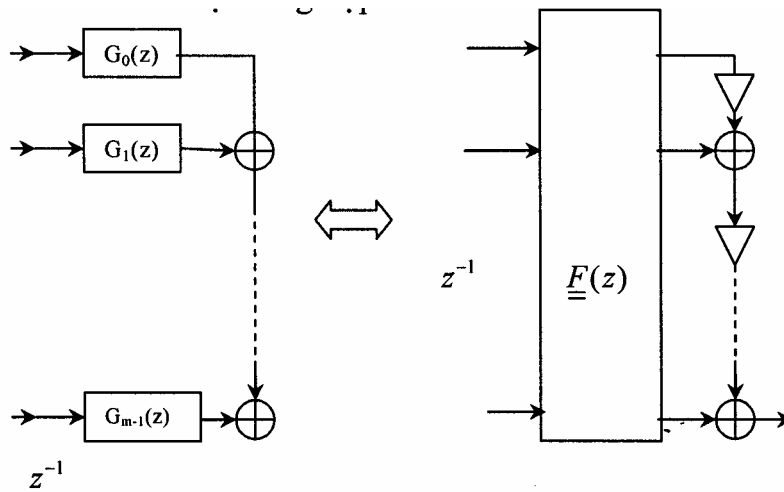
$$\underline{G}'(z) = z^{-(M-1)} \cdot \underline{z}^m \cdot \underline{F}(z^M) \quad (3.6.1.14)$$

với

$$\begin{aligned}
 \underline{G}'(z) &= [G_0(z) \quad G_1(z) \quad \dots \quad G_{M-1}(z)] \\
 \underline{z}^m &= [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{M-1}] \\
 \underline{F}(z^M) &= \begin{bmatrix} F_{00}(z^M) & F_{01}(z^M) & \dots & F_{0,M-1}(z^M) \\ F_{10}(z^M) & F_{11}(z^M) & \dots & F_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{M-1,0}(z^M) & F_{M-1,1}(z^M) & \dots & F_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ma trận $\underline{F}(z^M)$ là ma trận nhiều pha loại hai M thành phần đối với bank lọc tổng hợp.

Hình 3.6.1.12 sẽ minh họa cấu trúc nhiều pha loại hai M thành phần đối với bank lọc tổng hợp.



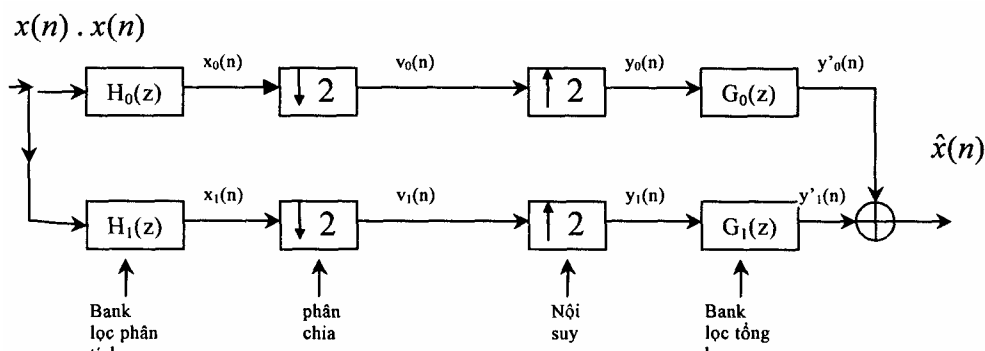
Hình 3.6.1.12

3.6.2. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP HAI KÊNH

a) Bank lọc số nhiều nhíp hai kênh và bank lọc gương cầu phương QMF

Trong phần trên, khi xét bank lọc số, sau khi bank lọc phân tích chúng ta sẽ thu được tín hiệu dải con (subband) $x_k(n) \leq k \leq M-1$. Sau đó chúng ta đã nghiên cứu bank lọc số tổng hợp. Bây giờ chúng ta sẽ kết hợp bank lọc số phân tích và bank lọc số tổng hợp với các bộ phân chia và nội suy để tạo ra bank lọc số tổng hợp nhiều nhíp. Trước hết ta nghiên cứu trường hợp $M=2$, ta gọi là bank lọc số nhiều nhíp hai kênh, bank lọc số nhiều nhíp này được minh họa trên hình 3.6.2.1.

Trong bank lọc số phân tích cho trên hình 3.6.2.1 ta thấy rằng $H_0(z)$ là bộ lọc số thông thấp, còn $H_1(z)$ là bộ lọc số thông cao. Khi thiết kế các bộ lọc số này sẽ không thể đạt được lý tưởng, tất nhiên đối với cả bộ lọc số $G_0(z)$ và $G_1(z)$ ở bank lọc tổng hợp, nên tín hiệu ra $\hat{x}(n)$ của bank lọc số nhiều nhíp này sẽ khác với tín hiệu vào.



Hình 3.6.2.1

Hình 3.6.2.2 sẽ minh họa một vài trường hợp của đáp ứng biên độ $|H_0(e^{j\omega})|$ và $|H_1(e^{j\omega})|$.

Nhìn vào hình 3.6.2.2 ta thấy rằng $|H_0(e^{j\omega})|$ và $|H_1(e^{j\omega})|$ quan hệ sau đây:

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})| \quad (3.6.2.1)$$

Và nếu ta tưởng tượng đặt một gương phẳng vào vị trí $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ trên trục tần số ω thì $|H_1(e^{j\omega})|$ sẽ là ảnh gương của $|H_0(e^{j\omega})|$, và theo thang tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì $\frac{\pi}{2}$ chính là một phần tư tần số lấy mẫu. Chính vì vậy băng số lọc nhiều nhịp cho trên hình 3.6.2.1 được gọi là bánh lọc số gương cầu phương (Quadrature mirror filter bank: QMF), và chúng ta ký hiệu bộ lọc này bằng ba chữ đầu của tiếng anh: QM.

Trong bank lọc QMF này có ba loại sai số có thể sinh ra là: sai số do thành phần hư danh (aliasing) của $|H_0(e^{j\omega})|$ và $|H_1(e^{j\omega})|$ sai số do méo biên độ và sai số do méo pha.

Còn nếu dạng tín hiệu ra xấp xỉ giống hoàn toàn tín hiệu vào $\hat{x}(n)$, tức là:

$$\hat{x}(n) = c.x(n - n_o) \quad (3.6.2.2)$$

(c là hằng số)

thì bank lọc QMF này được gọi là bank lọc QMF khôi phục hoàn hảo (Perfect Reconstruction: PR) và ký hiệu là PR QMF.

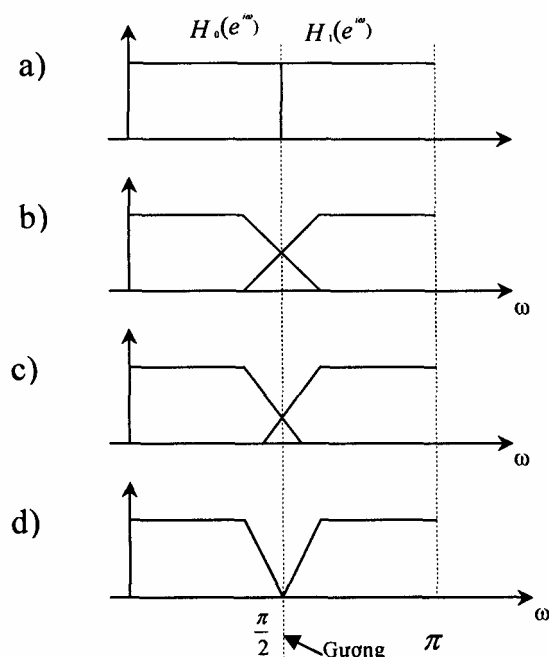
Chú ý rằng thuật ngữ bank lọc số gương cầu phương (QMF) được giải thích đối với bank lọc số hai kênh, nhưng sau này ta cũng dùng thuật ngữ này đối với bank lọc số M kênh.

$$E_0(z^3) = \frac{1}{1 - a^3 z^{-3}} ; E_1(z^3) = \frac{a}{1 - a^3 z^{-3}} \text{ và } E_2(z^3) = \frac{a^2}{1 - a^3 z^{-3}}$$

Hãy vẽ cấu trúc nhiều pha 3 thành phần của $H(z)$.

Giải

Cấu trúc nhiều pha 3 thành phần của $H(z)$ được cho trên hình (3.4.2.2)

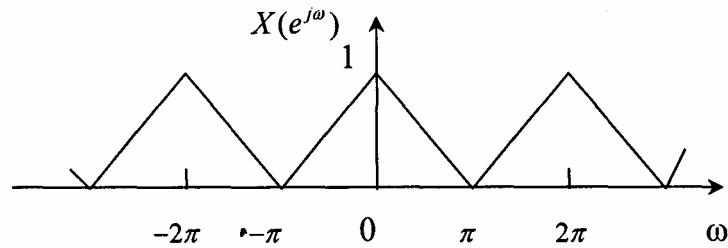


- (a). trường hợp bộ lọc số lý tưởng,
 (b), (c), (d). các trường hợp bộ lọc số không lý tưởng

Hình 3.6.2.2

Ví dụ 3.6.2.1:

Giả sử chúng ta có bank lọc số QMF cho trên hình 3.6.2.1 , $H_0(z) = G_0(z)$ là các bộ lọc số thông thấp lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \geq \pi/2$, $H_1(z) = G_1(z)$ là các bộ lọc số thông cao lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \pi/2$. Cho phổ của tín hiệu vào $x(n)$ là $X(e^{j\omega})$ có dạng như trên hình 3.6.2.3 sau đây:



Hình 3.6.2.3

- + Hãy vẽ $X_0(e^{j\omega})$, $V_0(e^{j\omega})$, $Y_0(e^{j\omega})$, $Y'_0(e^{j\omega})$
- + Hãy vẽ $X_1(e^{j\omega})$, $V_1(e^{j\omega})$, $Y_1(e^{j\omega})$, $Y'_1(e^{j\omega})$
- + Hãy vẽ $X(e^{j\omega})$.

Giải:

Đồ thị tần số yêu cầu vẽ được cho trên hình 3.6.2.4.

Trên hình 3.6.2.4 ta thấy rằng nếu các bộ lọc số của hai bank lọc phân tích và tổng hợp đều là các bộ lọc số lý tưởng thì sẽ không gây ra các thành phần hư danh (aliasing), vậy ta thấy dạng của tín hiệu ra khỏi bank lọc QMF này $X(e^{j\omega})$ giống hoàn toàn dạng của tín hiệu vào bank lọc $X(e^{j\omega})$, chỉ khác nhau hệ số $1/2$.

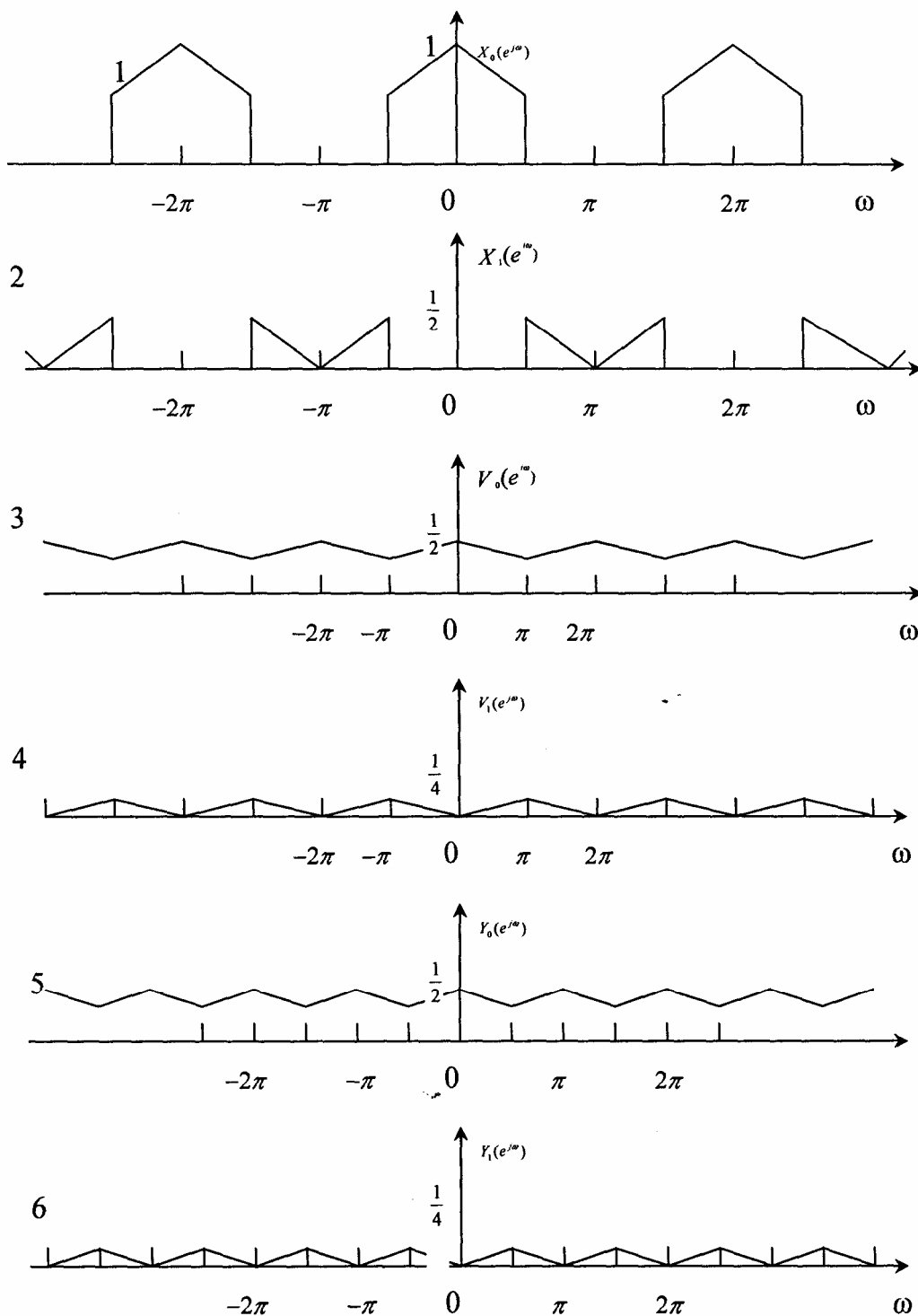
b) Phân tích các sai số trong bank lọc số nhiều nhịp

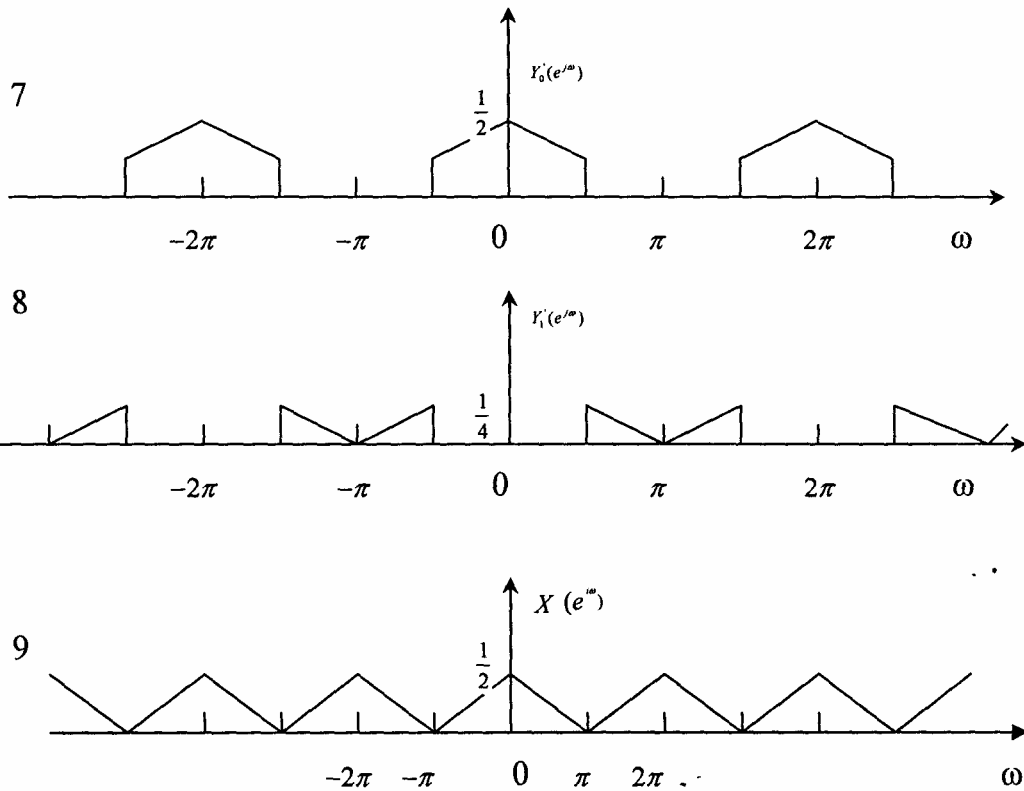
* Sai số do thành phần hư danh

Trên thực tế ta thấy rằng các bộ lọc số $H_0(z)$ và $H_1(z)$ không thể đạt lý tưởng như trên hình 3.6.2.2. Trên hình 3.6.2.2 (a) là trường hợp lý tưởng thì sẽ không gây ra sai số hư danh tức là sẽ không gây ra chồng phổ đối với tín hiệu ra khỏi bộ phân chia $\downarrow 2$ là $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$ theo sơ đồ trên hình 3.6.1.1 và bề rộng của dải thông và dải chắn trong trường hợp lý tưởng đúng bằng $\pi/2$ và bề rộng của dải quá độ $\Delta\omega = 0$. Còn trên hình 3.6.2.2 (d) là trường hợp các bộ lọc không lý tưởng nhưng cũng không gây chồng phổ đối với $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$, tức là thành phần hư danh không xuất hiện. Nhưng bề rộng của dải thông sẽ nhỏ hơn $\pi/2$ và bề rộng của dải chắn sẽ lớn hơn $\pi/2$, trong trường hợp hình

3.6.2.2 (d) này nếu ta chọn bề rộng của dải quá độ rất hẹp thì sẽ gần đạt lý tưởng và không gây chồng phổ, nhưng các bộ lọc số sẽ rất đắt tiền.

