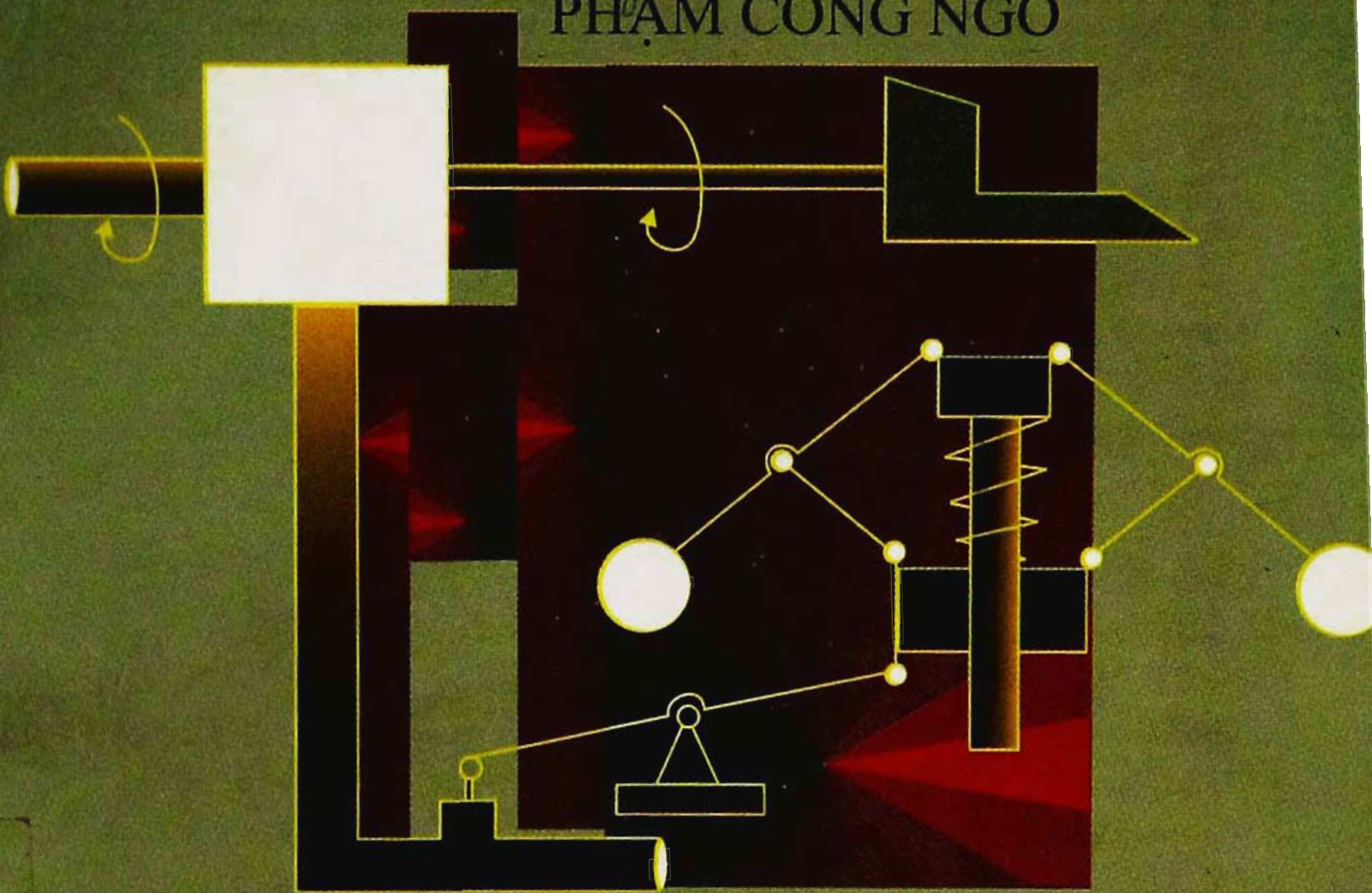


Dung Vy

PHẠM CÔNG NGÔ

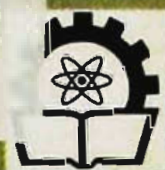


LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN² TỰ ĐỘNG

Thu Vien DHKTCN-TN



MGT07025258



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PHẠM CÔNG NGÔ

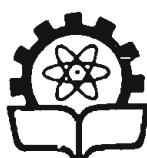
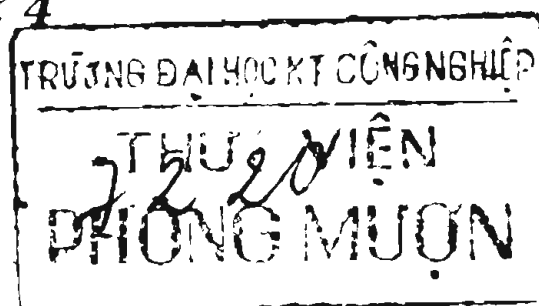
LÝ THUYẾT

ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Tập 1

*Tái bản có sửa chữa
Bổ sung các bài tập lớn, lời giải*

In lần thứ 4



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2001

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs, Pts TÔ DĂNG HẢI
Biên tập NGỌC KHUÊ
Vẽ bìa HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

In 1000 cuốn khổ 14.5 x 20.5. In tại Nhà in ĐHQGHN
Giấy phép xuất bản số 451 - 22 ngày 9/5/2000
In xong và nộp lưu chiểu

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết điều khiển tự động (Đ.K.T.Đ) là phần chủ yếu của lý thuyết điều khiển. Lý thuyết Đ.K.T.Đ là kiến thức cơ sở của các ngành kỹ thuật tự động trong lĩnh vực điện tử, điện động lực, cơ khí, hàng hải và quốc phòng. Từ hội nghị lần thứ I năm 1960 của Liên đoàn điều khiển tự động quốc tế (I.F.A.C) đến nay, lý thuyết Đ.K.T.Đ đã phát triển không ngừng và tách thành nhiều hướng nghiên cứu sâu và rộng.

Những năm 1970 về trước, công cụ để nghiên cứu lý thuyết Đ.K.T.Đ còn đơn sơ. Từ 1970 đã có một sự phát triển mới, đặc biệt trong lĩnh vực điều khiển vũ trụ, công nghiệp và quốc phòng. Nhưng sang thập kỷ 80 khi kỹ thuật vi xử lý và máy tính được ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu khoa học và trong các ngành kinh tế, kỹ thuật thì hướng nghiên cứu và ứng dụng của lý thuyết Đ.K.T.Đ lại chuyển qua một cuộc cách mạng mới. Đó là hướng ứng dụng điều khiển có máy tính, từ các hệ thống on-line đến các hệ thống điều khiển phân cấp có máy vi tính điều khiển.

Lý thuyết Đ.K.T.Đ là môn học được giảng dạy ngay từ khi thành lập các trường Đại học kỹ thuật ở Việt Nam. Cuốn sách này là sự đúc kết những bài giảng mà tác giả cùng các đồng nghiệp đã liên tục giảng dạy gần 30 năm qua ở các trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Bách khoa thành phố Hồ Chí Minh, Học viện Kỹ thuật Quân sự và các trường Đại học kỹ thuật khác.

Nội dung cuốn sách viết theo chương trình đào tạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo thuộc Chương trình Nhà nước KC-01-13 do Giáo sư Nguyễn Đình Trí chủ trì.

Khi xây dựng đề cương, tác giả đã được sự cộng tác quý báu của đồng nghiệp Lê Đình Anh, người đã và đang giảng dạy Lý thuyết Đ.K.T.Đ từ 7 năm nay ở Algerie.

Để đạt được hai mục đích

– Hệ thống hóa quá trình phát triển Lý thuyết Đ.K.T.Đ chứa đựng những nguyên lý cơ bản của Điều khiển Tự động.

– Nêu lên những hướng mới của Lý thuyết Đ.K.T.Đ hiện đại, tác giả đã tham khảo những tài liệu mới nhất về Lý thuyết Đ.K.T.Đ giảng dạy ở các trường Đại học của các nước Phương Tây.

Lần tái bản này có bổ sung các chương trình tính quá trình quá độ bằng ngôn ngữ C và các bài tập lớn về lý thuyết hệ tuyến tính liên tục và hệ xung số tối ưu nhằm hệ thống hóa kiến thức cho sinh viên làm quen với việc tính toán và thiết kế hệ thống.

Cuốn sách hoàn thành được sớm là do có sự giúp đỡ, cố vũ của giáo sư Nguyễn Đình Trí, giáo sư Phan Anh, đặc biệt sự giúp đỡ nhiệt tình của Ban biên tập sách Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật. Tác giả xin bày tỏ sự biết ơn sâu sắc đối với sự giúp đỡ quý báu đó. Do thời gian và khả năng có hạn, chắc rằng cuốn sách không tránh khỏi còn sai sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp. Thư góp ý xin gửi về Bộ môn Tự động điều khiển, trường Đại học Bách khoa Hà Nội, hay Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Tác giả

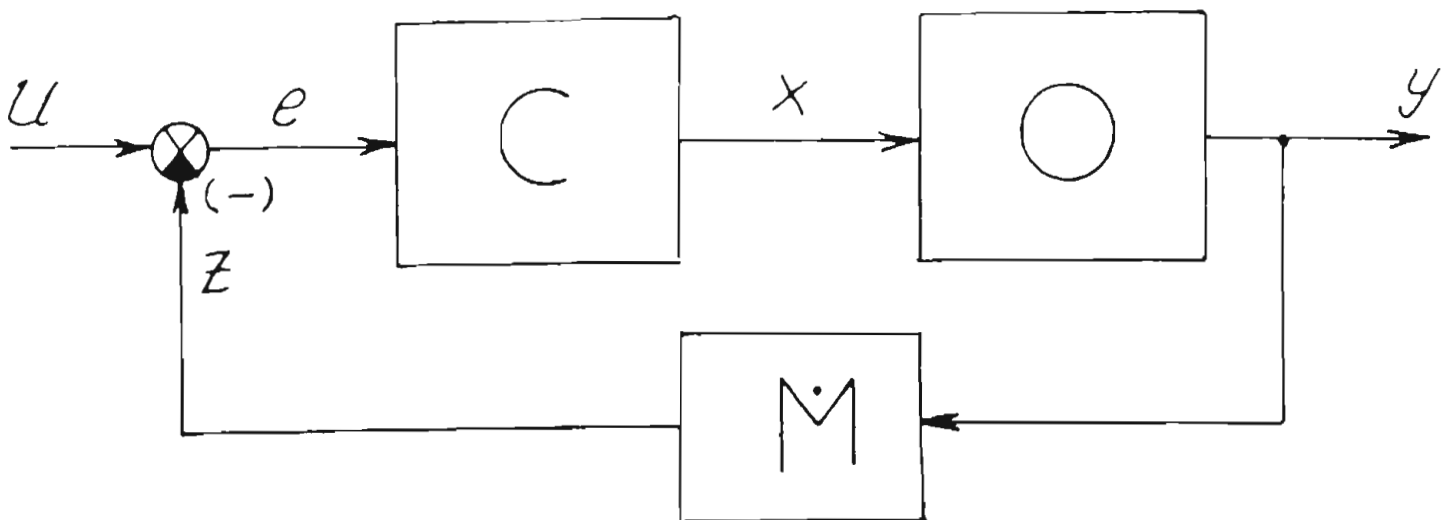
Chương 1

**MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG
ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG****1-1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN****1-1.1. Các phần tử cơ bản của hệ thống điều khiển
tự động**

Hệ thống điều khiển tự động là hệ thống được xây dựng từ ba bộ phận chủ yếu:

- Thiết bị điều khiển C (Controller)
- Đối tượng điều khiển O (Object)
- Thiết bị đo lường M (Measuring Device)

Đó là một hệ thống có phản hồi (feedback) hay có liên hệ ngược. Sơ đồ khối vẽ hệ thống điều khiển tự động (ĐKTD) vẽ trên hình 1-1.



Hình 1-1.

Các tín hiệu tác động trong hệ thống:

u : Tín hiệu vào (input),

y : Tín hiệu ra (output),

x : Tín hiệu điều khiển tác động lên đối tượng O ,

e : Sai lệch điều khiển,

z : Tín hiệu phản hồi (phản hồi âm ký hiệu bằng dấu $(-)$ khi z ngược dấu với tín hiệu u)

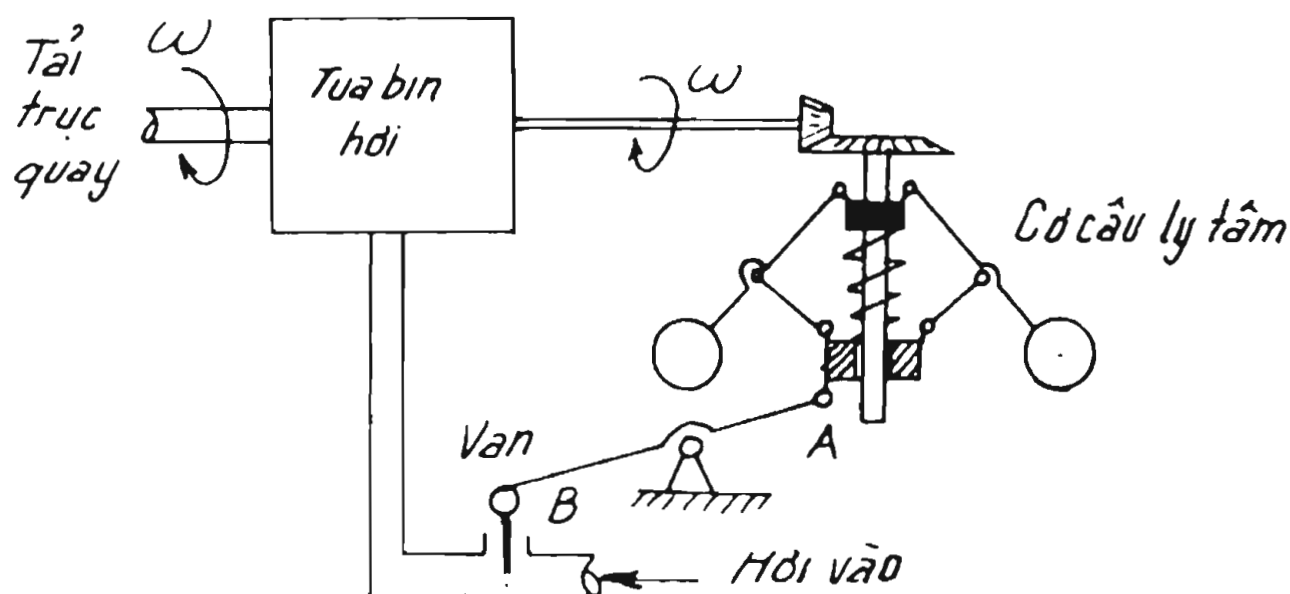
Sơ đồ hình 1-1 là sơ đồ khối đơn giản nhất và tổng quát nhất. Về sau ta sẽ xét tới các hệ thống phức tạp hơn.

Sau đây ta xét vài ví dụ về hệ thống điều khiển tự động.

Đầu tiên ta xét hệ thống điều chỉnh tự động tốc độ quay của tuabin hơi nước. Sơ đồ nguyên lý vẽ trên hình 1-2.

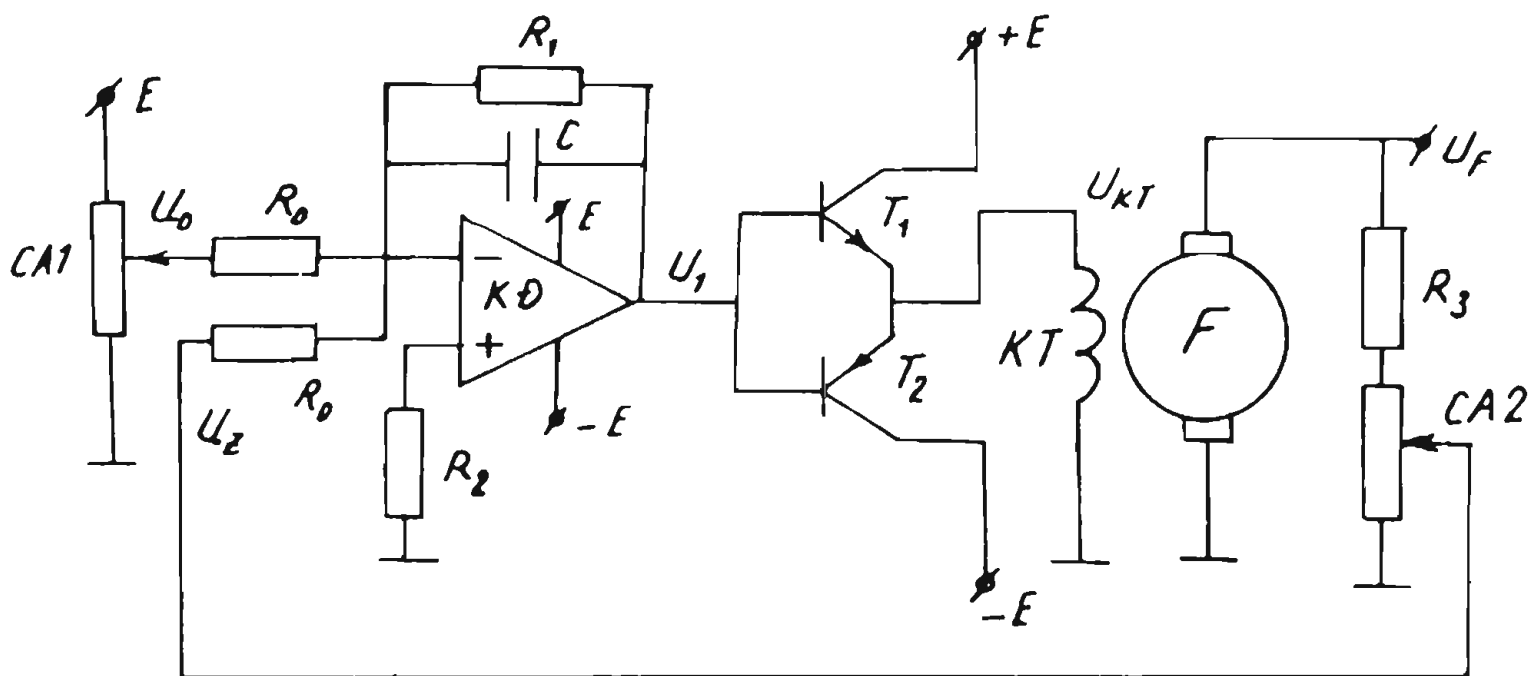
Đối chiếu với sơ đồ chức năng vẽ ở hình 1-1 ta thấy: Đối tượng điều khiển (ĐTĐK) là tuabin hơi nước; Thiết bị điều khiển là van điều chỉnh lượng hơi vào; Thiết bị đo lường là cơ cấu ly tâm.

Hệ thống điều khiển tự động này nhằm duy trì cho tốc độ tuabin giữ ổn định. Nếu tốc độ n tăng lên do nguyên nhân nào đó thì thông qua cơ cấu ly tâm, con trượt sẽ bị kéo lên trên (kéo cả đầu A của cánh tay đòn AB) và đầu B sẽ bị ấn xuống làm cho van bị đóng



Hình 1-2

bớt để giảm luồng hơi cấp vào tuabin. Khi đó tốc độ quay của tuabin sẽ bị giảm xuống. Tương tự khi tốc độ quay của tuabin vì một nguyên nhân nào đó bị giảm xuống thì cánh tay đòn AB thông qua cơ cấu ly tâm sẽ hạ đầu A xuống và nâng đầu B lên để mở cửa van cho luồng hơi vào máy nhiều hơn và làm tăng tốc độ quay của tuabin.



Hình 1-3.

Một ví dụ khác về hệ thống điều chỉnh tự động điện áp máy phát điện một chiều vẽ trên hình 1-3.

Trong sơ đồ gồm có các phần tử:

- Khuếch đại vào, là thiết bị cộng tín hiệu u_0 (điện áp đặt từ chiết áp (CA_1) và u_z (điện áp phản hồi qua chiết áp CA_2 lấy từ điện áp ra u_F của máy phát F .)

Đây là một mạch khuếch đại thuật toán (Operational Amplifier). Các điện trở R_1 , R_0 , tụ C tạo thành khâu quán tính cấp 1.

- Mạch khuếch đại dòng công suất gồm hai tranzito T_1 và T_2 .
- Đối tượng điều khiển là máy phát điện một chiều F có điện áp ra u_F cần giữ ổn định.
- Chiết áp CA_2 và điện trở R_3 làm mạch phân áp, đưa điện áp máy phát u_F thành điện áp phản hồi u_z về đầu vào và so sánh với

u_o (u_z và u_o ngược dấu nhau để tạo thành phản hồi âm).

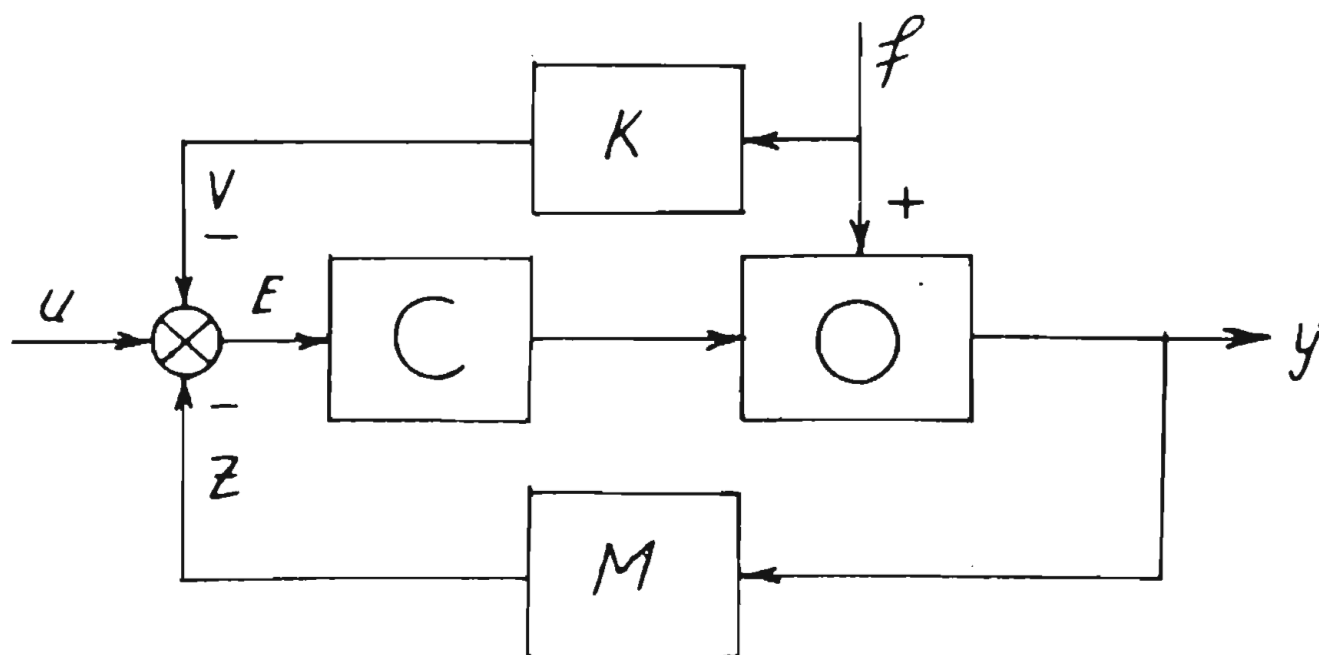
Chức năng của hệ thống là cần giữ điện áp ra u_F ổn định. Giả sử do một nguyên nhân nào đó làm u_F giảm xuống thì sơ đồ có chức năng tự động làm tăng u_F về giá trị đặt ban đầu như sau. Ta thấy tín hiệu đặt vào bộ khuếch đại KĐ là hiệu điện áp $u_o - u_z = \Delta u$. Vì $u_o = \text{const}$ nên khi u_z giảm thì Δu tăng lên, do đó u_1 là điện áp ra sau bộ khuếch đại cũng tăng lên. Khi đó qua bộ khuếch đại dòng $T_1 - T_2$, dòng điện kích từ qua cuộn dây kích từ KT cũng tăng lên và điện áp máy phát u_F cũng tăng lên, nghĩa là hệ thống đã giữ được điện áp của máy phát ổn định.

1-1.2. Các nguyên tắc điều khiển cơ bản

Bất kỳ hệ thống ĐKTD nào cũng bị tác động của nhiễu và gây ra sai số. Hiện nay có ba nguyên tắc điều khiển cơ bản:

- Nguyên tắc điều khiển theo sai lệch
- Nguyên tắc điều khiển theo phương pháp bù nhiễu
- Nguyên tắc điều khiển hỗn hợp theo sai lệch và bù nhiễu.

Trên hình 1-4 vẽ sơ đồ hệ thống điều khiển theo nguyên tắc hỗn hợp. Trong hệ thống tín hiệu $y(t)$ là tín hiệu ra; $f(t)$ là nhiễu tác động vào đối tượng điều khiển.



Hình 1-4.

Nhiều $f(t)$ tác động lên đối tượng điều khiển ví dụ theo chiều hướng làm tăng tín hiệu ra $y(t)$. Trong hệ có đưa vào một thiết bị bù K có tác dụng ngược dấu với f , nghĩa là v tác dụng bù về phía trước TBDK C để làm tín hiệu E giảm bớt. Nếu f tác dụng lên ĐTDK O để làm giảm tín hiệu ra y thì thiết bị bù K lại tạo ra tín hiệu bù v làm tăng E nhằm cuối cùng làm tăng y .

Hệ thống điều khiển theo nguyên tắc hỗn hợp được dùng rộng rãi trong thực tế.

Đối với nguyên tắc sai lệch đã trình bày qua hai ví dụ trong sơ đồ nguyên lý hình 1-2 và hình 1-3.

Ngoài các nguyên tắc điều khiển cơ bản đã nói ở trên người ta còn nêu ra nguyên tắc khác như:

- Nguyên tắc điều khiển theo chương trình
- Nguyên tắc điều khiển thích nghi.



Gần đây do sự phát triển nhanh chóng của kỹ thuật vi xử lý và vi tính người ta đã tổng hợp ra các hệ thống điều khiển rất phức tạp trong đó thiết bị điều khiển (Controller) chính là một máy vi tính có thêm các thiết bị ghép phối Tương tự – Số (Analogue – Digital) và Số – Tương tự (Digital – Analogue). Các thuật toán điều khiển được tính toán theo các bài toán tối ưu và thích nghi được viết bằng chương trình ngôn ngữ máy hoặc ngôn ngữ C để điều khiển đối tượng công nghệ bên ngoài.

1-1.3. Phân loại các hệ thống điều khiển tự động

Việc phân loại hệ thống ĐKTD có thể thực hiện theo nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây ta nghiên cứu các loại hệ thống ĐKTD điển hình và hiện có sau đây:

- 1– Hệ thống ĐKTD tuyến tính
- 2– Hệ thống phi tuyến tính
- 3– Hệ thống liên tục: Các tín hiệu tác động trong hệ là các hàm liên tục theo thời gian.

4– Hệ thống rời rạc hay hệ thống xung-số (Hệ thống gián đoạn): Trong đó chỉ cần có một tín hiệu là một hàm rời rạc theo thời gian.

5– Hệ thống tiên định: Là hệ thống trong đó tất cả các tín hiệu truyền đạt là các hàm theo thời gian xác định (không có tín hiệu ngẫu nhiên)

6– Hệ thống ngẫu nhiên: Là hệ thống trong đó chỉ cần có một tín hiệu là một hàm ngẫu nhiên.

7– Hệ thống tối ưu: Là một hệ thống điều khiển phức tạp, trong đó thiết bị điều khiển có chức năng tổng hợp được một tín hiệu điều khiển $u(t)$ tác động lên đối tượng nhằm chuyển trạng thái ĐKTD từ trạng thái đầu đến trạng thái cuối với khoảng thời gian ngắn nhất (bài toán tối ưu tác động nhanh) hoặc làm cho hệ thống đạt được độ chính xác điều khiển cao nhất.

8– Hệ thống thích nghi (hay còn gọi là hệ thống tự chỉnh) là hệ thống có khả năng thích ứng một cách tự động những biến đổi của điều kiện môi trường và đặc tính của đối tượng điều khiển bằng cách thay đổi tham số và cấu trúc sơ đồ của thiết bị điều khiển.

Hiện nay hệ thống thích nghi thường sử dụng các thiết bị tính, kỹ thuật số. Các hệ thích nghi phổ biến ứng dụng trong công nghiệp là hệ thống có ghép nối với các vi xử lý và máy vi tính.

Việc phân loại các hệ thống ĐKTD trên đây cũng chỉ là một cách. Tuy nhiên giữa các loại hệ thống này lại có liên quan mật thiết với nhau. Ví dụ nếu ta chia hệ thống ĐKTD thành hai loại: Hệ ngẫu nhiên và hệ không ngẫu nhiên (Hệ tiên định); thì trong một lớp hệ ngẫu nhiên lại có thể phân thành hệ tuyến tính hoặc phi tuyến; Tiếp đến ngay chỉ trong hệ tuyến tính lại có thể có hệ liên tục; rời rạc v v...

Do vậy có thể nói việc phân loại hệ thống ĐKTD tùy thuộc mục đích phân loại.

1-1.4. Nhiệm vụ phân tích và thiết kế hệ thống

Nội dung cơ bản của lý thuyết điều khiển tự động là bài toán

phân tích hệ thống và bài toán tổng hợp hệ thống (hay thiết kế hệ thống).

Trong thực tế có những hệ thống đang vận hành nhưng khi xảy ra sự cố hoặc lâu ngày cần điều chỉnh lại tham số. Lúc đó chúng ta cần giải quyết *bài toán phân tích hệ thống*, nghĩa là phải đánh giá lại các chỉ tiêu chất lượng hệ thống. Muốn làm được việc đó, chúng ta phải xác định được mô tả toán học của từng phần tử trong hệ thống (hay là mô hình toán học hệ thống). Khi đã có được mô hình toán học toàn hệ thống, ta cần dựa vào đó để xem xét hệ có làm việc ổn định không và các chỉ tiêu chất lượng khác như thời gian điều khiển nhanh hay chậm, các thông số điều khiển và đại lượng được điều khiển có ở trong giới hạn yêu cầu cho phép hay không. Chỉ một bài toán *phân tích hệ thống* nhưng phải dùng nhiều công cụ toán học khác nhau đối với từng loại hệ thống khác nhau. Bài toán *phân tích hệ thống* trong trường hợp đơn giản có thể tính bằng giải tích và đại số thông thường nhưng có trường hợp cần phải sử dụng đến máy vi tính để giải quyết.

Thiết kế hệ thống là xác định tham số và cấu trúc dựa vào các yêu cầu thiết kế như độ chính xác điều khiển, độ tác động nhanh của hệ thống hoặc năng lượng tiêu hao trong hệ thống cực tiểu. Thiết kế hay tổng hợp hệ thống thường đi kèm bài toán phân tích hệ thống. Có khi một hệ thống đã thiết kế sơ bộ nhưng cần phải cải thiện chất lượng hệ thống tốt hơn. Đưa vào một cấu trúc mới vào một hệ thống (ví dụ như bộ điều khiển Tỷ lệ – Tích phân – Vi phân PID) sẽ làm thay đổi hẳn đặc tính của hệ thống. Do đó vấn đề *tổng hợp hệ thống ĐKTD* là một bài toán hết sức quan trọng và phức tạp.

1-2. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Phép biến đổi Laplace được ứng dụng rất có hiệu quả trong việc giải các bài toán lý thuyết mạch điện, điện tử, cơ học và đặc biệt trong lý thuyết Điều khiển tự động.

Nếu có một hàm $f(t)$ có đối số theo thời gian thì ảnh Laplace của hàm số ký hiệu là $F(p)$ được tính theo công thức:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad (1-1)$$

trong đó p là biến toán tử Laplace; $F(p)$ là ảnh; $f(t)$ là gốc.

Quan hệ giữa gốc $f(t)$ và ảnh $F(p)$ còn viết theo ký hiệu sau:

$$f(t) \rightarrow F(p) = L\{f(t)\} \quad (1-2)$$

Ví dụ 1-1. Tìm ảnh Laplace các hàm sau đây:

1) $f(t) = C = \text{hằng số};$

$$F(p) = L\{C\} = \int_0^{\infty} C \cdot e^{-pt} \cdot dt = C \cdot \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{C}{p} \quad (1-3)$$

2) $f(t) = e^{at};$

$$F(p) = L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \left. \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (1-4)$$

3) $f(t) = e^{-at};$

$$F(p) = L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \left. \frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p+a} \quad (1-5)$$

4) $f(t) = t;$

$$F(p) = L\{t\} = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-pt} \cdot dt = t \cdot \left. \frac{1}{-p} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{-p} \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (1-6)$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2}; \quad (\text{Tính theo công thức } \int u dv = uv - \int v du).$$

– Ảnh Laplace của đạo hàm các cấp của hàm số $f(t)$. Có hàm $f(t)$, ảnh của nó là $F(p)$.

Đạo hàm của $f(t)$ là $f'(t) = df(t)/dt$ có ảnh là:

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (1-8)$$

Đạo hàm đến cấp n của hàm $f(t)$ là $f^{(n)}(t)$

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t)\} &= L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = \\ &= p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (1-9)$$

Khi điều kiện đầu triệt tiêu, tức là:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \text{ thì}$$

$$L\{f'(t)\} = pF(p)$$

$$L\{f''(t)\} = p^2 \cdot F(p) \quad (1-10)$$

...