Trong trường hợp hình 3.6.2.2(b) và (c) sẽ gây hiện tượng chồng phổ, tức là có thành phần hư danh xuất hiện với tín hiệu $V_0(e^{j\omega})$ và $V_1(e^{j\omega})$. Nhưng thành phần hư danh (aliasing) có thể khử được nếu ta thiết kế cẩn thận bank lọc tổng hợp để bù lại thành phần hư danh do bank lọc phân tích gây ra.





Hình 3.6.2.4

* Biểu thức của tín hiệu được khôi phục $\hat{x}(n)$

Trên hình 3.6.2.1 chúng ta có hai tín hiệu ra khỏi bank lọc phân tích là $x_k(n)$ với $k = 0$ và 1 . Vậy ta có thể viết trong miền n như sau:

$$x_k(n) = h_k(n).x(n) \quad \text{với } k = 0; 1 \quad (3.6.2.3)$$

Trong miền z ta có:

$$X_k(z) = H_k(z).X(z) \quad (3.6.2.4)$$

Từ đây áp dụng công thức (3.2.2.5) với hệ số phân chia $M = 2$ đối với tín hiệu cần phân chia $V_k(n)$ trong miền z ta có:

$$V_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 X_k(z^{1/2}.e^{-j\pi l}) = \frac{1}{2} [X_k(z^{1/2}) + X_k(-z^{1/2})] \quad (3.6.2.5)$$

Thay $X_k(z)$ từ biểu thức (3.6.2.4) ta có:

$$V_k(z) = \frac{1}{2} [H_k(z^{1/2}).X(z^{1/2}) + H_k(-z^{1/2}).X(-z^{1/2})] \quad (3.6.2.6)$$

Ta thấy rằng thành phần thứ hai trong biểu thức (3.6.2.5) cũng như (3.6.2.6) chính là thành phần hư danh mà chúng ta cần phải khử đi.

Để tính biến đổi z của các tín hiệu $y_k(n)$ sau khi ra khỏi bộ nội suy áp dụng biểu thức (3.2.3.4) chúng ta có thể viết với $M = 2$ như sau:

$$\begin{aligned}
Y_k(z) &= V_k(z^2) = \frac{1}{2} [X_k(z) + X_k(-z)] \\
&= \frac{1}{2} [H_k(z).X_k(z) + H_k(-z).X_k(-z)]
\end{aligned} \quad (3.6.2.7)$$

Sau khi loại bỏ các bộ lọc tổng hợp $G_0(z)$ và $G_1(z)$ chúng ta thu được tín hiệu ra được khôi phục như sau:

$$\hat{X}(z) = G_0(z).Y_0(z) + G_1(z).Y_1(z) \quad (3.6.2.8)$$

Thay vào biểu thức (3.6.2.7) ta có:

$$\begin{aligned}
\hat{X}(z) &= \frac{1}{2} \{ G_0(z) [H_0(z).X(z) + H_0(-z).X(-z)] \\
&\quad + G_1(z) [H_1(z).X(z) + H_1(-z).X(-z)] \} \\
\hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)] X(z) \\
&\quad + \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(-z) + G_1(z).H_1(-z)] X(-z) \quad (3.6.2.9)
\end{aligned}$$

Chúng ta có thể biểu diễn dưới dạng ma trận sau:

$$2\hat{X}(z) = \begin{pmatrix} X(z) & X(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{pmatrix} \quad (3.6.2.10)$$

Gọi :

$$\underline{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}; \underline{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}; \underline{G}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$2\hat{X}(z) = \underline{X}'(z).H(z).G(z) \quad (3.6.2.11)$$

Ma trận $H(z)$ được gọi là ma trận thành phần hư danh. Trong mục 3.2.2 chúng ta đã xét thành phần hư danh (aliasing) là do bộ phận chia sinh ra, còn trong mục 3.2.3 chúng ta đã xét phổ phụ (imaging) là do bộ nội suy sinh ra.

** Khử thành phần hư danh*

Trong mục 3.2.2 ta biết rằng thành phần hư danh chính là $X(-z)$ vậy muốn khử thành phần hư danh chúng ta chỉ việc cho triệt tiêu đại lượng đứng trước $X(-z)$ trong biểu thức (3.6.2.9), tức là:

$$\begin{aligned}
G_0(z).H_0(-z) + G_1(z).H_1(-z) &= 0 \\
\Rightarrow \begin{cases} G_0(z) = H_1(-z) \\ G_1(z) = -H_0(-z) \end{cases} &\quad (3.6.2.12)
\end{aligned}$$

Chúng ta có thể viết lại biểu thức (3.6.2.9) như sau:

$$\hat{X}(z) = T_0(z)X(z) + T_1(z)X(-z) \quad (3.6.2.13)$$

$$T_0(z) = \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)]$$

với

$$T_1(z) = \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(-z) + G_1(z).H_1(-z)]$$

Để khử thành phần hư danh theo (3.6.2.12) thì $T_1(z) = 0$ vậy có thể viết $T_1(z) = 1$ như sau:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= T_0(z)X(z) & (3.6.2.14) \\ &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)]X(z) \end{aligned}$$

Nhận xét

Để khử thành phần hư danh, tức là phải thiết kế các bộ lọc số lý tưởng, thì điều này rất là khó khăn và nếu có tạo được các bộ lọc số gần lý tưởng thì rất là tốn kém. Vậy trong kỹ thuật bank lọc số nhiều nhíp qmf, người ta cho phép có thành phần hư danh nhưng trong bank lọc phân tích thì $H_0(z)$ có thể bù $H_1(z)$ sau đó chọn bank lọc tổng hợp sao cho thành phần hư danh của nhánh trên bù cho thành phần hư danh của nhánh dưới.

* Méo biên độ và méo pha

Theo biểu thức (3.6.2.14) ta có:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= T_0(z)X(z) \\ T_0(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)] \end{aligned}$$

Điều kiện khử thành phần hư danh được cho trong biểu thức (3.6.2.12), thay vào $T_0(z)$ ta có:

$$T_1(z) = \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(-z) + G_1(z).H_1(-z)]$$

Trong miền tần số ω ta có:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = T_0(e^{j\omega}).X(e^{j\omega}) \quad (3.6.2.15)$$

Nếu biểu diễn $T_0(e^{j\omega})$ dưới dạng modul và argument ta có:

$$\begin{aligned} T_0(e^{j\omega}) &= |T_0(e^{j\omega})|.e^{j\omega} \\ \Rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) &= |T_0(e^{j\omega})|.e^{j\omega} X(e^{j\omega}) & (3.6.2.16) \end{aligned}$$

Theo biểu thức (3.6.2.16) ta thấy rằng nếu $T_0(e^{j\omega})$ là bộ lọc số thông tốt (Allpass) pha tuyến tính, tức là $T_0(e^{j\omega})$ có dạng sau đây:

$$|T_0(e^{j\omega})| = c \quad \text{với mọi } \omega \text{ (c: hằng số)}$$

và:

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega \quad (3.6.2.17)$$

Thì bank lọc QMF sẽ không gây méo biên độ và méo pha.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \hat{X}(e^{j\omega}) &= c.e^{-j\alpha\omega} X(e^{j\omega}) \\ \hat{X}(z) &= c.z^{-\alpha}.X(z) \\ (3.6.2.18) \hat{x}(n) \end{aligned}$$

Vậy trong miền n ta có:

$$\hat{x}(n) = c.x(n - \alpha) \quad (3.6.2.19)$$

Lúc ấy ta nói rằng bank lọc số QMF là bank lọc số khôi phục hoàn hảo (perfect reconstruction: PR) tín hiệu vì tín hiệu $\hat{x}(n)$ chỉ sai khác với tín hiệu vào $x(n)$ theo hệ số tỉ lệ c và bị trễ đi một lượng là α .

c) Bank lọc QMF 2 kênh không có hư danh

Chúng ta thấy rằng đối với bank lọc số QMF cho trên hình 3.6.2.1 quan hệ giữa $H_0(z)$ và $H_1(z)$ phải tuân theo biểu thức sau đây:

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad (3.6.2.20)$$

hoặc $H_0(z) = H_1(-z)$

Đối với bank lọc QMF thực hiện được về vật lý thì các hệ số của các bộ lọc số trong bank lọc phải là thực, tức là:

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\omega-\pi)})| = |H_0(e^{-j(\omega-\pi)})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})| \quad (3.6.2.21)$$

Thay biểu thức (3.6.2.20) vào biểu thức (3.6.12) ta có điều kiện triệt tiêu thành phần hư danh như sau:

$$G_0(z) = H_0(z)$$

Và $G_1(z) = -H_1(z) \quad (3.6.2.22)$

Nhìn vào các biểu thức (3.6.2.20) và (3.6.2.22) ta thấy rằng cả 4 loại bộ lọc số $H_0(z)$, $H_1(z)$, $G_0(z)$ và $G_1(z)$ trong bank lọc số QMF 2 kênh đều được xác định chỉ bởi một bộ lọc số $H_0(z)$. Như vậy để hình thành bank lọc số QMF 2 kênh chúng ta chỉ cần thiết kế một bộ lọc số $H_0(z)$ là đủ.

Thay vào biểu thức (3.6.2.14) ta có:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_1^2(z)].X(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)].X(z) \\ (3.6.2.23) \end{aligned}$$

ở đây:

$$T_0(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)]$$

Vậy trong miền tần số ω ta có:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega-\pi)})] \cdot X(e^{j\omega})$$

d) Biểu diễn theo phân hoạch nhiều pha bank lọc số QMF

Chúng ta có thể biểu diễn bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp theo phân hoạch nhiều pha hàm truyền đạt $H_0(z)$.

Theo phân hoạch nhiều pha loại 1 hai thành phần ta có:

$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1} \cdot E_1(z^2) \quad (3.6.2.24)$$

Mà theo biểu thức (9.6.2.20) ta có $H_1(z) = H_0(-z)$ vậy với $H_1(z)$ ta có thể viết như sau:

$$H_1(z) = E_0(z^2) + z^{-1} \cdot E_1(z^2) \quad (3.6.2.25)$$

Có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1} E_1(z^2) \end{pmatrix} \quad (3.6.2.26)$$

Đối với bank lọc tổng hợp $G_0(z)$ và $G_1(z)$, theo biểu thức (3.6.2.22) ta có thể viết:

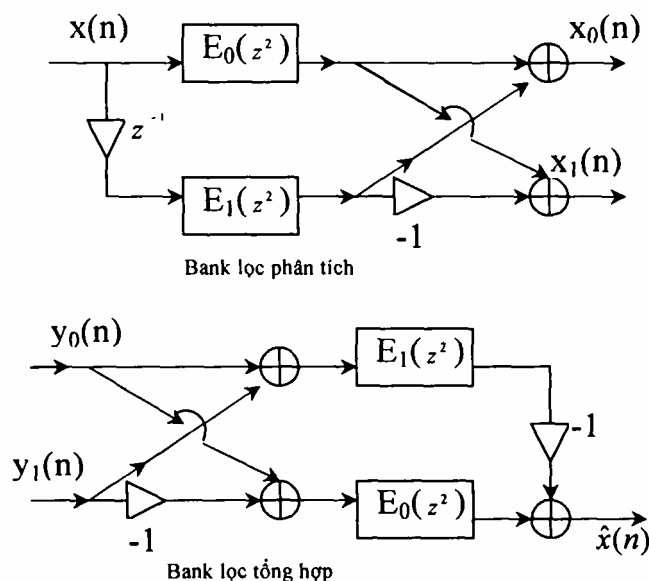
$$G_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1} \cdot E_1(z^2)$$

$$G_1(z) = z^{-1} \cdot E_1(z^2) - E_0(z^2)$$

Có thể viết dưới dạng ma trận sau đây:

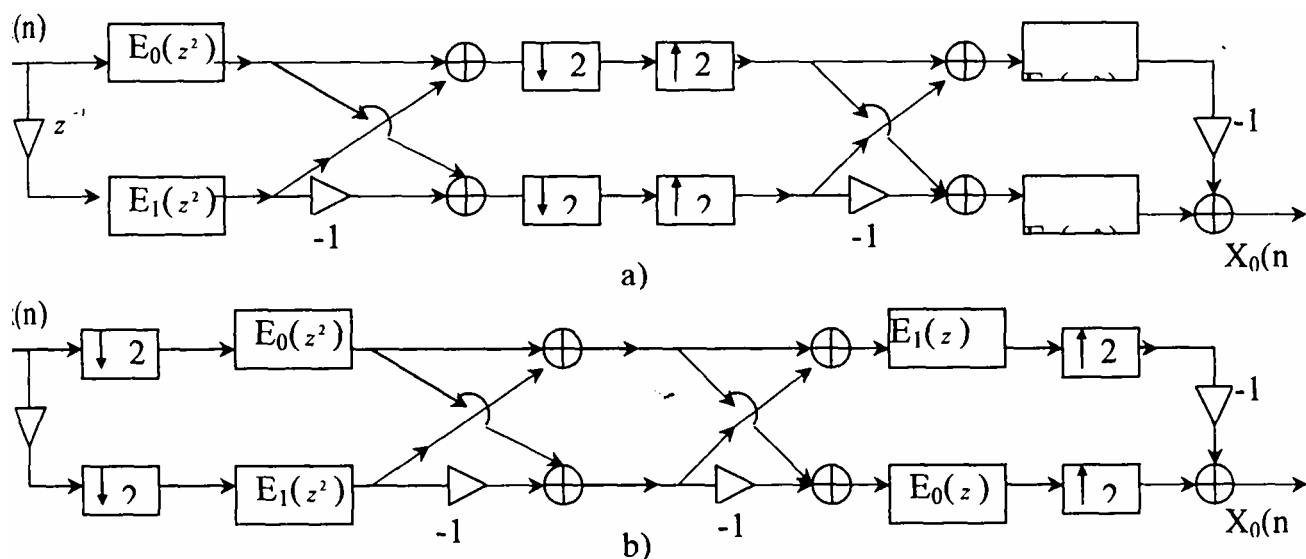
$$\begin{pmatrix} G_0(z) & G_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} \cdot E_1(z^2) & E_0(z^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6.2.27)$$

Dựa vào biểu thức (3.6.2.24) và (3.6.2.25) chúng ta sẽ vẽ được cấu trúc nhiều pha của bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp, các cấu trúc này được minh họa trên hình (3.6.2.5).



Hình 3.6.2.5

Từ hai bank lọc số phân tích và tổng hợp trên hình 3.6.2.5 kết hợp với các hệ thống phân chia và nội suy sẽ cho ta bank lọc số QMF 2 kênh dưới dạng cấu trúc nhiều pha được cho trên hình 3.6.2.6 (a) và (b).



Hình 3.6.2.6

3.6.3. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP M KÊNH

a) Bank lọc số QMF M kênh

Phân trên chúng ta đã nghiên cứu bank lọc số nhiều nhịp 2 kênh QMF. Trong phần này chúng ta tổng quát hoá cho trường hợp bank lọc số nhiều nhịp M kênh và chúng ta vẫn gọi là bank lọc số QMF M kênh.