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n \cdot F(p)$$

– Ảnh Laplace của tích phân hàm số:

Nếu $f(t)$ có ảnh là $F(p)$ thì

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p} \quad (1-11)$$

– Ảnh Laplace của hàm trễ một khoảng thời gian T :

$f(t) \rightarrow F(p)$ thì:

$$L\{f(t - T)\} = e^{-pT} \cdot L\{f(t)\} = e^{-pT} \cdot F(p) \quad (1-12)$$

– Ảnh Laplace của phép tích chập $f_1(t) \quad f_2(t)$:

Tích chập được định nghĩa:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_2(T) \cdot f_1(t - T) \cdot dT$$

$$L\left\{\int_0^t f_1(t - T) \cdot f_2(T) \cdot dT\right\} = F_1(p) \cdot F_2(p) \quad (1-13)$$

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\} = F_1(p) + F_2(p) \quad (1-14)$$

$$L\{kf(t)\} = k \cdot L\{f(t)\} = k \cdot F(p) \quad (1-15)$$

$$- L\{e^{-at}.f(t)\} = F(p + a) \quad (1-16)$$

$$- L\{f\left(\frac{t}{a}\right)\} = a.F(a.p) \quad (1-17)$$

$$- L\{\sin(at)\} = \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (1-18)$$

$$- L\{\cos(at)\} = \frac{p}{(p + a)^2 + k^2} \quad (1-19)$$

$$- L\{e^{-at}.\sin(kt)\} = \frac{k}{(p + a)^2 + k^2} \quad (1-20)$$

$$- L\{e^{-at}.\cos(kt)\} = \frac{p + a}{(p + a)^2 + k^2} \quad (1-21)$$

$$- L\left\{\frac{e^{-at}.t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{(p + a)^n} \quad (1-22)$$

$$- \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0); \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (1-23)$$

- Công thức biến đổi Laplace ngược.

Nếu biết ảnh $F(p)$ của một hàm gốc $f(t)$ thì ta tính được $f(t)$ theo $F(p)$ qua công thức:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p).e^{pt}.dp = L^{-1}\{F(p)\}. \quad (1-24)$$

Thông thường tính hàm $f(t)$ theo công thức biến đổi ngược (1-24) có nhiều khó khăn. Do đó nếu biết hàm $F(p)$, ta thường phân tích thành các phân thức đơn giản và sử dụng các công thức biến đổi cơ bản ở trên.

- **Ứng dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân.**

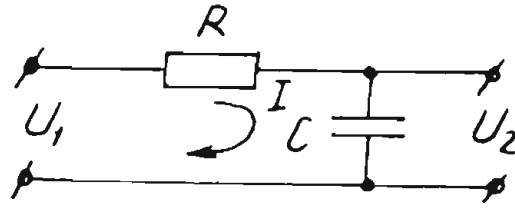
Ví dụ 1-2. Có mạch điện R-C, phương trình mô tả như sau:

$$u_1 = IR + u_2$$

$$u_2 = \frac{1}{C} \int I.dt \Rightarrow I = C \frac{du_2}{dt}$$

Hay:

$$u_1 = R.C. \frac{du_2}{dt} + u_2$$



Đặt $RC = T$, ta có:

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad (1-25)$$

Hình 1-5.

Từ phương trình (20) ta viết biến đổi Laplace của các số hạng

$$u_2(t) \rightarrow u_2(p) \quad L\{u_2(t)\}$$

$$\frac{du_2}{dt} \rightarrow pu_2(p) = L \frac{du_2(t)}{dt} \quad (1-26)$$

$$u_1(t) \rightarrow u_1(p) = L\{u_1(t)\}.$$

Thế các số hạng từ (1-26) vào (1-25) ta có:

$$Tpu_2(p) + u_2(p) = u_1(p) \quad (1-27)$$

$$u_2(p) = u_1(p) \frac{1}{Tp + 1} \quad (1-28)$$

Nếu $u_1(t) = k = \text{const} \Rightarrow u_1(p) = \frac{k}{p}$

$$u_2(p) = \frac{1}{Tp + 1} \cdot \frac{k}{p} = \frac{a_1}{Tp + 1} + \frac{a_2}{p}$$

Ta tìm được $a_1 = -T.k$ và $a_2 = 1.k$.

$$\text{Hay: } u_2(p) = \frac{-T}{Tp + 1} + \frac{1}{p} = \frac{-1}{p + \frac{1}{T}} + \frac{1}{p}$$

Mặt khác ta đã biết:

$$k \rightarrow \frac{k}{p} \quad \text{và} \quad e^{-at} \rightarrow \frac{1}{p + a}$$

Vậy $u_2(t) = ke^{-t/T} + k = k(1 - e^{-t/T}).$

hay: $u_2(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad (1-29)$

1-3. CÁC PHÉP TÍNH MA TRẬN CƠ BẢN

Phép tính ma trận được dùng để giải các bài toán điều khiển trong không gian trạng thái.

Ma trận là một bảng lập thành từ m hàng và n cột. Ký hiệu A là ma trận, ví dụ gồm 2 hàng và 2 cột sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1,5 & \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}.$$

trong đó: a_{ij} là các phần tử của ma trận A (m x n).

Hai ma trận A và B bằng nhau nếu các phần tử tương ứng bằng nhau: $a_{ij} = b_{ij}$

1. Ma trận chuyển vị của ma trận A là A' (hay A^T) nếu hoán vị cột của ma trận A thành hàng của ma trận A'.

$$A = \{a_{ij}\} \text{ thì } A' = \{a_{ji}\};$$

2. Ma trận đối xứng là ma trận mà $A = A'$, là ma trận vuông: $a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n)$

3. Công hai ma trận: $C = A + B$

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1-30)$$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính chất: $A + B = B + A$

$$A + (B + C) = (A$$

Trừ ma trận $D = A - B$, hay là $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

4. Tích hai ma trận: $C = A.B$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1-31)$$

Ví dụ:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} ;$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq A.B \quad (1-32)$$

– Nếu có:

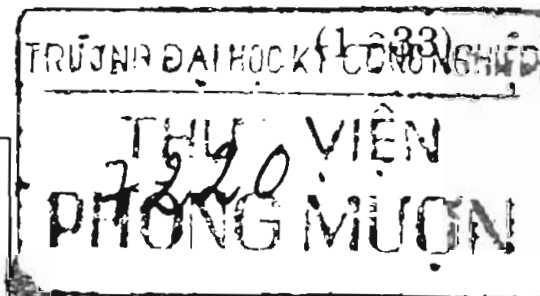
$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Qua ví dụ này ta thấy $A \neq 0$ và $B \neq 0$ nhưng tích số $A.B = \{0\}$.

– Một ma trận nhân với một đại lượng vô hướng thì mỗi một phần tử của ma trận đều nhân với lượng vô hướng đó.

$$k.A = \{ka_{ij}\}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$



– Chuyển vị của tích hai ma trận bằng chuyển vị của ma trận sau nhân với chuyển vị của ma trận trước:

$$(A.B)' = B'.A' \quad (1-34)$$

– Tích ma trận A với ma trận đường chéo $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$

(Ma trận đường chéo là ma trận mà các phần tử nằm trên đường chéo chính khác không còn tất cả các phần tử ngoài đường chéo đều bằng không).

Nếu ma trận đường chéo ở bên phải thì kết quả phép nhân sẽ là tích của 1 phần tử trên ma trận đường chéo với một cột tương ứng của ma trận A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}$$

Còn ma trận đường chéo ở bên trái ma trận A thì kết quả của phép nhân sẽ là tích của một phần tử trên ma trận đường chéo với hàng tương ứng của ma trận A.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{11} \\ a_{21}d_{22} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}$$

5. *Ma trận không* là ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không.

– *Ma trận đơn vị* là ma trận mà tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 còn tất cả các phần tử khác đều bằng không. Ký hiệu ma trận đơn vị là I. Ví dụ ma trận đơn vị cấp 3 x 3 là;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; A.I = I.A = A \quad (1-35)$$

– *Ma trận hàng* là ma trận chỉ có các phần tử nằm trên một hàng: $A(m \times n)$ với $m = 1, \quad \geq 2$

Ví dụ $A(1 \times 4) = [5 \quad 2 \quad 4 \quad 3]$

– *Ma trận cột* là ma trận chỉ có

$A(m \times n)$ với $m \geq 2, n \geq 1$

Ví dụ: $A(3,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Nếu viết dạng ma trận chuyển vị ta có: $A' = [2 \ 1 \ 7]$ thì ma trận cột chuyển thành ma trận hàng. Hoặc chuyển vị của ma trận hàng sẽ thành ma trận cột.

6. *Vết của ma trận: (Trace):* là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của ma trận vuông:

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (1-36)$$

7. *Định thức của ma trận vuông $A(n \times n)$* là tổng đại số của $n!$ số hạng lập nên các phần tử của ma trận.

Ví dụ ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, định thức của nó là $\det(A)$

hay $\|A\|$, ($\det(A)$: viết tắt từ Determinant)

$$\det(A) = \|A\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

8. *Phần phụ đại số.* Nếu định thức A , ta bỏ đi hàng thứ i và bỏ đi cột thứ j và giữ lại $(n-1)$ hàng và $(n-1)$ cột và lấy dấu bằng $(-1)^{i+j}$, đó là phần phụ đại số của phần tử a_{ij} của ma trận A ký hiệu A_{ij}

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

Ta tính các phần phụ đại số cho các phần tử ma trận A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = -(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13})$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

9. Ma trận phụ hợp (Adjugate matrix)

Ma trận phụ hợp của ma trận A là ma trận lập thành bởi các phần phụ đại số và sau đó lấy chuyển vị. Ký hiệu ma trận phụ hợp là: $\text{adj } A$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (1-37)$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Ma trận nghịch đảo (Inverse Matrix).

Có ma trận vuông $A(n \times n)$. Nghịch đảo của ma trận A ký hiệu là $\text{inv}(A)$ hay A^{-1} . Tích của A và A^{-1} là ma trận đơn vị.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad (1-38)$$

Công thức tính ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} \quad (1-39)$$

Ví dụ 1-3. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Khi ta tính được phần phụ đại số A_{ij} ta có thể tính được định thức nhờ công thức Laplace, khai triển theo hàng:

$$\begin{aligned} \|A\| &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \\ &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} = \\ &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}. \end{aligned} \quad (1-40)$$

Khi khai triển theo cột ta có:

$$\begin{aligned} \|A\| &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = \\ &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \\ &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}. \end{aligned} \quad (1-41)$$

Theo số liệu ma trận A đã cho ta tính được:

$$\det(A) = \|A\| = 1. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } \text{inv}(A) = A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

– Tích hai ma trận nghịch đảo: $C = A.B$ thì:

$$C^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \quad (1-42)$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(AB)} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6}$$

$$\text{Còn } A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{2}; \quad B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{3}$$

$$B^{-1}.A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{3} \cdot \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6}.$$

Rõ ràng $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

– Chuyển vị của ma trận nghịch đảo và nghịch đảo của nghịch đảo:

$$[A^{-1}]' = [A']^{-1} \quad (1-43)$$

$$[A^{-1}]^{-1} = [A] \quad (1-44)$$

11. Trị riêng và vectơ riêng (*Eigenvalues*, *Eigenvectors*).

Ta xét phương trình vectơ:

$$y = A.x \quad (1-45)$$

với x và y là các vectơ cột, còn A là ma trận vuông. Ý nghĩa của phương trình này là có một vectơ x , qua phép biến đổi ma trận A nó sẽ thành vectơ y có cùng một hướng với vectơ x . Nếu tồn tại một vectơ x như vậy thì ta nói y tỷ lệ với x hay là quan hệ của y và x là một phép tỷ lệ tuyến tính với hệ số λ . Lúc đó ta có thể viết:

$$y = A.x = \lambda.x \quad (1-46)$$

với λ là một đại lượng vô hướng, là hệ số tỷ lệ.

Đây chính là bài toán về trị riêng (eigenvalue) hay là số đặc trưng của ma trận A mà với giá trị của λ , ví dụ λ_1 để cho phương trình $y = Ax$ có nghiệm $x_1 \neq 0$. Vectơ nghiệm $x_1 \neq 0$ được gọi là vectơ riêng (eigenvector) hay là vectơ đặc trưng.

Ta có $y = Ax = \lambda.x$ Hay là $Ax = \lambda.x$

$$(A - \lambda.I).x = 0 \quad (1-47)$$

Phương trình này có nghiệm không tầm thường chỉ khi

$$\det(A - \lambda.I) = 0. \quad (1-48)$$

Phương trình (1-48) gọi là phương trình đặc trưng

Ví dụ 1-4. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Hãy tìm trị riêng của } A.$$

Ta giải phương trình dạng (1-46)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hay theo dạng (1-47) ta có:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hoặc:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng (1-48) sẽ là:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Rút ra:} \quad (3 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\text{Tính được:} \quad \lambda_1 = 1 \text{ và } \lambda_2 = 5$$

Định thức $\det(A - \lambda I)$ gọi là đa thức đặc trưng.

Tương ứng với mỗi một trị riêng λ_i của ma trận $A(n \times n)$ là một nghiệm vectơ x_i của phương trình trị riêng: $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$.

Vectơ nghiệm này được gọi là *vectơ riêng*.

Ứng với ma trận A đã cho ta tìm được $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 5$.

Giả sử xét với trị riêng $\lambda_1 = 1$, ta sẽ tìm được vectơ riêng như sau:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Hãy là:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Từ đây ta rút ra: $x_1 = -2x_2$. Do đó vectơ riêng x_1 là $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_2$ với x_2 là một số bất kỳ:

12- Dạng toàn phương (Quadratic Forms)

Dạng toàn phương là một tổng của các số hạng cấp hai:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot x_i x_j \quad (1-49)$$

$$Q = x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j.$$

Nếu vectơ x chỉ có 2 tọa độ x_1 và x_2 thì:

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Nếu đặt: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X' = [x_1 \ x_2] &\Rightarrow X' \cdot A \cdot X = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \\ &= [a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2]. \end{aligned}$$

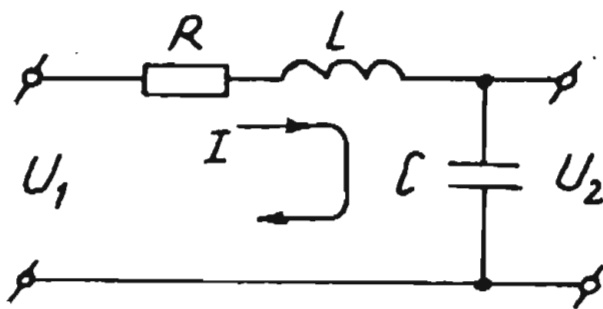
Nếu A là ma trận đối xứng, sẽ có $a_{12} = a_{21}$, ta viết:

$$Q = X' \cdot A \cdot X \quad (1-50)$$

Công thức (1-50) là dạng tổng quát của dạng toàn phương.

1-4. PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI, KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI, KHẢO SÁT HỆ THỐNG TRONG MIỀN THỜI GIAN

1-4.1. Phương trình trạng thái dạng tổng quát



Hình 1-6.

Ta xét một ví dụ về mạch điện gồm ba phần tử: điện trở R , điện cảm L và tụ điện C .

Điện áp đặt vào mạch là u_1 . Phương trình mô tả mạch ở trạng thái động (dynamic):

$$u_1 = u_R + u_L + u_C$$

Hoặc
$$u_1 = iR + L \frac{di}{dt} + u_2,$$

trong đó,
$$u_2 = u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Trạng thái của mạch được quyết định bởi điện áp ra u_2 và dòng điện i . Ta gọi u_2 và i là các biến trạng thái. Ta viết lại hệ phương trình nếu đặt:

$$u_2 = x_1 \quad \text{là biến trạng thái thứ nhất}$$

$$i = x_2 \quad \text{là biến trạng thái thứ hai.}$$

(1-51)

$$i = C \cdot \frac{du_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{C} x_2 \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} u_2 + \frac{1}{L} u_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2' &= -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u_1 \end{aligned}$$

Dạng chính tắc hệ trên được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + \frac{1}{C} x_2 + 0 \cdot u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u_1 \end{aligned} \quad (1-52)$$

Hệ (1-52) được viết dạng vectơ ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot u_1 \quad (1-53)$$

Ký hiệu $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$

Khi đó hệ (1-53) viết gọn hơn:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot u \quad (1-54)$$

Phương trình (1-54) được gọi là *phương trình trạng thái*.

Không gian hai chiều gồm trạng thái dòng điện $i = x_2$ và điện áp trên tụ C là $u_2 = x_1$ được gọi là *không gian trạng thái*.

Vì giữa x_1 và x_2 có mối liên hệ: $x_2 = C \cdot x_1$ và không gian có hai tọa độ x_1, x_2 cũng là x_1 và $\dot{x}_1$ (biến x_1 và tốc độ biến thiên của x_1 là $\dot{x}_1$) được gọi là *không gian pha*.

Khái niệm về trạng thái và pha không nhất thiết phải trùng nhau.

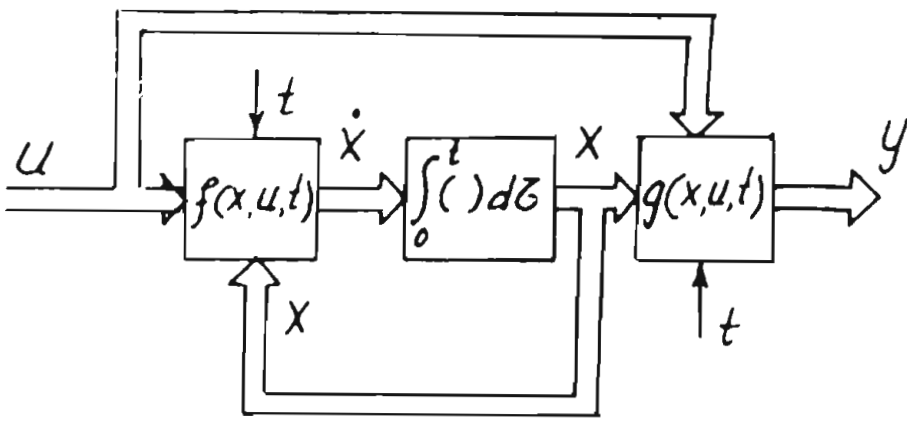
Dạng tổng quát của phương trình trạng thái và phương trình ra (các hàm f và g là phi tuyến bất kỳ)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases}$$

(1-55)

(1-56)

Sơ đồ khối tương ứng với hệ (1-55), (1-56) vẽ trên hình 1-7, trong đó $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ $\mathbf{f}$ là các vectơ chiều n ; vectơ $\mathbf{u}$: vectơ r chiều y , $\mathbf{g}$: vectơ m chiều.



Hình 1-7.

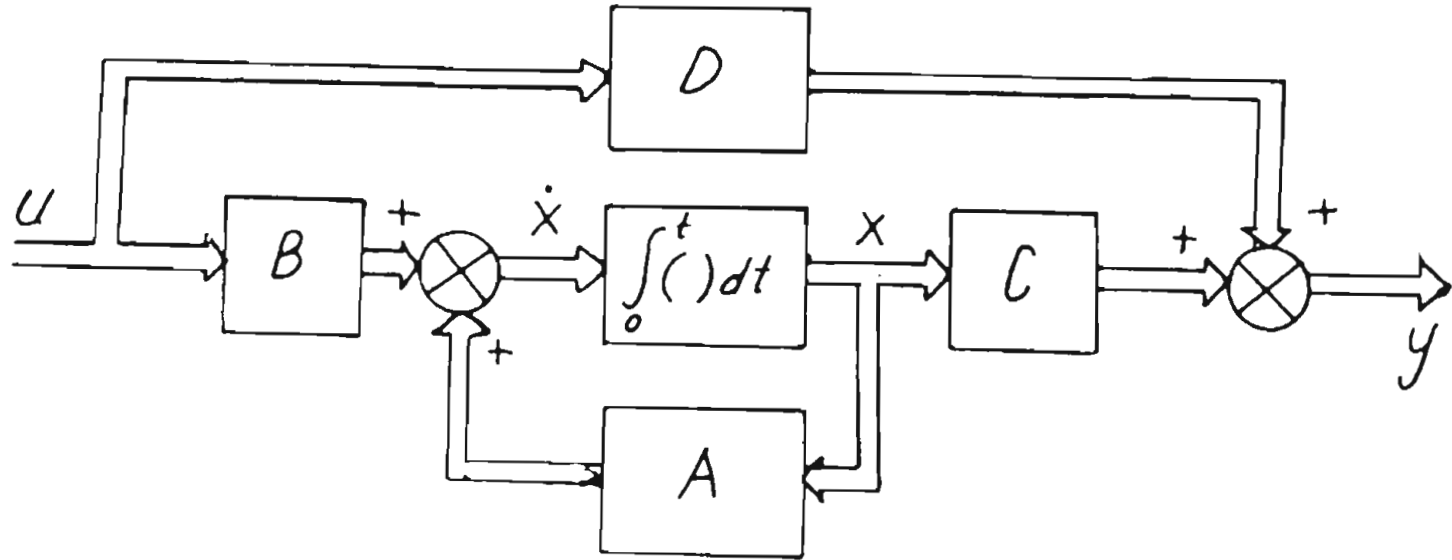
Trong trường hợp hệ thống tuyến tính thì hệ (1-55), (1-56) viết dạng ma trận (với các ma trận hệ số thay đổi theo thời gian):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t).\mathbf{X} + \mathbf{B}(t).\mathbf{u}$$

(1-57)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t).\mathbf{X} + \mathbf{D}(t).\mathbf{u}$$

(1-58)



Hình 1-8

Khi hệ thống tuyến tính là dừng, tức các ma trận hệ số A, B, C, D không thay đổi theo thời gian thì ta có hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-59)$$

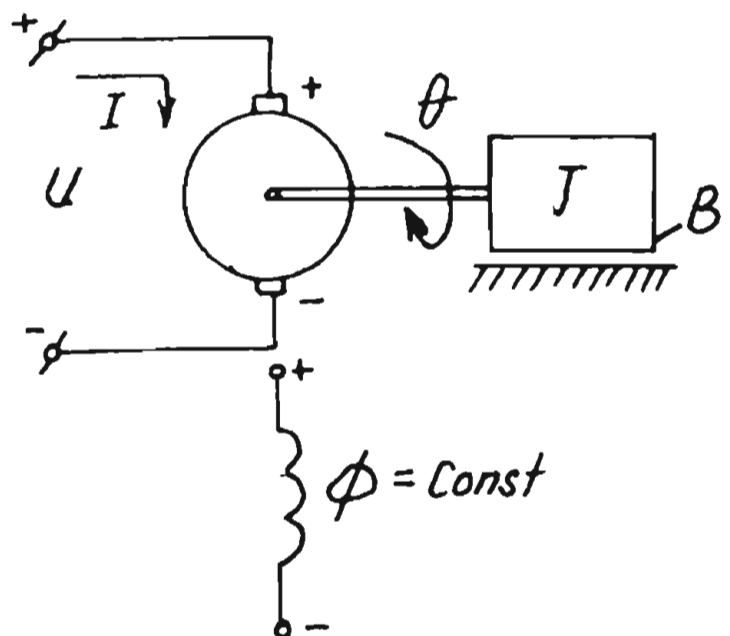
$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-60)$$

Sơ đồ cấu trúc ứng với (1-59), (1-60) vẽ trên hình 1-8, trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nr} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1-5. Viết hệ phương trình trạng thái động cơ điện một chiều với tín hiệu vào là điện áp đặt vào phần ứng, tín hiệu ra là góc quay θ và tốc độ góc $\dot{\theta}$ trên trục động cơ. Kích từ cho động cơ là kích từ độc lập có từ thông $\Phi = \text{const}$. Với các hằng số: J là phụ tải quán tính; B: hệ số ma sát; R: điện trở phần ứng; L: điện cảm phần ứng; e_m : sức phản



Hình 1-9.

điện động của động cơ;

k_m : Hệ số tỷ lệ mômen

k_e : Hệ số tỷ lệ với sức phản điện động:

$$e_m = k_e \cdot \theta \text{ với } k_e = \text{const.}$$

Sơ đồ vẽ ở hình 1-9.

Phụ tải có quán tính J được động cơ kéo trên bề mặt có hệ số ma sát B .

Phương trình cân bằng mômen điện áp phản ứng:

$$u = I.R + L \frac{di}{dt} + e_m \quad (1-61)$$

$$e_m = k_e \cdot \theta$$

Phương trình cân bằng mômen (Định luật 2 của Newton):

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -B \frac{d\theta}{dt} + k_m \cdot i \quad (1-62)$$

Hoặc viết cách khác:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{B}{J} \frac{d\theta}{dt} + \frac{k_m}{J} i \quad (1-63)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{k_e}{L} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{L} u. \quad (1-64)$$

Ký hiệu: $a_1 = -B/J$; $a_2 = k_m/J$; $a_3 = -k_e/L$;
 $a_4 = -R/L$; $C = 1/L$.

Đặt các biến trạng thái:

$x_1 = \theta$ góc quay trên trục động cơ ;

$x_2 = \dot{\theta}$ tốc độ góc của trục động cơ ;

$x_3 = i$ dòng điện đi qua phần ứng động cơ

Hệ (1-63) viết theo biến trạng thái:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_2 + a_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_2 + a_4 x_3 + C.u(t).\end{aligned}\tag{1-65}$$

Giả thiết tham số đo được ở đầu ra động cơ là dòng điện phản ứng và góc quay θ trên trục động cơ thì ta có thể viết phương trình ra:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\tag{1-66}$$

Phương trình trạng thái (1-59) có dạng:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix} .u(t)\tag{1-67}$$

Hay:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}.\mathbf{X} + \mathbf{B}.u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{X} \end{cases}$$

với $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cần lưu ý, việc chọn biến trạng thái không phải chỉ theo một cách duy nhất. Chẳng hạn từ hệ phương trình (1-63), (1-64) ta có thể viết thành một phương trình sau:

$$L \frac{d}{dt} \left(-\frac{J}{k_m} \ddot{\theta} + \frac{B}{k_m} \dot{\theta} \right) + R \left(-\frac{J}{k_m} \ddot{\theta} + \frac{B}{k_m} \dot{\theta} \right) + k_e \dot{\theta} = u.$$

$$\text{Hoặc} \quad \frac{LJ}{k_m} \ddot{\theta} + \frac{LB + RJ}{k_m} \dot{\theta} + \frac{RB + k_m \cdot k_e}{k_m} \theta = u.$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{LB + RJ}{LJ} \ddot{\theta} + \frac{RB + k_m \cdot k_e}{LJ} \dot{\theta} + \frac{k_m}{LJ} u \quad (1-68)$$

Đặt các hệ số:

$$a_{11} = - (LB + RJ)/(LJ);$$

$$a_{12} = - (RB + k_m \cdot k_e) / (LJ) ;$$

$$C = k_m/(LJ) ;$$

Chọn các biến trạng thái:

$$\begin{cases} x_1 = \theta : & \text{góc quay} \\ x_2 = \dot{\theta} : & \text{tốc độ góc} \\ x_3 = \ddot{\theta} : & \text{gia tốc (hay thành phần tỷ lệ với mômen)} \end{cases}$$

Lúc đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{12}x_2 + a_{11}x_3 + C.u(t) \end{cases}$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix} u(t) \quad (1-69)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Hay

$$\begin{cases} \dot{x} = AX + B.u \\ y = CX \end{cases} \quad (1-69)$$

So sánh hệ (1-66) và (1-67) và hệ(1-69)ta thấy các ma trận A và C khác hẳn nhau vì do cách chọn biến trạng thái khác nhau

1-4.2. Phương trình trạng thái biểu diễn bằng sơ đồ cấu trúc theo dạng toán tử Laplace

Với mạch điện R-L-C (Hình 1-6) ta đã có phương trình (1-52)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L} \cdot x_1 - \frac{R}{L} \cdot x_2 + \frac{u_1}{L} \end{cases}$$

Qua phép đổi Laplace ta viết lại hệ này như sau:

$$\begin{cases} p x_1(p) = \frac{1}{C} \cdot x_2(p) \\ p x_2(p) = -\frac{1}{L} \cdot x_1(p) - \frac{R}{L} \cdot x_2(p) + \frac{u_1(p)}{L} \end{cases} \quad (1-70)$$

Hay:

$$\begin{cases} x_1(p) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} x_2(p) \\ x_2(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{u_1(p)}{L} - \frac{1}{L} x_1(p) - \frac{R}{L} x_2(p) \right] \end{cases} \quad (1-71)$$

Trên hình 1-10 ta vẽ sơ đồ phía phải ứng với phương trình (1-70) và sơ đồ phía trái ứng với phương trình (1-71). Các tín hiệu $x_1(p)$ và $x_2(p)$ ở cả hai phía sơ đồ như nhau, do đó ta nối bằng đường đứt nét sẽ tạo thành một sơ đồ cấu trúc mô tả cho cả hệ phương trình (1-70), (1-71).

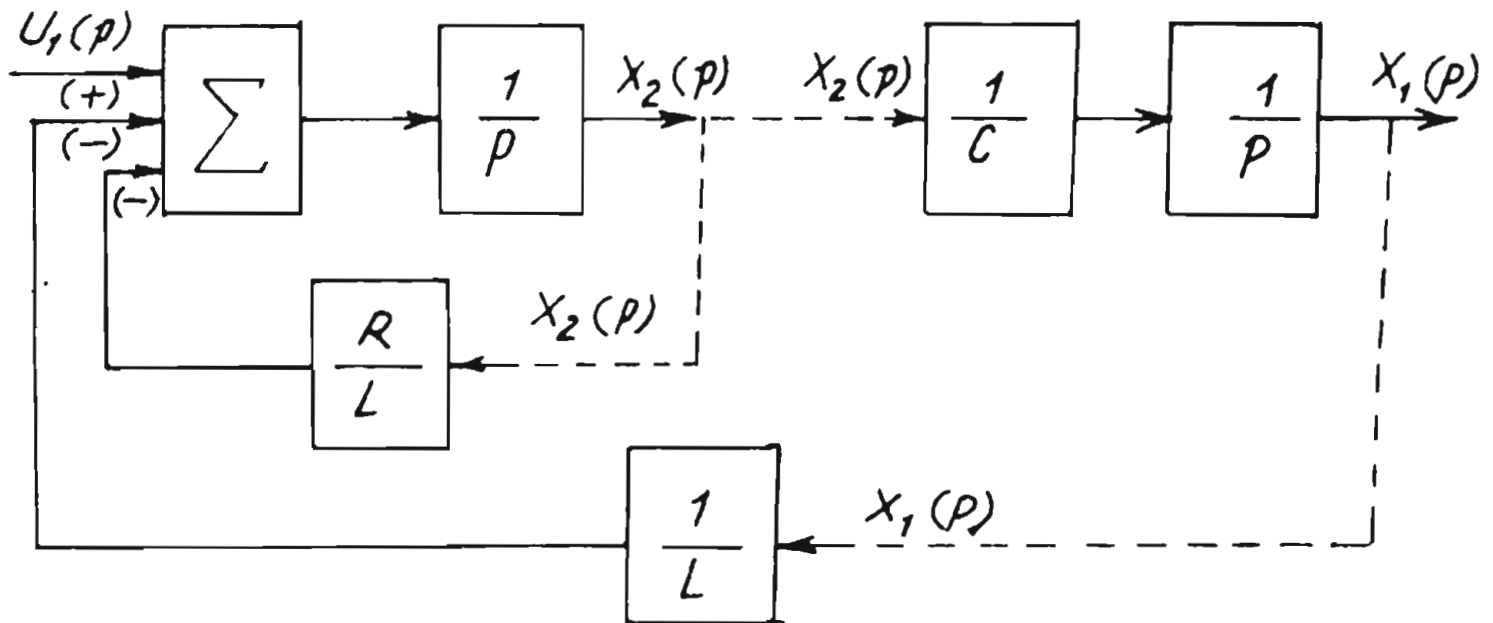
Cách khác, ta thế $x_2(p) = pC \cdot x_1(p)$ từ (1-70) vào vế trái phương trình (1-71) và ta có phương trình dạng sau:

$$pC x_1(p) = \frac{1}{p} \left(\frac{u_1(p)}{L} - \frac{1}{L} x_1(p) - \frac{R}{L} x_2(p) \right)$$

hay là:

$$x_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{u_1(p)}{L} - \frac{1}{L} x_1(p) - \frac{R}{L} x_2(p) \right) \quad (1-72)$$

Từ phương trình (1-72) ta có thể xây dựng sơ đồ cấu trúc bằng 3 khâu nối tiếp nhau $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{C}$; $\frac{1}{p}$ và nối tiếp với khâu cộng tín hiệu gồm 3 thành phần $u_1(p)$; $-1/L x_1(p)$ và $-R/L x_2(p)$. Cuối cùng ta cũng có sơ đồ như đã vẽ trên hình 1-10.



Hình 1-10.

Từ phương trình (1-72) ta biến đổi thành:

$$x_1(p) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p^2} u_1(p) - \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot x_1(p) - \frac{R}{LC} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot C \cdot x_1(p).$$

Hoặc:

$$(T_1 \cdot T_2 p^2 + T_2 p + 1) x_1(p) = k \cdot u_1(p).$$

trong đó đặt: $T_1 = \frac{L}{R}$; $T_2 = RC$; $k = L$.

Đặt tỷ số;

$$\frac{x_1(p)}{u_1(p)} = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1} = W(p). \quad (1-73)$$

$W(p)$ được gọi là *hàm truyền đạt* của mạch

Vậy ta có định nghĩa *Hàm truyền đạt của hệ thống là tỷ số của tín hiệu ra với tín hiệu vào của hệ thống đó biểu diễn theo biến đổi Laplace với điều kiện đầu triệt tiêu.*

Qua biểu thức (1-73), hàm truyền đạt của hệ thống là một phân thức gồm tử số, trong trường hợp tổng quát là một đa thức bậc m của biến toán tử p , còn mẫu số là một đa thức bậc n của p . Trong thực tế thông thường bậc $m \leq n$.

Hàm truyền đạt có thể có nhiều dạng, nhưng tổng quát ta viết được:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (1-74)$$

Trong biểu thức (1-74), nếu tính được các nghiệm của đa thức $B(p)$ ở tử số, ta gọi các nghiệm đó là *điểm không (zero)*, còn các nghiệm của đa thức $A(p)$ ở mẫu số ta gọi là các *điểm cực (poles)*.

1. Khai triển thành các thừa số đơn giản

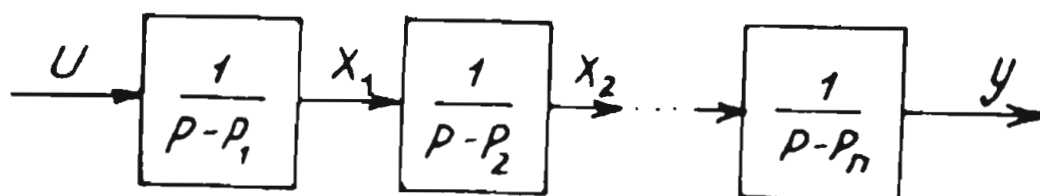
Khi $W(p)$ có dạng tích số các phân thức bậc nhất p ở mẫu số:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p - p_i} = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad (1-75)$$

Sơ đồ trạng thái biểu diễn hàm truyền đạt (1-75) vẽ trên hình 1-11, tương ứng với phương trình trạng thái sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + x_{n-1} \end{cases} \quad \text{với} \quad A = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & p_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = Ax + B.u.$$



Hình 1-11.