Sơ đồ tổng quát của bank lọc số QMF M kênh được cho trên hình 3.6.3.1 sau đây.

b) Biểu thức của tín hiệu được khôi phục $\vec{x}(n)$

Nhìn vào hình 3.6.3.1, chúng ta có thể viết trong miền n như sau:

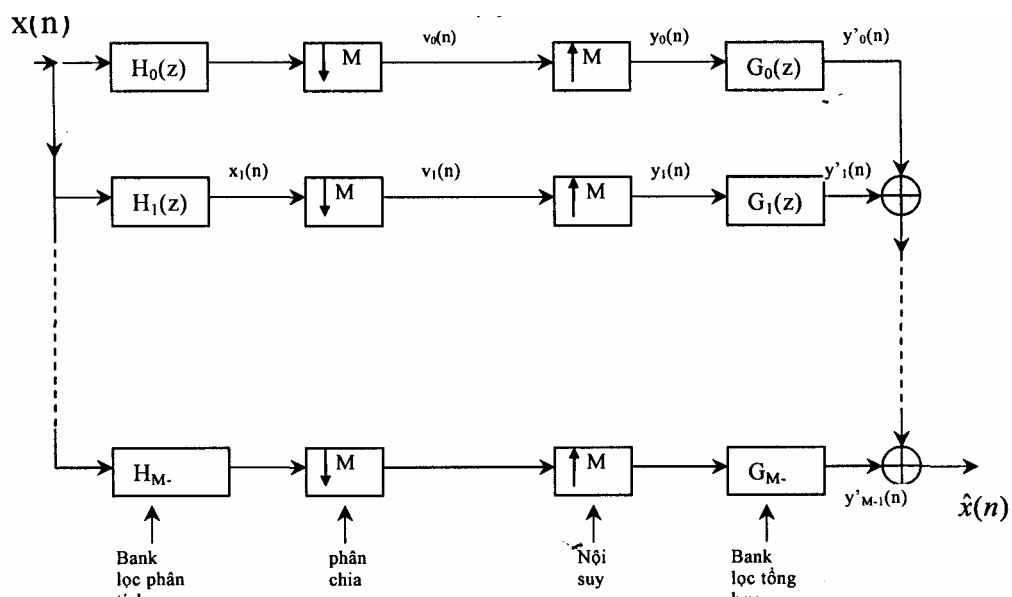
$$x_k(n) = x(n) * h_k(n) = h_k(n) * x(n) \quad (3.6.3.1)$$

Tương ứng trong miền z ta có:

$$X_k(z) = X(z).H_k(z) = H_k(z).X(z) \quad (3.6.3.2)$$

Theo biểu thức (3.3.1.6) ta có biểu thức của tín hiệu sau khi ra khỏi bộ phân chia trong miền z như sau:

$$\begin{aligned} V_k(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X_k(z^{1/M} \cdot W_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z^{1/M} \cdot W_M^l) X(z^{1/M} \cdot W_M^l) \end{aligned} \quad (3.6.3.3)$$



Hình 3.6.3.1

Theo biểu thức (3.2.3.4) ta có biểu thức của tín hiệu sau khi ra khỏi bộ nội suy trong miền z như sau:

$$\begin{aligned} Y_k(z) &= V_k(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X_k(z \cdot W_M^l) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z \cdot W_M^l) X(z \cdot W_M^l) \end{aligned} \quad (3.6.3.4)$$

Và cuối cùng chúng ta có tín hiệu được khôi phục ở đầu ra của bank lọc số M kênh này như sau:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^M Y'_k(z)$$

$$Y'_k = Y_k(z).G_k(z) = G_k(z).Y_k(z)$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} Y_k(z).G_k(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z.W_M^l) X(z.W_M^l).G_k(z)$$

$$\Rightarrow \hat{X}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z.W_M^l) \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z.W_M^l).G_k(z) \quad (3.6.3.5)$$

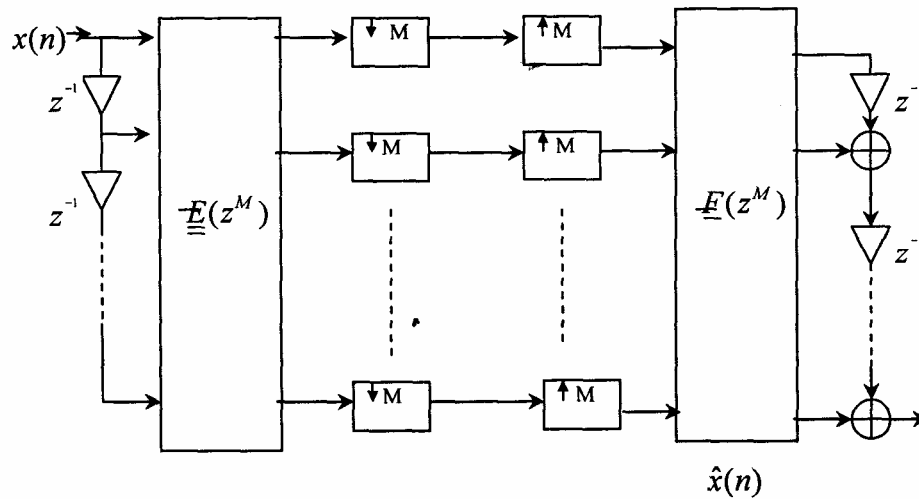
Chúng ta có thể viết lại dưới dạng sau đây:

$$\hat{X}(z) = \sum_{l=0}^{M-1} T_l(z) X(z.W_M^l) \quad (3.6.3.6)$$

$$\text{với } T_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z.W_M^l).G_k(z) \quad (3.6.3.7)$$

c) Biểu diễn nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp M kênh

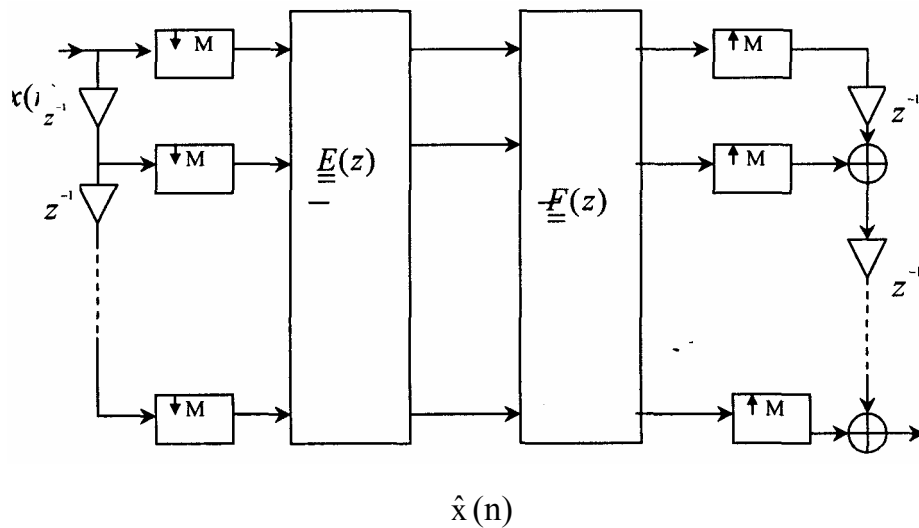
Trong phần trên chúng ta đã xét biểu diễn nhiều pha bank lọc số, kết hợp với các hệ thống phân chia và nội suy chúng ta có sơ đồ biểu diễn nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp QMF M kênh được minh hoạ trên hình 3.6.3.2:



Hình 3.6.3.2

Chúng ta có thể chuyển sơ đồ trên hình 3.6.3.2 thành sơ đồ hiệu quả hơn để thực hiện cấu trúc nhiều pha bank lọc số nhiều nhịp QMF M kênh, cấu trúc hiệu quả này được minh hoạ trên hình 3.6.3.3.

Trong cấu trúc nhiều pha hiệu quả trên hình 3.6.3.3 ta thấy rằng các hệ số của các bộ lọc số (hệ số của các ma trận $\underline{F}(z)$ và $\underline{\tilde{F}}(z)$) sẽ thao tác với nhịp lấy mẫu thấp hơn (tức là tần số lấy mẫu thấp hơn và chu kỳ lấy mẫu lớn hơn).



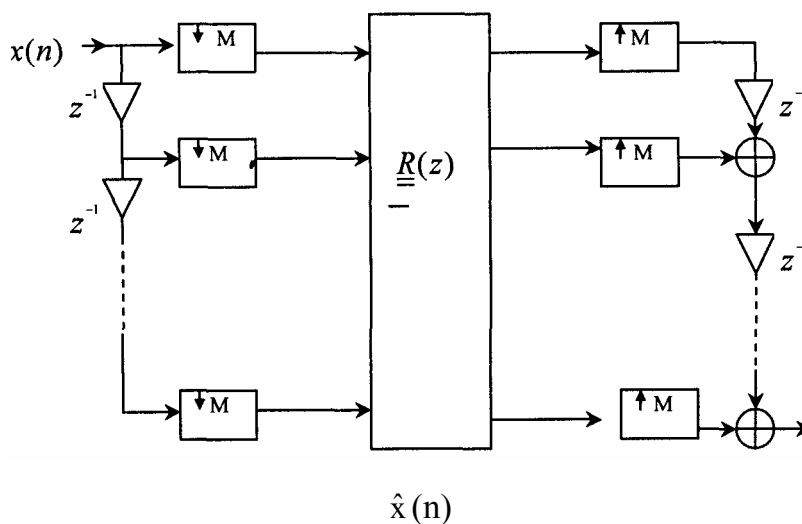
Hình 3.6.3.3

Nhìn vào sơ đồ trên hình 3 chúng ta có thể kết hợp ma trận $\underline{\underline{F}}(z)$ và $\underline{\underline{E}}(z)$ tạo thành ma trận $\underline{\underline{R}}(z)_{M \times M}$ sau:

$$\underline{\underline{R}}(z)_{M \times M} = \underline{\underline{F}}(z) \cdot \underline{\underline{E}}(z) \quad (3.6.3.8)$$

Ma trận $\underline{\underline{R}}(z)_{M \times M}$ được gọi là ma trận nhiều pha.

Vậy chúng ta có thể đơn giản hoá sơ đồ trên hình 3.6.3.3 thành sơ đồ trên hình 3.6.3.4 sau:



Hình 3.6.3.4

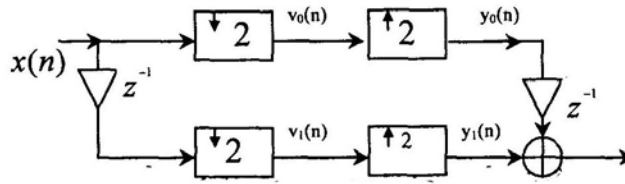
3.6.4. HỆ THỐNG KHÔI PHỤC HOÀN HẢO (PERFECT RECONSTRUCTION)

a) Hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản

Trong các mục tiêu trên chúng ta đã nói đến hệ thống khôi phục hoàn hảo (PR), tức là tín hiệu ra chỉ sai khác tín hiệu vào một hệ số tỷ lệ và hệ số trễ. Giả sử đầu vào là tín hiệu $x(n)$, đầu ra là $\hat{x}(n)$, ta có quan hệ sau:

$$\hat{x}(n) = c.x(n - n_0) \quad (3.6.4.1)$$

Hình 3.6.4.1 cho ta một ví dụ về bank lọc số khôi phục hoàn hảo 2 kênh rất đơn giản, chỉ dùng các bộ trễ.



Hình 3.6.4.1

$$H_0 = 1; H_1(z) = z^{-1}$$

$$G_0(z) = z; G_1(z) = 1 \quad (3.6.4.2)$$

So sánh sơ đồ 3.6.2.1 của bank lọc số nhiều $\hat{x}(n)$, QMF 2 kênh với sơ đồ trên hình 3.6.4.1 ta thấy rằng:

Theo biểu thức (3.6.2.13) ta có:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} [G_0(z).H_0(z) + G_1(z).H_1(z)] \\ &= \frac{1}{2} (z^{-1} + z^{-1}) = z^{-1} \end{aligned} \quad (3.6.4.3)$$

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \frac{1}{2} [G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)] \\ &= \frac{1}{2} (z^{-1} - z^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

(3.6.4.4)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{X}(z) &= T_0(z).X(z) = z^{-1}X(z) \\ \hat{x}(m) &= x(n-1) \end{aligned}$$

(3.6.4.5)

Ví dụ 3.6.4.1:

Cho tín hiệu xâu có dạng sau:

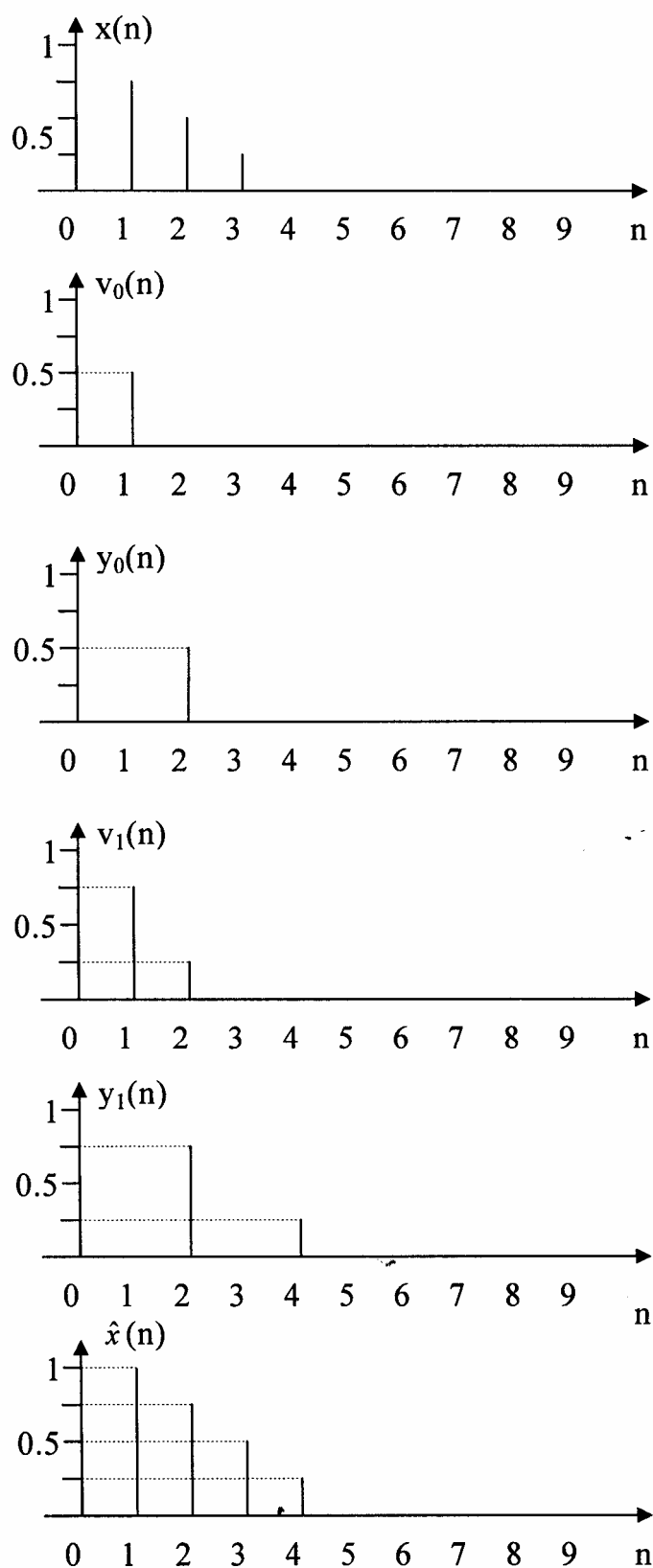
$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tín hiệu này đi vào hệ thống khôi phục hoàn hảo 2 kênh cho trên hình 3.6.4.1.

Hãy dùng đồ thị thảo luận giải thích dạng của tín hiệu ra $\hat{x}(n)$.

Giải:

Để giải thích dạng của tín hiệu ra $\hat{x}(n)$, chúng ta dùng đồ thị thời gian cho trên hình 3.6.4.2.



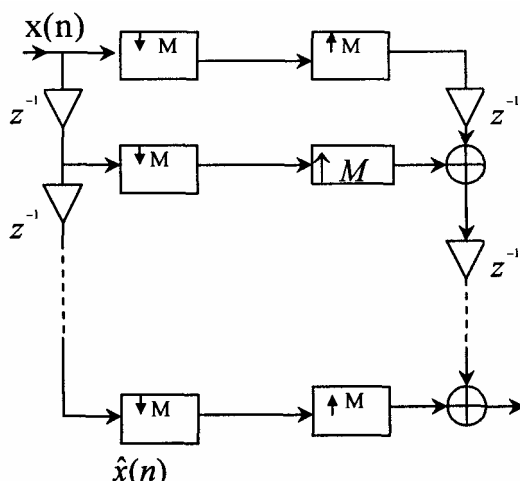
Hình 3.6.4.2

B) Hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản M kênh

Phần trên chúng ta đã xét hệ thống khôi phục hoàn hảo 2 kênh.

Trong phần này chúng ta tổng quát hoá cho trường hợp M kênh.

Hình 3.6.4.3 cho ta sơ đồ tổng quát của bank lọc khôi phục hoàn hảo đơn giản M kênh.



Hình 3.6.4.3

Dựa vào hình 3.6.4.3 ta thấy rằng các bộ lọc phân tích và tổng hợp sẽ có dạng sau:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= z^{-k} \\ G_k(z) &= z^{-(M-1-k)} \\ 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned} \quad (3.6.4.6)$$

và :

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-(M-1)} \cdot X(z) \\ x(n) &= x[n - (M-1)] \end{aligned}$$

(3.6.4.7)

c) Hệ thống khôi phục hoàn hảo tổng quát

Chúng ta vừa xét sang các hệ thống khôi phục hoàn hảo đơn giản chỉ dùng các dây trễ, vậy theo hình 3.6.3.4 và biểu thức (3.6.3.7) thì rõ ràng ta có quan hệ sau:

$$\underline{\underline{R}}(z) = \underline{\underline{F}}(z) \cdot \underline{\underline{E}}(z) = \underline{\underline{I}} \quad (3.6.4.8)$$

$\underline{\underline{I}}$: là ma trận đơn vị $M \times M$

Nếu $R(z)$ thoả mãn điều kiện (3.6.4.8) ở trên thì sơ đồ trên hình 3.6.4.3 sẽ tương ứng với sơ đồ trên hình 3.6.3.4.

Nhưng trong thực tế điều kiện cần và đủ đối với một hệ thống khôi phục hoàn hảo là chúng ta sẽ dùng các bộ lọc FIR và IIR, vậy rõ ràng là điều kiện (3.6.4.8) sẽ được thay bằng điều kiện thực hiện trong thực tế như sau:

$$\underline{\underline{R}}(z) = \underline{\underline{F}}(z) \cdot \underline{\underline{E}}(z) = c \cdot z^{-m_0} \cdot \underline{\underline{I}}$$

(3.6.4.9)

hoặc:

$$\underline{\underline{F}}(z) = c \cdot z^{-m_0} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}(z)$$

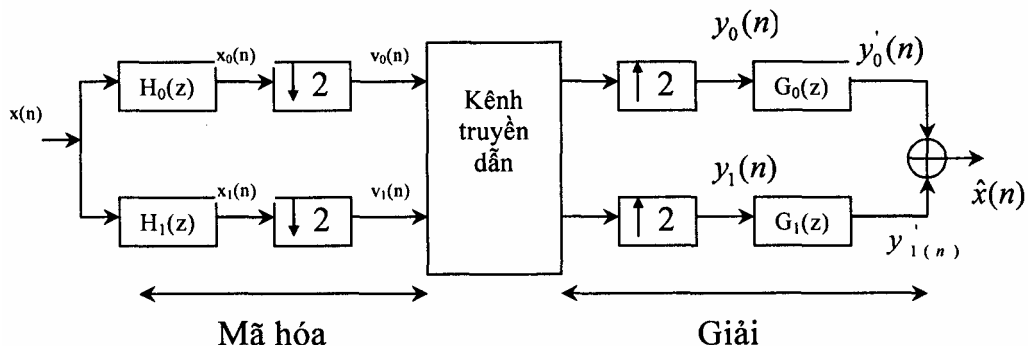
(3.6.4.10)

Điều kiện (3.6.4.10) chính là quan hệ giữa bank lọc phân tích và bank lọc tổng hợp của bank lọc số QMF khôi phục hoàn hảo.

3.6.5. MÃ HOÁ DẢI CON VÀ CẤU TRÚC DẠNG CÂY CỦA BANK LỌC SỐ QMF

a) Mã hoá dải con

Trong các phần trên chúng ta đã nghiên cứu các bank lọc số nhiều nhịp. Một ứng dụng rất quan trọng của bank lọc số nhiều nhịp nay là dùng mã hoá dải con và giải mã dải con. Đơn gian nhất là dùng bank lọc số hai kênh để mã hoá làm 2 dải con được minh hoạ trên hình 3.6.5.1 sau đây:



Hình 3.6.5.1

Mã hoá dải con rất thuận tiện cho việc nén dữ liệu tiếng nói bởi vì đối với tín hiệu tiếng nói thông thường năng lượng của phổ tín hiệu phân bố không đều, năng lượng phổ tiếng nói chủ yếu tập trung ở miền tần số thấp, còn ở miền tần số cao năng lượng của phổ tiếng nói rất nhỏ. Vậy sau khi qua bank lọc số QMF trên hình 3.6.5.1 ta có 2 tín hiệu dải con $X_0(e^{j\omega})$ là phổ tần số thấp sẽ có năng lượng lớn vậy ta mã hoá tín hiệu dải con $x_0(n)$ với số bộ lớn, còn $X_1(e^{j\omega})$ là phổ tần số cao có năng lượng nhỏ vậy ta mã hoá tín hiệu dải con $x_1(n)$ với số bit ít hơn. Vậy tính tổng cộng số bộ mã hoá tín hiệu $x(n)$ có phổ là $X(e^{j\omega})$ sẽ nhỏ hơn nếu ta mã hoá số bộ lớn đối với toàn bộ dải phổ của $X(e^{j\omega})$.

Đối với tín hiệu hình ảnh, mã hoá dải con cũng rất nhiều hiệu quả cho việc nén tín hiệu hình ảnh bởi vì phổ năng lượng của tín hiệu hình ảnh cũng phân bố không đều nhau vì vậy mỗi dải phổ sẽ có năng lượng khác nhau, dải phổ nào có năng lượng lớn sẽ được mã hoá với số bộ lớn còn dải thông nào có năng lượng nhỏ sẽ được mã hoá với số bit ít

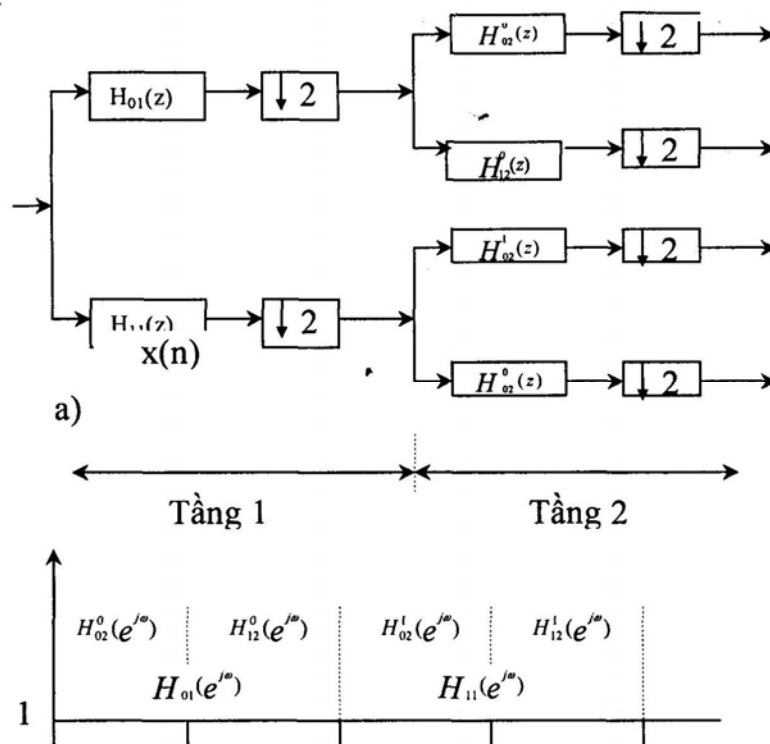
hơn. Hiện nay thế giới đã đạt được việc mã hoá tín hiệu ảnh chỉ với 0,48bit/pixel mà vẫn khôi phục hoàn hảo được tín hiệu ảnh (gọi là hệ thống PR 1bit). Lưu ý rằng thông thường trước đây phải mã hoá với 8bit/pixel.

Nói chung các tín hiệu trong thực tế có phân bố năng lượng không đều nhau vì vậy mã hoá dải con là rất thuận lợi cho việc nén tín hiệu.

b) Cấu trúc dạng cây đơn phân giải(uniform resolution)

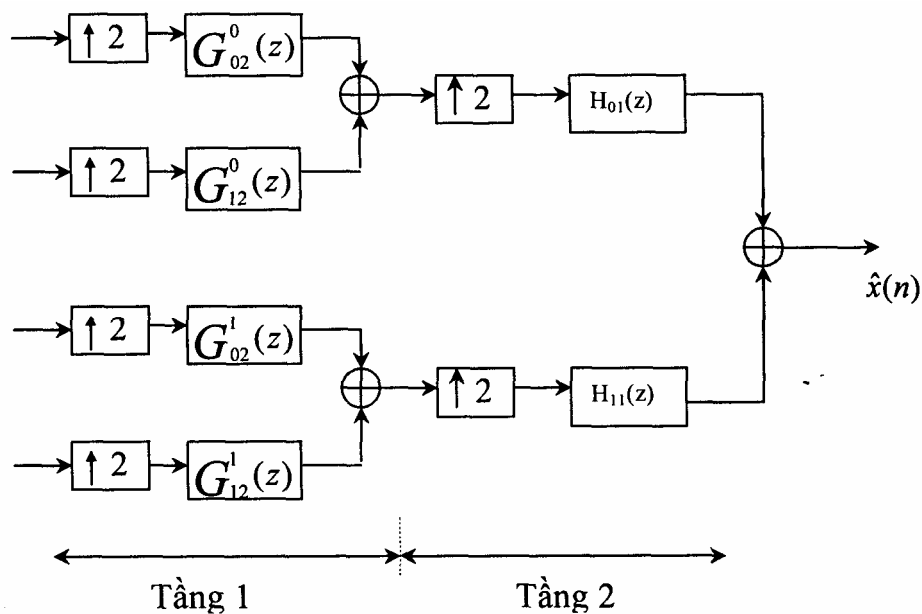
Vì năng lượng của phổ tín hiệu thường phân bố rất không đồng đều trên toàn bộ dải tần số, vậy để mã hoá dải con hiệu quả cao chúng ta sẽ mã hoá làm nhiều tầng, tức là tầng 1 chia thành 2 dải con đều nhau (mỗi dải có bề rộng là $\pi/2$) đến tầng 2 ta lại phân 2 dải con của tầng 1 thành các dải con có bề rộng bằng nửa của tầng 1 (mỗi dải có bề rộng là $\pi/4$) và cứ tiếp tục như vậy chúng ta sẽ phân dải phổ của tín hiệu vào làm nhiều các dải và sau khi ra khỏi bank lọc phân tích bề rộng phổ của mỗi tín hiệu dải con làm bằng nhau nên ta gọi là phân giải.

Hình 3.6.5.2 cho ta cấu trúc dạng cây đơn phân giải của bank lọc phân tích 4 kênh (hình (a)) và đồ thị tần số để giải thích đáp ứng tần số của các bộ lọc trong bank số 4 kênh (hình (b)).



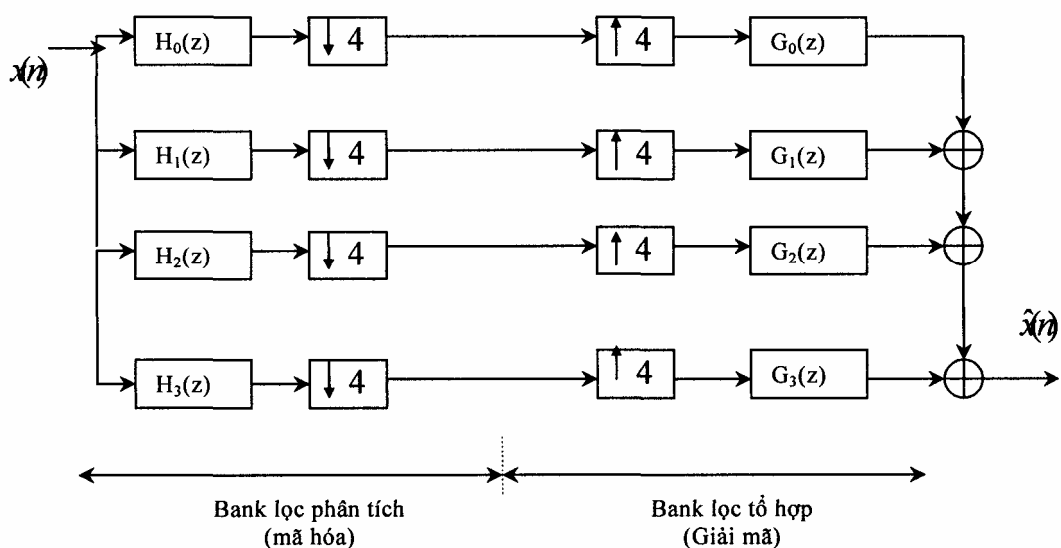
Hình 3.6.5.2

Hình 3.6.5.3 cho ta cấu trúc dạng cây đơn giản phân lọc số tổng hợp 4 kênh.



Hình 3.6.5.3

Từ hình 3.6.5.2 và 3.6.5.3 ta có cấu trúc tương đương của bank lọc số 4 kênh phân tích và tổng hợp như trên hình 3.6.5.4.

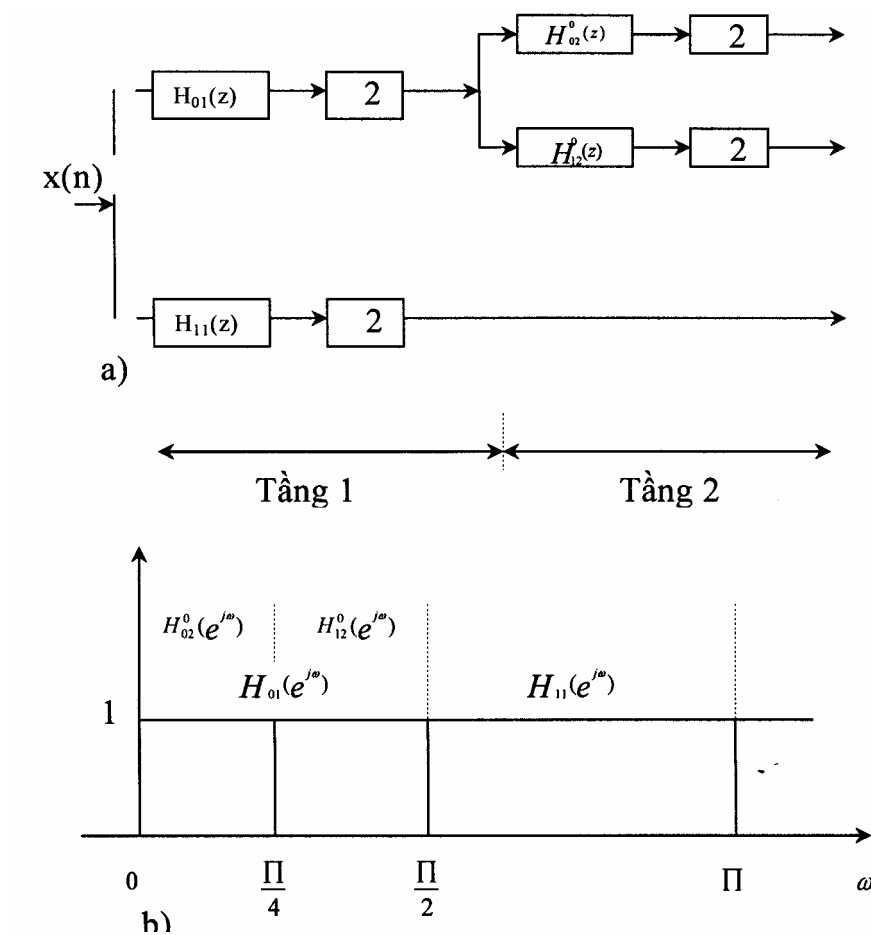


Hình 3.6.5.4

c) Cấu trúc dạng cây đa phân giải (multiresolution)

Cấu trúc dạng cây đa phân giải được dùng trong trường hợp chúng ta phân tín hiệu thành các tín hiệu dải con có bề rộng phổ không bằng nhau, vì vậy ta gọi là đa phân giải.

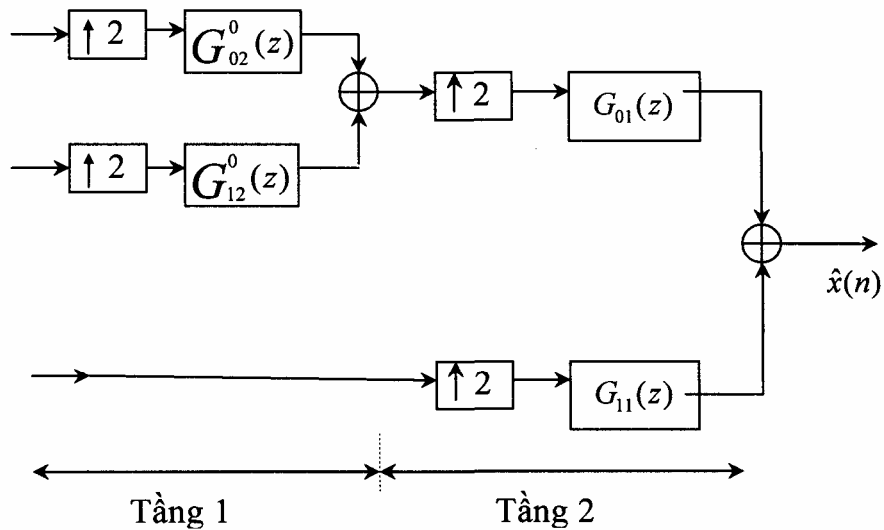
Hình 3.6.5.5 sẽ cho ta cấu trúc dạng cây đa phân giải của bank lọc số phân tích 2 tầng (hình (a)) và đồ thị tần số giải thích đáp ứng tần số của các bộ lọc số có trong bank lọc số phân tích 2 tầng này (hình (b)).