2. Khai triển thành tổng các phân thức đơn giản

Hàm truyền đạt hệ thống có dạng:

$$W(p) = \frac{1}{A(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p - p_i} = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad (1-76)$$

Hay

$$\sum_{i=1}^n \left(c_i \cdot \frac{u(p)}{p - p_i} \right) = y(p).$$

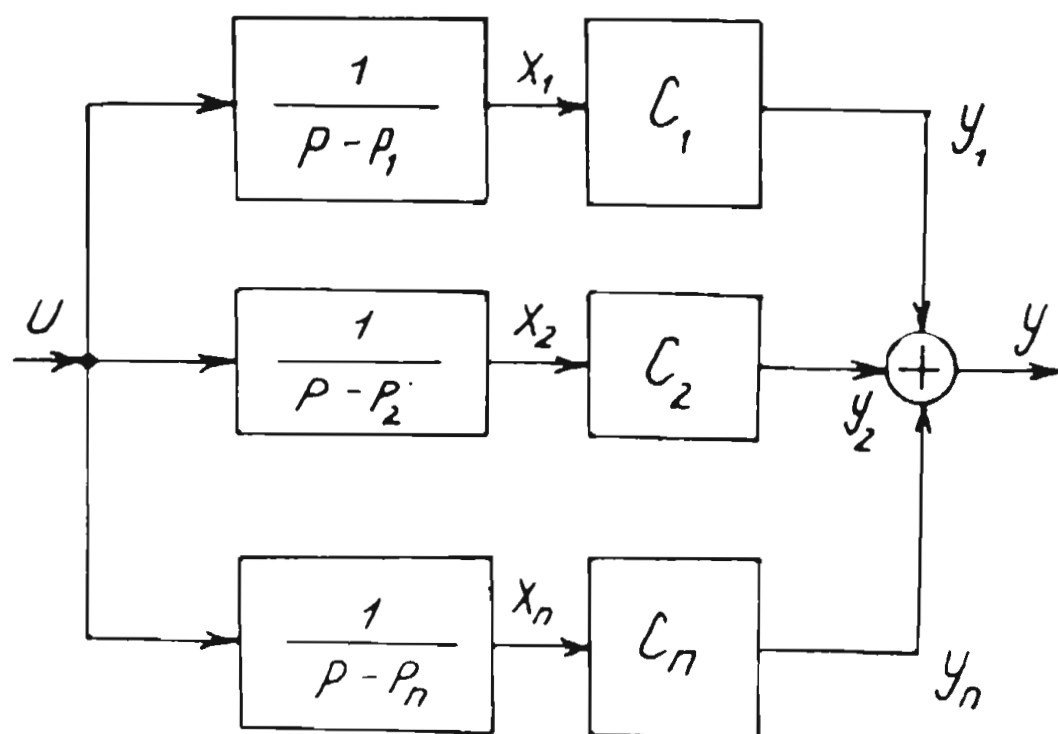
Đặt:

$$x_i(p) = \frac{1}{p - p_i} \cdot u(p) \quad (1-77)$$

$$y(p) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot x_i(p) \quad (1-78)$$

Hàm truyền của hệ mô tả theo biểu thức (1-77) vẽ trên hình 1-12. Trong đó các biến trạng thái $x_1, x_2, \dots, x_n$ còn các biến ra là $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Từ (1-77) ta viết dạng phương trình gốc $x_i(t)$ và $u_i(t)$:



Hình 1-12

$$pX_1(p) - p_1X_1(p) = u(p)$$

$$\dot{x}_1(t) - p_1x_1(t) = u(t).$$

Hay: $\dot{x}_1(t) = p_1x_1(t) + u(t)$ (1-79)

Dạng vô hướng:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = p_1x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = p_2x_2(t) + u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = p_nx_n(t) + u(t). \end{cases} \quad (1-80)$$

Từ (1-80) ta viết ra các ma trận A và B còn từ phương trình (1-78) đổi về dạng gốc $y_1(t)$ và $x_1(t)$ có

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t) \quad (1-81)$$

Ta xác định được ma trận ra C:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ c_n \end{bmatrix} \quad (1-82)$$

Hệ phương trình trạng thái có dạng sau với A, B, C từ (1-82):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad (1-83)$$

Ví dụ 1-6. Cho hệ thống mô tả bởi hàm truyền đạt:

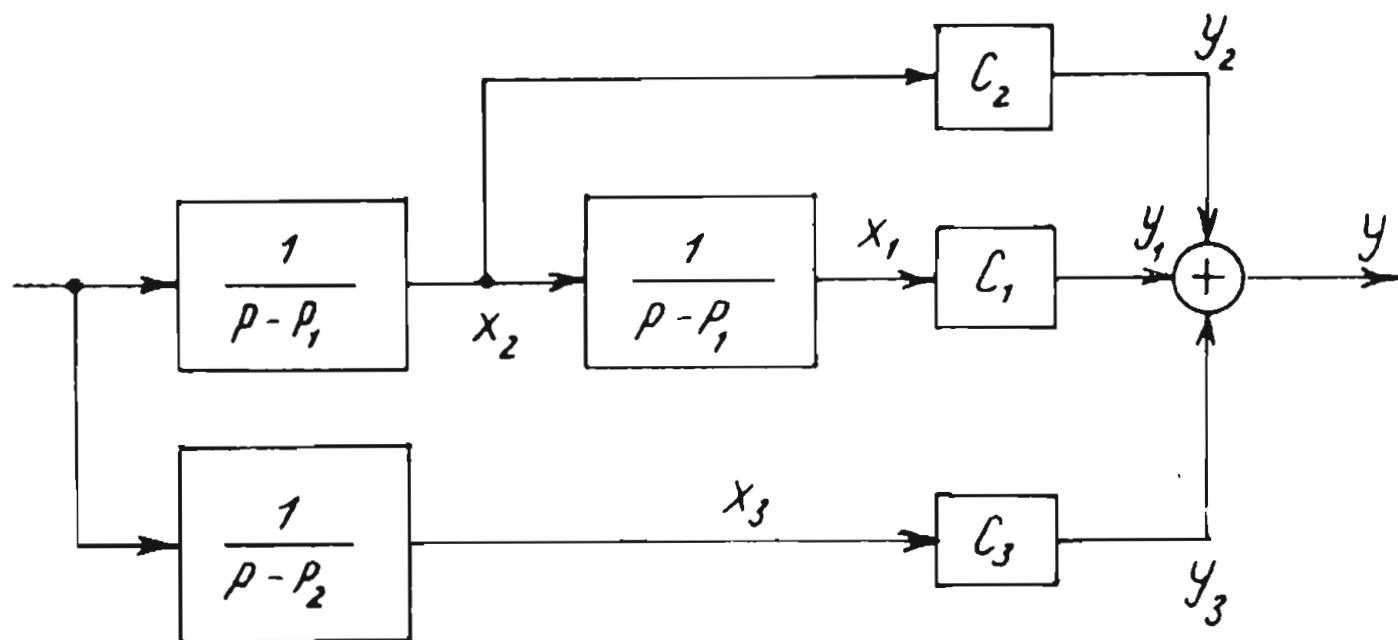
$$W(p) = \frac{1}{A(p)} = \frac{1}{(p - p_1)^2(p - p_2)} = \frac{Y(p)}{u(p)}$$

Ta phân tích thành tổng:

$$W(p) = \frac{C_1}{(p - p_1)^2} + \frac{C_2}{(p - p_1)} + \frac{C_3}{p - p_2} = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad (1-84)$$

trong đó: $C_1 = 1/(p_1 - p_2)$; $C_2 = -1/(p_1 - p_2)^2$; $C_3 = -C_2$.

Từ công thức (1-84), ta vẽ sơ đồ khối cho số hạng thứ nhất là mạch giữa trên hình 1-13. Số hạng thứ hai là khâu thứ nhất của mạch giữa và khâu hệ số C_2 ; số hạng thứ ba là mạch dưới.



Hình 1-13.

Bây giờ ta viết phương trình trạng thái từ biểu thức (1-84).

Biểu thức (1-84) được viết lại:

$$Y(p) = c_1 \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot U(p) + c_2 \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot U(p) + c_3 \cdot \frac{1}{p - p_2} \cdot U(p) \quad (1-85)$$

$$\text{Đặt: } X_2(p) = \frac{1}{p - p_1} \cdot U(p) \Rightarrow pX_2(p) = p_1X_2(p) + U(p).$$

$$\text{hay } \dot{x}_2(t) = p_1x_2(t) + u(t) \quad (1-85')$$

$$X_3(p) = \frac{1}{p - p_2} \cdot U(p) \Rightarrow pX_3(p) = p_2X_3(p) + U(p) \quad (1-86)$$

Hay $\dot{x}_3(t) = p_2 x_3(t) + u(t)$ (1-86')

Số hạng thứ nhất trong (1-85) là:

$$C_1 \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot U(p) = C_1 \cdot \frac{1}{p - p_1} \cdot X_2(p)$$

Đặt tiếp:

$$\frac{1}{p - p_1} \cdot X_2(p) = X_1(p) \Rightarrow$$

$$pX_1(p) = p_1 X_1(p) + X_2(p)$$

Hay: $\dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + x_2(t)$ (1-87)

Gộp ba phương trình (1-85'), (1-86') và (1-87) vào một hệ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = p_1 x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = p_2 x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (1-88)$$

Hay viết dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1-89)$$

Từ sơ đồ trên hình 1-13 ta có: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$

Hay $y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$ (1-90)

Phương trình ra $y = C'x$

với $C' = [C_1 \quad C_2 \quad C_3]$ là ma trận chuyển vị của C.

3. Sử dụng mô hình các tích phân cơ bản

Ví dụ 1-7. Hệ thống mô tả bởi hàm truyền đạt:

$$W(p) = \frac{k}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (1-91)$$

Chuyển (1-91) về phương trình vi phân cấp cao:

$$p^3 Y(p) + a_1 p^2 Y(p) + a_2 p Y(p) + a_3 Y(p) = k.u(p) \quad (1-92)$$

$$\ddot{y} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = k.u$$

Đặt $x_1 = y$; $x_2 = \dot{x}_1$; $x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$ thì:

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_3 \quad (1-93)$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + k u .$$

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + k u . \end{cases} \quad (1-94)$$

Hoặc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} . u \quad (1-95)$$

Sơ đồ cấu trúc tương ứng được vẽ trên hình 1-14 theo phương trình (1-93).

Hàm truyền (1-91), hệ số của p^3 luôn bằng 1 ta có thể xây dựng sơ đồ cấu trúc như trên hình 1-15 bằng cách nối tiếp 3 khâu tích phân. bao bọc mỗi một khâu tích phân từ phải qua trái là các hệ số a_1, a_2, a_3 theo bậc của p giảm dần.

Từ sơ đồ ta có:

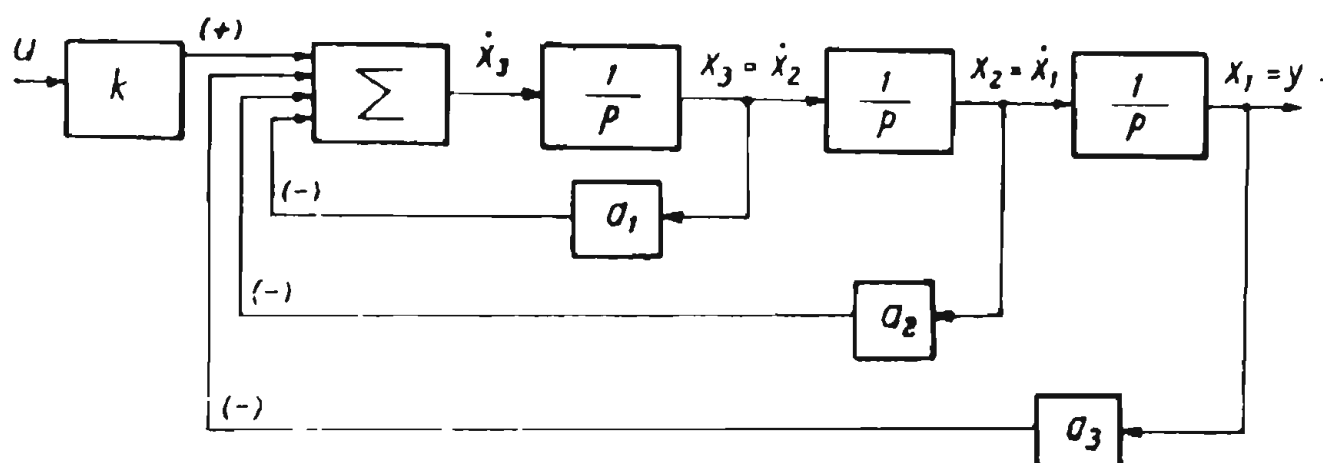
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - a_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 - a_2 x_1 \\ \dot{x}_3 = k.u - a_3 x_1 . \end{cases} \quad (1-96)$$

Phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = A.x + B.u$$

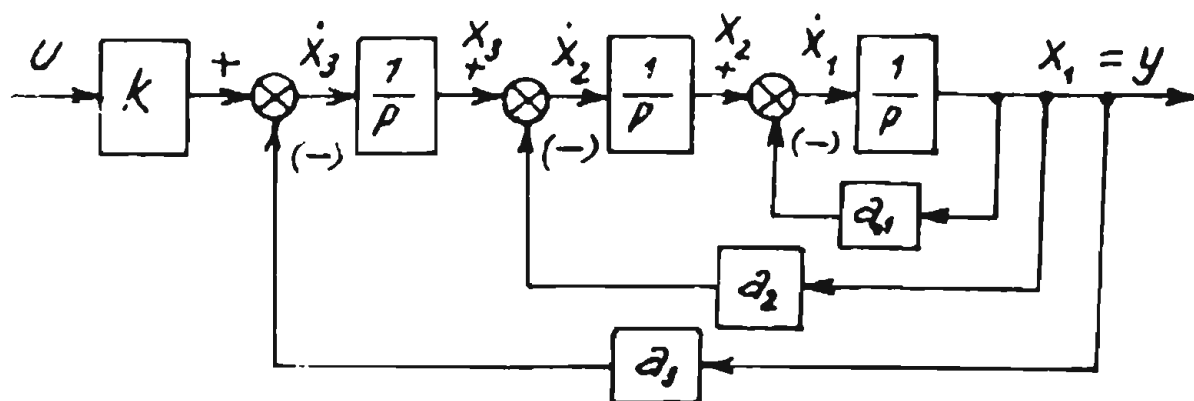
Trong đó các ma trận A, B theo (1-96) là:

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{vmatrix} ; \quad C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$



Hình 1-14.

Cách biểu diễn sơ đồ trạng thái như hình 1-14 và phương trình (1-95), là dạng chính tắc để xây dựng và được sử dụng tiện lợi nhất.



Hình 1-15.

4. Sơ đồ cấu trúc và phương trình trạng thái dạng tổng quát

Hệ thống có hàm truyền dạng tổng quát sau (ví dụ với bậc $m = 3$ và $n = 3$):

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (1-97)$$

Trong biểu thức (1-97), mẫu số $A(p)$ có hệ số của p^n bằng 1 còn tử số $B(p)$ có bậc $m \leq n$. Nếu $m = n$ thì sơ đồ cấu trúc mô

tả hàm truyền đạt (1-97) vẽ trên hình 1-16 bao gồm 3 khâu tích phân, các hệ số a_1, a_2, a_3 nằm ở các khối phản hồi âm phía dưới, còn các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3 nằm ở các khối bù, chỉ số của cả hai loại hệ số a_i và b_i đều tăng từ phải qua trái. Nếu tử số và mẫu số không bằng nhau ta sẽ vẽ đủ sơ đồ như $m = n$ nhưng hệ số nào bằng không thì khâu bù không có trong sơ đồ. Ví dụ $m = 2$ còn $n = 3$ thì hệ số $b_0 = 0$ và mạch bù từ tín hiệu u với x_1 là không có. Từ sơ đồ ta có thể viết phương trình trạng thái như sau (biết $y = x_1 + b_0 u$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_1 u - a_1 y = x_2 + b_1 u - a_1 x_1 - a_1 b_0 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + b_2 u - a_2 y = x_3 + b_2 u - a_2 x_1 - a_2 b_0 u \\ \dot{x}_3 = b_3 u - a_3 y = b_3 u - a_3 x_1 - a_3 b_0 u. \end{cases}$$

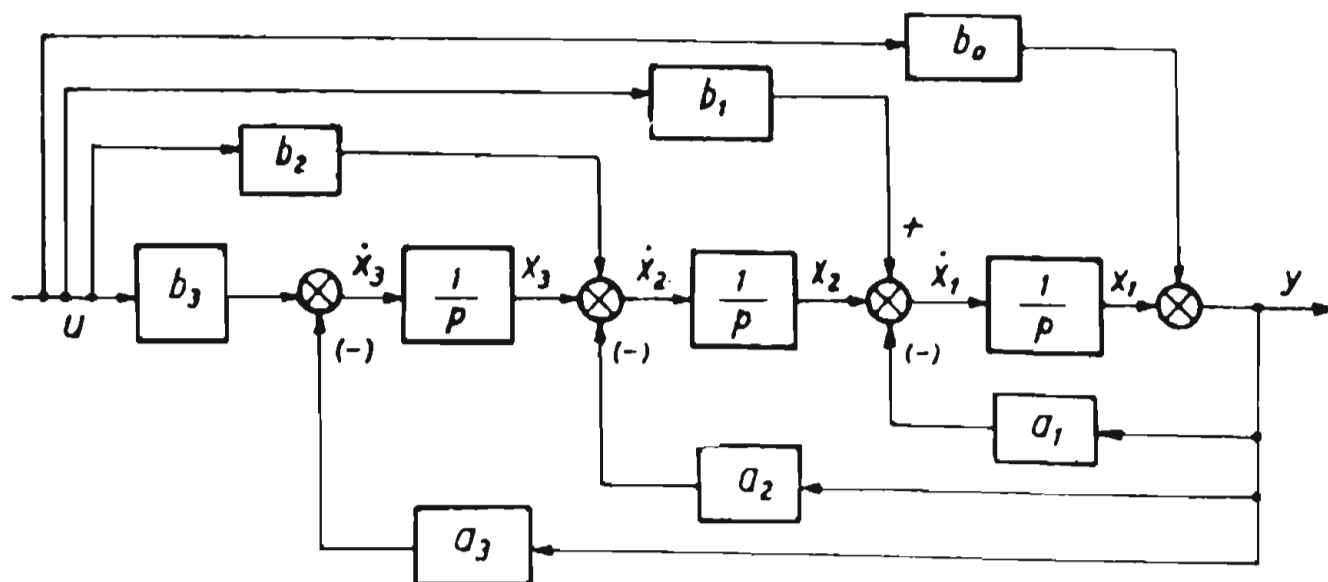
Hoặc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix} u \quad (1-98)$$

Phương trình ra $y = x_1 + b_0 u$.

Hoặc dạng vectơ:

$$y = C' \cdot x + b_0 \text{ với } C' = [1 \ 0 \ 0]$$

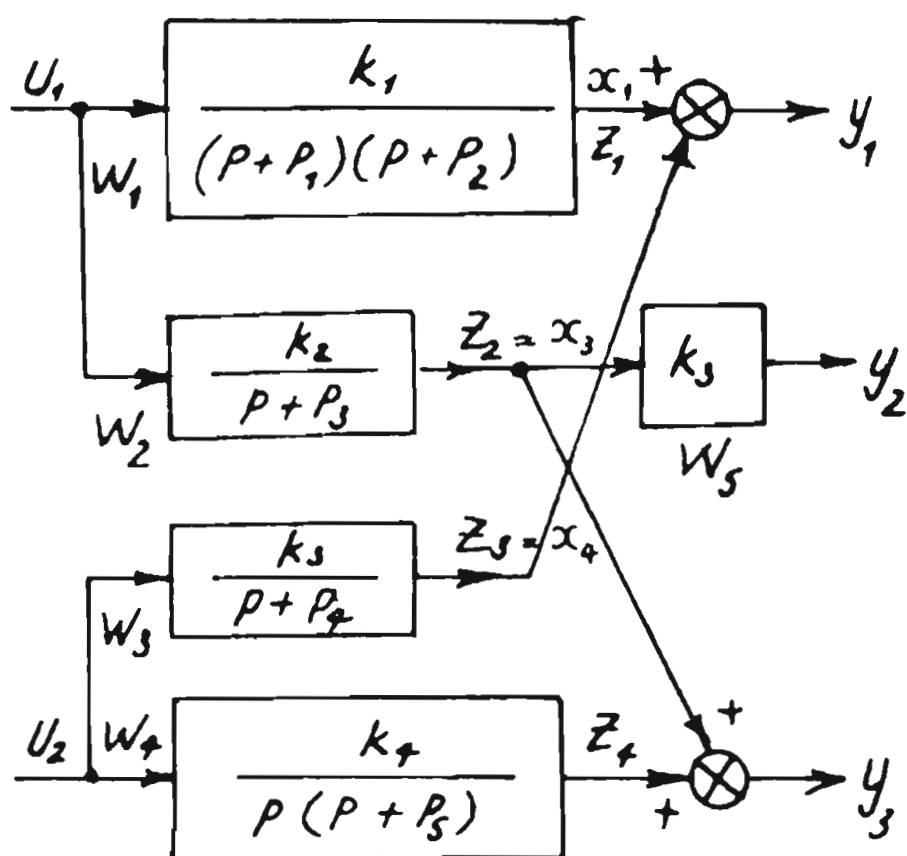


Hình 1-16.

5. Hệ thống có nhiều tín hiệu vào và tín hiệu ra

Ví dụ 1-8. Có hệ thống điều khiển với hai tín hiệu vào u_1, u_2 và 3 tín hiệu y_1, y_2, y_3 được vẽ trên hình 1-17, gồm 4 khối W_1, W_2, W_3, W_4 và một khối khuếch đại W_5 . Hai khối W_1 và W_2 có dạng

phân thức đơn giản (bậc một của biến p) nên theo biểu thức (1-77) (1-78) ta chọn biến trạng thái cũng là z_2 và z_3 (h.1-12). Còn hai khối W_1 và W_4 đều là khối bậc 2 gồm tích hai thành phần nên ta chọn biến trạng thái như biểu thức (1-75) (h.1-11). Hoặc chọn theo dạng khai triển:



Hình 1-17.

$$W_1(p) = \frac{k_1}{(p + p_1)(p + p_2)} = \frac{k_1}{p^2 + (p_1 + p_2) \cdot p + p_1 \cdot p_2} = \frac{z_1(p)}{u_1(p)}$$

Nếu $x_1 = z_1$; $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1$

$$\dot{x}_2 = -p_1 p_2 x_1 - (p_1 + p_2) x_2 + k_1 u_1 \quad (1-99)$$

– Khối thứ hai: $W_2(p) = \frac{k_2}{p + p_3} = \frac{z_2(p)}{u_1(p)}$

Biến trạng thái $x_3 = z_2$ thì:

$$\dot{x}_3 = -p_3 x_3 + k_2 u_1. \quad (1-100)$$

– Khối thứ ba: $W_3(p) = \frac{k_3}{p + p_4} = \frac{z_3(p)}{u_2(p)}$

Biến trạng thái: $x_4 = z_3$, ta có phương trình:

$$\dot{x}_4 = -p_4 x_4 + k_3 u_2 \quad (1-101)$$

- Khối thứ 4 có:

$$W_4(p) = \frac{k_4}{p(p + p_5)} \cdot \frac{z_4}{u_2}$$

gồm hai khối tích phân $\frac{1}{p}$ và $\frac{k_4}{p+p_5}$ nối tiếp nhau và ta chọn biến trạng thái $x_5 = z_4$

$$\dot{x}_6 = \dot{x}_5 = \dot{z}_4$$

$$\dot{x}_6 = -p_5 \cdot x_6 + k_4 \cdot u_2 \quad (1-102)$$

Phối hợp các phương trình (1-99), (1-100), (1-101) và (1-102) ta có

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -p_1 p_2 \cdot x_1 - (p_1 + p_2) \cdot x_2 + k_1 \cdot u_1 \\ \dot{x}_3 = -p_3 \cdot x_3 + k_2 \cdot u_1 \\ \dot{x}_4 = -p_4 \cdot x_4 + k_3 \cdot u_2 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -p_5 \cdot x_6 + k_4 \cdot u_2 \end{cases} \quad (1-103)$$

Phương trình trạng thái có dạng $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$, trong đó A là ma trận 6 x 6:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 p_2 & -(p_1 + p_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1-4.3. Sơ đồ cấu trúc và graph tín hiệu để biến đổi đơn giản hóa hệ thống phức tạp

Trong phần 1-4.2 ta thấy từ các phương trình hàm truyền đạt dạng tổng quát:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + 1} = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad (1-104)$$

ta xây dựng được sơ đồ cấu trúc trạng thái và viết được phương trình trạng thái.

Ngược lại có thể có những sơ đồ cấu trúc rất phức tạp gồm nhiều khối đơn giản nối với nhau theo các kiểu song song, nối tiếp, liên hệ ngược chiều, đan chéo nhau. Việc biến đổi để đơn giản hóa sơ đồ cấu trúc nhằm mục đích sau:

1. Từ sơ đồ đơn giản cuối cùng, ta sẽ tìm được hàm truyền đạt dạng (1-104) và dễ dàng nhận biết được phương trình đặc trưng của hệ thống là mẫu số của hàm truyền đạt đó bằng không.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + 1 = 0 \quad (1-105)$$

Phương trình đặc tính (1-105) về sau sẽ được sử dụng để khảo sát ổn định và phân tích hệ thống.

2. Từ một sơ đồ phức tạp nếu ta lập phương trình trạng thái từ đó, có khi không hợp lý và ta phải biến đổi cho thích hợp hoặc có khi ta phải tìm về dạng hàm truyền đạt (1-104) rồi xây dựng trở lại một cấu trúc biến trạng thái phù hợp.

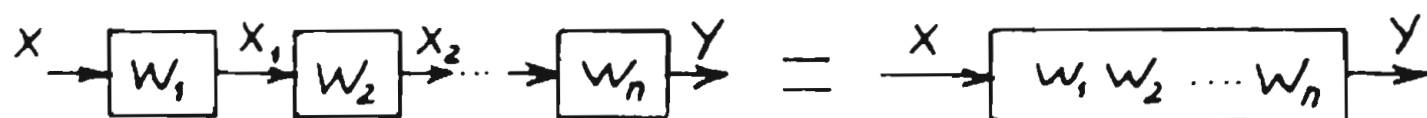
Đối với graph tín hiệu cũng là một cách biểu diễn sơ đồ khác đi của cấu trúc sơ đồ. Tuy nhiên cách biểu diễn theo graph sẽ đơn giản hơn và có một công thức (công thức Meson) để tìm truyền đạt của hệ thống tổng quát và nhanh chóng.

A. Các quy tắc biến đổi sơ đồ khối

1. Nối tiếp các khối

Có n khối nối tiếp nhau (hình 1-18) tương ứng với hàm truyền

đạt $W_1, W_2, \dots, W_n$ thì hàm truyền đạt tương đương sẽ bằng tích của n hàm truyền đạt thành phần.



Hình 1-18.

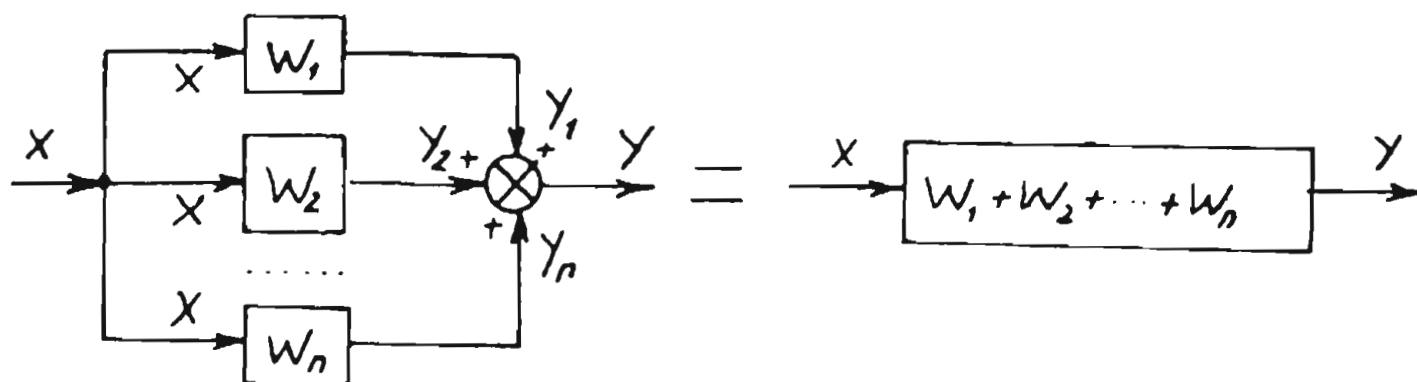
Thật vậy từ hình 1-18 ta có:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= X_1/X \\ W_2 &= X_2/X_1 \\ &\dots \\ W_n &= Y/X_{n-1} \end{aligned} \right\} W_t = \frac{Y}{X}$$

$$\text{Rõ ràng có ngay: } W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_n = \prod_{i=1}^n W_i = W_t \quad (1-106)$$

2. Nối song song các khối

Có n khối nối song song (hình 1-19) thì hàm truyền đạt tương đương sẽ bằng tổng của các hàm truyền đạt thành phần



Hình 1-19.

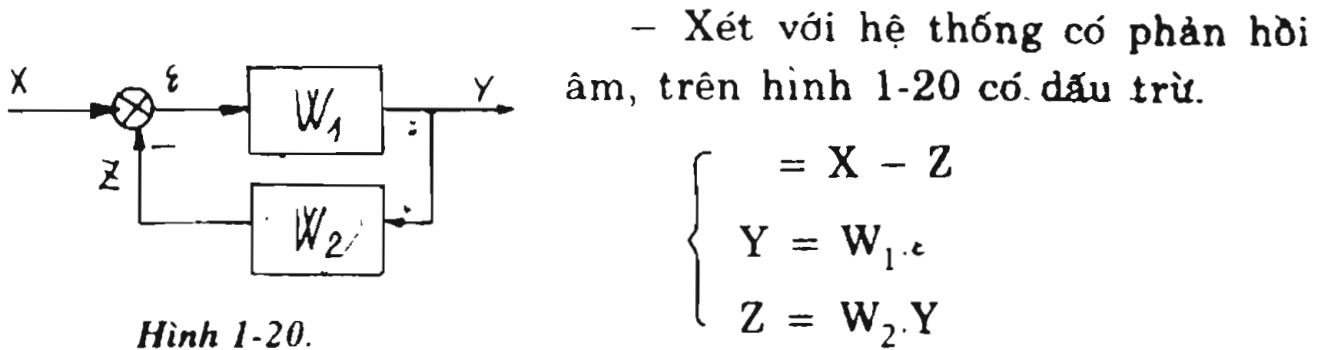
Thật vậy từ hình 1-19 ta có:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= W_1 X \\ + \quad Y_2 &= W_2 X \dots \\ \dots \quad Y_n &= W_n X \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Trong đó} \\ &Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \end{aligned}$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = (W_1 + W_2 + \dots + W_n) \cdot X$$

$$\text{Vậy: } W_t = Y/X = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \sum_{i=1}^n W_i \quad (1-107)$$

3. Hai khối nối ngược chiều (phản hồi)



Hình 1-20.

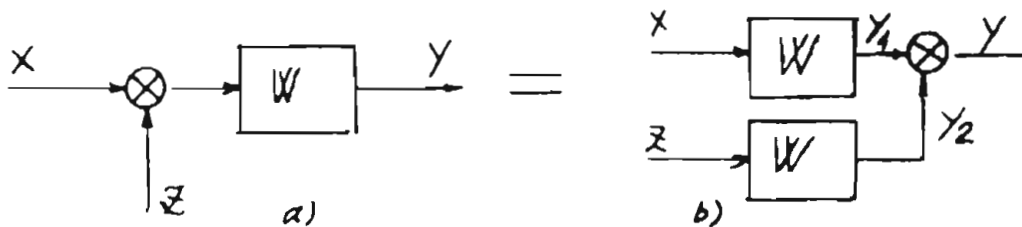
Giải ra có $W_t = \frac{Y}{X} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$ (1-108)

Hệ thống có phản hồi dương thì $e = X + Z$

$$W_t = \frac{Y}{X} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2} \quad (1-109)$$

4. Chuyển tín hiệu vào từ trước ra sau một khối

Điều kiện biến đổi cấu trúc là tín hiệu truyền đạt không biến đổi. Trên hình 1-21 phải có X, Z, và Y không đổi.



Hình 1-21.

Từ hình 1-21a ta có:

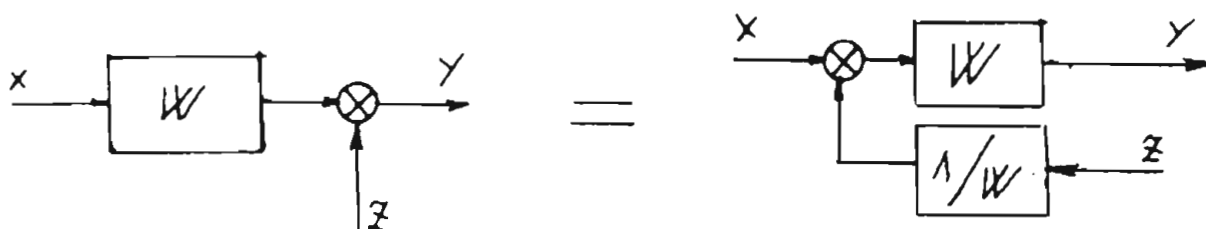
$$Y = (X + Z)W = WX + WZ$$

Từ hình 1-21b ta có:

$$Y = Y_1 + Y_2 = WX + WZ$$

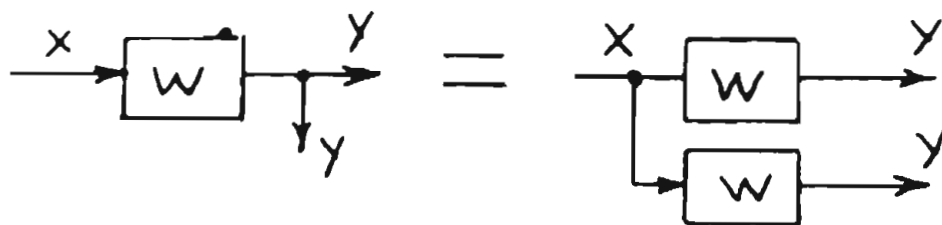
Rõ ràng tín hiệu z chuyển từ trước ra sau một khâu, tín hiệu đó phải đi qua một khâu mới, đúng bằng khâu đó.

5. Chuyển tín hiệu vào từ sau ra trước một khâu



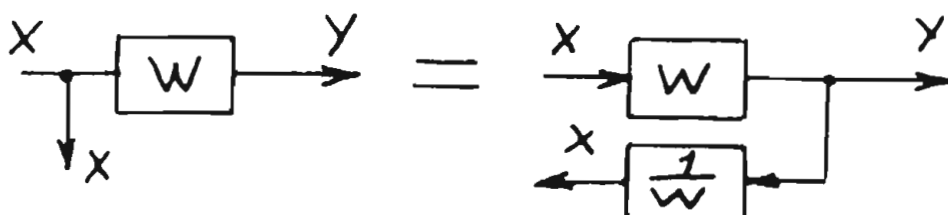
Hình 1-22.

6. Chuyển tín hiệu ra từ sau ra trước một khối



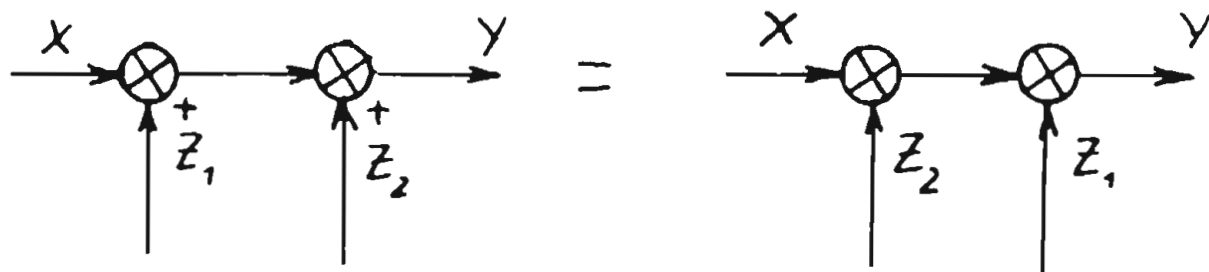
Hình 1-23.

7. Chuyển tín hiệu ra từ trước ra sau một khối



Hình 1-24.

8. Hoán vị hai tín hiệu vào (hoặc hai tín hiệu ra) với nhau thì sơ đồ không hề thay đổi (hình 1-25)



Hình 1-25.

B Ví dụ ứng dụng các quy tắc biến đổi sơ đồ khối

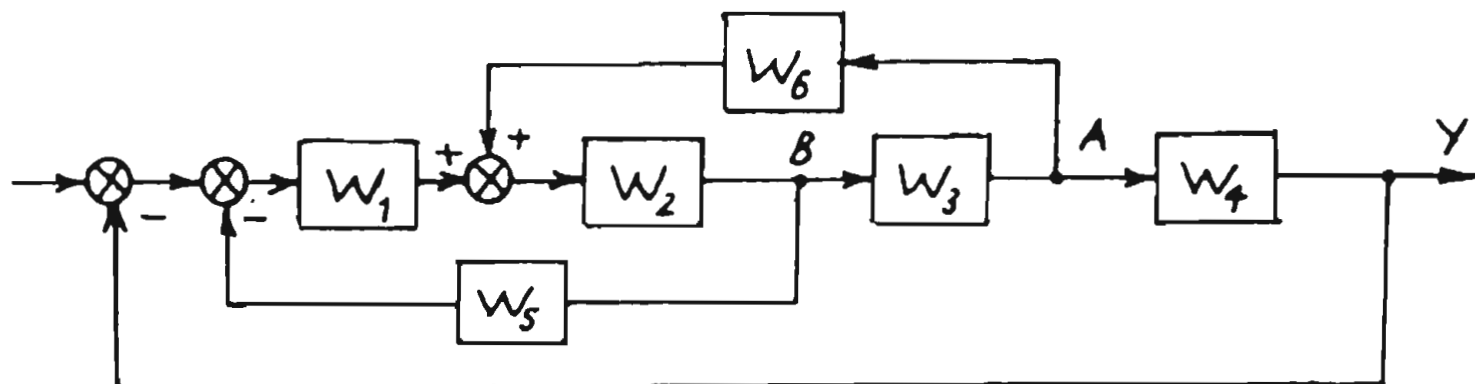
Ví dụ 1-19. Xét hệ thống có sơ đồ cấu trúc như trên hình 1-26:

Muốn đơn giản sơ đồ cấu trúc hình 1-26 ta phải dịch chuyển tín hiệu ra giữa hai khối $W_3 - W_4$ ra trước khối W_3 (hình 1-27)

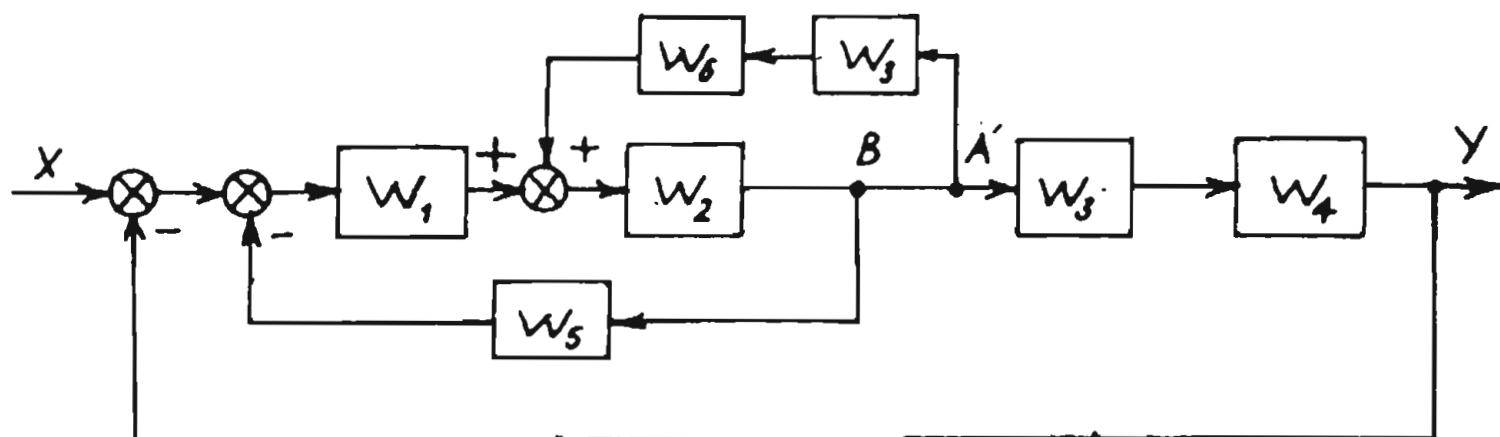
Hai tín hiệu ra từ A và B có thể hoán vị cho nhau, khi đó mạch vòng $W_2 - W_3 - W_6$ có thể tính được W_{t1} phản hồi dương):

$$W_{t1} = \frac{W_2}{1 - W_2 \cdot W_3 \cdot W_6}$$

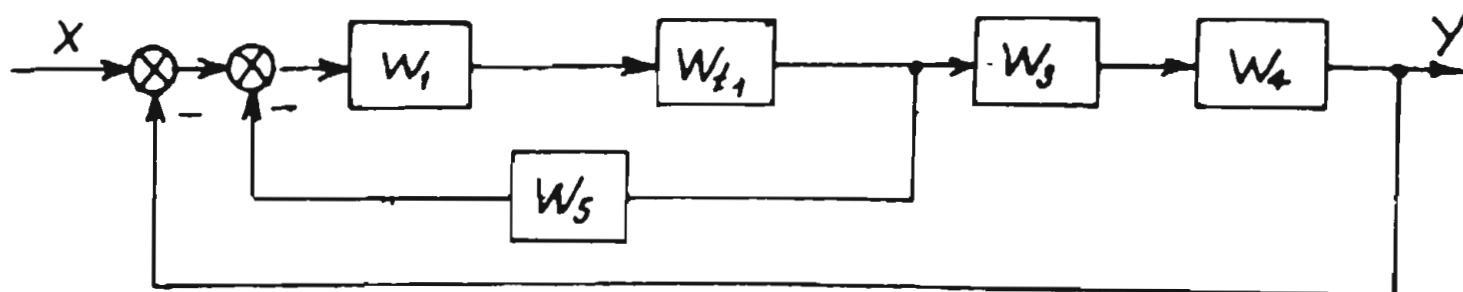
Do đó ta có sơ đồ cấu trúc mới trên hình 1-28.



Hình 1-26.



Hình 1-27.

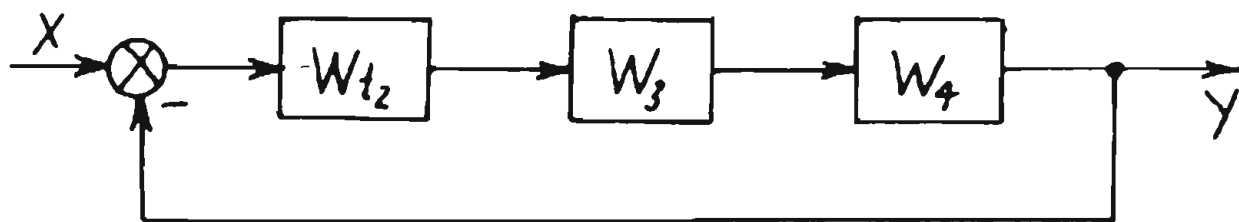


Hình 1-28.

Từ sơ đồ hình 1-28 ta tính được khối tương đương của mạch vòng $W_1 - W_{t1} - W_5$ (phản hồi âm) có hàm truyền đạt W_{t2} :

$$W_{t2} = \frac{W_1 \cdot W_{t1}}{1 + W_1 \cdot W_{t1} \cdot W_5}$$

Tiếp tục ta lại có sơ đồ cấu trúc mới trên hình 1-29.



Hình 1-29.

Cuối cùng ta có thể tính được hàm truyền đạt tương đương của cả hệ thống là:

$$W_{td} = \frac{W_{t2} \cdot W_3 \cdot W_4}{1 + W_{t2} \cdot W_3 \cdot W_4}$$

1-4.4. Graph tín hiệu để xác định hàm truyền đạt hệ thống điều khiển

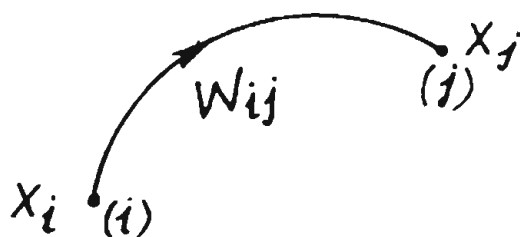
1. Các định nghĩa cơ bản.

- Graph là một đồ hình gồm các nhánh và các nút.
- Mỗi một nút của graph được biểu diễn bằng một điểm và ghi tên một đại lượng nào đó trong hệ thống điều khiển. Nút gốc là lượng vào, nút ngọn là lượng ra của một khâu nào đó.

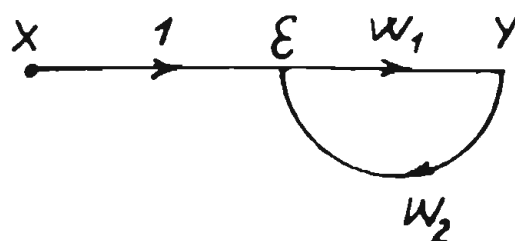
– Một nhánh nối nút gốc và nút ngọn có mũi tên, trên đó ghi giá trị hàm truyền đạt tương ứng với một khâu nào đó, ví dụ một nhánh có hai nút vẽ trên hình 1-30.

Hàm truyền đạt của một nhánh bằng tỷ số của giá trị nút ngọn và giá trị nút gốc: $W_{ij} = x_j/x_i$.

Tương tự như sơ đồ cấu trúc, sự liên kết của các nhánh riêng lẻ tạo thành một graph tín hiệu cho một hệ thống điều khiển. Theo sơ đồ cấu trúc



Hình 1-30.



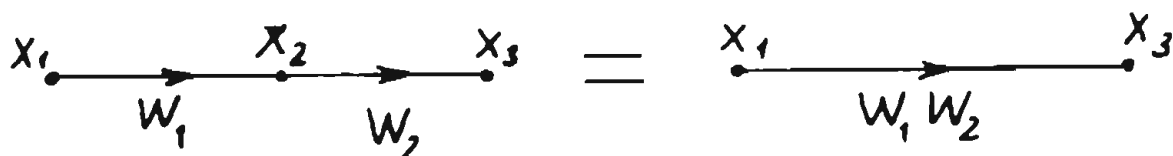
Hình 1-31.

hình 1-20 ta có graph vẽ trên hình 1-31.

Đây gọi là graph tín hiệu cơ bản.

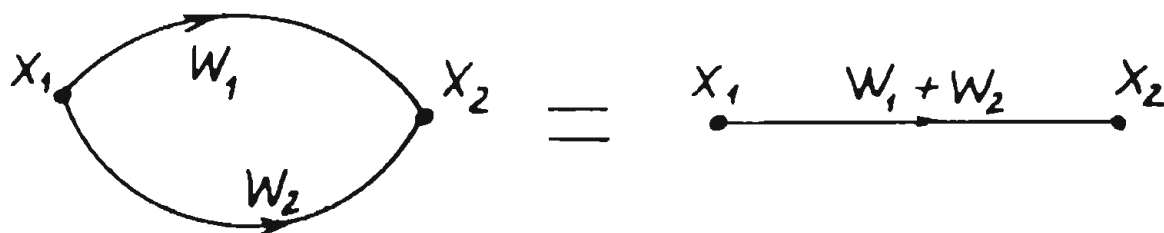
2. Quy tắc biến đổi của graph

– Các nhánh nối tiếp:



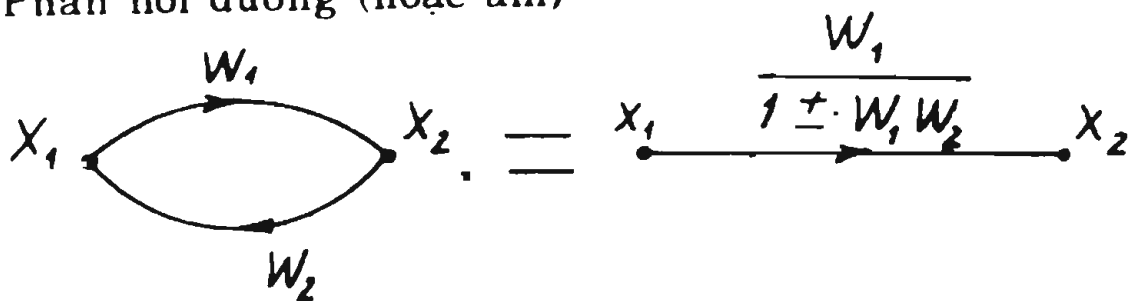
Hình 1-32.

– Các nhánh song song



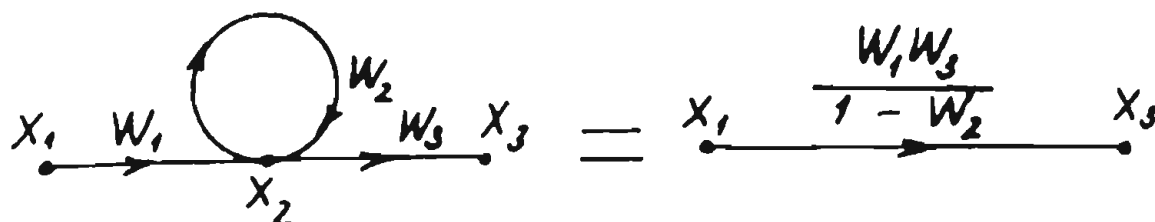
Hình 1-33.

– Phản hồi dương (hoặc âm)



Hình 1-34.

– Khử nhánh tạo vòng kín;



Hình 1-35.

3. Sự tương ứng giữa sơ đồ cấu trúc và graph tín hiệu của hệ thống điều khiển.

– Giả sử có graph vẽ trên hình 1-35a. Từ đó ta viết được phương trình

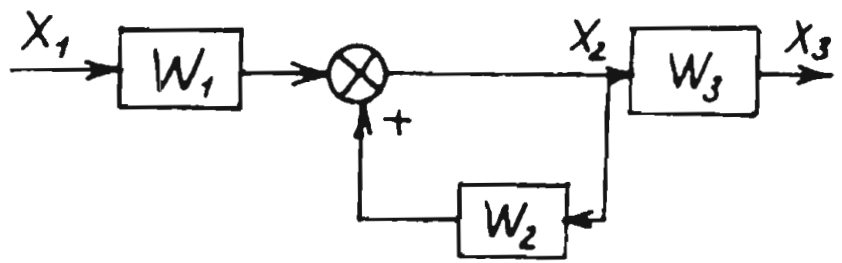
$$X_2 = W_1 X_1 + W_2 X_2$$

$$X_3 = W_3 X_2 \quad (1-110)$$

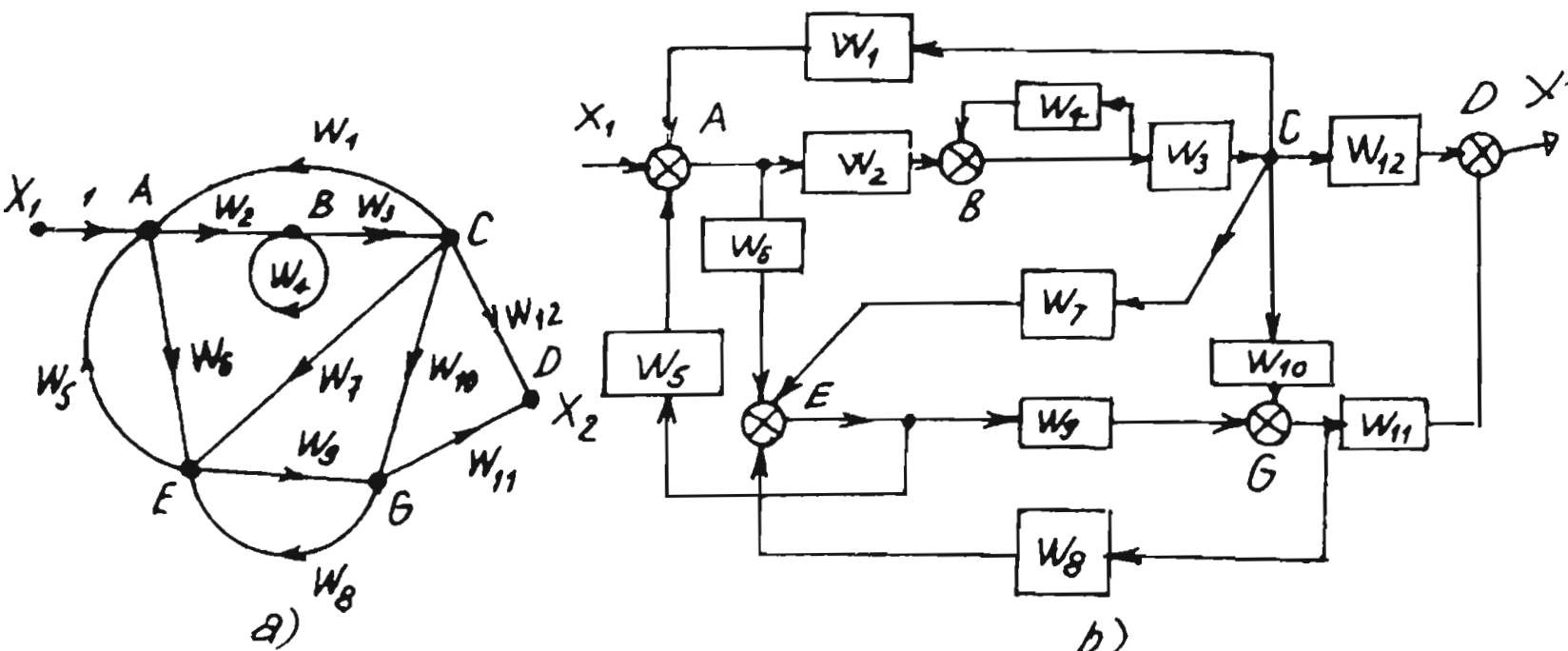
Hoặc biến đổi 1-35b sẽ có:

$$X_2 = X_1 W_1 \cdot \frac{1}{1 - W_2} \quad (1-111)$$

$$X_3 = W_3 X_2.$$



Hình 1-36.



Hình 1-37.

Các phương trình này tương ứng với sơ đồ cấu trúc hình 1-36.

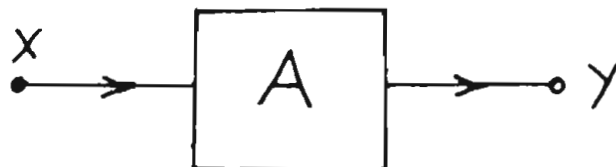
– Đối với graph phức tạp hơn vẽ trên hình 1-37a ta sẽ có sơ đồ cấu trúc tương ứng vẽ trên hình 1-37b

Nếu theo sơ đồ cấu trúc hình 1-37b, muốn tìm hàm truyền đạt

tương đương giữa lượng ra X_2 và lượng vào X_1 , ta phải biến đổi cấu trúc rất phức tạp, dễ nhầm lẫn. Nhưng nếu thông qua graph hình 1-34a bằng một phép tính tổng quát sẽ giới thiệu sau đây ta dễ dàng tìm được hàm truyền đạt tương đương

4. Công thức tổng quát Meson để tìm toán tử của graph tín hiệu:

Có một graph tín hiệu dạng tổng quát vẽ trên hình 1-38. Meson đã đề ra một công thức tổng quát để xác định toán tử (hay là hàm truyền đạt) của graph tín hiệu:



Hình 1-38.

$$W_{XY} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k(XY) \cdot \Delta_k \quad (1-112)$$

trong đó:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k + \dots$$

– $\sum L_i$: là tổng số tất cả các hàm truyền đạt của các vòng kín có trong graph (vòng kín là một đường khép kín bao gồm các nhánh liên tiếp có cùng một hướng mà tín hiệu đi qua một nút của một nhánh nào đó chỉ được một lần).

– $\sum L_i L_j$ là tổng số các tích hàm truyền đạt của hai vòng kín không dính vào nhau ở trong graph.

– $\sum L_i L_j L_k$ là tổng số các tích hàm truyền đạt của ba vòng kín không dính vào nhau ở trong graph.

– $P_k(XY)$ là hàm truyền đạt của đường dòng thứ k hướng từ X đến Y (đường dòng là một đường liên tục bao gồm các nhánh có cùng một hướng từ X đến Y mà khi tín hiệu truyền đạt qua một nút của nó từ gốc đến ngọn chỉ được một lần).

– Δ_k là định thức con của Graph suy ra từ Δ bằng cách bỏ đi các vòng kín. L_i có dính với đường dòng thứ k.

Ví dụ 1-10. Tìm hàm truyền đạt tương đương của graph vẽ trên hình 1-39.

– Tính hàm truyền đạt các đường dòng:

$$P_1 = a.b.c.1$$

$$P_2 = a.d.e.c.1$$

$$P_3 = a.d.g.h.1$$

– Các vòng kín có:

$$L_1 = d.g.h.n.r.p.l$$

$$L_2 = g.f$$

$$L_3 = d.e.c.n.r.p.l$$

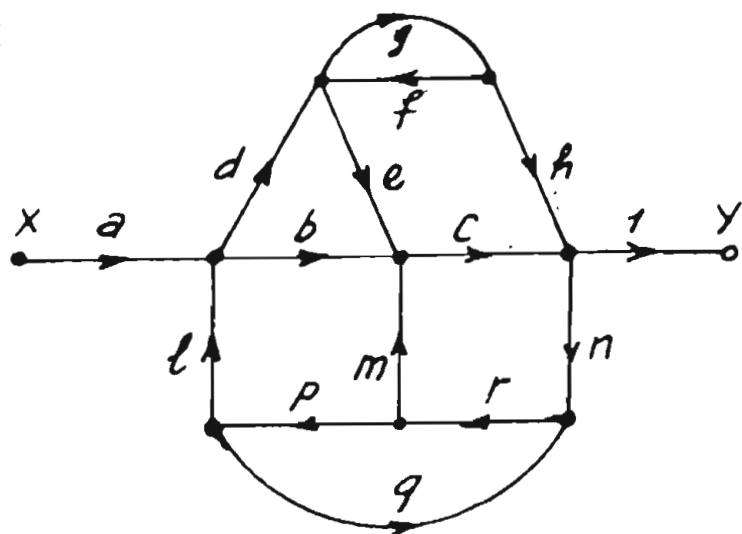
$$L_4 = b.c.n.r.p.l$$

$$L_5 = c.n.r.m$$

$$L_6 = q.r.p$$

$$\sum_{i,j} L_i L_j = L_2 L_4 + L_5 L_2 + L_2 L_6 ,$$

$$\sum_{i,j,k} L_i L_j L_k = 0 ,$$



Hình 1-39.

Khi đó:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,k} L_i L_j L_k$$

$$= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + L_2 L_4 + L_5 L_2 + L_2 L_6 + 0.$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_2 + L_6) + L_2 L_6 \text{ (vì } L_1, L_3, L_4, L_5 \text{ có đỉnh với } P_1),$$

$$\Delta_2 = 1 - L_6 \text{ (vì } L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \text{ có đỉnh với } P_2),$$

$$\Delta_3 = 1 - L_6 \text{ (vì } L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \text{ có đỉnh với } P_3).$$

Vậy

$$W_{XY} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} .$$

Chương 2

ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA CÁC KHÂU VÀ CỦA HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG KHẢO SÁT TRONG MIỀN TẦN SỐ

2-1. KHÁI NIỆM CHUNG

Ngoài phương pháp nghiên cứu hệ thống ĐKTD bằng giải tích, ta còn dùng đến phương pháp đồ thị hoặc đồ thị giải tích. Chẳng hạn, trong các chương về sau khi xét ổn định theo các tiêu chuẩn tần số Nyquist, Mikhailôv; trong việc tổng hợp hệ thống và đánh giá chất lượng v.v... đều dùng phương pháp đồ thị. Để thuận lợi cho việc sử dụng về sau, ở đây sẽ xét 2 vấn đề:

- Làm thế nào để xây dựng được đặc tính động học của *từng khâu trong hệ thống ĐKTD*?
- Cách xây dựng đặc tính động học (cụ thể là đặc tính tần số) của cả hệ thống ĐKTD như thế nào?

Ở chương 1, đã trình bày mô tả toán học của từng phần tử. Qua đó rút ta nhận xét: các thiết bị như khuếch đại tử, máy phát điện một chiều, động cơ điện không đồng bộ hai pha, v.v... đều có một mô tả toán học như nhau, đó là:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad (2-1)$$

Do đó nảy ra một vấn đề là có thể sắp xếp những phần tử nào có mô tả toán học chung nhau vào một loại, ta thường gọi là khâu động học. Như thế, khái niệm khâu động học ở đây được xét về phương diện mô hình toán học. Một khâu động học có thể đặc trưng bằng một phần tử vật lý nào đó như biểu thức (2-1). Cũng có khâu

chỉ phân loại theo tính chất toán học thuần túy mà không có một phần tử vật lý nào tương ứng cả, ví dụ khâu đạo hàm ($T_p + 1$) hay ($T_p - 1$). Khâu động học còn được gọi là thừa số động học. Trước khi giải quyết vấn đề chính, ta cần xét một số khái niệm và định nghĩa.

2-2. TÍN HIỆU TÁC ĐỘNG VÀO PHẢN ỨNG CỦA KHÂU (HAY HỆ THỐNG) TUYẾN TÍNH

2-2.1. Tín hiệu tác động vào của một khâu (hay hệ thống)

Đối với một khâu (hay hệ thống) thường có hai loại tín hiệu tác động vào: tín hiệu tiền định và tín hiệu ngẫu nhiên. Hệ thống có tín hiệu ngẫu nhiên tác động vào sẽ được xét ở phần sau.

Bất cứ một tín hiệu phức tạp nào cũng có thể phân tích thành các tín hiệu đơn giản. Sau đây ta sẽ nêu một số tín hiệu đơn giản điển hình

1) *Tín hiệu bậc thang đơn vị.*

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{với } t \leq 0 \\ 1 & \text{với } t > 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

à loại tín hiệu thường dùng trong các hệ thống điều khiển tự động.

2) *Tín hiệu xung đơn vị hàm $\delta(t)$*

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{với } t \neq 0 \\ \infty & \text{với } t = 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

Hàm $\delta(t)$ có tính chất:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = 1 \quad (2-4)$$

3) *Tín hiệu điều hòa:*

$$\sin(\omega t + \varphi) \text{ hay là: } e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2-5)$$

4) *Tín hiệu có dạng bất kỳ*: Mô tả bởi hàm $x(t)$ có thể biểu diễn theo tín hiệu $1(t)$ hoặc $\delta(t)$

– *Biểu diễn $x(t)$ qua $1(t)$* : Phân tích hàm $x(t)$ theo *tích phân Duyamen*

$$x(t) = x(\alpha).1(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} .1(t - \tau) d\tau . \quad (2-6)$$

khi $\alpha \rightarrow 0$

– *Biểu diễn $x(t)$ qua $\delta(t)$* :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t+\alpha} x(\tau).\delta(t - \tau)d\tau , \quad (2-7)$$

khi $\alpha \rightarrow 0$.

Thật vậy, theo tính chất (2-4) mà:

$$\delta(t - \tau) = 0 \text{ với } t = \tau.$$

Khi đó $x(t) = x(\tau)$. Như vậy thì hàm $x(\tau)$ ở trong tích phân (2-7) có thể thế bằng hàm $x(t)$ lấy tại giá tại $t = \tau$. lúc đó hàm $x(t)$ được đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t+\alpha} x(\tau).\delta(t - \tau).d\tau &= \int_{-\infty}^{t+\alpha} x(t).\delta(t - \tau)d\tau = \\ &= x(t) \int_{-\infty}^{t+\alpha} \delta(t - \tau).d\tau = x(t).1 = x(t). \end{aligned}$$

Nếu hàm $x(t)$ xác định và liên tục với mọi trị của t thì:

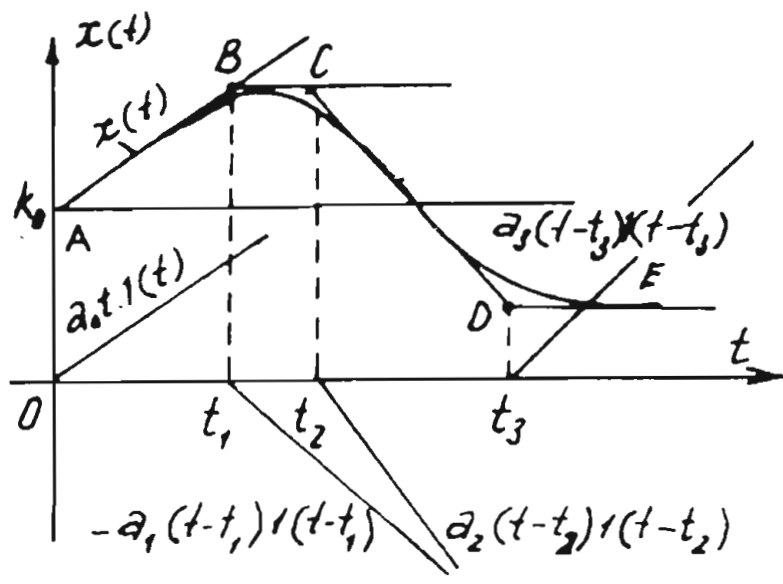
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).\delta(t - \tau).d\tau \quad (2-8)$$

– *Phương pháp biểu diễn gần đúng tín hiệu $x(t)$ qua $1(t)$*

$$x(t) = k_0 1(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t - t_i)(t - t_i) \quad (2-9)$$

Ví dụ 2-1. Phân tích hàm $x(t)$ cho bằng đồ thị trên hình 2-1 thành các hàm $1(t)$.

Đầu tiên ta tiệm cận hóa đường cong liên tục $x(t)$ thành các đoạn thẳng gãy khúc : ABCDE. Từ đó có thể viết được hàm mô tả cho đường thẳng gãy khúc đó:

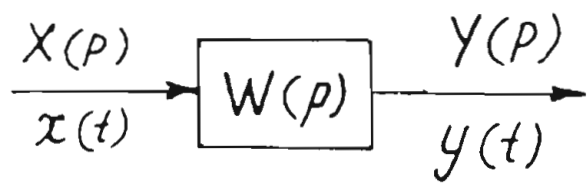


Hình 2-1.

$$x(t) = k_0 1(t) + a_0 t.1(t) - a_1(t - t_1).1(t - t_1) - a_2(t - t_2).1(t - t_2) + a_3(t - t_3).1(t - t_3).$$

2-2.2. Phản ứng của một khâu (hay hệ thống)

Một khâu (hoặc một hệ thống) thường được mô tả bằng một mô hình toán như trên hình 2-2. Nội dung trong mô hình đó được biểu diễn qua hàm truyền đạt $W(p)$. Thực chất xét phản ứng của một khâu khi có một tín hiệu tác động vào $x(t)$ chính là xét tác dụng biến đổi tín hiệu của khâu đó. Phản ứng của khâu sẽ thay đổi khi có các tín hiệu vào khác nhau hoặc cấu trúc và tham số của khâu thay đổi. Phản ứng của một khâu khi có tín hiệu vào xác định cũng chính là đặc tính quá độ hay đặc tính thời gian của khâu đó. Đối với các tín hiệu vào khác nhau, ta có các đặc tính thời gian khác nhau.



Hình 2-2.

1) *Hàm quá độ của một khâu:* là phản ứng của khâu đó khi tín hiệu tác động vào là một hàm bậc thang đơn vị $1(t)$. Ký hiệu hàm quá độ là $h(t)$.