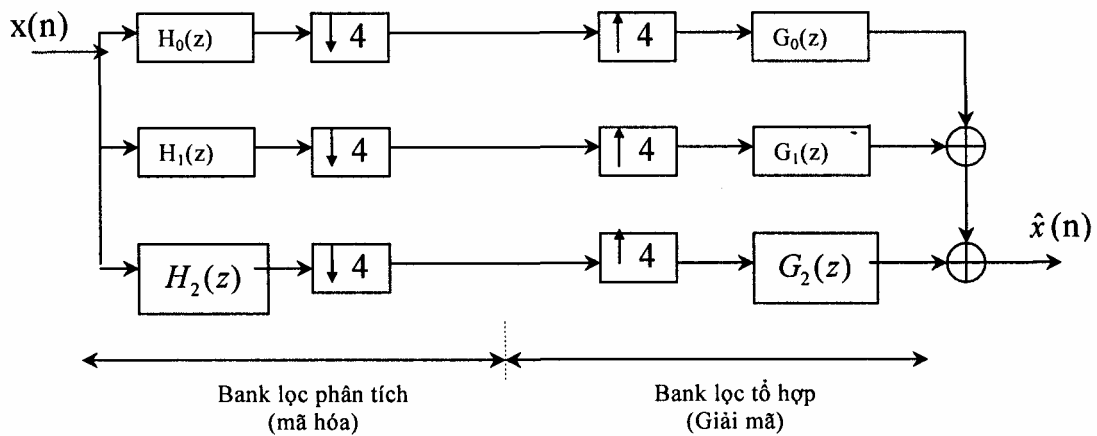
Hình 3.6.5.5

Cấu trúc dạng cây đa phân giải của bank lọc số tổng hợp 2 tầng được minh họa trên hình 3.6.5.5.

Kết hợp 3.6.5.5 (a) với hình 3.6.5.6 ta suy ra cấu trúc tương đương của bank lọc số 2 tầng phân tích và tổng hợp được minh họa trên hình 3.6.5.7.



Hình 3.6.5.6



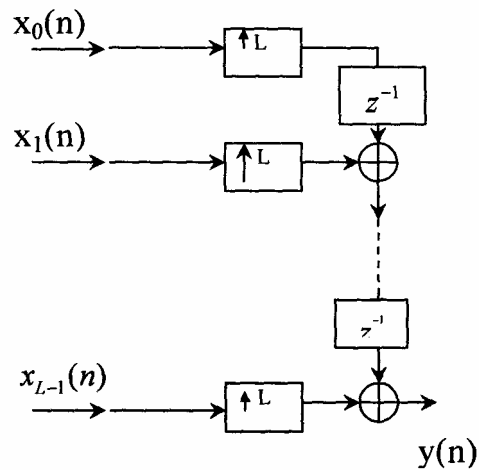
Hình 3.6.5.7

3.6.6. KỸ THUẬT GHÉP KÊNH

a) Ghép kênh phân thời gian (time division multiplex: TDM)

Để mô tả kỹ thuật ghép kênh phân thời gian chúng ta giả sử có L tín hiệu $x_0(n)$, $x_1(n)$, ..., $x_{L-1}(n)$ cần ghép kênh với nhau theo kiểu ghép kênh phân thời gian. Để ghép được kênh phân thời gian, chúng ta cần phải cho các tín hiệu này qua các bộ tăng tần số lấy mẫu (bộ nội suy), sau đó qua các bộ trễ rồi cộng lại chúng ta sẽ được một dãy tín hiệu ghép kênh phân thời gian.

Sơ đồ hình 3.6.6.1 sẽ mô tả bộ ghép kênh phân thời gian.



Hình 3.6.6.1

Chúng ta sẽ giải thích nguyên lý hoạt động của bộ ghép kênh phân thời gian thông qua ví dụ cụ thể 3.6.6.1.

Ví dụ 3.6.6.1

Giả sử ta có hai tín hiệu xong và $x_0(n)$ như sau:

$$x_0(n) = 2\text{rect}_5(n)$$

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

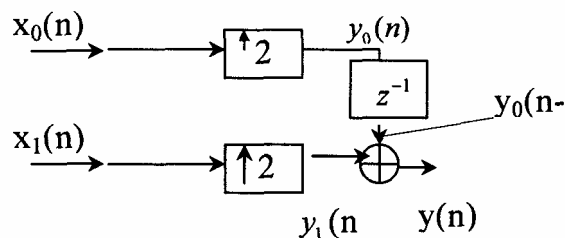
Hai tín hiệu này cần ghép kênh theo kiểu TDM.

+ Hãy vẽ sơ đồ ghép kênh TDM.

+Hãy giải thích nguyên lý ghép kênh TDM bằng đồ thị thời gian.

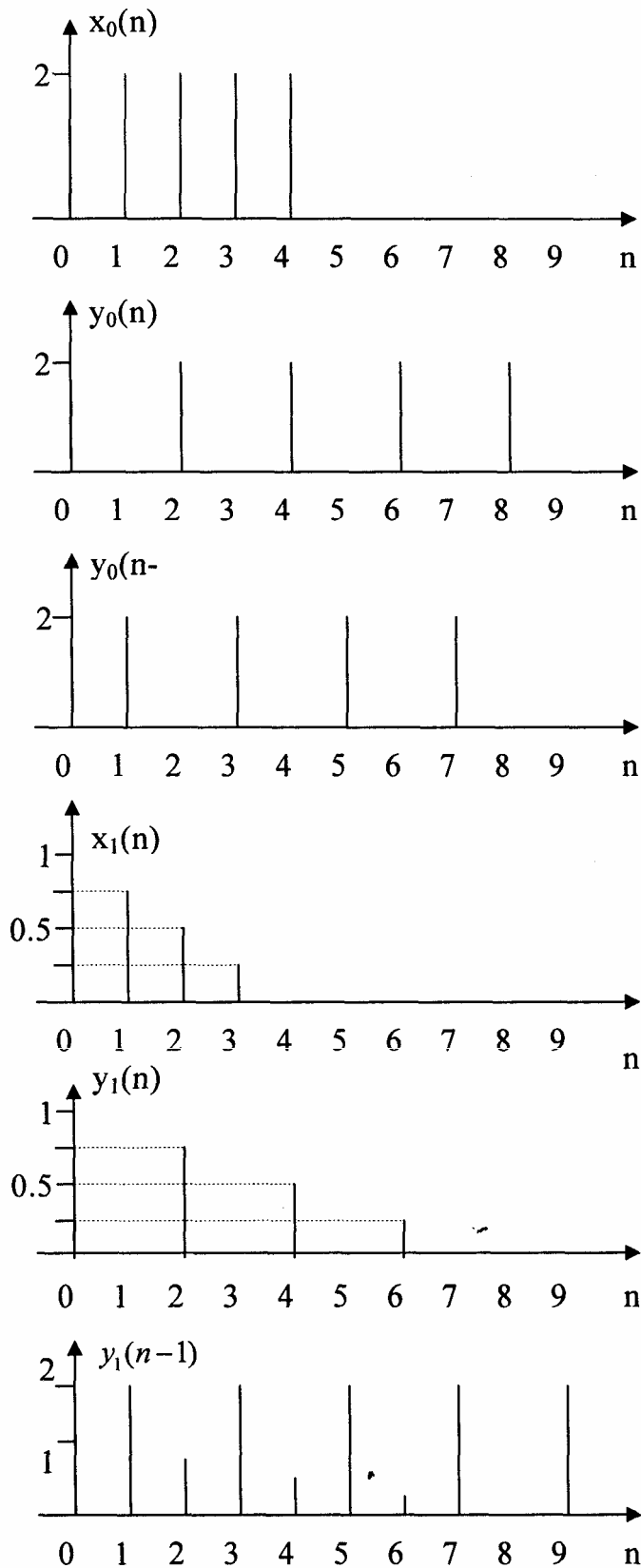
Giải

Theo hình 3.6.6.1 thay $L=2$ ta có bộ ghép kênh TDM để ghép hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$, sơ đồ của bộ ghép kênh được minh hoạ trên hình 3.6.6.2.



Hình 3.6.6.2

Đồ thị thời gian giải thích nguyên lý ghép kênh TDM của sơ đồ trên hình 3.6.6.2 được minh hoạ trên hình 3.6.6.3.

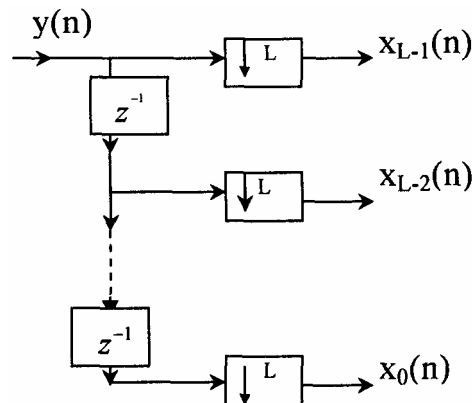


Hình 3.6.6.3

b) Tách kênh phân thời gian

Ngược lại với kỹ thuật ghép kênh phân thời gian. Giả sử ta có tín hiệu ghép L kênh phân thời gian là $y(n)$, chúng ta cần tách thành L kênh phân thời gian là $x_0(n)$, $x_1(n)$, ... ,

$x_{L-1}(n)$. Để tách được kênh theo kiểu phân thời gian, chúng ta phải cho tín hiệu $y(n)$ qua bộ trễ sau đó cho các bộ phân chia. Sơ đồ tổng quát của bộ tách kênh phân thời gian được mô tả trên hình 3.6.6.4.



Hình 3.6.6.4

Sau đây chúng ta sẽ giải thích nguyên lý hoạt động của bộ tách kênh phân thời gian thông qua ví dụ đơn giản với $L=2$.

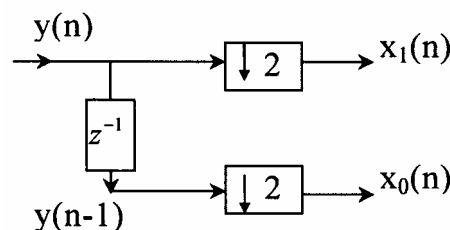
Ví dụ 3.6.6.2

Chúng ta quay lại ví dụ 3.6.6.1, chúng ta có tín hiệu $y(n)$ là tín hiệu ghép kênh phân thời gian của hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ (xem hình 3.6.6.3), bây giờ chúng ta cần tách tín hiệu $y(n)$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$.

- + Hãy vẽ sơ đồ tách kênh
- + Hãy giải thích nguyên lý tách kênh bằng sơ đồ thời gian

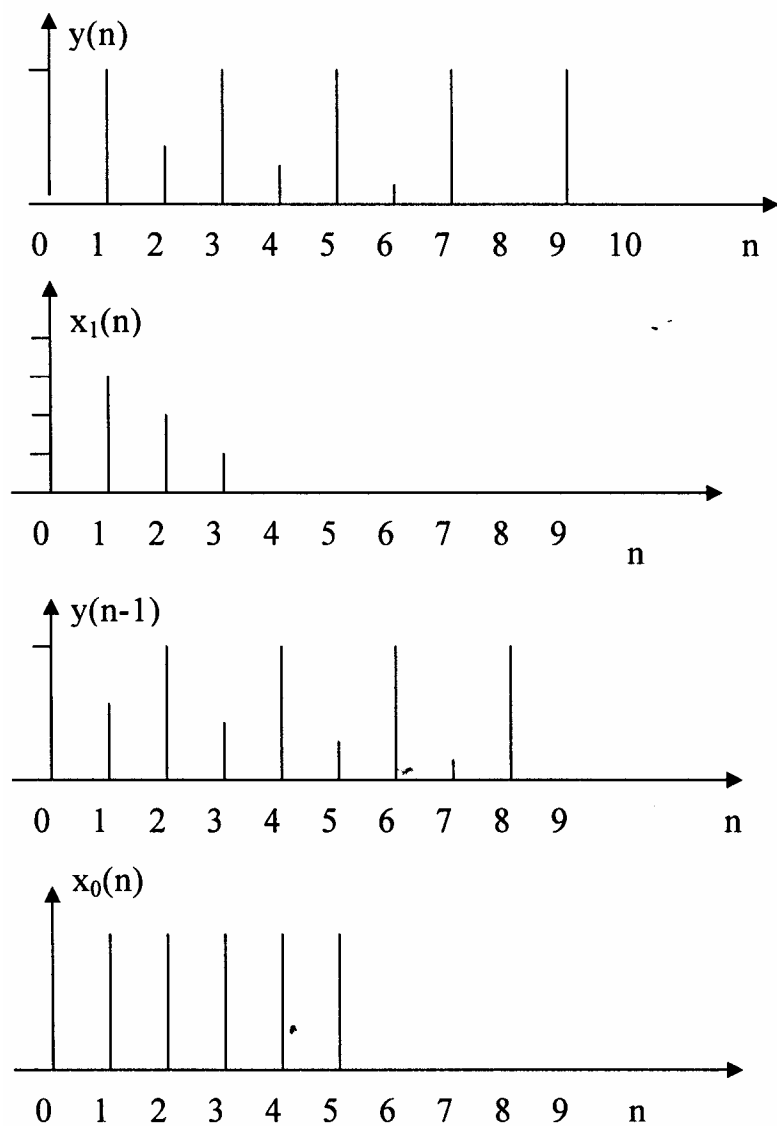
Giải:

Theo sơ đồ nguyên lý tổng quát của bộ tách kênh phân thời gian cho trên hình 3.6.6.4, thay $L=2$ ta có bộ tách tín hiệu $y(n)$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$. Sơ đồ của bộ tách kênh được mô tả trên hình 3.6.6.5.



Hình 3.6.6.5

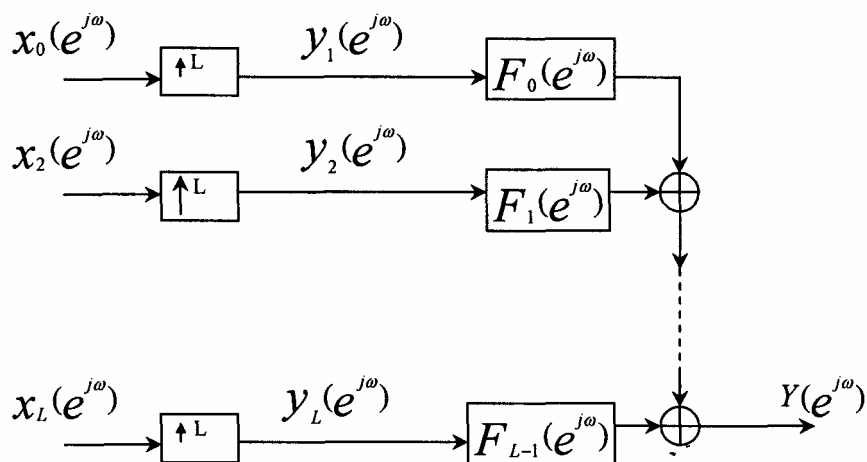
Đồ thị thời gian để giải thích nguyên lý làm việc của bộ tách kênh phân thời gian trên hình 3.6.6.5 được minh họa trên hình 3.6.6.6.