Nếu $x(t) = 1(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ thì:

$$h(t) \rightarrow H(p) = Y(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} \quad (2-10)$$

2) Hàm trọng lượng (hay là hàm quá độ xung của một khâu là phản ứng của khâu đó khi tín hiệu tác động vào là hàm xung đơn vị $\delta(t)$ Ký hiệu hàm trọng lượng là $w(t)$

Nếu $x(t) = \delta(t) \rightarrow 1$ thì:

$$w(t) \rightarrow Y(p) = W(p) \cdot 1 = W(p) \quad (2-11)$$

Qua (2-11) chứng tỏ rằng, hàm trọng lượng $w(t)$ là gốc của hàm truyền đạt của một khâu.

Qua biểu thức (2-10) và (2-11) ta thấy:

$$h(t) \rightarrow \frac{W(p)}{p}$$

$$w(t) \rightarrow W(p).$$

Như vậy thì giữa hàm $h(t)$ và $w(t)$ có một mối liên hệ:

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt. \quad (2-12)$$

Hoặc là:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2-13)$$

3) Phản ứng của một khâu khi tín hiệu tác động đầu vào là một hàm $x(t)$ bất kỳ

Tùy thuộc vào cách biểu diễn hàm $x(t)$ qua $1(t)$ hoặc qua $\delta(t)$ mà phản ứng của khâu cũng có thể biểu diễn qua hàm quá độ $h(t)$ hay hàm trọng lượng $w(t)$.

Khi xét tác dụng biến đổi tín hiệu vào $x(t)$ thành tín hiệu ra $y(t)$ của một khâu biểu diễn bằng một toán tử A_1 , ta ký hiệu:

$$y(t) = A_1 \{x(t)\} \quad (2-14)$$

Nói riêng, đối với tín hiệu vào $1(t)$ sẽ có:

$$h(t) = A_1 \{1(t)\} \quad (2-15)$$

và tín hiệu $\delta(t)$ sẽ có:

$$w(t) = A_1\{\delta(t)\} \quad (2-16)$$

– Khi $x(t)$ biểu diễn qua $1(t)$: (tích phân Duhamel):

Phối hợp (2-6) và (2-14) ta có:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1\{x(t)\} = A_1\left\{x(\alpha) \cdot 1(t) + \int_0^t 1(t-\tau) \cdot \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau\right\}_{\alpha \rightarrow 0} = \\ &= x(0) \cdot A_1\{1(t)\} + \int_0^t A_1\{1(t-\tau)\} \cdot \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

Vì: $A_1\{1(t)\} = h(t)$ và $A_1\{1(t-\tau)\} = h(t-\tau)$ nên:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2-17)$$

– Khi $x(t)$ biểu diễn qua $\delta(t)$:

Tương tự như trường hợp hàm $x(t)$ biểu diễn qua $1(t)$, ở đây phối hợp (2-7) và (2-16) ta có;

$$y(t) = h(0) \cdot x(t) + \int_0^t w(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau \quad (2-18)$$

2-3. ĐẶC TÍNH TẦN SỐ CỦA MỘT KHÂU

2-3.1. Đặc tính tần số biên - pha

Đặc tính tần số là quan hệ giữa lượng ra và lượng vào của một khâu ở trạng thái xác lập khi lượng vào biến đổi theo quy luật điều hòa: $x = X_m \sin \omega t$.

Lượng ra của khâu đó sẽ có dạng: $y = y_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Nếu một khâu đơn giản được mô tả bởi phương trình vi phân bậc hai:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 x \quad (2-19)$$

– Đối với lượng vào $x(t)$ và các đạo hàm của nó có thể biểu diễn bằng các phức số:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_m \sin \omega t \rightarrow x_m e^{j\omega t} \\ \frac{dx}{dt} = x_m \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \rightarrow j\omega x_m e^{j\omega t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} = x_m \omega^2 \sin(\omega t + 2 \frac{\pi}{2}) \rightarrow (j\omega)^2 x_m e^{j\omega t} \end{array} \right. \quad (2-20)$$

– Đối với lượng ra $y(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow y_m e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{dy}{dt} = y_m \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow j\omega y_m e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = y_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + 2 \frac{\pi}{2}) \rightarrow (j\omega)^2 y_m e^{j(\omega t + \varphi)} \end{array} \right. \quad (2-21)$$

Bây giờ thế các số hạng của (2-20) và (2-21) vào (2-19) sẽ có:

$$[a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_2] y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = [b_0(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_2] x_m e^{j\omega t}$$

Ký hiệu $W(j\omega) = \frac{y_m}{x_m} e^{j\varphi}$ là hàm truyền đạt tần số (hay là hàm truyền đạt phức) thì:

$$W(j\omega) = \frac{y_m}{x_m} e^{j\varphi} = \frac{b_0(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_2}{a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_2} \quad (2-22)$$

Nếu xét phương trình vi phân của khâu (2-19) được biểu diễn theo dạng hàm truyền đạt sẽ có:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (2-23)$$

Rõ ràng muốn tìm hàm truyền đạt tần số, ta chỉ việc thế biến $p = j\omega$ cho hàm truyền đạt của một khâu. Việc thay thế một cách rất hình thức này, đã được giải thích rõ về mặt vật lý ở trên.

– Nếu hàm truyền đạt phức $W(j\omega)$ viết ở dạng môđun – pha thì:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2-24)$$

trong đó $A(\omega)$ là biên độ của $W(j\omega)$ còn $\varphi(\omega)$ là pha của $W(j\omega)$. Nếu $W(j\omega)$ có dạng (2-22) thì:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{(b_2 - b_0\omega^2)^2 + (b_1\omega)^2}}{\sqrt{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}} \quad (2-25)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b_1\omega}{b_2 - b_0\omega^2} - \arctg \frac{a_1\omega}{a_2 - a_0\omega^2} \quad (2-26)$$

– Nếu $W(j\omega)$ viết ở dạng phần thực và ảo thì:

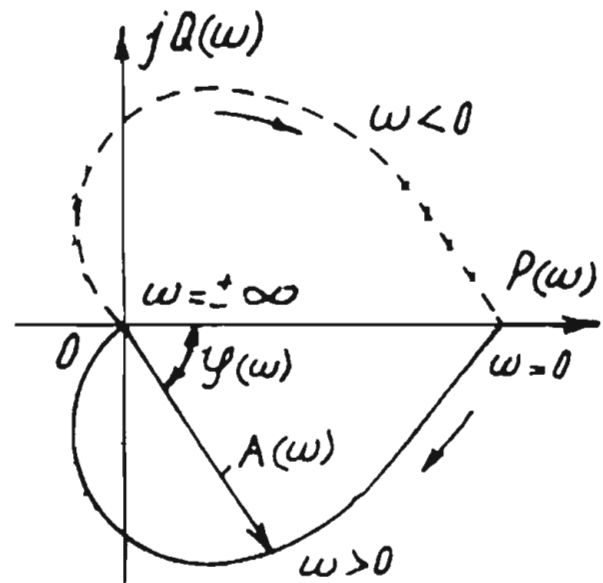
$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2-27)$$

trong đó: $P(\omega)$: phần thực của $W(j\omega)$;

$Q(\omega)$: phần ảo của $W(j\omega)$.

Hàm truyền đạt tần số $W(j\omega)$ được xây dựng thành một đường cong trên mặt phẳng phức, ta gọi là *đặc tính tần số biên pha* (viết tắt là Đ.T.B.P) khi ω biến đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$.

Đặc tính tần số biên – pha gồm hai nhánh đối xứng qua trục hoành. Thông thường ta chỉ xét Đ.T.B.P ứng với $\omega > 0$.



Hình 2-2.

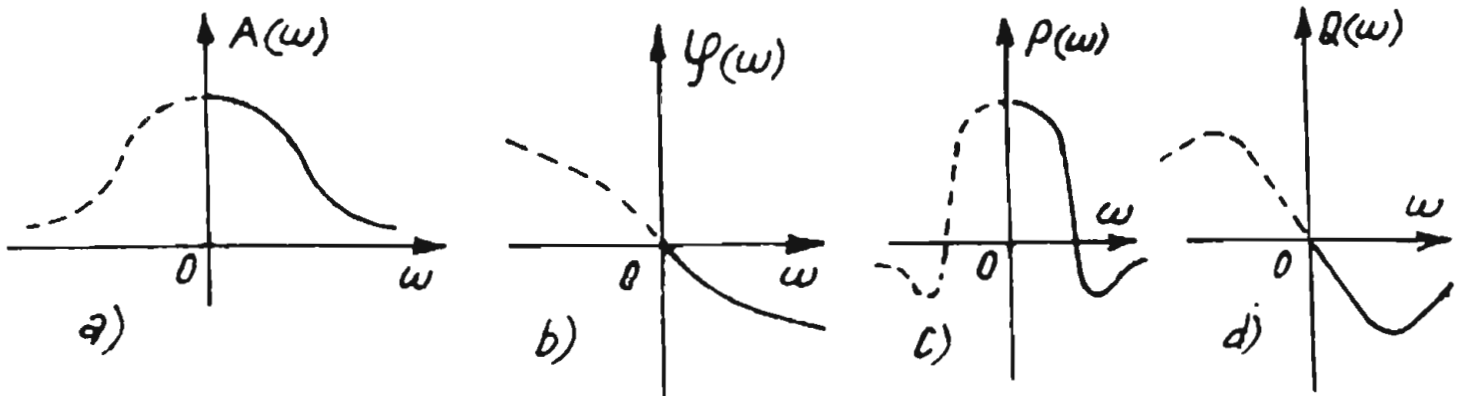
Trên hình 2-3.a và 2-3.b xây dựng *đặc tính tần số biên độ* $A(\omega)$ và *đặc tính tần số pha* $\varphi(\omega)$. Trên hình 2-3.c và 2-3.d xây dựng *đặc tính tần số phần thực và phần ảo* $P(\omega)$; $Q(\omega)$.

Vì $A(\omega)$ và $P(\omega)$ là hàm chẵn nên đặc tính đối xứng qua trục tung còn $\varphi(\omega)$ và $Q(\omega)$ là hàm lẻ nên đặc tính đối xứng qua gốc tọa độ.

Nếu biết đặc tính $P(\omega)$ và $Q(\omega)$ ta sẽ xác định được đặc tính $A(\omega)$ và $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (2-28)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (2-29)$$



Hình 2-3.

2-3.2. Đặc tính tần số lôgarit

Dựa vào đặc tính tần biên pha $W(j\omega) = A(j\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ nếu lấy lôgarit cả hai vế sẽ có:

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \quad (2-30)$$

Rõ ràng $\ln A(\omega)$ và $\varphi(\omega)$ là các hàm thực của biến ω , đó chính là đặc tính tần số biên độ lôgarit và đặc tính tần số pha lôgarit.

1) Đối với đặc tính tần số biên độ lôgarit thường đo theo đơn vị Đêxiben (Đêxiben bằng một phần mười ben), viết tắt là db (decibel).

Ben là đơn vị đo lôgarit thập phân của hệ số khuếch đại công suất của tín hiệu, tức là, 1 ben ứng với hệ số khuếch đại 10 lần, 2 ben ứng với hệ số khuếch đại 100 lần v.v... Vì công suất của tín hiệu tỷ lệ với bình phương biên độ nên.

$$1 \text{ bel} \rightarrow \lg A^2 = 2 \lg A. \quad (2-31)$$

Khi tính theo đơn vị đo là db: (1 bel = 10 db):

$$10 \cdot 2 \lg A = 20 \lg A \rightarrow (\text{db}).$$

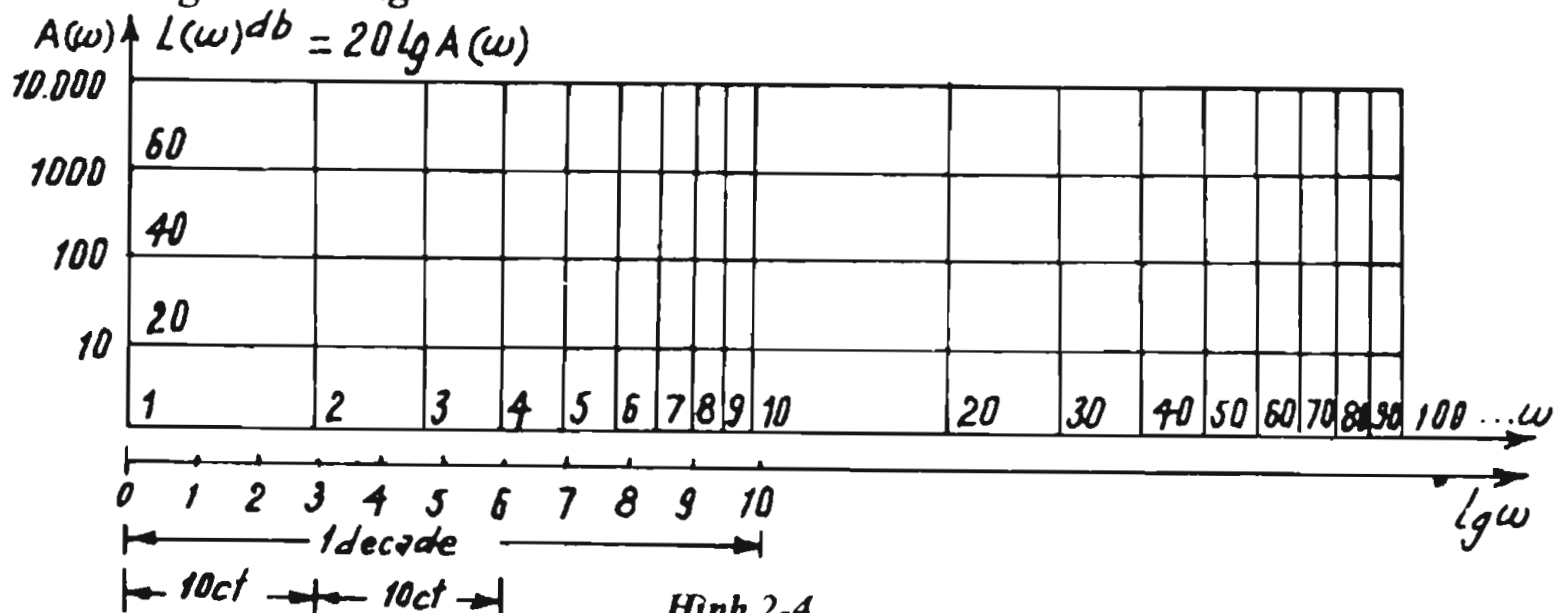
Do vậy nếu biết biên độ $A(\omega)$, ta sẽ xây dựng được đặc tính tần số biên độ lôgarit $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad (2-32)$$

Trục tung đặt $L(\omega)$ đo theo đơn vị db, còn trục hoành thuận lợi nhất là đo theo $\lg(\omega)$. Như vậy thì đơn vị đo tần số ω tính theo *decad* viết tắt là *dec* (decade), tức là lôgarit của độ tăng tần số 10 lần:

$$1 \text{ dec} = \lg \frac{10 \cdot \omega_1}{\omega_1} = \lg 10.$$

Nếu ghi trên trục hoành là $\lg \omega$ thì có thể chia đều nhưng ghi ω thì vị trí giữa các tần số sẽ không đều nhau. Ví dụ: $\omega = 1 \rightarrow \lg 1 = 0$; $\omega = 2 \rightarrow \lg 2 \approx 0,3$; $\omega = 3 \rightarrow \lg 3 \approx 0,48$. Trên hình 2-4 vẽ đặc tính tần số biên độ lôgarit trục tung ghi $A(\omega)$ và $20\lg A(\omega)$ còn trục hoành ghi ω và $\lg \omega$.



Hình 2-4.

Có khi đơn vị đo trên trục hoành người ta còn dùng Ôctave tức là lôgarit của độ tăng tần số hai lần; viết tắt là Oct:

$$1 \text{ oct} = \lg \frac{2\omega_1}{\omega_1} \approx 0,3.$$

2) Đối với đặc tính tần số pha lôgarit thường đo đơn vị φ là độ còn đối số (hoành độ) là $\lg \omega$, giống như đặc tính $L(\omega)$. Sở dĩ như vậy là vì nếu có nhiều khâu động học nối tiếp nhau thì biên độ A_{td} bằng tích số các biên độ A_i thành phần nên lấy $20\lg A_i(\omega)$ sẽ là tổng của biên độ lôgarit; còn đặc tính $\varphi(\omega)$ của nhiều khâu nối tiếp đương nhiên là tổng của các $\varphi_i(\omega)$ thành phần, mà nếu lấy theo lôgarit của tổng các số hạng đó không thể phân tích được nữa.

nghĩa là xem tổng $\varphi_i(\omega)$ là tối giản rồi.

2-4. PHÂN LOẠI CÁC KHẤU ĐỘNG HỌC ĐIỂN HÌNH

Dựa vào đặc điểm của phương trình vi phân, ta phân các khâu động học thành ba loại: khâu bậc 1, bậc 2, khâu vi phân và khâu tích phân.

2-4.1. Các khâu bậc 1, bậc 2

Khâu bậc 1, bậc 2 là khâu động học mà ở chế độ xác lập lượng ra $y(t)$ tỷ lệ với lượng vào $x(t)$.

Các khâu nguyên hàm điển hình được xét sau đây:

1) Khâu khuếch đại (tỷ lệ) có hàm truyền đạt $W(p) = K$.

2) Khâu quán tính bậc một: $W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$

3) Khâu dao động: $W(p) = \frac{K}{Tp^2 + 2\xi Tp + 1}$

4) Khâu không ổn định bậc một: $W(p) = \frac{k}{Tp - 1}$

2-4.2. Khâu vi phân

Khâu vi phân là khâu động học mà ở chế độ xác lập lượng ra $y(t)$ tỷ lệ với đạo hàm lượng vào dx/dt

1) Khâu vi phân lý tưởng: $W(p) = kp$.

2) Khâu vi phân là một thừa số động học thuần túy bậc một:

$$W(p) = Tp + 1 \text{ và } W(p) = Tp - 1$$

2-4.3. Khâu tích phân

Khâu tích phân là khâu động học mà ở chế độ xác lập, lượng ra $y(t)$ tỷ lệ với tích phân của lượng vào: $\int x(t).dt$.

Khâu tích phân điển hình nhất là khâu tích phân lý tưởng có $W(p) = k/p$.

Sau đây ta sẽ lần lượt xét đặc tính tần số và đặc tính thời gian của từng loại khâu động học đã nêu ra.

2-5. ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA CÁC KHÂU BẬC 1, BẬC 2

2-5.1. Khâu khuếch đại

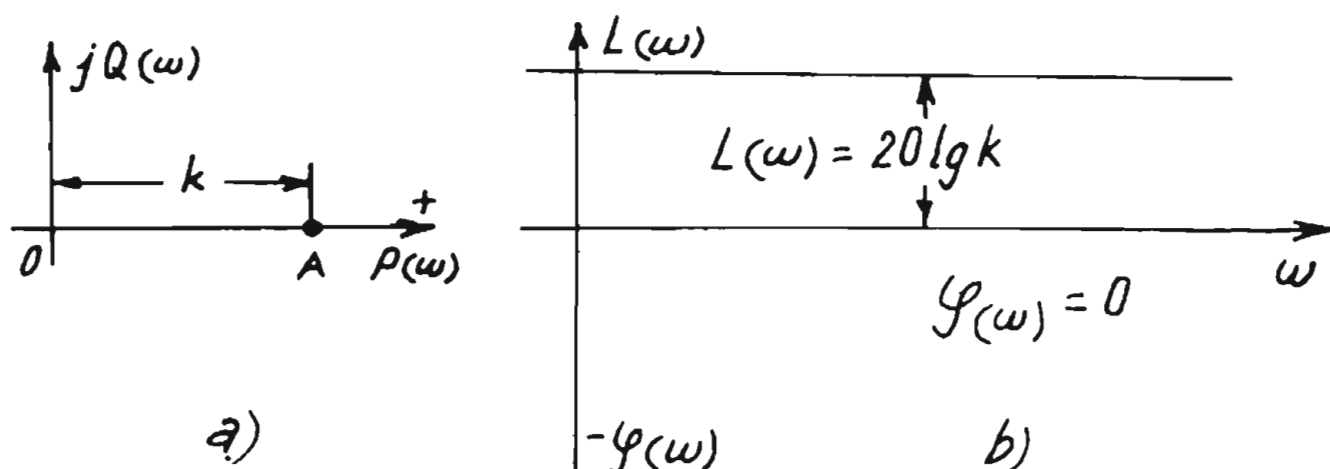
Hàm truyền đạt: $W(p) = k$.

Các phần tử có hàm truyền đạt là khâu khuếch đại như: các phần tử đo lường (xenxin, biến trở, bộ phát tín hiệu cảm ứng,...), phần tử khuếch đại (bộ khuếch đại điện tử, bán dẫn, ion v.v...).

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên pha

$W(j\omega) = k$ là một điểm trên trục hoành (xem hình 2-5a).



Hình 2-5.

b) Đặc tính tần số lôgarit

– Đặc tính tần số biên độ lôgarit (Đ.T.B.L)

$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k$ là một đường thẳng nằm ngang vẽ trên hình 2-5b.

– Đặc tính tần số pha lôgarit (Đ.T.P.L)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0 \text{ chính là trục hoành trên hình 2-5b.}$$

2. Đặc tính thời gian

Phương trình động học của khâu khuếch đại là:

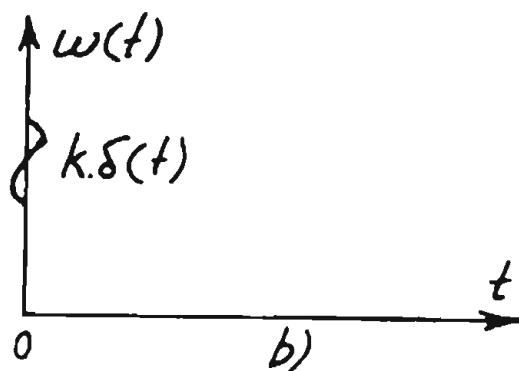
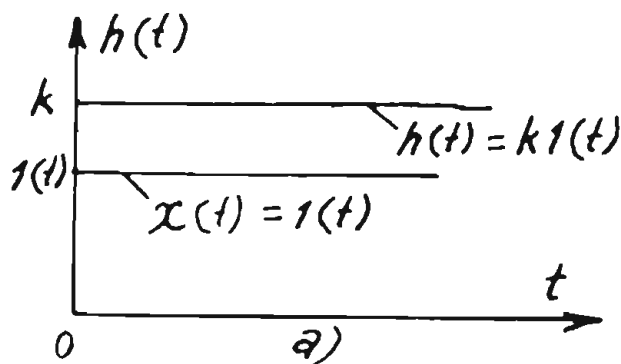
$$y(t) = k.x(t) \quad (2-32)$$

a) Hàm quá độ: khi $x(t) = 1(t)$ thì

$$h(t) = k.1(t) \text{ (vẽ trên hình 2-6a)} \quad (2-33)$$

b) Hàm trọng lượng: theo biểu thức (2-13):

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k. \frac{d.1(t)}{dt} = k.\delta(t)$$



Hình 2-6.

2-5.2. Khâu quán tính bậc một

Hàm truyền đạt của khâu quán tính bậc một:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad (2-34)$$

Các phần tử thuộc khâu quán tính bậc một như: khuếch đại từ, máy phát điện một chiều; mạch điện R-C, L-R, lò điện trở, động cơ điện không đồng bộ hai pha và ba pha nếu lượng ra là tốc độ quay, v.v...

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên - pha

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} = p(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

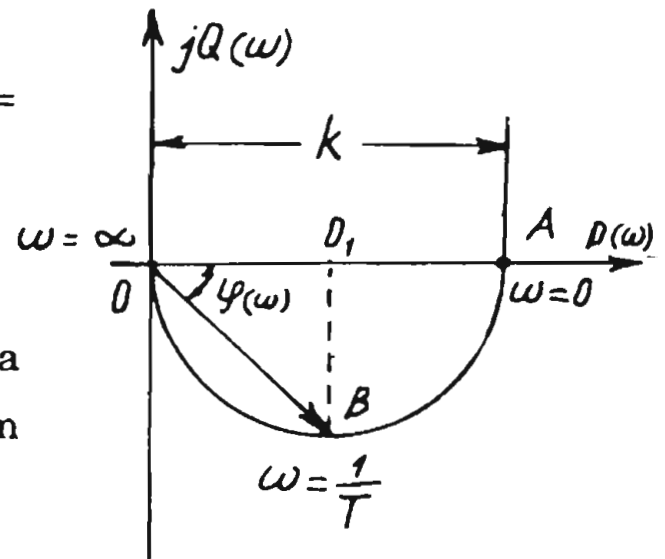
$$\text{Biên độ: } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad (2-35)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg} \omega T \quad (2-36)$$

Từ biểu thức (2-35) và $A^2(\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega)$ giải ra ta có:

$$\left[P(\omega) - \frac{k}{2}\right]^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Đây là phương trình chính tắc của một vòng tròn bán kính: $\frac{k}{2}$ và tâm $O_1(\frac{k}{2}, 0)$. được vẽ trên hình 2-7.



Hình 2-7.

$$\text{Tại } \omega = \frac{1}{T} \text{ thì: } A\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Điểm biểu diễn $\omega = \frac{1}{T}$ chính là điểm B trên hình 2-7

b) Đặc tính tần số lôgarit

– Đ.T.B.L:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \\ &= 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} \end{aligned} \quad (2-37)$$

Tính $L(\omega)$ với $\omega = 0 \div \infty$ từ (2-37) ta sẽ vẽ được đặc tính $L(\omega)$ trên hình 2-8.

Vẽ Đ.T.B.L tiệm cận gần đúng:

Đường tiệm cận khi $\omega \rightarrow 0$: (đường ab trên hình 2-8):

$$L_1(\omega) = 20\lg k \text{ khi } 0 < \omega \leq 1/T.$$

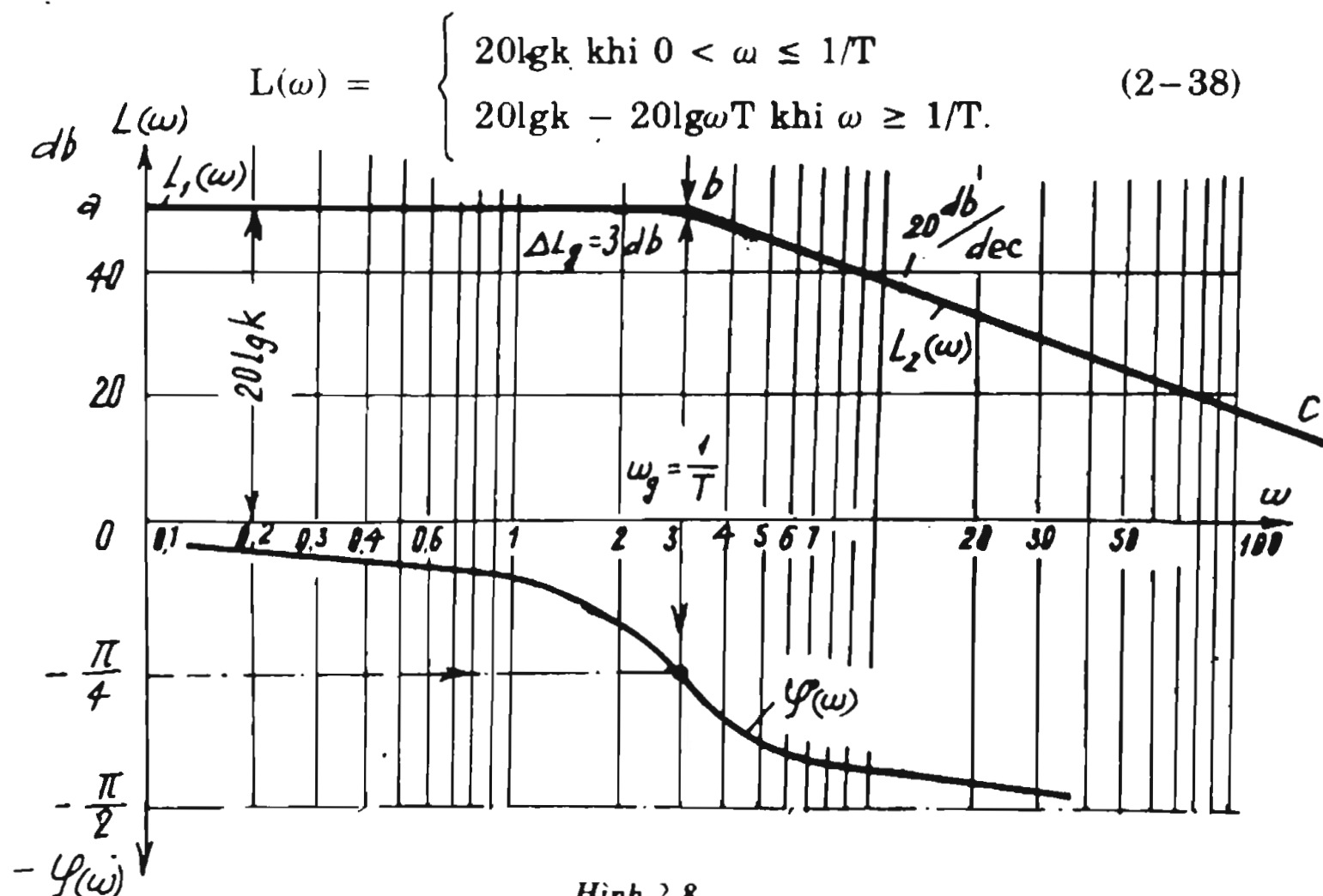
$$(\text{vì } \lim_{\omega \rightarrow 0} 20\lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} = 20\lg 1 = 0).$$

Đường tiệm cận khi $\omega \rightarrow \infty$ (đường bc trên hình 2-8)

$$L_2(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega T \text{ khi } \omega \geq 1/T.$$

(vì $\omega \rightarrow \infty$ nên $\omega T > 1$, gần đúng lấy $\sqrt{1 + (\omega T)^2} \approx \omega T$)

Vậy đặc tính chính xác $L(\omega)$ đã được thay thế bằng đặc tính tiệm cận:



Hình 2-8.

Hai đặc tính $L_1(\omega)$ và $L_2(\omega)$ cắt nhau tại điểm b. Tại đó, tần số gây ω_g được tính như sau:

$$\begin{aligned} L_1(\omega_g) &= L_2(\omega_g) \rightarrow \\ 20\lg k &= 20\lg k - 20\lg \omega_g T \end{aligned}$$

Rút ra:
$$\omega_g = \frac{1}{T}$$

Sai lệch biên độ lôgarit $\Delta L(\omega_c)$ của đường tiệm cận và đặc tính chính xác:

$$\begin{aligned}\Delta(\omega_g) &= L_1(\omega_g) - L(\omega_g) = 20\lg k - 20\lg k + 20\lg \sqrt{T^2(1/T)^2 + 1} = \\ &= 20\lg \sqrt{2} \quad \# \quad 3\text{db}.\end{aligned}$$

Xác định độ nghiêng của đặc tính tiệm cận.

Đường $L_1(\omega) = ab$ song song với trục hoành - độ nghiêng bằng 0

Đường $L_2(\omega) = bc$ nghiêng với trục hoành có độ nghiêng:

$$\text{tg}\alpha = \frac{L(\omega_2) - L(\omega_1)}{\lg\omega_2 - \lg\omega_1}.$$

Nếu lấy $\omega_2 = 10\omega_1$ thì: $\lg\omega_2 - \lg\frac{\omega_2}{10} = \lg 10 = 1 \text{ dec.}$

Do đó:

$$\text{tg}\alpha = \frac{L(\omega_2) - L(\omega_1)}{\lg\omega_2 - \lg\omega_1} = \frac{L(10\omega_1) - L(\omega_1)}{1} = 20\lg k - 20\lg 10\omega_1 T -$$

$$- 20\lg k + 20\lg\omega_1 T$$

$$\text{tg}\alpha = -20\lg \frac{10\omega_1 T}{\omega_1 T} = -20 \text{ db/dec.}$$

- Đ.T.P.L:

Theo (2-36) đã có: $\varphi(\omega) = -\arctg T.\omega$.

Với

$$\omega_g = 1/T \rightarrow \varphi(\omega_g) = -\pi/4$$

$$\omega = \infty \rightarrow \varphi(\omega) = -\pi/2$$

Đặc tính $\varphi(\omega)$ vẽ trên hình 2-8.

2. Đặc tính thời gian

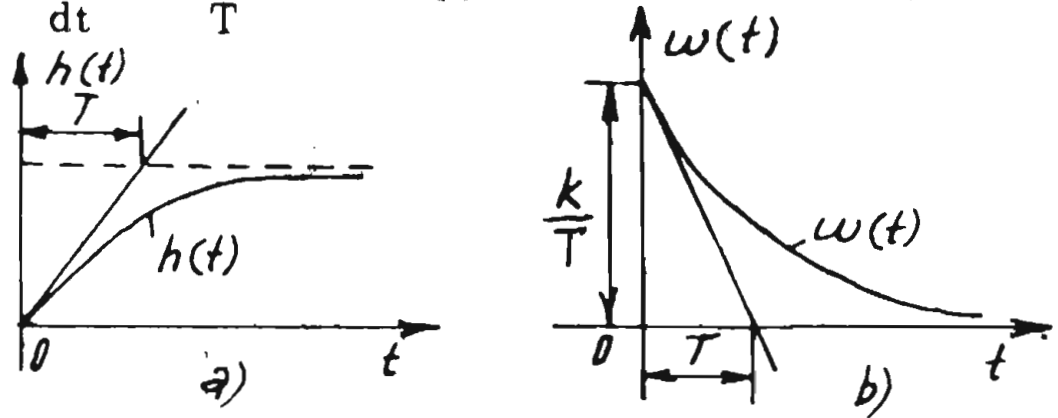
a) Hàm quá độ:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p} \right\} = k(1 - e^{-t/T}).1(t) \quad (2-39)$$

b) Hàm trọng lượng

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-t/T} \cdot 1(t) \quad (2-40)$$

Trên hình 2-9a vẽ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ và hàm trọng lượng $w(t)$ được vẽ trên hình 2-9b.



Hình 2-9.

2-5.3. Khâu dao động

Hàm truyền đạt của khâu dao động với điều kiện $\xi < 1$:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (2-41)$$

Các phần tử thuộc khâu dao động như: mạch điện R-L-C; động cơ điện một chiều kích từ độc lập lượng vào và điện áp phản ứng, lượng ra là tốc độ quay, hệ cơ học đàn hồi, con quay hồi chuyển trong bộ phận lái máy bay v.v...

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên-pha

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2 \omega^2 + 2\xi T j\omega + 1}$$

$$\text{Biên độ: } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}} \quad (2-42)$$

$$\text{Pha: } \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2-43)$$

Khi $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ thì $A(\omega)$ có cực đại, với tần số cộng hưởng ω_{ch} :

$$A_m(\omega_{ch}) = \frac{k}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2-44)$$

$$\omega_{ch} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2-45)$$

Khi $\xi \rightarrow 0$ thì $A_m(\omega_{ch}) \rightarrow \infty$.

Đặc tính tần số biên pha vẽ trên hình 2-10.

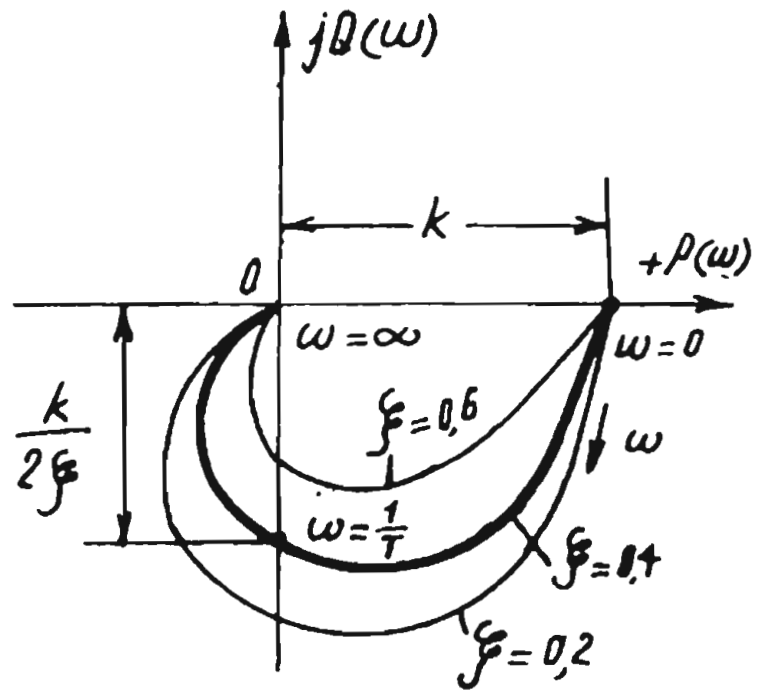
Tại tần số $\omega = \frac{1}{T}$ thì:

$$A(1/T) = \frac{k}{2\xi}$$

b) Đặc tính tần số lôgarit

– Đ.T.B.L:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg A(\omega) = \\ &= 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2) + 4\xi^2 \omega^2 T^2} \end{aligned} \quad (2-46)$$



Hình 2-10.

Đặc tính thực $L(\omega)$ vẽ trên hình 2-11.

Vẽ Đ.T.B.L tiệm cận:

Khi $\omega \rightarrow 0$:

$$L(\omega) = L_1(\omega) = 20\lg k \text{ với } 0 < \omega \leq \frac{1}{T}.$$

(Đoạn ab trên hình 2-11).

Khi $\omega \rightarrow \infty$:

$$L(\omega) = L_2(\omega) = 20\lg k - 40\lg \omega T \text{ với } \omega \geq \frac{1}{T}.$$

(Đoạn bc trên hình 2-11)

Độ nghiêng đoạn đặc tính (ab), $L_2(\omega)$ là -40db/dec

Sai lệch biên độ lôgarit ở tần số $\omega_0 = \frac{1}{T}$:

Tại $\omega_0 = \frac{1}{T}$, từ (2-44) bỏ qua số hạng ξ^2 ta có:

$$L(\omega_{ch}) = 20\lg k - 20\lg 2\xi.$$

Sai lệch biên độ ở ω_{ch} :

$$\Delta L = L(\omega_{ch}) - L_1(\omega) \rightarrow$$

$$\Delta L = 20\lg k - 20\lg 2\xi - 20\lg k = 20\lg \frac{1}{2\xi}$$

Rõ ràng ξ càng lớn thì ΔL càng bé

Yêu cầu thực hiện tiệm cận hóa nếu sai lệch biên độ $\Delta L \leq 3\text{db}$

Nếu $\xi = 0,1$ thì $\Delta L = 20\lg \frac{1}{2 \cdot 0,1} = 14\text{db}$

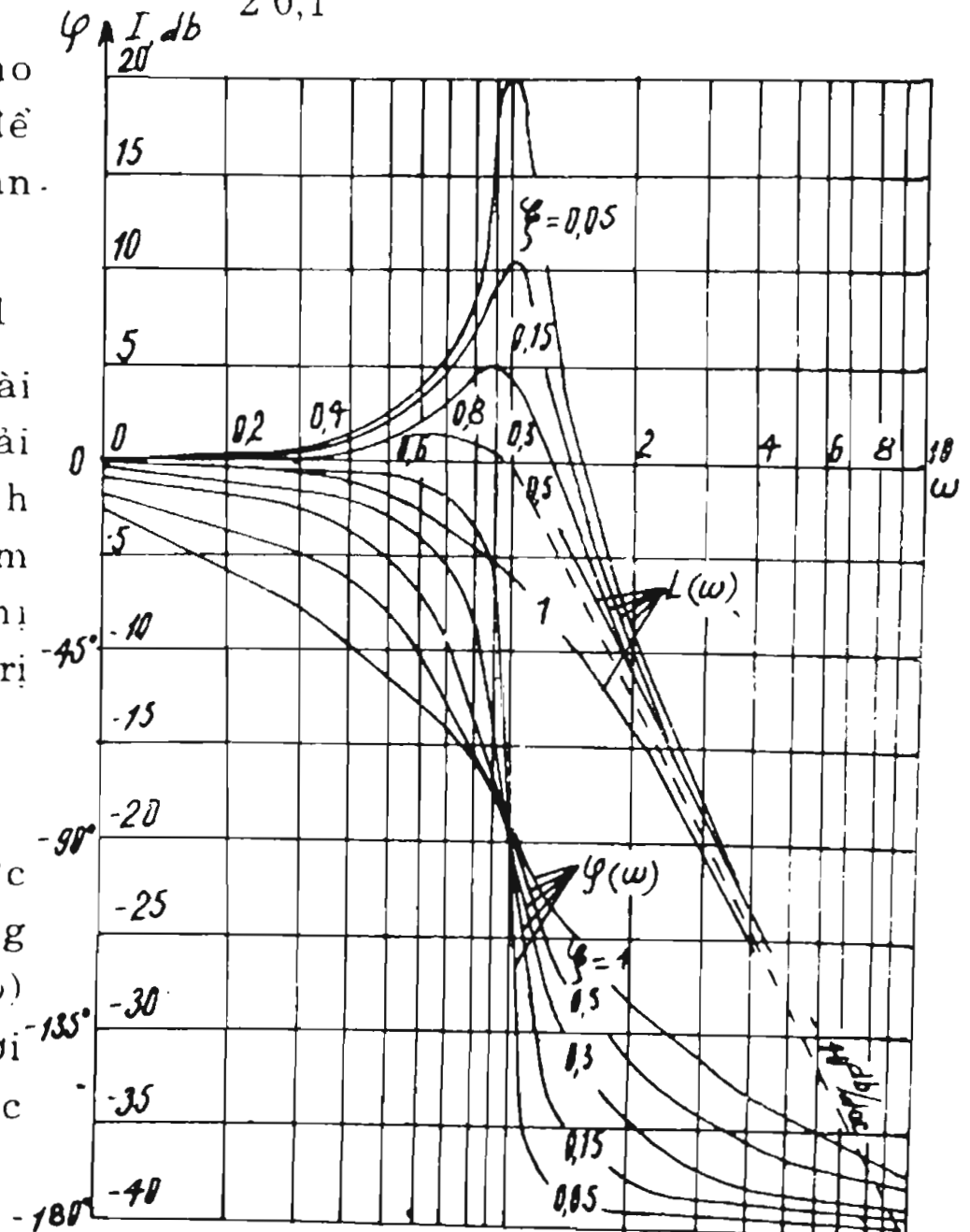
Phạm vi cho phép giá trị ξ để thực hiện tiệm cận hóa được là:

$$0,38 \leq \xi \leq 0,71$$

Khi ξ nằm ngoài phạm vi đó ta phải xây dựng đặc tính $L(\omega)$ theo từng điểm hoặc là tra đồ thị chuẩn với các giá trị ξ khác nhau

– Đ.T.P.L

Theo biểu thức (2-43) ta xây dựng được đặc tính $\varphi(\omega)$ trên hình 2-11 với các giá trị ξ khác nhau.



Hình 2-11.

ωT

2. Đặc tính thời gian

a) Hàm quá độ

Phương trình đặc tính của khâu dao động :

$$T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0 ,$$

phương trình có hai nghiệm phức liên hợp:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm j \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = -\alpha \pm j\beta .$$

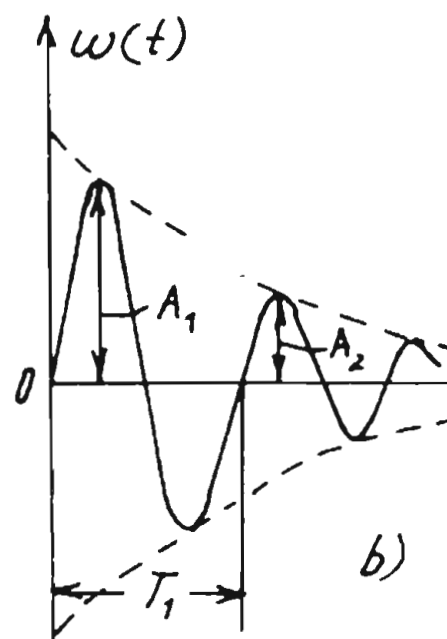
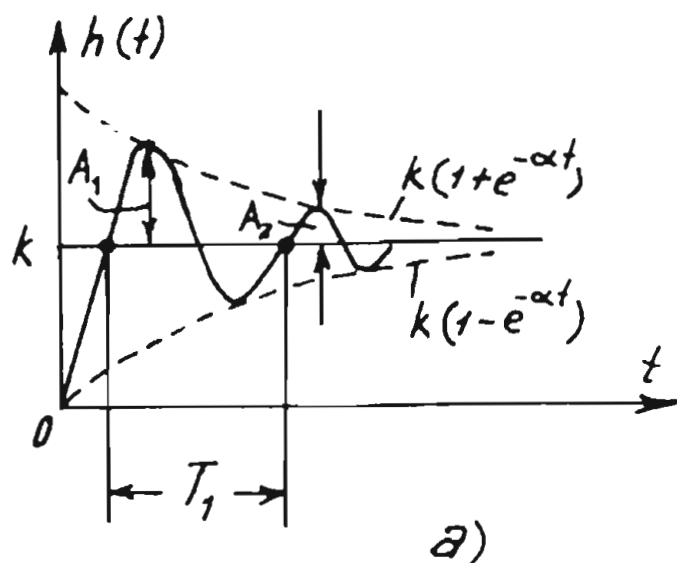
$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1} \cdot \frac{1}{p} \right\} = \\ &= k \cdot l(t) \cdot [1 - e^{-\alpha t} (\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t)] , \end{aligned} \quad (2-47)$$

trong đó: $\alpha = \xi \omega_0$; $\beta = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0$; $\omega_0 = \frac{1}{T}$.

b) Hàm trong lượng:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k\omega_0^2}{\beta} l(t) \cdot e^{-\alpha t} \sin \beta t \quad (2-48)$$

Đồ thị đặc tính $h(t)$ và $w(t)$ vẽ trên hình 2-12.



Hình 2-12.

Từ đồ thị $h(t)$ ta xác định được các tham số: k , A_1 , A_2 và T . Từ đó tính ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{2\pi}{T_1} \\ \beta = \frac{1}{T_1} \ln \frac{A_1}{A_2} \\ \omega_0 = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{1}{T} \\ \xi = \alpha T \end{array} \right. \quad (2-49)$$

2-5.4. Khâu không ổn định bậc một

Hàm truyền đạt của khâu không ổn định bậc một là:

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1} \quad (2-50)$$

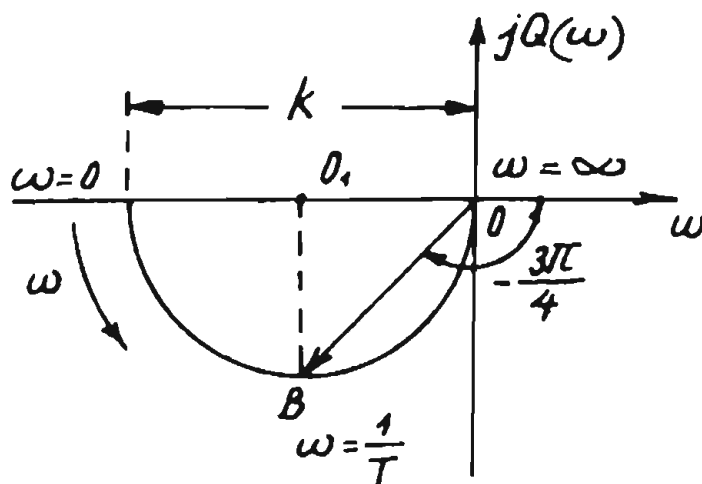
Các phần tử thuộc khâu này như: động cơ điện không có phụ tải quạt gió; động cơ điện không đồng bộ với phụ tải là mômen xung không đổi v.v..

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên – pha

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T - 1}$$

Cũng tương tự khâu quán tính bậc một, ta dễ dàng chứng minh được đặc tính tần số biên – pha là một nửa vòng tròn nằm ở góc phần tư thứ ba có bán kính $k/2$ và tâm O_1 $(-k/2, 0)$ Vì $P(\omega) < 0$;



Hình 2-13.

$Q(\omega) = 0$ nên

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T - \pi. \quad (2-51)$$

b) Đặc tính tần số lôgarit

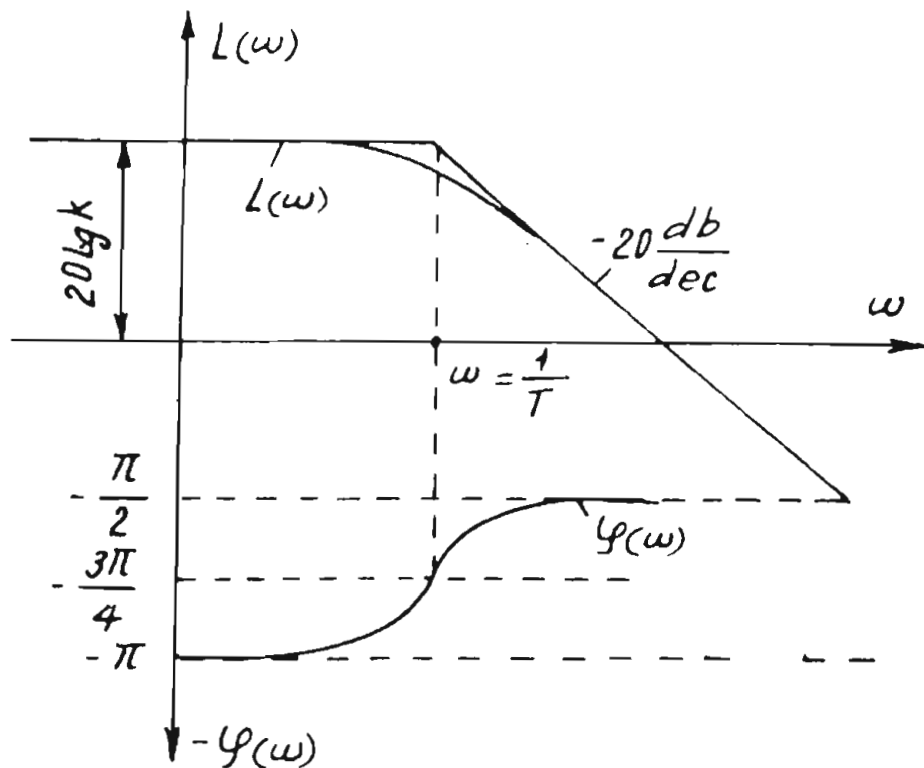
Vì biên độ của khâu (2-50)

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$$

hoàn toàn giống biên độ của khâu quán tính bậc một nên:

– Đ.T.B.L cũng hoàn toàn giống Đ.T.B.L khâu quán tính bậc một (Hình 2-14)

– Đ.T.P.L: theo (2-51) ta xây dựng được $\varphi(\omega)$ trên hình 2-14, có điểm uốn tại $\omega = 1/T$.



Hình 2-14.

2. Đặc tính thời gian

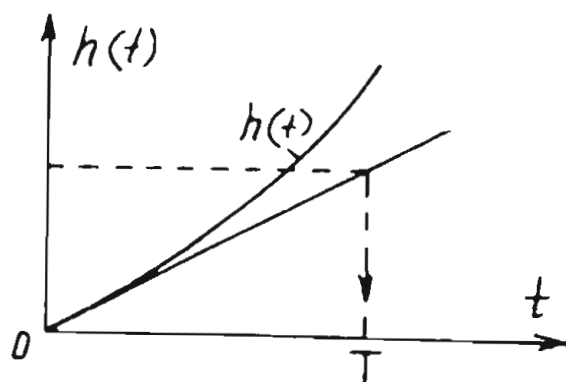
a) Hàm quá độ:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{p(Tp - 1)} \right\} = k(e^{t/T} - 1) \cdot 1(t) \quad (2-52)$$

Đồ thị $h(t)$ vẽ trên hình 2-15

b) Hàm trọng lượng:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{t/T} \cdot 1(t) \quad (2-53)$$



Hình 2-15.

2-6. ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA CÁC KHÂU VI PHÂN

2-6.1. Khâu vi phân lý tưởng

Hàm truyền đạt của khâu vi phân lý tưởng là:

$$W(p) = k.p \quad (2-54)$$

Các phần tử thuộc loại khâu Vi phân lý tưởng như máy phát tốc độ có lượng vào là góc quay φ còn lượng ra là sức điện động.

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên – pha

$$W(j\omega) = kj\omega.$$

Khi $\omega \rightarrow \infty$ thì $|W(j\omega)| \rightarrow \infty$.

Đ.T.B.P là một nửa trục ảo dương vẽ trên hình 2-16.

b) Đặc tính tần số lôgarit
– Đ.T.B.L

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k\omega.$$

Nếu $k = 1$ thì:

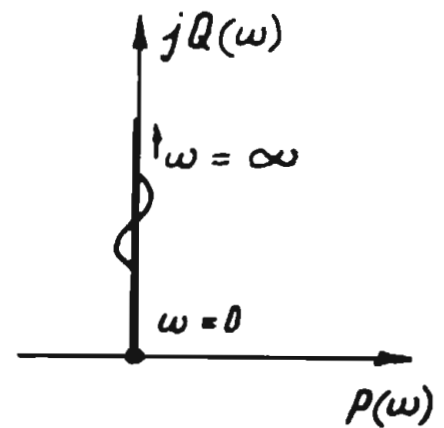
$$L(\omega) = 20\lg \omega,$$

đó là đường 1 trên hình 2-17a cắt trục hoành tại tần số $\omega_c = 1$.

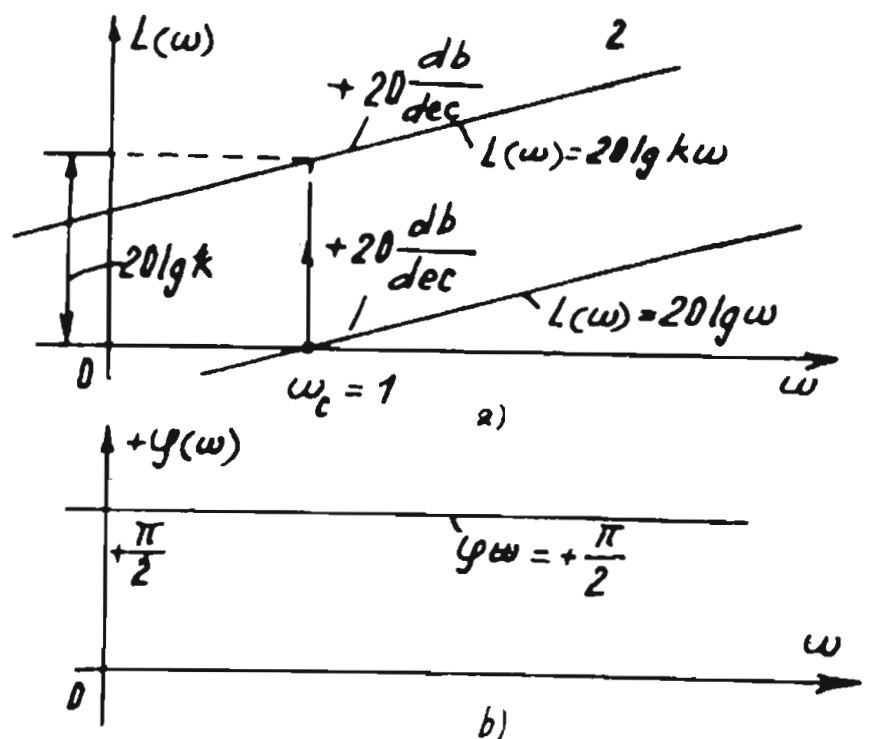
Nếu $k > 1$ ta có đặc tính $L(\omega) = 20\lg k\omega$ là đường số 2.

– Đ.T.P.L. Vi phân thực của $W(j\omega)$ bằng không nên:

$$\arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \infty$$



Hình 2-16.



Hình 2-17.

Do đó:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \infty = + \frac{\pi}{2}$$

Đ.T.P.L được vẽ trên hình 2-17.

2. Đặc tính thời gian

a) Hàm quá độ

$$h(t) = k \frac{dl(t)}{dt} = k \cdot \delta(t) \quad (2-55)$$

b) Hàm trọng lượng

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (2-56)$$

2-6.2. Khâu vi phân bậc một

Hàm truyền đạt của khâu vi phân bậc một:

$$W(p) = k(Tp + 1). \quad (2-57)$$

Trong thực tế muốn có khâu (2-57) ta nối song song khâu khuếch đại có $W_1(p) = k$ và khâu vi phân lý tưởng kTp .

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên - pha

$$W(j\omega) = k(j\omega T + 1).$$

$$\omega = 0 \rightarrow |W(j\omega)| = k$$

$$\omega = \infty \rightarrow |W(j\omega)| = \infty.$$

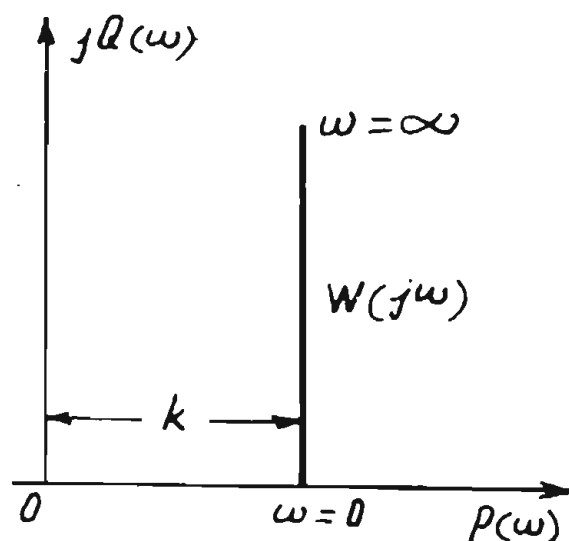
Đ.T.B.P là một nửa đường thẳng song song với trục ảo vẽ trên hình 2-18.

b) Đặc tính tần số lôgarit

– Đ.T.B.L:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1}$$

Đặc tính tiệm cận:



Hình 2-18.

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg k & \text{với } 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ 20\lg k + 20\lg \omega T & \text{với } \omega \geq \frac{1}{T} \end{cases}$$

Đ.T.B.L được vẽ trên hình 2-19.

– Đ.T.P.L.

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T.$$

Đặc tính $\varphi(\omega)$ vẽ trên hình 2-19.

2. Đặc tính thời gian

a) Hàm quá độ.

Từ phương trình:

$$y = kx + kT \frac{dx}{dt}$$

với $x(t) = 1(t)$:

$$h(t) = k1(t) + kT \cdot \frac{d1(t)}{dt} = k \cdot 1(t) + kT \cdot \delta(t). \quad (2-58)$$

b) Hàm trọng lượng

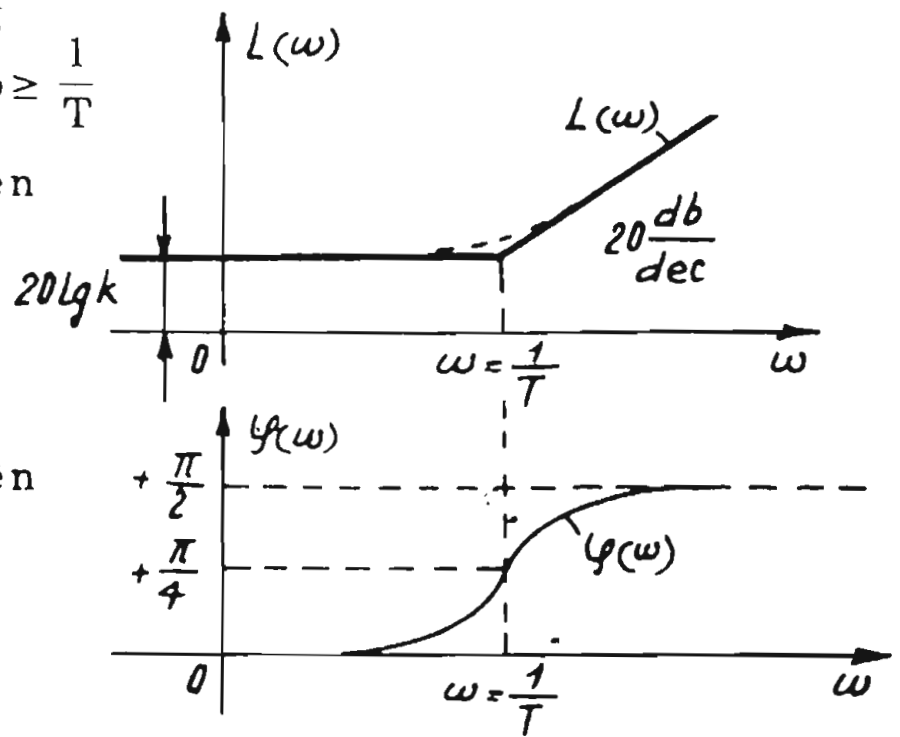
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \cdot \delta(t) + kT \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (2-59)$$

2-7. ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA KHÂU TÍCH PHÂN LÝ TƯỜNG

Hàm truyền đạt của khâu tích phân lý tưởng là:

$$W(p) = \frac{k}{p} \quad (2-60)$$

Các phần tử thực tế là khâu tích phân lý tưởng như: cơ cấu cân bằng thủy lực với lượng vào là lực F đặt lên pittông. Hoặc là động



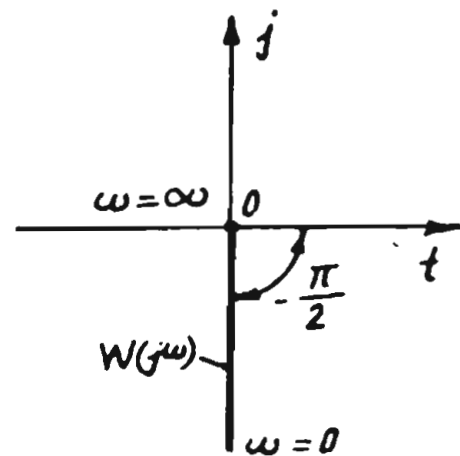
Hình 2-19.

cơ điện nối chung với lượng vào là điện áp còn lượng ra là góc quay nếu bỏ qua các hằng số thời gian điện từ và điện cơ.

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên – pha

$$W(j\omega) = -j \frac{k}{\omega}$$



Hình 2-20.

là một nửa trục ảo âm vẽ trên hình 2-20.

b) Đặc tính tần số lôgarit

– Đ.T.B.L

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega.$$

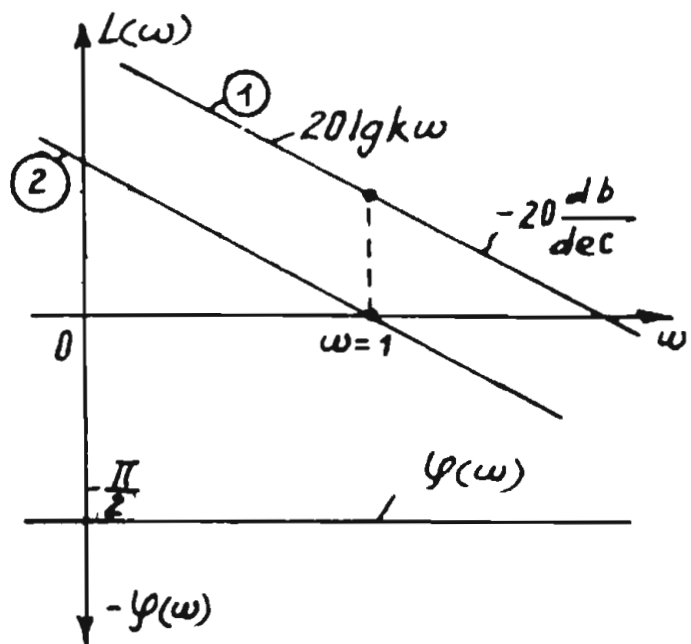
Đặc tính vẽ trên hình 2-21 (đường 1).

Nếu $k = 1$ ta có $L(\omega)$ ứng với đường 2 luôn đi qua tần số $\omega = 1$ trên trục hoành và có độ nghiêng là -20 db/dec .

– Đ.T.P.L

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg(-\infty) =$$

$$= -\pi/2$$



Hình 2-21.

Đặc tính vẽ trên hình 2-21.

2. Đặc tính thời gian

a) Hàm quá độ

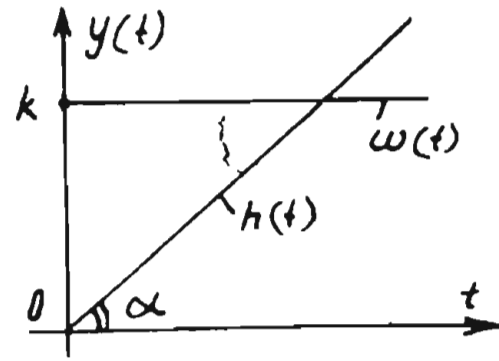
Từ phương trình:

$$y = k \cdot \int_0^t x \, dt \text{ nếu } x(t) = 1(t) \text{ thì:}$$

$$h(t) = k \cdot t \cdot 1(t).$$

b) hàm trọng lượng

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \cdot 1(t).$$



Hình 2-22.

2-8. ĐẶC TÍNH ĐỘNG HỌC CỦA KHÂU CHẬM TRỄ

Khâu chậm trễ là khâu động học mà sau một khoảng thời gian xác định, lượng ra lặp lại lượng vào không bị méo tín hiệu.

Phương trình của khâu chậm trễ có dạng:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad (2-61)$$

Phần tử thuộc khâu chậm trễ như: băng tải; đường ống dẫn nhiệt nếu bỏ qua tổn thất,

Hàm truyền đạt của khâu chậm trễ là;

$$W(p) = e^{-\tau p} \quad (2-62)$$

1. Đặc tính tần số

a) Đặc tính tần số biên - pha

$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

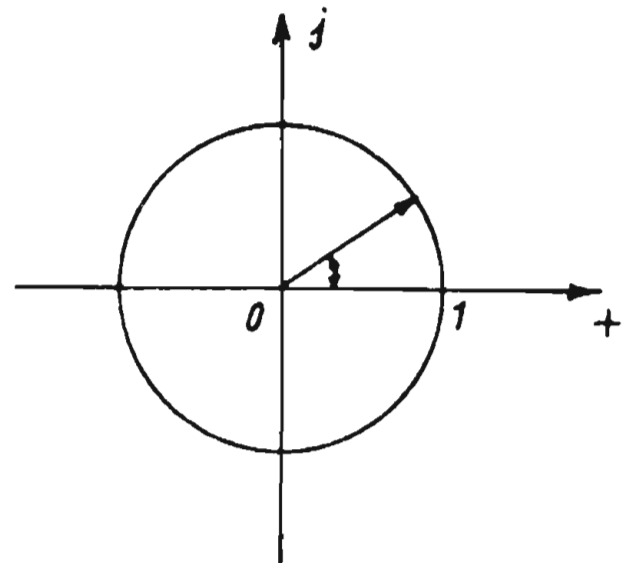
Biên độ $A(\omega) = 1$; pha $\varphi(\omega) = -\tau\omega$.

Đặc tính $W(j\omega)$ là một vòng tròn bán kính bằng 1, tâm là gốc O.

b) Đặc tính tần số lôgarit

- Đ.T.B.L: Vì $A(\omega) = 1$ nên

$$L(\omega) = 0$$



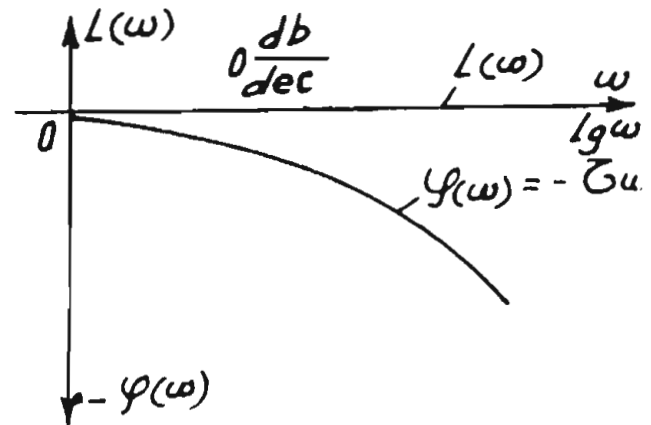
Hình 2-23.

Đặc tính $L(\omega)$ trùng trục hoành vẽ trên hình 2-24.

– Đ.T.P.L:

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Đặc tính vẽ trên hình 2-24.



Hình 2-24.