Hình 3.6.6.6

c) Ghép kênh phân tần số (Frequency division multiplex: FDM)

Giả sử chúng ta có L tín hiệu là $x_0(n), x_1(n), \dots, x_{L-1}(n)$ có phổ tương tự là $X_0(e^{j\omega}), X_1(e^{j\omega}), \dots, x_{L-1}(e^{j\omega})$. Các tín hiệu này cần ghép kênh theo tần số. Để thực hiện ghép kênh theo tần số chúng ta có thể dùng các bộ lọc nội suy với hệ số nội suy L , còn gọi là bánh lọc tổng hợp. Hình 3.6.6.7 sẽ mô tả cấu trúc của bộ ghép

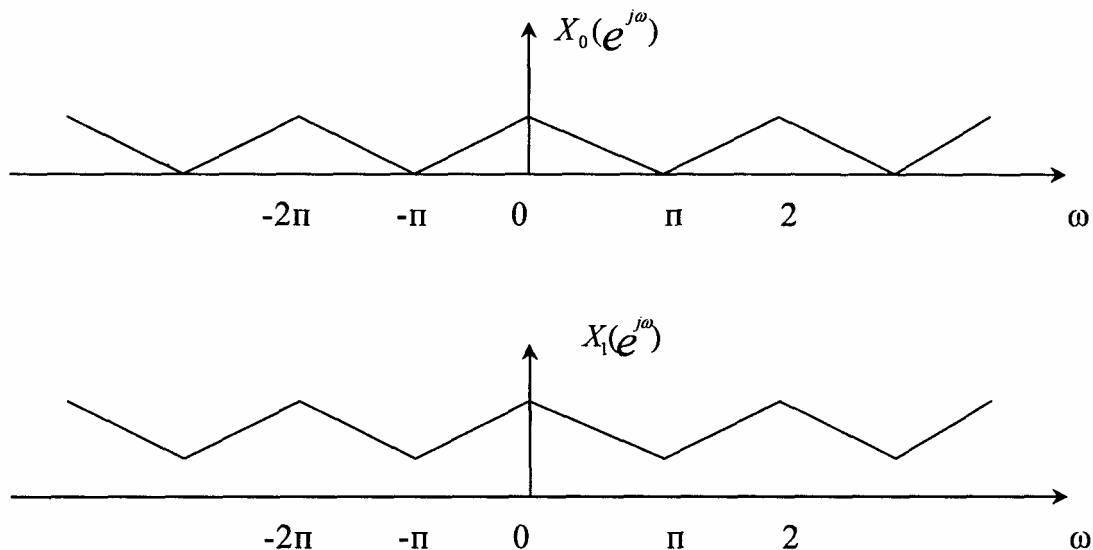


Hình 3.6.6.7

Nguyên lý hoạt động của bộ ghép kênh phân tần số được giải thích thông qua ví dụ 3.6.6.3.

Ví dụ 3.6.6.3:

Giả sử cho hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$ có dạng trên hình 3.6.6.8 sau đây:



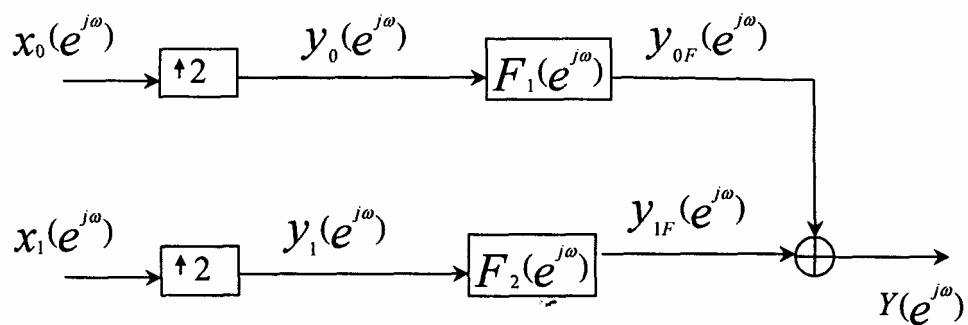
Hình 3.6.6.8

Hai tín hiệu này cần ghép kênh theo kiểu FDM.

- + Hãy vẽ sơ đồ bộ ghép kênh
- + Hãy giải thích nguyên lý ghép kênh FDM bằng đồ thị tần số.

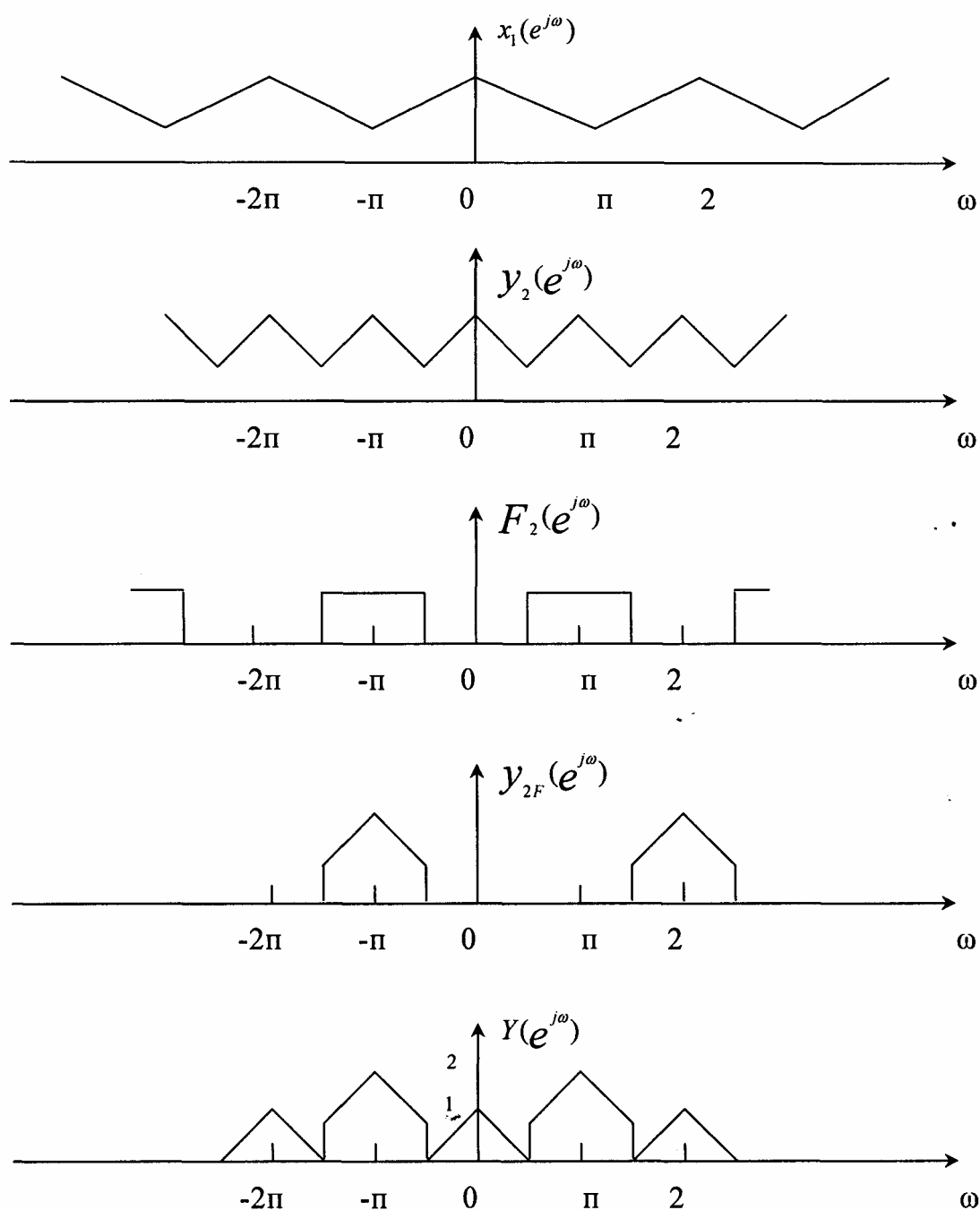
Giải:

Theo sơ đồ tổng quát trên hình 3.6.6.7 thay $L=2$ -ta có bộ ghép kênh FDM để ghép hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$. Sơ đồ của bộ ghép kênh FDM này được minh họa trên hình 3.6.6.9.



Hình 3.6.6.9

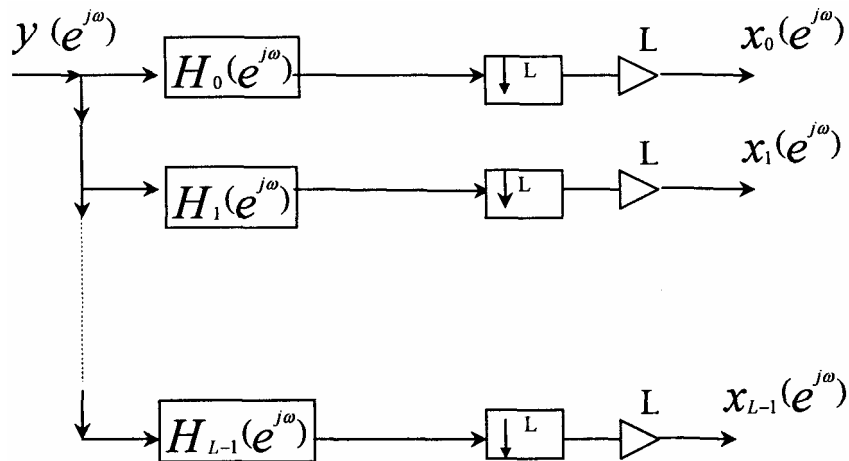
Đồ thị tần số giải thích nguyên lý ghép kênh FDM của sơ đồ hình 3.6.6.9 được minh hoạ trên hình 3.6.6.10.



Hình 3.6.6.10

d) Tách kênh phân tần số

Ngược lại với kỹ thuật ghép kênh phân tần số, chúng ta giả sử có tín hiệu ghép L kênh phân tần số là $y(n)$, chúng ta cần phải tách thành L kênh là $x_0(n), x_1(n), \dots, x_{L-1}(n)$ có phổ tương ứng $X_0(e^{j\omega}), X_1(e^{j\omega}), \dots, X_{L-1}(e^{j\omega})$. Để tách chúng ra được chúng ta phải dùng các bộ lọc phân chia với hệ số phân chia L, còn gọi là bánh lọc phân tích. Sơ đồ tổng quát của tách kênh phân tần số được cho trên hình 3.6.6.11.



Hình 3.6.6.11

Ví dụ 3.6.6.4 sẽ trình bày cho chúng ta rõ nguyên lý hoạt động của bộ tách kênh phân tần.

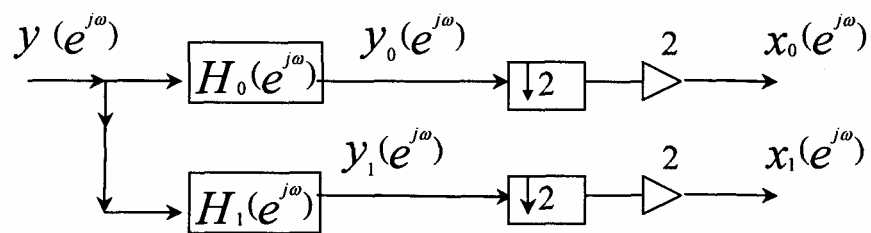
Ví dụ 3.6.6.4:

Chúng ta quay lại ví dụ 3.6.6.3, chúng ta có tín hiệu $y(n)$ có phổ là $Y(e^{j\omega})$ là tín hiệu ghép kênh phân tần số của hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $x_0(e^{j\omega})$ và $x_1(e^{j\omega})$ (xem hình 3.6.6.10), bây giờ chúng ta cần tách tín hiệu $y(n)$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$.

- + Hãy vẽ sơ đồ tách kênh
- + Hãy giải thích nguyên lý tách kênh bằng sơ đồ tần số

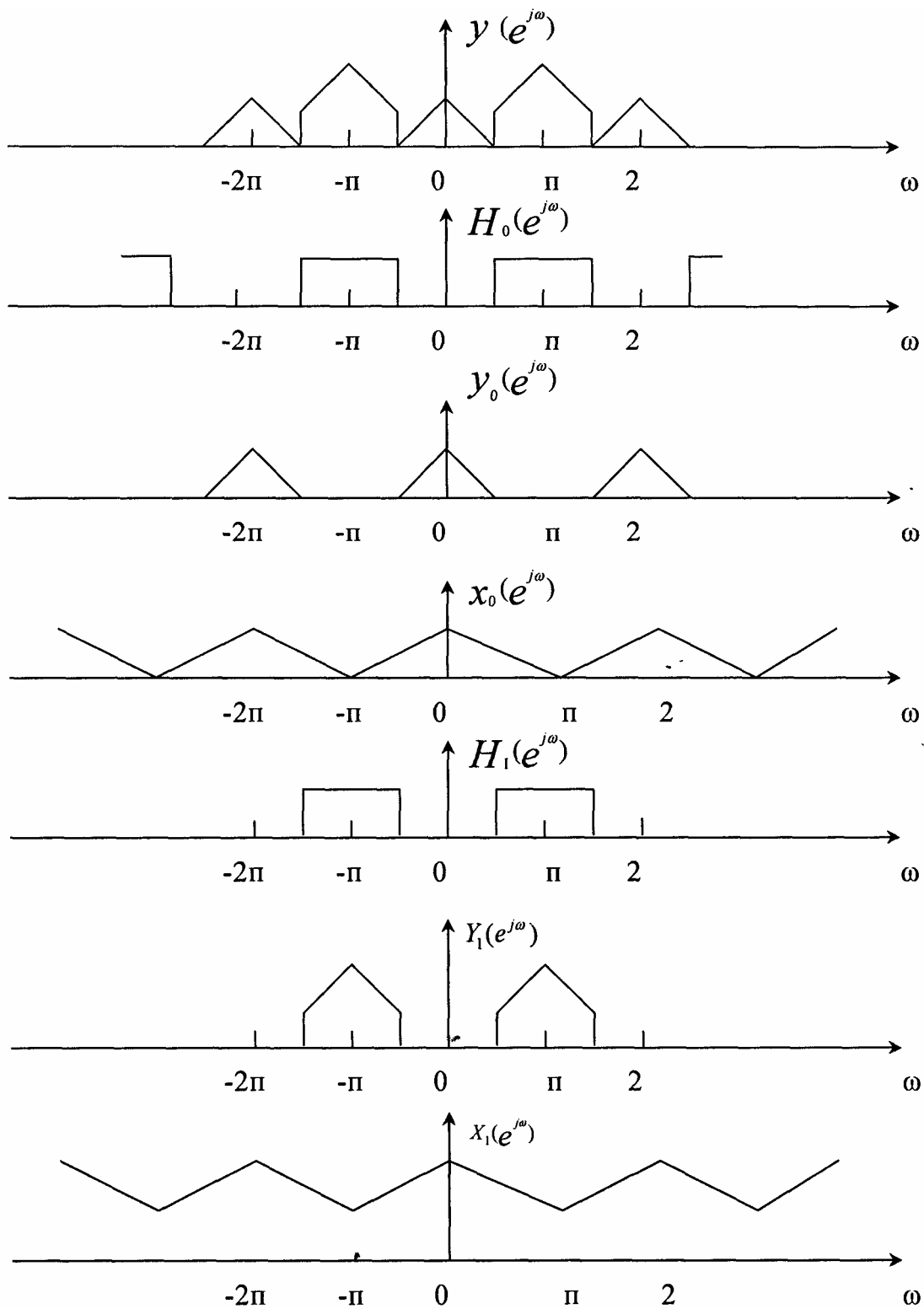
Giải

Theo sơ đồ nguyên lý tổng quát của bộ tách kênh tần số cho trên hình 3.6.6.11, thay $L=2$ ta có bộ tách kênh để tách tín hiệu $y(n)$ có phổ là $Y(e^{j\omega})$ thành hai tín hiệu $x_0(n)$ và $x_1(n)$ có phổ tương ứng là $X_0(e^{j\omega})$ và $X_1(e^{j\omega})$. Sơ đồ của bộ tách kênh với $L=2$ này được cho trên hình 3.6.6.12.



Hình 3.6.6.12

Đồ thị tần số giải thích nguyên lý tách kênh FDM phân tần số của sơ đồ trên hình 3.6.6.12 được mô tả trên hình 3.6.6.13.

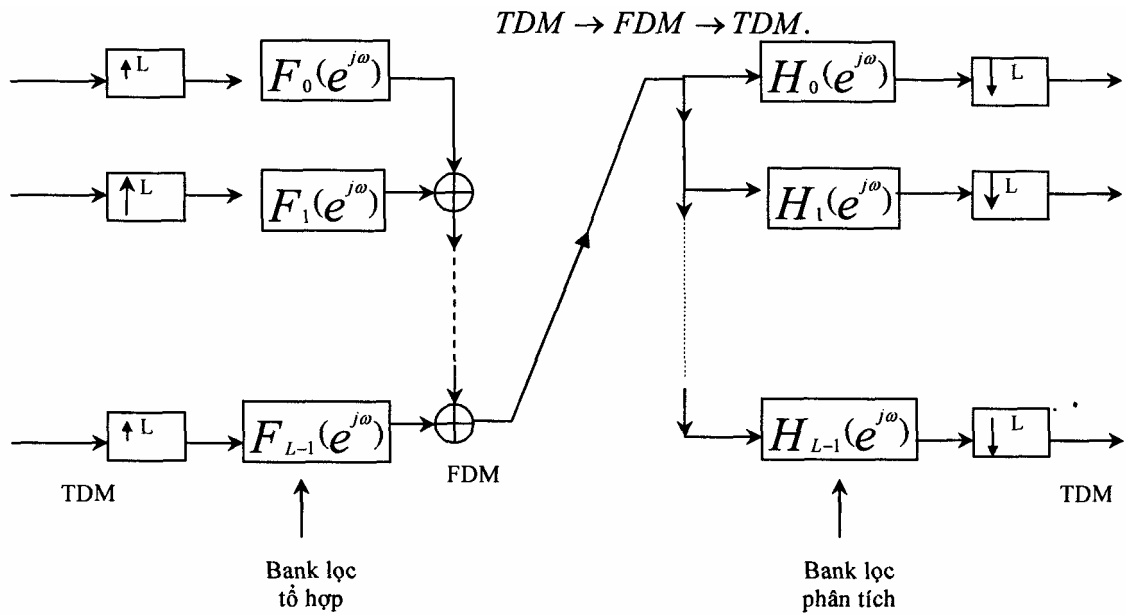


Hình 3.6.6.13

e) Chuyển đổi ghép kênh (transmultiplexer)

Trong các phần trên chúng ta đã tiến hành nghiên cứu kỹ thuật ghép kênh trong miền thời gian (TDM) và trong miền tần số (FDM).

Còn hình 3.6.6.14 sẽ mô tả chuyển đổi ghép kênh

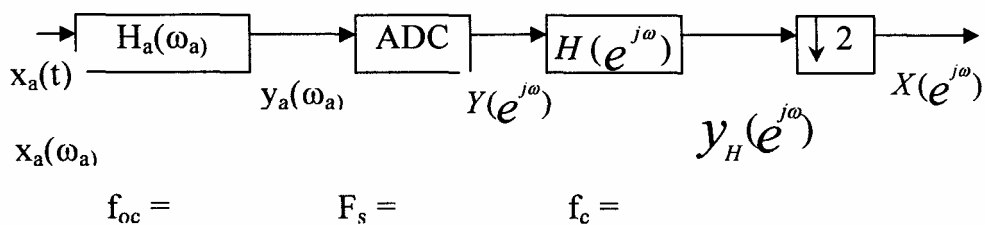


Hình 3.6.6.14

3.6.7. CÁC HỆ THỐNG AUDIO SỐ

Chúng ta biết rằng tín hiệu tương tự này. Để tránh nhiễu ngoài dải tần mong muốn (out-of band noise) thì trước khi lấy mẫu, tín hiệu audio $X_a(t)$ sẽ được cho qua bộ lọc tương tự, nhưng để tránh hoàn toàn nhiễu ngoài dải tần này thì bộ lọc tương tự phải gần với lý tưởng, điều này rất khó làm đối với bộ lọc tương tự. Dải tần số mong muốn (tai con người có thể cảm nhận được) cao nhất là 22 KHz (với đĩa CD là 22,05 KHz). Như vậy theo định lý lấy mẫu thì tần số lấy mẫu nhỏ nhất là 44 KHz. Nhưng nếu lấy mẫu với tần số này mà bộ lọc tương tự không đạt tới lý tưởng thì sẽ gây nhiễu ngoài dải tần số mong muốn, tức là gây hiện tượng chồng phổ khi lấy mẫu trong bộ biến đổi tương tự số(ADC).

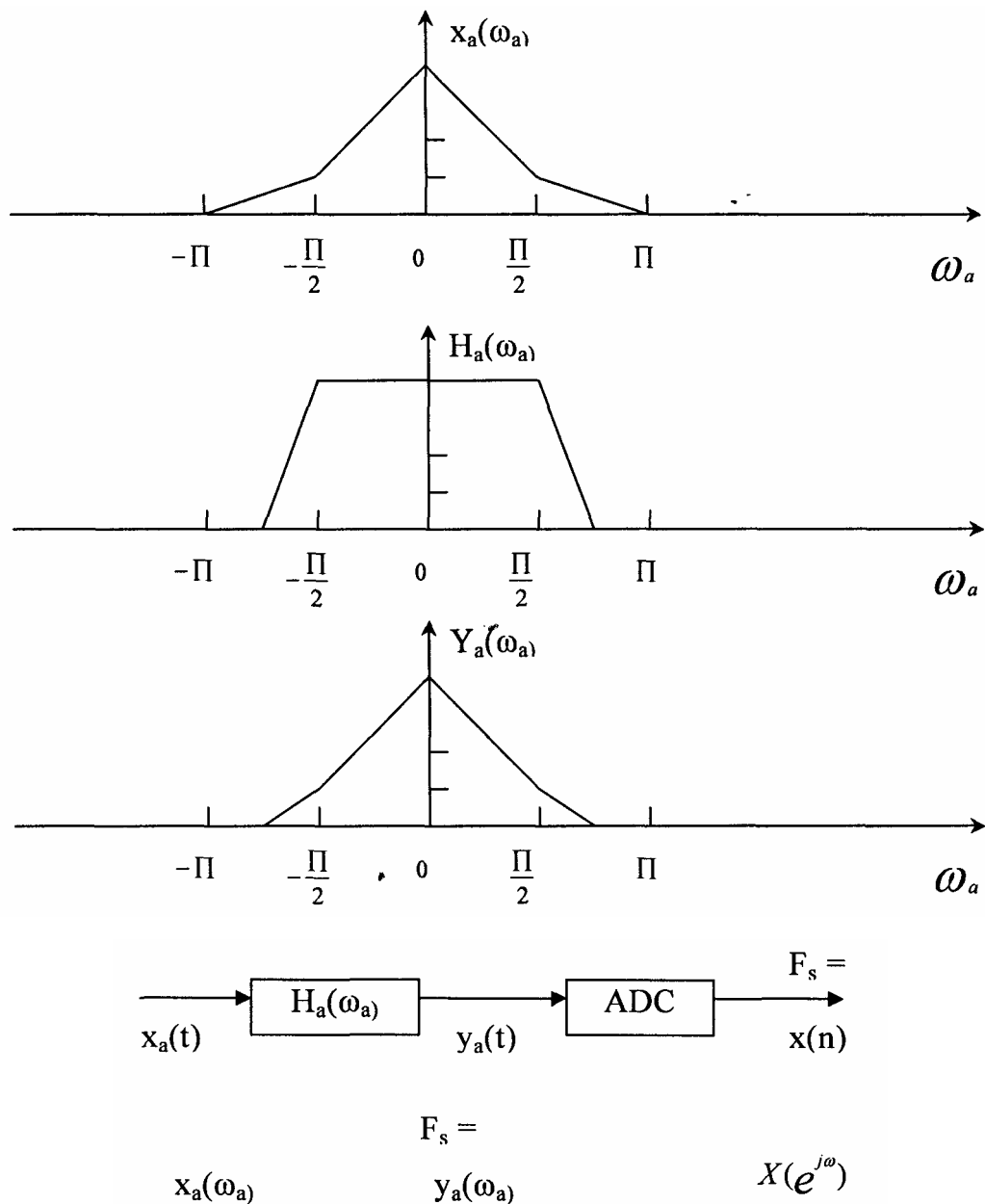
Quá trình này được minh hoạ trên hình 3.6.7.1 và đồ thị tần số được trình bày trên hình 3.6.7.2 theo thang tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu $F_s = 44\text{KHz}$.



$H_a(\omega_a)$: bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với tần số cắt $f_{ac} = 22\text{ KHz}$;

ADC: bộ biến đổi tương tự số với tần số lấy mẫu $F_s = 44\text{KHz}$; $H(e^{j\omega})$: bộ lọc số thông thấp gần lý tưởng với tần số cắt $f_c = 22\text{KHz}$; $\downarrow 2$: bộ phân chia với hệ số $M=2$.

Hình 3.6.7.3



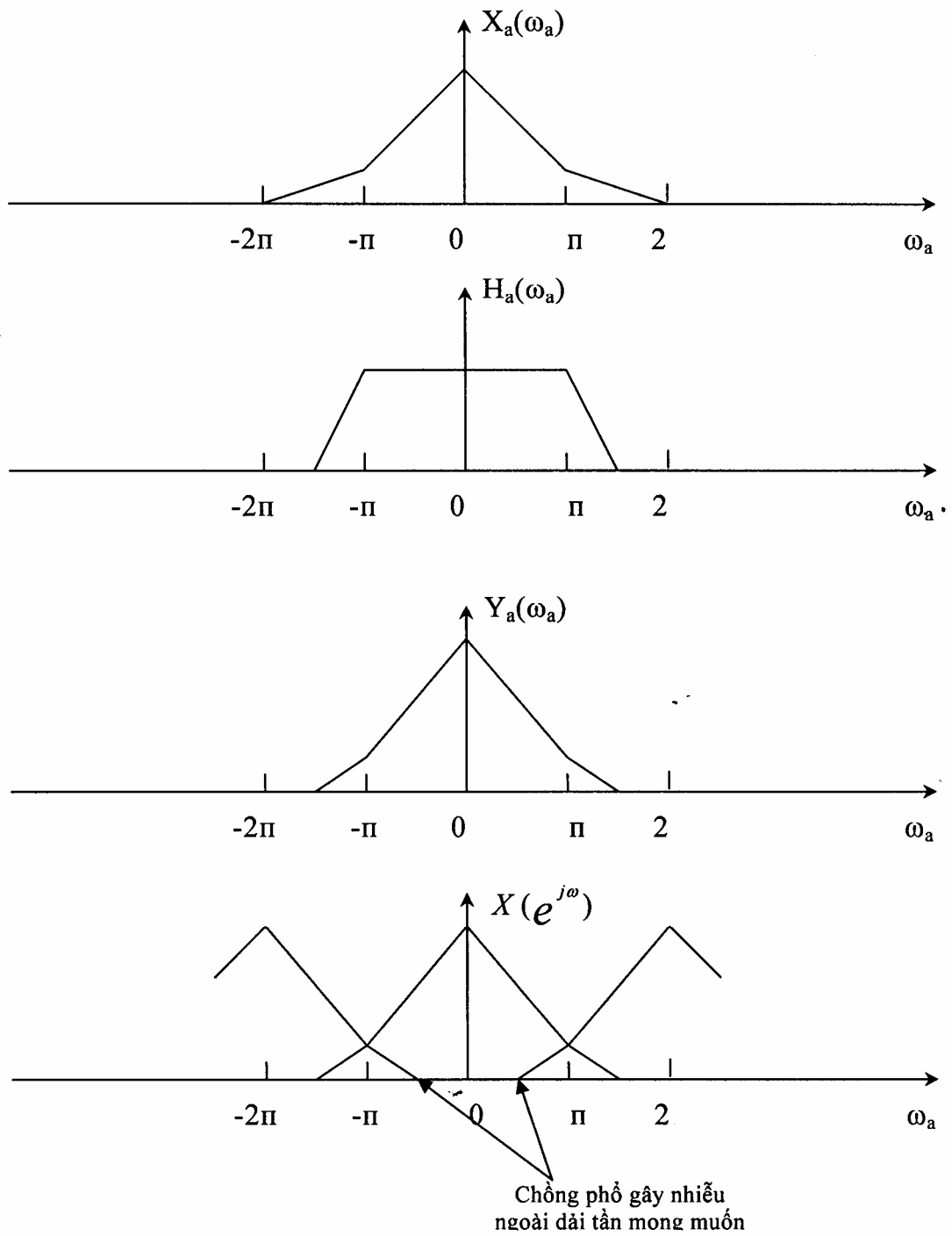
$H_a(\omega_a)$: bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với tần số cắt $f_{ac} = 22\text{Khz}$

ADC: bộ biến đổi tương tự số với tần số lấy mẫu $F_s = 44\text{Khz}$.

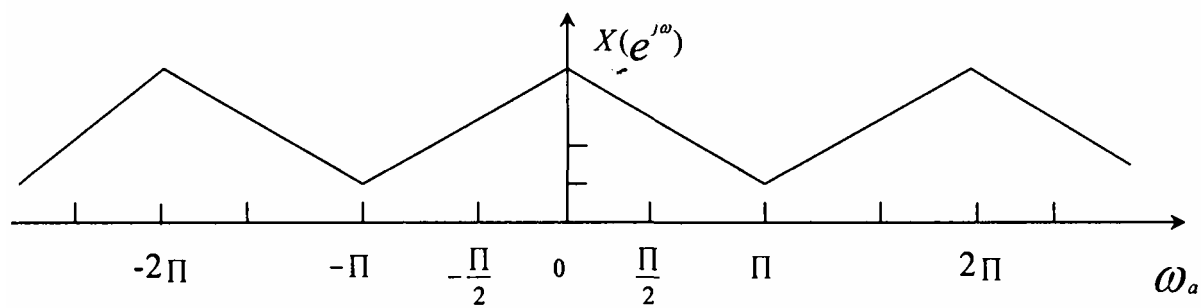
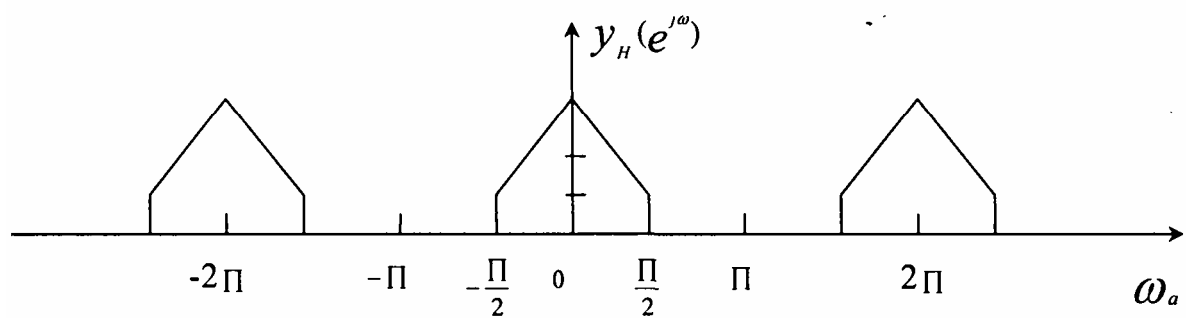
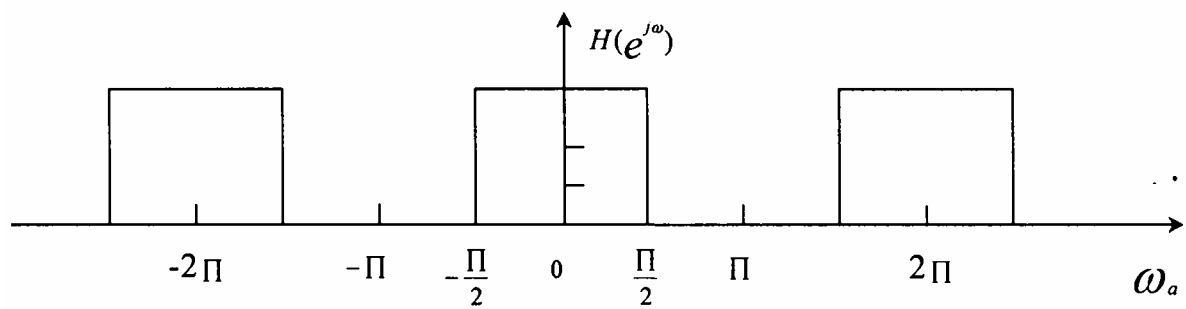
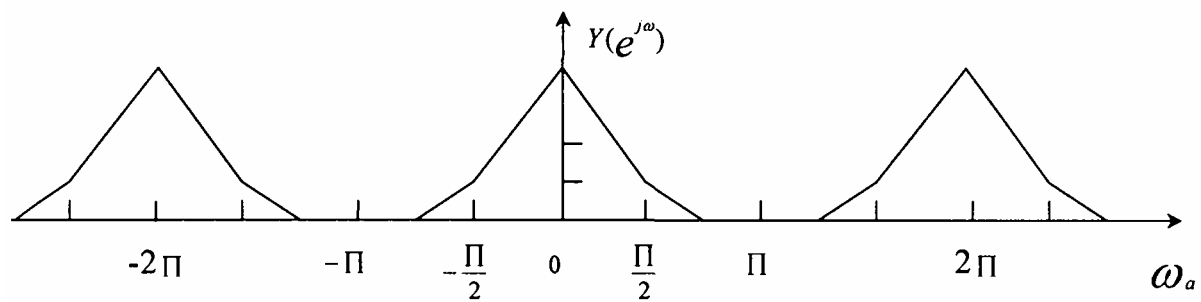
Hình 3.6.7.1

Để tránh hiện tượng chồng phổ mà vẫn đảm bảo tần số lấy mẫu của tín hiệu số ra xâu là 44Khz , chúng ta sẽ thực hiện như sau: tín hiệu tương tự $x_a(t)$. Sau khi qua bộ lọc tương tự thông thấp không lý tưởng với $f_{ac} = 22\text{Khz}$ được tín hiệu $y_a(t)$. Chúng ta sẽ cho tín hiệu $y_a(t)$ qua bộ biến đổi tương tự (ADC) với tần số lấy mẫu $F_s = 22F_{SNy} = 88\text{Khz}$, sau đó tín hiệu qua bộ lọc số thông thấp (ví dụ qua bộ lọc số FIR pha tuyến tính) với tần số cắt $f_{ac} = 22\text{Khz}$, Vì bộ lọc số gần với lý tưởng để thực hiện được hơn là bộ lọc tương tự. Sau đó cho tín hiệu qua bộ phân chia với hệ số $M=2$, đầu ra sẽ thu được tín hiệu xâu cũng với tần số lấy mẫu $F_s = 44\text{Khz}$. Vậy Chúng ta có thể nói rằng chúng ta có bộ biến đổi tương tự số kiểu mới dung bộ lọc nhiều nhịp để tránh nhiễu ngoài dải tần. Quá trình

này được minh hoạ trên hình 3.6.7.3 và đồ thị tần số được trình bày trên hình 3.6.7.4 theo tần số góc chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu $F_s = 88Khz$.