2. Đặc tính thời gian

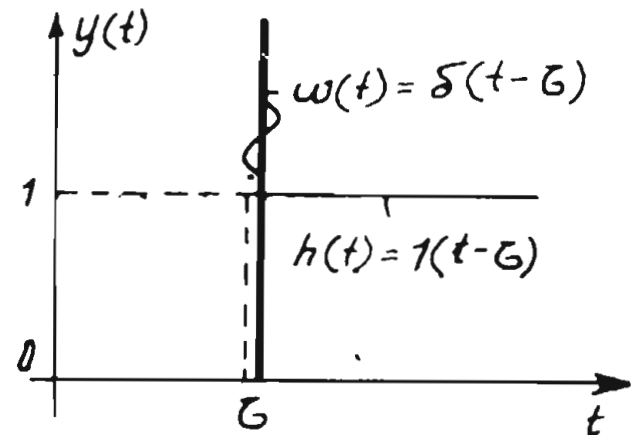
a) Hàm quá độ:

Từ phương trình (2-61) ta có:

$$h(t) = 1(t - \tau).$$

b) Hàm trọng lượng:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 1(t - \tau) = \\ &= \delta(t - \tau). \end{aligned}$$



Hình 2-25.

Đặc tính $h(t)$ và $w(t)$ vẽ trên hình 2-25.

2-9. ĐẶC TÍNH TẦN SỐ CỦA HỆ THỐNG Đ.K.T.Đ

Sau khi đã xây dựng được đặc tính động học của các khâu điển hình, ta tiến hành xây dựng đặc tính tần số của cả hệ thống Đ.K.T.Đ.

Dạng tổng quát hàm truyền đạt của hệ thống hở:

$$W_h(p) = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} k_i \prod_{i=1}^{m_2} (T_{1i}p + 1)}{p^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_{2i}p + 1) \prod_{i=1}^{n_2} (T_{3i}^2 p^2 + 2\xi T_{3i}p + 1)} \quad (2-63)$$

đó là một tích số của nhiều thừa số động học.

Nếu thế $p = j\omega$ vào (2-63) ta sẽ có đặc tính tần số biên – pha của hệ thống hở

Khi đó (2-63) được viết thành

$$W_h(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \cdot e^{j \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)} \quad (2-64)$$

trong đó:

$$\text{Biên độ:} \quad A_h(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \quad (2-65)$$

$$\text{Pha:} \quad \varphi_h(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (2-66)$$

Hoặc (2-64) có thể viết dưới dạng khác:

$$W_h(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (2-67)$$

– Với các giá trị ω khác nhau có thể tính ra $A_h(\omega)$ và $\varphi_h(\omega)$ (hoặc $P(\omega)$ và $Q(\omega)$) để xây dựng nên đặc tính tần số biên – pha.

– Từ (2-65) ta có thể tìm ra đặc tính tần số biên độ lôgarit của hệ thống hở.

$$L_h(\omega) = 20 \lg A_h(\omega) = \sum_{i=1}^n 20 \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega). \quad (2-68)$$

Như vậy Đ.T.B.L của cả hệ thống hở sẽ bằng tổng của các Đ.T.B.L của các khâu thành phần (của các thừa số động học).

– Từ (2-66) có thể xây dựng Đ.T.P.L của hệ thống hở bằng tổng của Đ.T.P.L của các khâu thành phần.

Ví dụ 2-2. Xây dựng Đ.T.B.L và Đ.T.P.L của hệ thống hở có hàm truyền đạt sau đây:

$$W_h(p) = \frac{k \cdot (T_2 + 1)}{p \cdot (T_1 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)^2 \cdot (T_4^2 p^2 + 2\xi T_4 p + 1)} \quad (2-69)$$

Giải. Giả sử $k > 1$; $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$; $0,38 < \xi < 0,71$.

Từ (2-69) viết tách thành các khâu riêng:

$$W_h(p) = \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot (T_2 p + 1) \cdot \frac{1}{(T_3 p + 1)^2} \cdot \frac{1}{T_4^2 p^2 + 2\xi T_4 p + 1}$$

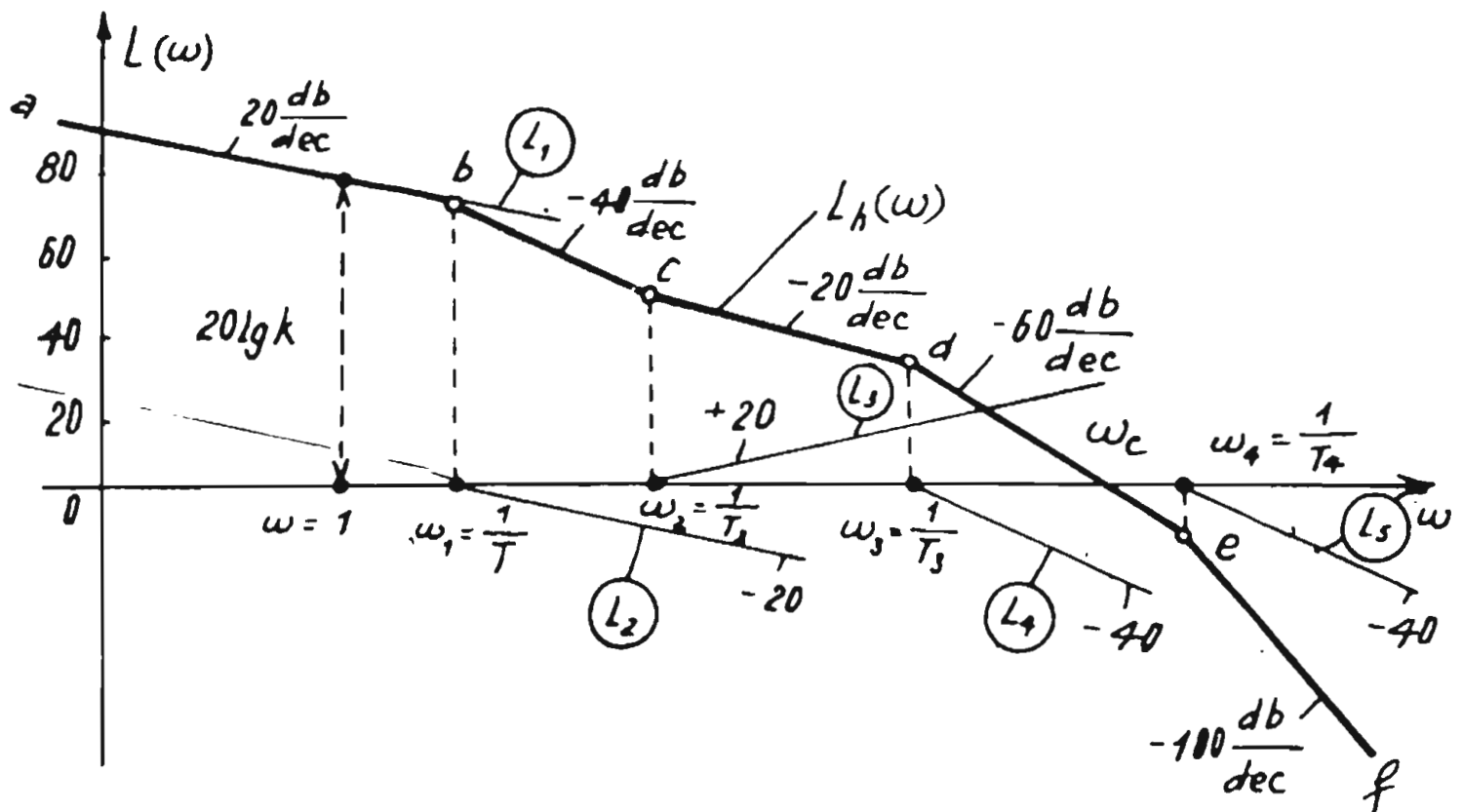
$$= W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p) \cdot W_5(p)$$

Đối với $W_1(p)$; ... ; $W_5(p)$ là các khâu điển hình có đặc tính tần số đã biết trong các tiết trước.

+ Theo (2-68) ta có đặc tính tần số biên độ logarit:

$$L_h(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega) + L_5(\omega). \quad (2-70)$$

Trên hình 2-26 xây dựng được các đặc tính L_i riêng rẽ và cộng đồ thị theo (2-70) ta có đặc tính $L_h(\omega)$ của hệ thống hở.



Hình 2-26.

Qua đặc tính $L_h(\omega)$ ta thấy: khi chuyển qua đoạn đặc tính của một khâu $W_i(p)$ thì độ nghiêng của Đ.T.B.L của hệ thống bằng độ nghiêng của $L_i(\omega)$ cộng với độ nghiêng của đoạn đặc tính biên độ lôgarit của hệ thống ứng với khâu $W_{i-1}(p)$. Cụ thể với hình 2-26 ta

có ab ứng với khâu tích phân lý tưởng k/p có độ nghiêng -20 db/dec, đoạn bc có độ nghiêng bằng độ nghiêng đặc tính $L_2(\omega)$ của khâu $W_2(p) = 1/T_2p + 1$ (tức là -20 db/dec) cộng với độ nghiêng đoạn đặc tính ab trước đó là -20 db/dec, tức là bc có độ nghiêng -40 db/dec; Tương tự đoạn cd có độ nghiêng là -40 db/dec cộng với độ nghiêng của khâu $W_3(p) = T_2p + 1$ là $+20$ db/dec tức là $(-40 + 20) = -20$ db/dec; Đoạn de có độ nghiêng -20 db/dec cộng với độ nghiêng của khâu quán tính bậc hai $W_4(p) = 1/(T_3p + 1)^2$ (hai khâu quán tính bậc một $1/T_3p + 1$ tiếp nhau), là -40 db/dec, tức là -60 db/dec. Đoạn ef có độ nghiêng -60 db/dec cộng với độ nghiêng của khâu dao động là -40 db/dec tức là $-60 + (-40) = -100$ db/dec. Các điểm chuyển đổi đoạn đặc tính có các độ nghiêng khác nhau chính là các tần số gây $\omega_i = 1/T_i$ của các khâu thành phần chỉ rõ trên hình 2-26.

+ Theo (2-66) ta có Đ.T.P.L:

$$\varphi_h(\omega) \approx \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) + \varphi_5(\omega).$$

$$\varphi_h(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg T_1\omega + \arctg T_2\omega - 2\arctg T_3\omega - \arctg \frac{2\xi\omega T_4}{1 - \omega^2 T_4^2} \quad (2-71)$$

Với các giá trị ω khác nhau ta tính các $\varphi_i(\omega)$ thành phần và qua biểu thức (2-71) ta xây dựng được Đ.T.P.L $\varphi_h(\omega)$ của hệ thống hở.

Ví dụ 2-3. Xây dựng Đ.T.B.L và Đ.T.P.L của hệ thống có hàm truyền đạt sau đây:

$$W_h(p) = \frac{k(T_1p + 1)(T_3p + 1)^3}{p^2(T_2p + 1)^2(T_4^2p^2 + 2\xi T_4p + 1)}$$

Giải. Giả sử $k > 1$; $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$; $0,38 \leq \xi \leq 0,71$.

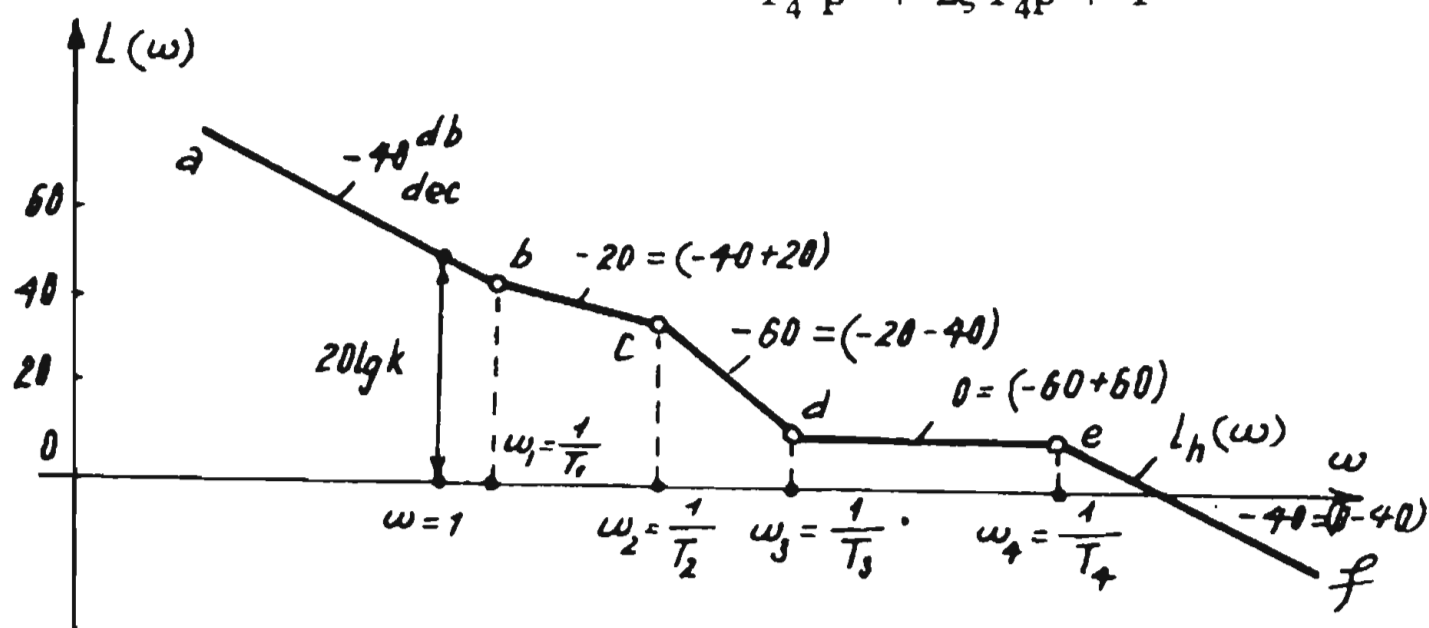
– Xác định các tần số gây:

$$\omega_1 = 1/T_1; \omega_2 = 1/T_2; \omega_3 = 1/T_3; \omega_4 = 1/T_4$$

Trên hình 2-27 đặc tính $L_h(\omega)$ bao gồm các đoạn:

ab tương ứng với khâu $W_1(p) = k/p^2$ (-40 db/dec)

{	bc tương ứng với khâu	$W_2(p) = T_p + 1$ (+20 db/dec)
	cd tương ứng với khâu	$W_3(p) = \frac{1}{(T_2 p + 1)^2}$ (-40 db/dec)
	de tương ứng với khâu	$W_4(p) = (T_3 p + 1)^3$ (+60 db/dec)
	ef tương ứng với khâu	$W_5(p) = \frac{1}{T_4^2 p^2 + 2\xi T_4 p + 1}$ (-40 db/dec)



Hình 2-27.

Đ.T.P.L: $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) + \varphi_5(\omega)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(\omega) = -2\pi/2 \\ \varphi_2(\omega) = + \arctg T_1 \omega \\ \varphi_3(\omega) = - 2 \arctg T_2 \omega \\ \varphi_4(\omega) = + 3 \arctg T_3 \omega \\ \varphi_5(\omega) = - \arctg \frac{2\xi \omega T_4}{1 - \omega^2 T_4^2} \end{array} \right.$$

Chương 3

ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

3-1. KHÁI NIỆM CHUNG

Các chương 1 và 2 đã trình bày mô tả toán học và đặc tính tần số của hệ thống Đ.K.T.Đ. Trong chương này sẽ sử dụng các tư liệu của hai chương đó để giải quyết nhiệm vụ đầu tiên khi phân tích hệ thống ĐKTD là *xác định tính ổn định* của nó.

Thực ra nói một hệ thống ổn định nghĩa là nói một số đại lượng được điều khiển nào đó ổn định.

Một hệ thống ĐKTD thường biểu diễn bởi một phương trình vi phân tổng quát:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} a_1 + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x, (3-1)$$

sẽ bao gồm hai quá trình: quá trình xác lập và quá trình quá độ, đặc trưng bằng nghiệm:

$$y(t) = y_o(t) + y_{qd}(t), (3-2)$$

trong đó: – $y_o(t)$ là nghiệm riêng của (3-1) có vế phải, đặc trưng cho quá trình xác lập.

– $y_{qd}(t)$ là nghiệm tổng quát của (3-1) không có vế phải, đặc trưng cho quá trình quá độ.

Quá trình xác lập là một quá trình ổn định. Vấn đề chỉ còn xét quá trình quá độ $y_{qd}(t)$.

Dạng nghiệm tổng quát $y_{qd}(t)$ là:

$$y_{qd}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, (3-3)$$

Trong đó: p_i là nghiệm của phương trình đặc tính:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (3-4)$$

p_i có thể là nghiệm thực cũng có thể là nghiệm phức liên hợp.

Một hệ thống được gọi là ổn định nếu quá trình quá độ tắt dần theo thời gian. Hệ thống không ổn định nếu quá trình quá độ tăng dần theo thời gian. Hệ thống ở biên giới ổn định nếu quá trình quá độ không đổi hoặc dao động không tắt dần.

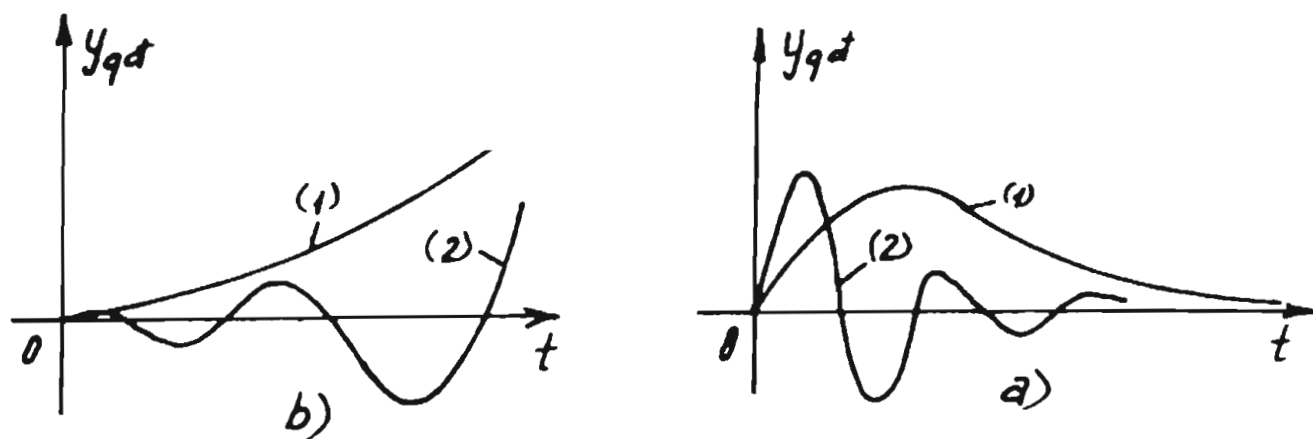
Cách biểu diễn toán học định nghĩa hệ thống ổn định (hình 3-1.a):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} = 0, \quad (3-5)$$

và hệ thống không ổn định (hình 3-1b):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd}(t) = \infty. \quad (3-6)$$

Hệ thống ĐKTD được xét là *hệ dừng*, tức là các hệ số a_i trong (3-4) không biến đổi theo thời gian.



Hình 3-1.

Trong (3-5) và (3-6) vì $C_i = \text{const}$:

– Khi p_i là các nghiệm thực: $p_i = \alpha_i$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{p_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{\alpha_i t} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha_i < 0 \text{ (Hệ ổn định)} \\ C_i & \text{nếu } \alpha_i = 0 \text{ (Hệ ở biên giới ổn định)} \\ \infty & \text{nếu } \alpha_i > 0 \text{ (Hệ không ổn định)} \end{cases}$$

(Đường (1) trên hình 3-1b có $\alpha_i > 0$; Đường (1) trên hình 3-1a có $\alpha_i < 0$).

– Khi p_i là các cặp nghiệm phức liên hợp:

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$$

$$C_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} = 2A_i e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\beta_i t + \varphi_i).$$

0 nếu $\alpha_i < 0$ (ổn định)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2A_i e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\beta_i t + \varphi_i) = \begin{matrix} \text{Không xác định nếu } \alpha_i = 0 \\ \text{(biên giới)} \\ \infty \text{ nếu } \alpha_i > 0 \text{ (không ổn định)} \end{matrix}$$

(Đường (2) trên hình 3-1 b có $\alpha_i > 0$; Đường (2) trên hình 3-1 -a có $\alpha_i < 0$).

Qua đây ta rút ra ba kết luận quan trọng:

1) Hệ thống ổn định nếu tất cả nghiệm của phương trình đặc tính (3-4) có phần thực âm: (Các nghiệm ở nửa trái mặt phẳng phức)

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0. (i = 1, 2, \dots, n)$$

2) Hệ thống sẽ không ổn định nếu chỉ cần có một nghiệm có phần thực dương: (Có một nghiệm ở nửa phải mặt phẳng phức)

$$\operatorname{Re}\{p_i\} > 0. (i = 1)$$

3) Hệ thống ở giới hạn ổn định nếu chỉ cần có một nghiệm có phần thực bằng không còn các nghiệm còn lại có phần thực âm (Có một nghiệm ở trên trục ảo và các nghiệm còn lại nửa trái mặt phẳng phức).

$$\operatorname{Re}\{p_i\} = 0 (i = 1)$$

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0. (i = 2, 3, \dots, n).$$

Nhận xét:

Muốn xét ổn định của một hệ thống, ta phải tìm nghiệm phương trình vi phân (3 - 1) rồi lấy giới hạn theo (3 - 5). Thực ra việc giải phương trình vi phân (3 - 1) rất khó khăn, nên việc xét ổn định được thay thế bằng cách tìm nghiệm p_i của phương trình đặc tính (3-4), là phương trình đại số. Nếu thế cũng chưa phải là đơn giản trong tính toán (chẳng hạn khi các phương trình đại số có bậc 4 trở lên); cho nên ta phải tìm một phương pháp gián tiếp khác, đơn giản

hơn để đánh giá tính ổn định của hệ thống. Các phương pháp gián tiếp đó là sự ra đời của các *tiêu chuẩn ổn định* ta sẽ xét sau đây.

Các tiêu chuẩn ổn định chia thành hai loại:

– *Tiêu chuẩn đại số*: Tìm điều kiện ràng buộc giữa các hệ số của phương trình đặc tính để hệ thống ổn định. Đó là tiêu chuẩn ổn định Routh – Hurwitz.

– *Tiêu chuẩn ổn định tần số*: Thông qua đặc tính tần số của hệ thống để xét ổn định.

Đó là tiêu chuẩn ổn định Mikhailôv, tiêu chuẩn Nyquist.

Muốn xét ổn định của hệ thống khi có một thông số biến đổi trong một phạm vi nào đó ta phải dùng đến phương pháp chia miền ổn định hoặc phương pháp quỹ đạo nghiệm số.

Nội dung chính của chương này là trình bày hai vấn đề cơ bản:

– Xét ổn định của hệ thống Đ K.T.Đ theo các tiêu chuẩn đại số và tiêu chuẩn tần số.

– Tìm miền xác định của thông số biến đổi để hệ thống ĐKTD ổn định.

3-2. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH ĐẠI SỐ ROUTH-HURWITZ

3-2-1. Điều kiện ổn định cần thiết của hệ thống ĐKTD

Trước khi xét các tiêu chuẩn ổn định, ta cần tìm một dấu hiệu nào đó thật dễ dàng và đơn giản để phán đoán tính ổn định của hệ thống. Dấu hiệu đó chính là điều kiện ổn định cần thiết.

Phát biểu:

"Điều kiện ổn định cần thiết của hệ thống ĐKTD tuyến tính là các hệ số của phương trình đặc tính dương".

(Thực ra tổng quát phải nói hệ số của phương trình đặc tính cùng dấu đại số nhưng vì dấu âm sẽ chuyển về dấu dương khi nhân phương trình với số (-1))

Ta có thể kiểm chứng lại điều kiện trên nếu giả sử hệ thống ổn

định. Như thế thì nghiệm của phương trình đặc tính sẽ là:

$$p_1 = -\alpha_1, \quad p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\beta_2; \quad \dots; \quad p_n = -\alpha_n,$$

trong đó $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Khi đó liệu các hệ số của phương trình đặc tính có dương hay không?

Quả vậy nếu phương trình đặc tính:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3-4)$$

có n nghiệm, có thể biểu diễn thành:

$$a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0$$

Hoặc là theo giả thiết của ta sẽ có:

$$a_0 (p + \alpha_1) (p + \alpha_2 - j\beta_2)(p + \alpha_2 + j\beta_2) \dots (p + \alpha_n) = 0$$

$$a_0 (p + \alpha_1) [(p + \alpha_2)^2 + \beta_2^2] \dots (p + \alpha_n) = 0 \quad (3-7)$$

Tiếp tục khai triển và sắp xếp về dạng (3-4) sẽ có:

$$a'_0 p^n + a'_1 p^{n-1} + \dots + a'_n = 0.$$

Các hệ số $a'_0; a'_1; \dots; a'_n$ luôn luôn dương vì các số hạng trong (3-7) là số dương và phép tính chỉ có phép cộng và bình phương.

Vì thế khi hệ thống ổn định bắt buộc các hệ số của phương trình đặc tính phải dương.

Ví dụ 3-1. Hệ thống ĐKTD có phương trình đặc tính:

$$0,04p^3 + 0,4p^2 + p + 50 = 0$$

có các hệ số $a_i > 0$ nên có thể ổn định (vì chưa có điều kiện đủ nên chưa quả quyết kết quả!).

Ví dụ 3-2. Hệ thống ĐKTD có phương trình đặc tính:

$$p^4 + 2p^3 - 0,5p^2 + 3p + 20 = 0$$

khẳng định là không ổn định vì có hệ số $a_2 = -0,5 < 0$ nên không thỏa mãn điều kiện ổn định cần thiết.

3-2.2. Tiêu chuẩn Routh (không chứng minh)

1. Phát biểu:

"Điều kiện cần và đủ để cho hệ thống tuyến tính ổn định là tất cả các số hạng trong cột thứ nhất của bảng Routh dương".

2. Cách lập bảng Routh

Giả sử với phương trình đặc tính bậc 5:

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$$

Hai hàng đầu của bảng Rao chỉ gồm các hệ số của phương trình đặc tính sắp xếp theo mũi tên:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_0 & \nearrow & a_2 & \nearrow & a_4 & \nearrow & a_6 \\ a_1 & \searrow & a_3 & \searrow & a_5 & \searrow & a_7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} b_0 & b_2 & b_4 \\ b_1 & b_3 & b_5 \end{array} \right. \quad (3-8)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} d_0 \\ d_1 \end{array} \right.$$

Các hàng sau có các số hạng tính theo biểu thức:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\ b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ b_4 = - \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{b_0} ; \\ b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}}{b_0} ; \\ b_5 = \frac{- \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_0 & 0 \end{vmatrix}}{b_0} ; \end{array} \right. \quad (3-9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = - \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1} \\ c_2 = - \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1} \\ \text{v.v...} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_0 = \frac{- \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_3} ; \\ d_1 = \frac{- \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_0 & 0 \end{vmatrix}}{b_0} ; \end{array} \right.$$

Nhân xét rút ra tính quy luật lập bảng Routh

Mỗi một số hạng trong một hàng của bảng Routh là một thương số có:

– Tử số: là một định thức hạng hai mang dấu âm với cột thứ nhất của nó cũng là cột thứ nhất của hai hàng đứng sát trên hàng có số hạng đang tính, còn cột thứ hai của định thức chính là cột đứng sát bên phải số hạng đang tính cũng của hai hàng trên

– Mẫu số: trong tất cả các số hạng của một hàng có chung mẫu số chính là số hạng đứng ở cột thứ nhất và ở hàng sát ngay trên hàng đang tính

Ví dụ 3-3. Cho phương trình đặc tính của hệ thống:

$$p^4 + 2p^3 + 8p^2 + 4p + 3 = 0$$

Lập bảng Routh

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 8 & & 3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ 2 & & 4 & & \\ 6 & & 3 & & \\ 3 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}$$

Hệ thống ổn định vì tất cả số hạng trong cột thứ nhất dương.

Ví dụ 3-4. Cho phương trình đặc tính của hệ thống

$$p^5 + p^4 + 3p^3 + 4p^2 + p + 2 = 0$$

Lập bảng Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 & & 1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 1 & & 4 & & 2 \\ -1 & & -1 & & \\ 3 & & 2 & & \\ -1/3 & & & & \\ 2 & & & & \end{array}$$

Hệ thống không ổn định vì các số hạng trong cột thứ nhất không cùng dấu đại số. Trong cột thứ nhất có 4 lần đảo dấu (+1)

→ $(-1) \rightarrow (+3) \rightarrow (-1/3) \rightarrow (+2)$ cho nên có 4 nghiệm có phần thực dương (Tính chất này không chứng minh).

3. Các tính chất của bảng Routh và các điểm chú ý

- a) Có thể nhân hoặc chia tất cả các số hạng trong cùng một hàng của bảng Routh với một số dương, kết quả tính toán vẫn không thay đổi.
- b) Số lần đổi dấu của các số hạng trong cột thứ nhất của bảng Routh bằng số nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực dương.
- c) Nếu trong cột thứ nhất có một hệ số bằng không thì hệ thống cũng không ổn định.
- d) Từ cột thứ nhất của bảng Routh ta có thể tính được giá trị tới hạn của một tham số biến đổi nào đó trong hệ thống, như hệ số khuếch đại chẳng hạn.

Ví dụ 3-5. Cho hệ thống gồm ba khâu quán tính nối tiếp có phương trình đặc tính:

$$(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) + k = 0 \quad (3-10)$$

Khai triển ra sẽ có:

$$\begin{matrix} T_1T_2T_3p^3 & + & (T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)p^2 & + & (T_1 + T_2 + T_3)p & + & 1 + k & = & 0 \\ (a_0) & & (a_1) & & (a_2) & & (a_3) \end{matrix}$$

Bảng Routh

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & a_0 & a_2 \\ & \downarrow & \downarrow \\ & a_1 & a_3 \\ & \nearrow & \\ & (a_1a_2 - a_0a_3) & \\ & \quad \quad \quad \downarrow & \\ & \quad \quad \quad a_1 & \\ & a_3 & \end{array} \right. \quad (3-11)$$

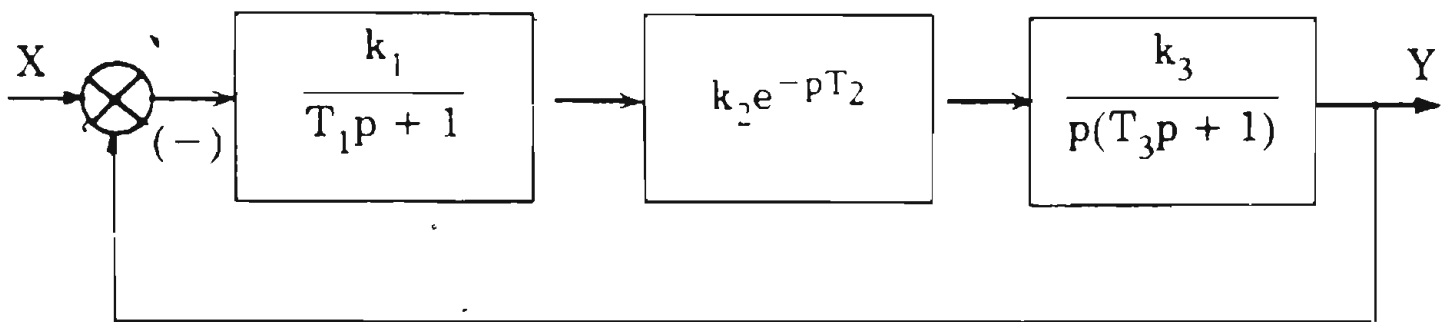
Điều kiện ổn định là: $a_0 > 0; a_1 > 0; a_3 > 0$
và: $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$

tức là:

$$(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)(T_1 + T_2 + T_3) > T_1T_2T_3(1 + k)$$

$$k < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1 = k_{th}$$

e) Nếu trong hệ thống có một khâu chậm trễ với hàm truyền đạt e^{-pT_2} Ví dụ cho hệ thống vẽ trên hình 3-2:



Hình 3-2.

Phương trình đặc tính hệ thống kín:

$$T_1T_3p^3 + (T_1 + T_3)p^2 + p + k_1k_2k_3e^{-pT_2} = 0 \quad (3-12)$$

thì muốn sử dụng tiêu chuẩn ổn định Routh ta phải biến phương trình đặc tính (3-12) về dạng phương trình đại số tuyến tính. Muốn vậy ta phải dùng công thức khai triển Taylo gần đúng hàm e^{-pT} :

$$e^{-pT} = 1 + \frac{-pT}{1!} + \frac{(-pT)^2}{2!} + \frac{(-pT)^3}{3!} + \dots \quad (3-13)$$

Lấy hai số hạng đầu ta được:

$$e^{-pT} \approx 1 - pT \quad (3-14)$$

Khi đó (3-12) có dạng:

$$T_1T_3p^3 + (T_1 + T_3)p^2 + (1 - k_1k_2k_3T_2)p + k_1k_2k_3 = 0 \quad (3-15)$$

Từ phương trình đại số tuyến tính (3-15) ta lập bảng Routh để xét ổn định. Vì khai triển (3-14) là gần đúng, cho nên xét ổn định của hệ thống có khâu chậm trễ e^{-pT} bằng tiêu chuẩn đại số ít chính

xác hoàn toàn. Tuy nhiên trong một chừng mực nào đó, đối với các hệ thống ít đòi hỏi độ chính xác tuyệt đối, vẫn áp dụng được.

g) Tiêu chuẩn Routh áp dụng cho hệ thống có phương trình đặc tính cấp bất kỳ.

3-2.3. Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz

1. Phát biểu:

"Điều kiện cần và đủ để cho hệ thống tuyến tính ổn định là hệ số $a_0 > 0$ và các định thức Hurwitz dương".

2. Cách lập định thức Hurwitz

Ví dụ 3-6. Cho hệ thống có phương trình đặc tính bậc ba:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (3-16)$$

(Tổng quát Δ_n có n cột và n hàng. Đường chéo chính của Δ_n bắt đầu từ a_1 liên tiếp đến a_n . Các số hạng trong cùng một cột trên đường chéo chính có chỉ số tăng dần, còn dưới đường chéo chính có chỉ số giảm dần. Các số hạng có chỉ số cao hơn n và bé hơn 0 đều ghi số 0). Đối với hệ thống bậc 1 và 2, điều kiện cần, các hệ số a_0, a_1, a_2 dương cũng chính là điều kiện đủ.