Hình 3.6.7.2



Hình 3.6.7.4

CHƯƠNG IV

HỌ DSP THÔNG DỤNG TMS320

Họ DSP TMS320 là một họ vi điều khiển nên chúng cũng làm giảm tối đa giá thành hệ thống với kiến trúc như RAM - on chip, ROM/EPROM on - chip và on - chip các thiết bị ngoại vi như port nối tiếp, các timer và vào ba song song. Với trình độ cao của các hàm chức năng on - chip, các lệnh linh hoạt, kiến trúc đường ống và hiệu suất cao đã làm cho họ DSP tms320 được ưa thích lựa chọn hơn trong hầu hết các ứng dụng và xử lý tín hiệu.

Họ vi xử lý tín hiệu số tms 320 có thể chia ra làm 2 họ DSP số nguyên và họ DSP số thực dấu phẩy động, mỗi họ lại được chia ra thành nhiều dòng khác nhau và đưa ra những khoảng hiệu xuất khác nhau giữa các thế hệ, trong mỗi đời, các thành viên khác nhau về mã đối tượng và trong nhiều trường hợp là số lượng chân trên chip.

Họ DSP dấu phẩy động gồm có hai họ nhỏ là họ DSP TMS320C3x và họ DSP tms320c4x. Tất cả các thành viên của họ DSP số thực dấu phẩy động có kiến trúc 32 bit với thanh ghi độ chính xác mở rộng 40 bit. Họ DSP số thực dấu phẩy động dựa trên cấu trúc Von Neuman. Có lẽ kiến trúc nhiều bus sẽ hoạt động nhanh hơn cấu trúc truyền thống Harvard. Điểm đặc trưng của họ DSP TMS320C3X là bộ phận dấu phẩy động phần cứng và bộ ALU dấu phẩy động.

Cấu trúc chung họ TMS320C3X

Các đặc điểm chủ yếu của họ tms 320c3x:

- Hiệu xuất cao với tốc độ lên cao đến 60 MFLOPS
- Phương tiện ngôn ngữ lập trình C hiệu quả cao
- Không gian địa chỉ lớn hơn 16M từ nhớ x 32 bit
- Quản lý bộ nhớ nhanh với truy nhập bộ nhớ trực tiếp DMA on - chip
- Chuẩn công nghiệp giành riêng kiểu 3 V phù hợp trên nhiều thiết bị

Họ vi xử lý tín hiệu số tms 320c3x dựa trên DSP TMS320C30. chúng có 2K x 32 từ nhớ RAM on - chip, 4K x 32 bit ROM on - chip và 64 từ nhớ dự trữ lệnh. Những điểm nổi bật khác bao gồm truy cập trực tiếp tách biệt DMA, hai port nối tiếp và hai timer. Họ DSP TMS320C30 nổi bật ở hai bus dữ liệu ngoài 32 bit và không gian 16M từ nhớ. Thời gian thực hiện một lệnh là 60 ns và tốc độ thực hiện lệnh của nó là 33 MFLOPS.

Họ TMS320C3X có cấu trúc Harvard, các bus bus dữ liệu, bus chương trình, bus DMA được tách riêng. Nhờ vậy mà việc thực hiện song song trong cùng thời điểm gọi các lệnh thực hiện, đọc và ghi dữ liệu cũng như các hoạt động truy cập bus trực tiếp không bị ảnh hưởng lẫn nhau. Cấu trúc này đáp ứng được những yêu cầu của hệ thống

đòi hỏi cần phải dựa trên các thuật toán phức tạp và cần tốc độ cao. Do vậy mà nó làm nổi bật cả cấu trúc phần cứng và phần mềm. hiệu suất cao, tính toán cao được đáp ứng thông qua sự chính xác và khoảng thay đổi động của bộ dấu phẩy động cùng bộ nhớ dữ liệu trên chip lớn, sự song song cấp cao và bộ điều khiển truy cập trực tiếp (DMA).

Các thành viên của họ DSP số thực dấu phẩy động TMS320C3X:

➤ TMS320C30: là thành phần đầu tiên của họ DSP C3X, nó khác với các loại DSP ra đời sau nó ở 4K ROM, 2K RAM, port nối tiếp thứ hai và bus ngoài thứ hai.

➤ TMS320C31 và TMS320C311: là thành viên thứ hai của họ DSP, C3X, chúng là loại DSP 32 bit số thực dấu phẩy động giá thấp, có chương trình nạp khởi động, 2K RAM, một port ngoài, một port nối tiếp và có thể hoạt động ở 3,3 V ('LC31).

➤ TMS320C32: là loại mới nhất của họ DSP' C3X. chúng là thế hệ nổi bật của họ DSP' C3X và họ vì xử lý số thực dấu phẩy động có giá trị trên thị trường hiện nay. Những nổi bật này bao gồm giao

NOP

NOP

B WAIT

end of main program

RECEIVER INTERRUPT SERVICE ROUTINE RECEIVE:

LDP #TEMP

LAMM DRR ; read data from DRR

LDP #SIN SW

BIT SIN_SW,15

BCND SINEWAVE ,TC

random noise generator]

LACC seed, 1

XOR seed

SALC TEMP,2

XOR TEMP

AND #8000h

ADD seed,16

SACC seed,1 ; Reduce the output by at least 1/8

LACC seed,11 ; to prevent the overflow

AND #0FFCh,15

RPT #14

SAMM DXR

RETE ; program

sinewave generator

SINEWAVE:

MPY #0 ;clear Pregister

LACC y 1,15; y1 → ACC shift left 15 bit

NEG ; -ACC → ACC

MACD coeff,y ;coeffl* y

APAC ;

APAC ;2*coef*y - y1

SACH y,l ; Reduce the output by at least 1/8

LAC C y, 15 ; to prevent the overflow

AND #0FFCh, 15 ;bit 0\$ 1 has to be 0 for AIC

RPT #14

SFR

SAMM DXR ;to tell its data ,not command

RETE ; program

Sinewave generator

SINEWAVE:

MPY #0; clear P register

LACC y1 , 15 ;y ==>ACC shift left 15 bit

NEG ; -ACC==>ACC

MACD coeff,y ;coeff *y

APAC ;

APAC ;2*coef*y-y1

SACH y,l ;Reduce the output by at least 1/8

LACC y, 15 ;to prevent the overflow

AND #0FFFCh, 1 5 ;bit 0 \$ 1 has to be 0 for AIC

RPT #14

SFR

SAMM DXR ;to tell its data,not command

RETE ;program

TRANSMIT INTERRUPT SERVICE ROUTINE TRANSMIT:

DESCRIPTION:This routine initializes the TLC320C40 for
a 8Khz sample rate with a gain setting of 1
aic initialization data

AICINIT:SPLK #20h,TCR ; To generate 10 MHZ from Tout

SPLK #01h, PRD ;for AIC master clock

MAR * ,ARO

LACC #008h ;Non continous mode

SACL SPC ; FSX as input

LACC #00c8h ; 16 bit words

SACL SPC

LACC #080h ; Pulse AIC reset by setting it low

SACH DXR

SACL GREG

LAR AR0,#0FFFFh

RPT #10000 ;and taking it high after 10000 cycles

LACC *,0AR0; (.5ms at 50ns)

SACH GREG

LDP #TA ;

SETC SXM ;

LACC TA,9 ; Initialized TA and RA register

ADD RA,2 ;

CALL AIC 2ND.

LDP #TB

LACC TB,9 ; Initialized TB and RB register

ADD RB,2 ;

```

ADD #02h ;
CALL AIC-2ND ;
LDP #AIC CTR
LACC AIC-CTR,2 ; Initialized control register
ADD #03h ;
RET ;
AIC 2ND:
LDP #0
SACH DXR ;
CLRC INTM
ADD #6h,15; 0000 0000 0000 00 1 1 XXXX XXXX XXXX XXXX b
SACH DXR ;
IDLE
SACL DXR ;
IDLE -
LACL #0;
SACL DXR ; make sure the word got sent
IDLE
SETC INTM
RET ;
.end
TITLE FIR FILTER
SUBROUTINE FILTER
EQUATION:  $y(n) = h(0)*x(n) + h(1)*x(n+1) + \dots + h(N+1)*x(n+(N+1))$ 
TYPICAL CALLING SEQUENCE:
LOAD AR0
LOAD AR1
LOAD RC
LOAD BK
CALL FIR

```

ARGUMENT ASSIGNMENTS:

ARGUMENT FUNCTION

ARO ADDRESS $Ofh(N+_{1})$

ARI ADDRESS $Ofx(n-(N+_{1}))$

RC LENGTH OF FILTER $+_{2}(N+_{2})$

BK LENGTH OF FILTER (N)

REGISTERS USED AS INPUT AR0,AR1,RC,BK

REGISTERS MODIFIED:R0,R2,AR0,AR1,RC

REGISTER CONTAINING RESULT: R0

CYCLES: $11+(N+_{1})$ WORD:6

.global FIR ;Initialize Ro:

FIR MPYF3 * AR0++(1),*AR1 ++(1)%,R0;

$H(N+_{1}) * x(n+_{1})(N+_{1})) +_{R0}$

LDF 0.0,R2 ; Intialize R2

FILTER($1 \leq I < N$)

RPTS RC ; Set up the repeat cycle

$MPYF3 * AR0++(1) \%, R0 ; h(N+_{1}+_{i}) +_{>R0}$

ADDF3 R0,R2,R2 ; Multiply and add operation

ADDF R0,R2,R0 ; Add last product

RETURN SEQUENCE

RETS ; Return

End

.end

TITLE MATRIX TIMES A VECTOR MULTIPLICATION

SUBROUTINE MAT

MAT = MATRIX TIMES A VECTOR OPERATION

TYPICAL CALLING SEQUENCE:*

load AR0

load AR1

load AR2

load AR3

load R1

CALL MAT

ARGUMENT ASSIGNMENTS:

ARGUMENT FUNCTION

AR0 ADDRESS OF M(0,0)

AR1 ADDRESS OF V(0)

AR2 ADDRESS OF P(0)

AR3 NUMBER OF ROWS+_1(K+_1)

R1 NUMBER OF COLUMNS+_2(N+_2)

REGISTERS USED AS INPUT: AR0,AR1,AR2,AR3,R1

REGISTERS MODIFIED:R0,R2,AR0,AR1,AR2,AR3,IR0,

RC,RSA,REA

PROGRAM SIZE: 11

EXECUTION CYCLES: $6 + 10 \cdot k + K \cdot (N + 1)$

.global MAT

MAT LDI R1, IR0 ;Number of columns+_+_IR0

ADDI 2,IR0 ; IR0= N

FOR(i=0;i < K; I++) LOOP OVER ROWS

ROWS LDF 0.0,R2 ; Initialize R2

MPYF3 *AR0++(I), *AR1++(1),R0;

$m(i,0) \cdot v(0) + _ \rightarrow R0$

FOR(i=1,j < N,J++) DO DOT PRODUCT OVER COLUMNS

RPTS RI ; Multiply a row by a column

MPYF3 *AR0++(1), *AR1++(1),R0;

$m(i,j) \cdot v(j) + _ \rightarrow R0$

ADDF3 R0,R2,R2 ; $m(i,j+_1) \cdot V(1+_1) + R2 + _ \rightarrow R2$

DBD AR3,ROWS ; Counts the no. of rows left

ADDF R0,R2 ;Last accumulate

STF R2,*AR2++ (1) ;Result $\rightarrow p(i)$

NOP *-- AR1(IR0) ;Set AR1 to point to v(0)

DELAYED BRANCH HAPPEN HERE

RETURN SEQUENCE

RETS ; Return; END

MỤC LỤC

Chương I. THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ	2
1.1. Thiết kế bộ lọc bằng cách đặt các cực và zeros trên mặt	2
1.1.1. LỌC THÔNG THẤP, THÔNG CAO VÀ THÔNG DÀI	3
1.1.2. BỘ CỘNG HƯỞNG SỐ (DIGITAL RESONATOR)	7
1.1.3. BỘ LỌC DÀI KHẮC (NOTCH FILTER)	8
1.1.4. BỘ LỌC RĂNG LƯỖC (COMB FILTERS)	11
1.1.5. BỘ LỌC THÔNG TẮT (ALL-PASS FILTERS)	13
1.1.6. BỘ DAO ĐỘNG SIN SỐ	15
1.2. Thiết kế bộ lọc FIR	17
1.2.1. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH DÙNG CỬA SỐ	17
1.2.2. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẤY MẪU TRONG MIỀN TẦN SỐ	27
1.2.3. THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH CÓ ĐỘ GỌN KHÔNG ĐỔI BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẬP	45
1.2.4. SO SÁNH CÁC PHƯƠNG PHÁP THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH	57
1.3. THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ IIR	58
1.3.1. THIẾT KẾ BỘ LỌC IIR TỪ BỘ LỌC TƯƠNG TỰ	59
1.4. ĐẶC TÍNH CỦA CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ THÔNG DỤNG	71
1.3.3. CHUYỂN ĐỔI TẦN SỐ	74
 Chương II. MÃ HOÁ BẰNG CON VÀ LÝ THUYẾT WAVELET	78
2.1. MÃ HOÁ BẰNG CON (SUBBAND CODING)	78
2.1.1. Cấu trúc.	78
2.1.2. Cấu trúc dạng cây đơn phân giải (Uniform Resolution)	78
2.1.3. Cấu trúc dạng cây đa phân giải (Multiresolution)	80
2.2. WAVELET VÀ MỤC ĐÍCH CỦA PHÂN TÍCH WAVELET	82
2.2.1. Biến đổi Fourier.	82
2.2.2. Biến đổi Fourier thời gian ngắn (STFT)	82
2.2.3. Biến đổi khối (Block Transform)	84
2.2.4. Phân bố Wigner - Ville	84
2.2.5. Biến đổi Wavelet	85
2.3. KHÁI NIỆM VỀ WAVELET	85
2.4. XÂY DỰNG WAVELET BẰNG PHÂN TÍCH ĐA PHÂN GIẢI	87
2.4.1. Phân tích đa phân giải (MRA)	87
2.4.2. Các tiền đề của phân tích đa phân giải (MRA)	90
2.4.3. Xây dựng wavelet bằng MRA	93
2.4.4. Ví dụ xây dựng wavelet bằng phân tích đa phân giải	96

Chương III. LỌC SỐ NHIỀU NHỊP	105
3.1. MỞ ĐẦU:.....	105
3.2. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU	105
3.2.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA.....	105
3.2.2. PHÉP PHÂN CHIA THEO HỆ SỐ M.....	107
3.2.3. PHÉP NỘI SUY VỚI HỆ SỐ NGUYÊN L	116
3.2.4. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU VỚI HỆ SỐ $\frac{M}{L}$	122
3.3. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI LẤY MẪU	130
3.3.1. BỘ LỌC PHÂN CHIA.....	130
3.3.2. BỘ LỌC NỘI SUY	136
3.3.3. Bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L}$ không nguyên	142
3.4. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA (POLYPHASE DECOMPOSITION).....	150
3.4.1. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA HAO THÀNH PHẦN.....	150
3.4.2. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA M THÀNH PHẦN	155
3.4.3. PHÂN HOẠCH NHIỀU PHA LOẠI HAI.....	162
3.5. CẤU TRÚC NHIỀU PHA CỦA BỘ LỌC LẤY MẪU	165
3.5.1. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc phân chia.....	165
3.5.2. Cấu trúc nhiều pha của bộ lọc nội suy	170
3.5.3. Cấu trúc nhiều pha của các bộ lọc biến đổi nhịp hệ số M/L không nguyên	174
3.6. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỐNG LỌC SỐ NHIỀU NHỊP.....	179
3.6.1. BANK LỌC SỐ	179
3.6.2. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP HAI KÊNH	191
3.6.3. BANK LỌC SỐ NHIỀU NHỊP M KÊNH	200
3.6.4. HỆ THỐNG KHÔI PHỤC HOÀN HẢO (PERFECT RECONSTRUCTION).....	203
3.6.5. MÃ HOÁ DÀI CON VÀ CẤU TRÚC DẠNG CÂY CỦA BANK LỌC SỐ QMF.....	207
3.6.6. KỸ THUẬT GHÉP KÊNH.....	211
3.6.7. CÁC HỆ THỐNG AUDIO SỐ	221
 Chương IV. HỌ DSP THÔNG DỤNG TMS320.....	 225
Cấu trúc chung họ TMS320C3X.....	225