Đối với hệ thống bậc 3 điều kiện cần và đủ để ổn định là:

$$a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0$$

(vì $a_3 > 0$ và $\Delta_2 > 0$ nên Δ_3 không cần tính).

3. Chú ý:

a) Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz chỉ là một dạng biểu diễn khác của tiêu chuẩn Routh (Độc giả có thể so sánh Δ_2 trong tiêu chuẩn Hurwitz với hệ số b_0 trong tiêu chuẩn Routh chỉ khác nhau 1 hệ số a_0 ở mẫu số).

b) Tiêu chuẩn Hurwitz thường dùng với hệ thống có phương trình đặc tính bậc thấp (dưới bậc 4). Cả tiêu chuẩn Routh và Hurwitz đều dùng để xét ổn định cho cả hệ thống hở và hệ thống kín.

c) Tương tự tiêu chuẩn Routh có thể dùng tiêu chuẩn Hurwitz để tìm k_{th}

3-3. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TẦN SỐ NYQUIST MIKHAILÔV

3-3.1. Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính tần số biên pha

1. Phát biểu:

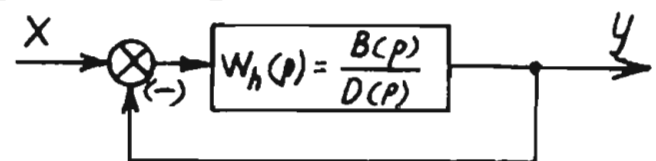
"Điều kiện cần và đủ để hệ thống kín ổn định:

– Khi hệ hở ổn định (hoặc ở giới hạn ổn định) là đặc tính tần số biên - pha của hệ hở $W_h(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0)$.

– Khi hệ hở không ổn định là đặc tính tần số biên - pha của hệ hở bao điểm $(-1, j0)$ $m/2$ vòng kín nếu ω biến đổi từ 0 đến ∞ (trong đó m là số nghiệm của phương trình đặc tính của hệ hở có phần thực dương)"

2. Chứng minh: Xét cho hệ thống một vòng có sơ đồ cấu trúc cơ bản vẽ trên hình 3-3.

Để tiện chứng minh tiêu chuẩn Nyquist ta xét hai nguyên lý cơ bản sau:

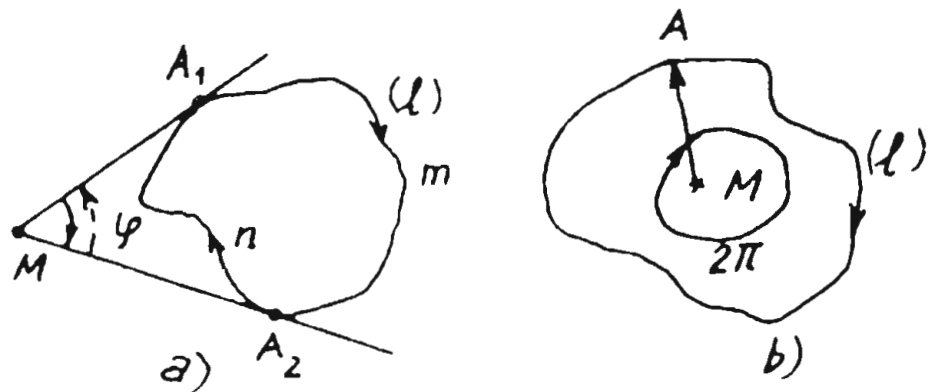


Hình 3-3.

a) Nguyên lý bao và không bao:

– Nếu một điểm M không rơi vào trong một đường cong kín l , ta

nói rằng đường cong l không bao điểm M (hình 3-4.a). Từ M , kẻ hai tiếp tuyến vào đường cong l . Từ $A_1 \rightarrow A_2$ theo mũi tên, véc tơ MA quay 1 góc là $-\varphi$ còn từ $A_2 \rightarrow A_1$ theo mũi tên, véc tơ MA



Hình 3-4.

quay 1 góc là $+\varphi$. Do đó đầu mút A của véc tơ MA trượt trên cả đường cong kín l theo chiều mũi tên thì góc quay tổng của MA là $-\varphi + \varphi = 0$.

– Nếu một điểm M rơi vào trong một đường cong l , ta nói rằng đường cong kín l bao điểm M (hình 3-4, b)

Nếu véc tơ MA có đầu mút chạy trên cả đường cong l theo chiều mũi tên thì góc quay tổng của MA là 2π

Nếu đường cong l bao M hai lần thì góc quay tổng của MA là 4π (hai vòng kín) (hình 3-5).

b) Nguyên lý góc quay :

Đối với phương trình đặc tính:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3-17)$$

có n nghiệm, nếu thay $p = j\omega$ ta có:

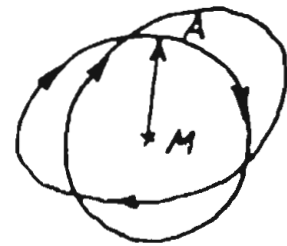
$$a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) = 0 \quad (3-18)$$

Giả sử trong (3-17) có m nghiệm có phần thực dương còn $(n - m)$ nghiệm có phần thực âm tương ứng các nghiệm phân bố ở bên phải và bên trái trục ảo (hình 3-6).

Nếu nghiệm p_i ở bên trái trục ảo; đối với véc tơ $\overrightarrow{MX} = (j\omega - p_i)$

Khi ω chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$\Delta \arg_{-\infty < \omega < \infty} (j\omega - p_i) = +\pi \quad (3-19)$$



Hình 3-5.

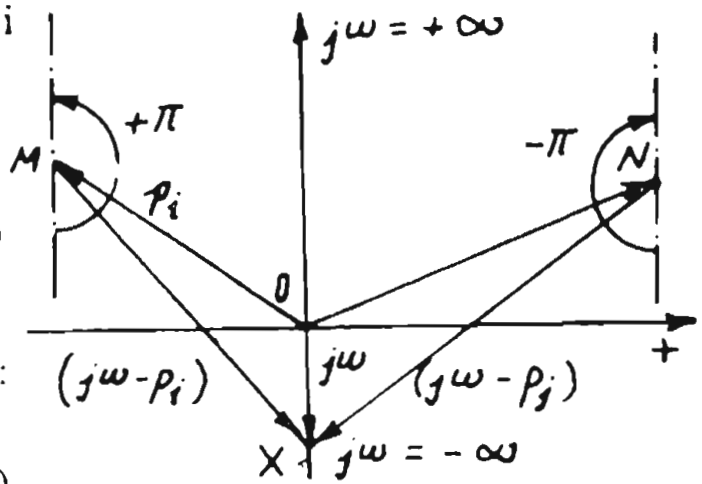
Còn p_j ở bên phải trục ảo, đối với véc tơ $NX = (j\omega - p_j)$

Khi ω chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$\Delta \arg_{-\infty < \omega < \infty} (j\omega - p_j) = -\pi. \quad (3-20)$$

Phương trình (3-18) có thể viết:

$$a_0 \prod_{i=1}^{n-m} (j\omega - p_i) \prod_{j=1}^m (j\omega - p_j) = 0. \quad (3-21)$$



Hình 3-6.

Khi đó:

$$\Delta \arg_{-\infty < \omega < \infty} \prod_{i=1}^{n-m} (j\omega - p_i) = + (n-m)\pi. \quad (3-22)$$

$$\Delta \arg_{-\infty < \omega < \infty} \prod_{j=1}^m (j\omega - p_j) = -m\pi. \quad (3-23)$$

- Khi hệ hở ổn định: Xét véc tơ MA trên hình 3-7 có:

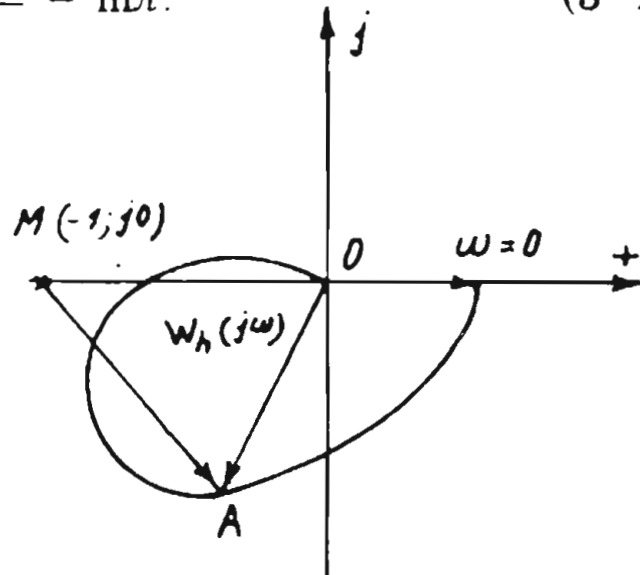
$$MA = 1 + OA = 1 + W_h(j\omega)$$

Vì theo hình 3-3:

$$W_h(p) = \frac{B(p)}{D(p)} \quad \text{nên:}$$

$$MA = 1 + \frac{B(p)}{D(p)} =$$

$$= \frac{D(p) + B(p)}{D(p)} = \frac{A(p)}{D(p)},$$



Hình 3-7.

trong đó bậc của $B(p) \leq$ bậc của $D(p)$.

$D(p) = 0$ là phương trình đặc tính hệ hở có bậc n .

$$W_k(p) = \frac{W_h(p)}{1 + W_h(p)} = \frac{B(p)}{D(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$A(p) = D(p) + B(p) = 0$ là phương trình đặc tính hệ kín cũng có bậc n .

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{MA} = \frac{A(p)}{D(p)} = \frac{\text{Đa thức đặc tính hệ kín bậc } n}{\text{Đa thức đặc tính hệ hở bậc } n} \quad (3-24)$$

Véc tơ $\overrightarrow{MA}$ nối điểm $M(-1, j0)$ với 1 điểm A chạy trên đường cong $W_h(j\omega)$, có liên hệ với hệ kín và hệ hở qua biểu thức (3-24). Nếu đặc tính $W_h(j\omega)$ không bao điểm $M(-1, j0)$ tức là

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg \overrightarrow{MA} = 0.$$

Khi hệ hở ổn định, phương trình $D(p) = 0$ có n nghiệm ở bên trái trục ảo, theo (3-19) và (3-22):

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg D(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg (j\omega - p_i) = + n\pi$$

Hệ thống kín muốn ổn định, phương trình $A(p) = 0$ có n nghiệm ở bên trái trục ảo nên:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg A(j\omega) = + n\pi$$

Tính góc quay của MA theo (3-24):

$$\begin{aligned} \Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg MA &= \Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg A(j\omega) - \Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg D(j\omega) \\ &= n\pi - n\pi = 0 \end{aligned}$$

Vậy khi hệ hở ổn định, hệ kín muốn ổn định, đặc tính của $W_h(j\omega)$ phải không bao điểm có tọa độ $(-1, j0)$.

– Khi hệ hở không ổn định:

Trong phương trình đặc tính $D(p) = 0$ có m nghiệm bên phải trục ảo và $(n-m)$ nghiệm ở bên trái trục ảo. Khi đó theo (3-21); (3-22); (3-23) ta có:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg D(j\omega) = (n - 2m)\pi. \quad (3-26)$$

Hệ kín muốn ổn định thì $\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg A(j\omega) = + n\pi.$

Do đó theo (3-24) thì:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg MA = n\pi - (n - 2m)\pi = m.2\pi.$$

Vì đặc tính $W_h(j\omega)$ đối xứng qua trục hoành đối với nhánh có $\omega = 0 \div \infty$ và nhánh có $\omega = -\infty \div 0$ cho nên

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg MA = \frac{1}{2} m.2\pi = m/2 \text{ vòng tròn.}$$

Điều này chứng tỏ đặc tính $W_h(j\omega)$ bao điểm $M(-1, j0)$ $m/2$ vòng kín khi ω chạy từ 0 đến ∞

– Khi hệ hở ở biên giới ổn định.

Ta xét trường hợp đơn giản khi $D(p) = 0$ có một nghiệm $p_1 = 0$ và $(n-1)$ nghiệm ở bên trái trục ảo, tức là trong cấu trúc của hệ thống có một khâu tích phân

$$D(p) = a_0 p \prod_{i=1}^{n-1} (p - p_i) = 0. \quad (3-27)$$

Hoặc:

$$W_h(p) = \frac{B(p)}{p \cdot D_1(p)}$$

$$\text{Xét véc tơ: } MA = 1 + W_h(p) = \frac{pD_1(p) + B(p)}{pD_1(p)} = \frac{A(p)}{pD_1(p)}. \quad (3-28)$$

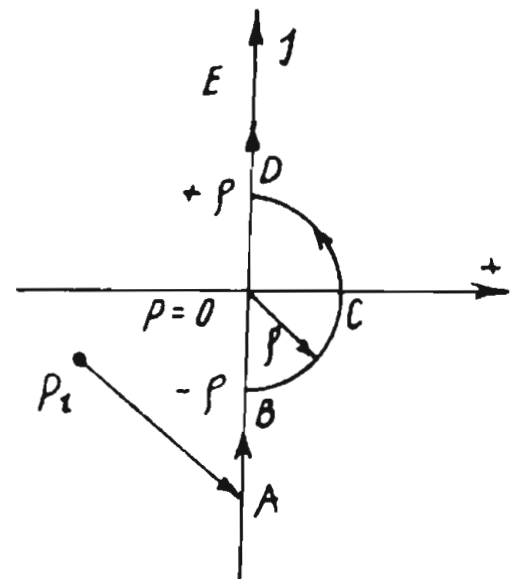
Để tránh điểm gián đoạn $\omega = 0$ trong (3-28), ta uốn cong trục ảo bằng một nửa vòng tròn, bán kính ρ rất bé. Khi đó có: $p = \rho \cdot e^{j\varphi}$;

– $p = j\omega$; $-\infty < \omega < -\rho$. (Đoạn AB)

$$\varphi = \Delta \arg j\omega = 0.$$

– $p = j\omega$; $-\rho < \omega < +\rho$ và $\rho = \text{const}$ còn φ biến đổi từ $-\pi/2$ đến $+\pi/2$ (BCD)

$$\varphi = \Delta \arg j\omega = +\pi.$$



Hình 3-8.

– $p = j\omega$, $\rho < \omega < \infty$ (Đoạn DE) có $\Delta \arg j\omega = 0$.

Vậy $\infty < \omega < +\infty$ thì $\Delta \arg j\omega = +\pi$.

Qua hình 3-8 ta thấy nghiệm $p = 0$ bây giờ đã nằm ở bên trái trục ảo $j\omega$ vừa uốn cong, cho nên hệ kín sẽ ổn định vì

$$\Delta \arg \overline{MA} = \Delta \arg [j\omega D_1(j\omega) + B(j\omega)] - \Delta \arg [j\omega D_1(j\omega)] = n\pi - n\pi \equiv 0$$

$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$

Và bây giờ chuyển về giới hạn khi $\rho \rightarrow 0$ thì hệ hở từ ổn định sẽ trở về biên giới ổn định. Lúc đó thế $p = \rho e^{j\varphi}$ ta có:

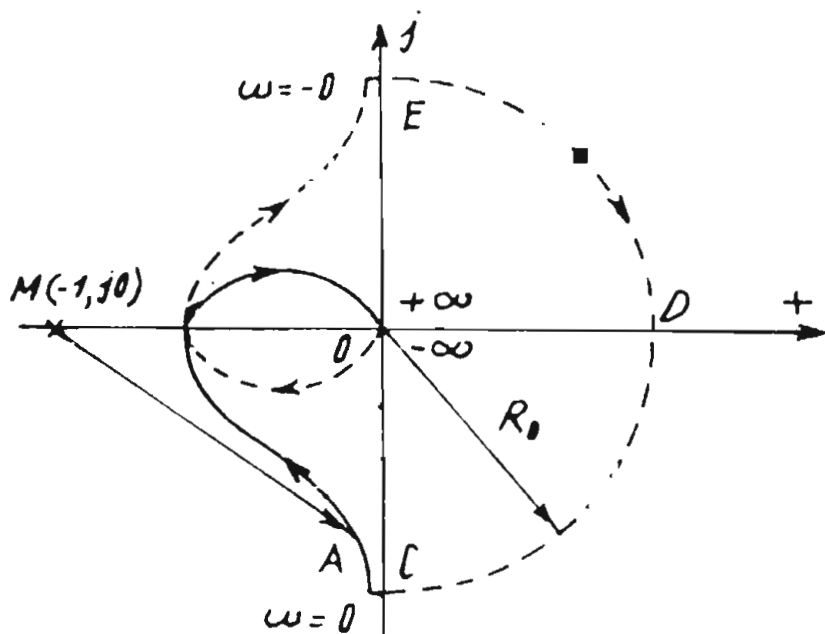
$$\overline{MA} = 1 + W_h(j\omega) = \frac{\rho e^{j\varphi} D_1(\rho e^{j\varphi}) + B(\rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi} D_1(\rho e^{j\varphi})}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{MA} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho e^{j\varphi} D_1(\rho e^{j\varphi}) + B(\rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi} D_1(\rho e^{j\varphi})} = \frac{A(0)}{\rho e^{j\varphi} D_1(0)}$$

$$\text{Vậy:} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{MA} = R e^{-j\varphi} \quad (3-29)$$

trong đó $R = \frac{A(0)}{\rho D_1(0)} \rightarrow \infty$ khi $\rho \rightarrow 0$

Khi $\rho = \text{const}$ và φ biến đổi từ $-\pi/2$ đến $+\pi/2$ thì đầu mút véc tơ $\overline{MA}$ trượt trên đường cong có bán kính R vô cùng lớn và góc quay biến đổi từ $+\pi/2$ đến $-\pi/2$. Nói cách khác khi biến đổi $j\omega$ theo đường ABCDE trên hình 3-8 thì đặc tính $W_h(j\omega)$ biến đổi liên tục theo đường OACDEO trên hình 3-9



Hình 3-9.

có chiều quay ngược nhau. Lấy giới hạn theo (3-29) thì đường cong $W_h(j\omega)$ vẫn chạy theo đường OACDEO trên hình 3-9. Điều đó chứng tỏ đặc tính $W_h(j\omega)$ không bao điểm $M(-1, j0)$ khi $-\infty < \omega < \infty$.

+ ∞ Và như vậy, theo kết quả đã chứng minh trường hợp đầu tiên, chứng tỏ hệ thống kín là ổn định.

Tổng quát trong trường hợp $W_h(p) = \frac{B(p)}{p^\nu D_r(p)}$

Với $\nu = 2, 3, \dots$ cũng dùng phương pháp tương tự

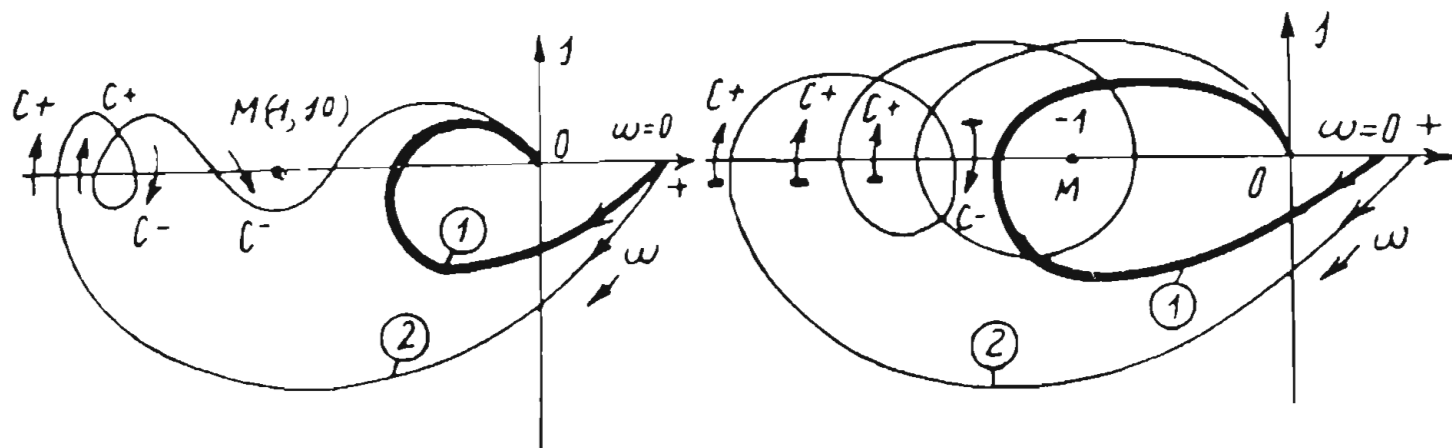
3. Nhận xét

– Trước khi dùng tiêu chuẩn Nyquist, cần phải xét xem hệ hở có ổn định hay không (có thể sử dụng các tiêu chuẩn đại số để xét hệ hở)

– Đặc tính tần số $W_h(j\omega)$, thường là đường cong không khép kín vì ω chỉ xét từ 0 đến ∞ , cho nên nhận dạng việc bao của nó đối với một điểm trong trường hợp phức tạp rất khó khăn. Để dễ dàng ta chuyển sang một cách biểu diễn khác. Hình 3-10 là trường hợp hệ ổn định nếu hệ hở ổn định. Ta thấy đặc tính tần $W_h(j\omega)$ không bao điểm $M(-1, j0)$ nếu giao điểm của $W_h(j\omega)$ với trục thực trong khoảng $(-\infty, -1)$ không có hoặc là số giao điểm chuyển đổi dương $C_{(+)}$ (tức là đi từ âm sang dương) bằng số giao điểm chuyển đổi âm $C_{(-)}$ (tức là đi từ dương sang âm theo chiều tăng của tần số ω). Hay là điều kiện không bao của $W_h(j\omega)$ với $M(-1, j0)$:

$$C_{(+)} = C_{(-)} \quad (3-30)$$

Nếu không thỏa mãn điều kiện (3-30) thì đặc tính tần số $W_h(j\omega)$ bao điểm $M(-1, j0)$ (hình 3-11) có $C_{(+)} = 3$; $C_{(-)} = 1$ đường (2)



Không bao M

Có bao M

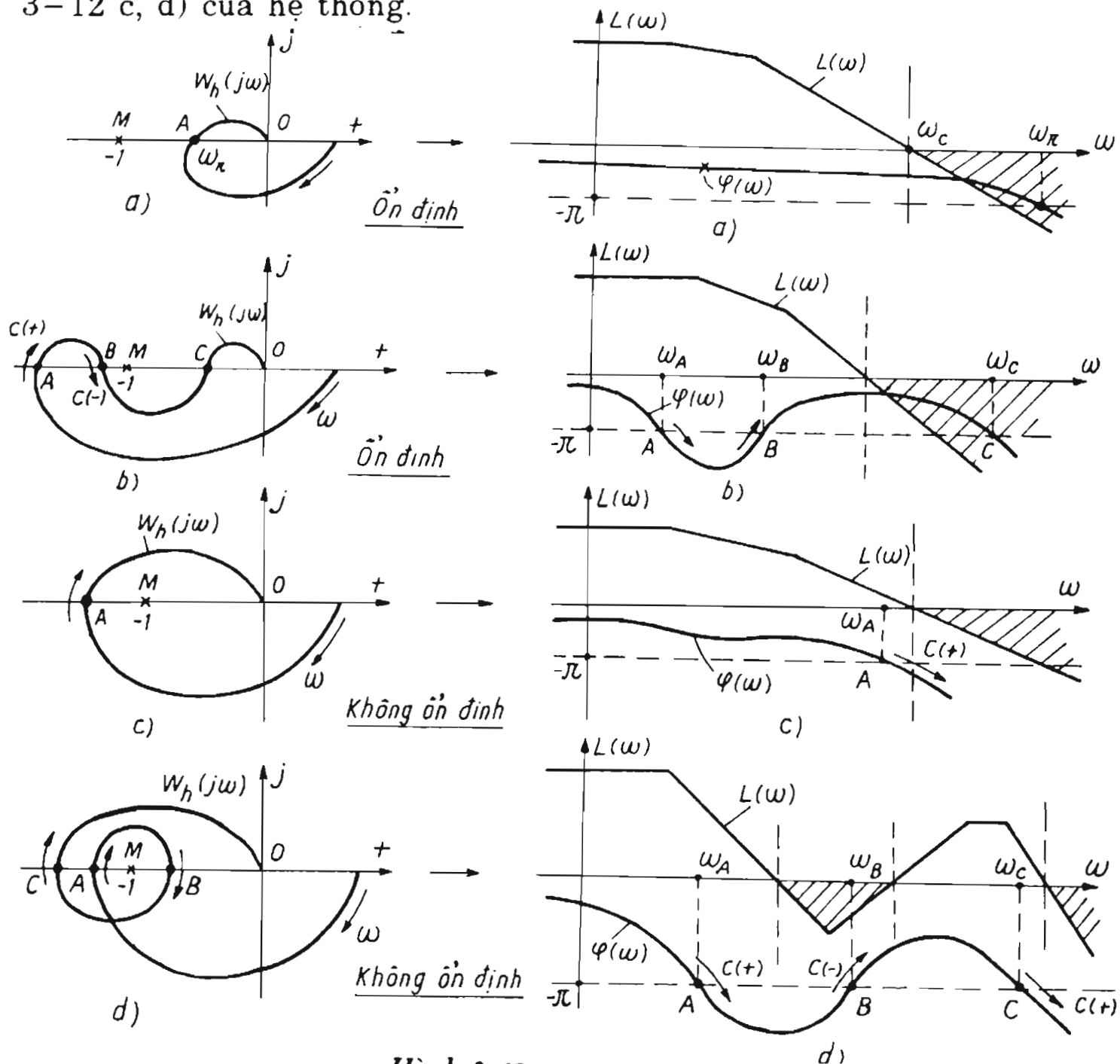
Hình 3-10.

Hình 3-11.

3-3.2. Tiêu chuẩn Nyquist - Theo đặc tính tần số lôgarit

Vì $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ nếu $A(\omega) \geq 1$ thì $L(\omega) \geq 0$. Tại các giao điểm chuyển đổi thì $\Delta \arg W_h(j\omega) = -\pi$. Dựa vào kết quả đã xét của tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính tần số biên-pha, ta cần xét phạm vi $A(\omega)$ ở trong khoảng $(-\infty, -1)$, khi hệ hờ ổn định nếu $C_{(+)} = C_{(-)}$ thì hệ kín ổn định.

(Độc giả tự suy luận trường hợp hệ hờ không ổn định vì thực tế hệ hờ thường ổn định hoặc ở giới hạn ổn định). Qua hình 3-12 đối chiếu đặc tính tần số biên pha với đặc tính tần số lôgarit có chú thích trạng thái ổn định (hình 3-12 a, b) và không ổn định (hình 3-12 c, d) của hệ thống.



Hình 3-12

Trên đặc tính tần lôgarit, các điểm chuyển đổi là giao điểm của $\varphi(\omega)$ với đường thẳng $-\pi$. (ký hiệu là $C_{(+)}$).

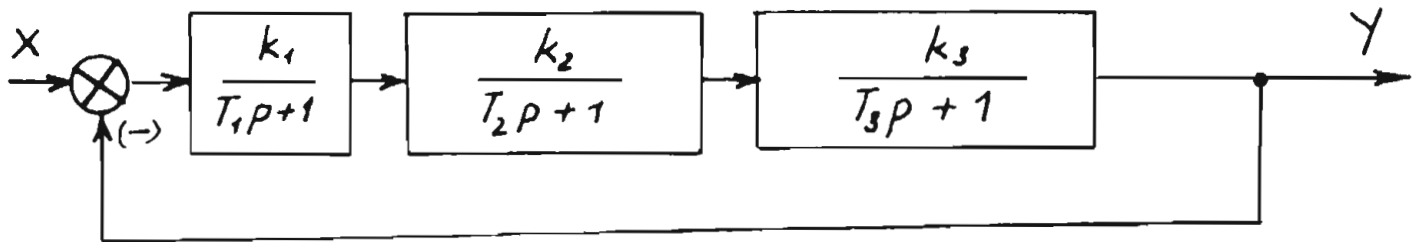
Quy ước: điểm chuyển đổi dương (ký hiệu là $C_{(+)}$) là giao điểm của đặc tính φ , với đường thẳng $-\pi$, khi ω tăng thì $\varphi(\omega)$ cắt từ trên xuống dưới đường thẳng $-\pi$ còn điểm chuyển đổi âm (ký hiệu là $C_{(-)}$) là giao điểm của $\varphi(\omega)$ với đường thẳng $-\pi$ khi ω tăng thì $\varphi(\omega)$ cắt từ dưới lên trên đường thẳng $-\pi$

Phát biểu:

"Điều kiện cần và đủ để hệ thống kín ổn định khi hệ thống hở ổn định là số giao điểm chuyển đổi dương bằng số giao điểm chuyển đổi âm của đặc tính $\varphi(\omega)$ với đường thẳng $-\pi$ trong phạm vi tần số ω để $L(\omega) > 0$ ".

Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính tần lôgarit rất đơn giản và dễ dàng nên được sử dụng rộng rãi với các hệ thống một vòng.

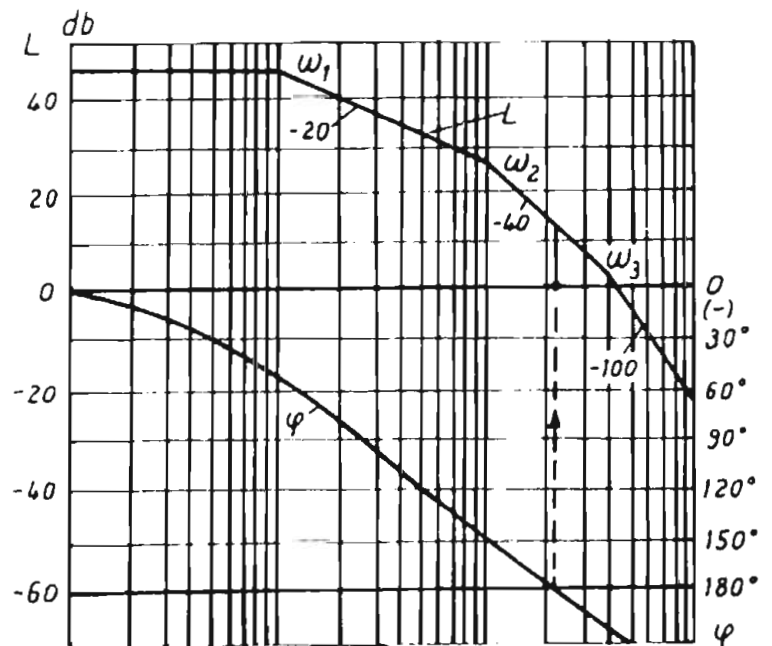
Ví dụ 3-7. Xét ổn định cho hệ thống có cấu trúc vẽ trên hình 3-13.



Hình 3-13.

Trong đó: $k = k_1 k_2 k_3 = 180$;
 $T_1 = 1\text{ s}$; $T_2 = 0,1\text{ s}$; $T_3 = 0,03\text{ s}$.

Giải. Xây dựng đặc tính tần biên độ – pha lôgarit của hàm truyền đạt mạch hở $W_h(j\omega)$ trên hình 3-13: Vì đặc tính $\varphi(\omega)$ cắt đường thẳng $-\pi$ ở tần số mà $L(\omega) > 0$ nên hệ thống kín không ổn định.



Hình 3-13.

3-3.3. Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính biên-pha có khâu chậm trễ

Tương tự như hệ thống hình 3-2, ta sẽ nêu tổng quát cho hệ thống có khâu chậm trễ với hàm truyền đạt mạch hở có dạng:

$$W_h(p) = W_o(p).e^{-p\tau} \quad (3-31)$$

Đặc tính tần biên-pha mạch hở:

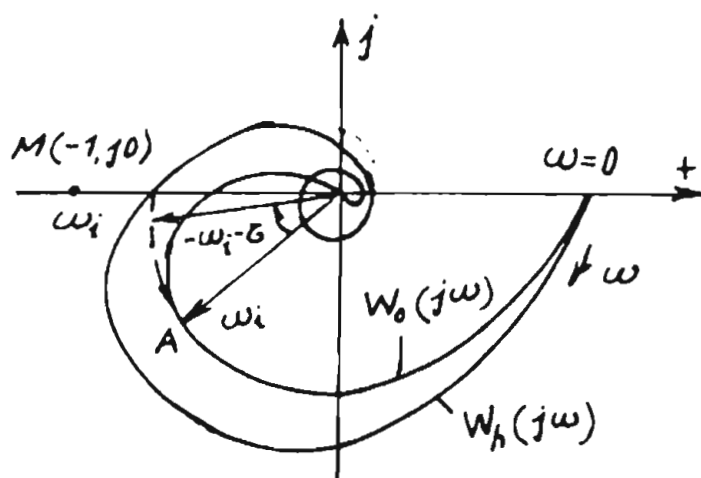
$$W_h(j\omega) = W_o(j\omega).e^{-j\omega\tau} \quad (3-32)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \text{mod}\{W_h(j\omega)\} = \text{mod}\{W_o(j\omega)\} \\ \arg W_h(j\omega) = \arg W_o(j\omega) - \omega\tau. \end{cases} \quad (3-33)$$

Việc xây dựng đặc tính tần $W_h(j\omega)$ được minh họa trên hình 3-14.

Quay véc tơ $W_o(j\omega_1) = \overrightarrow{OA}$ một góc $\varphi = -\omega_1\tau$ (cùng chiều kim đồng hồ) ta được véc tơ $W_h(j\omega_1)$. Lấy nhiều điểm ω_1 ta sẽ vẽ được cả đặc tính $W_h(j\omega)$. Qua hình 3-14, nếu hệ thống có thêm khâu chậm trễ thì độ ổn định của hệ thống sẽ giảm đi, nói cách khác là độ dự trữ ổn định của hệ thống giảm.



Hình 3-14.

3-3.4 Tiêu chuẩn ổn định Mikhailôv

1. Phát biểu :

"Điều kiện cần và đủ để hệ thống tuyến tính ổn định là biểu đồ véc tơ đa thức đặc tính $A(j\omega)$ xuất phát từ trục thực dương quay n góc phần tư ngược chiều kim đồng hồ khi ω tăng từ 0 đến ∞ (với n là bậc của phương trình đặc tính)".

2. Chứng minh

Giả sử hệ thống có phương trình đặc tính có n nghiệm.

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Hay:
$$a_0 (p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_n) = 0.$$

Hệ thống ổn định nếu tất cả n nghiệm đều ở bên trái trục ảo, theo biểu thức (3-19) của nguyên lý góc quay

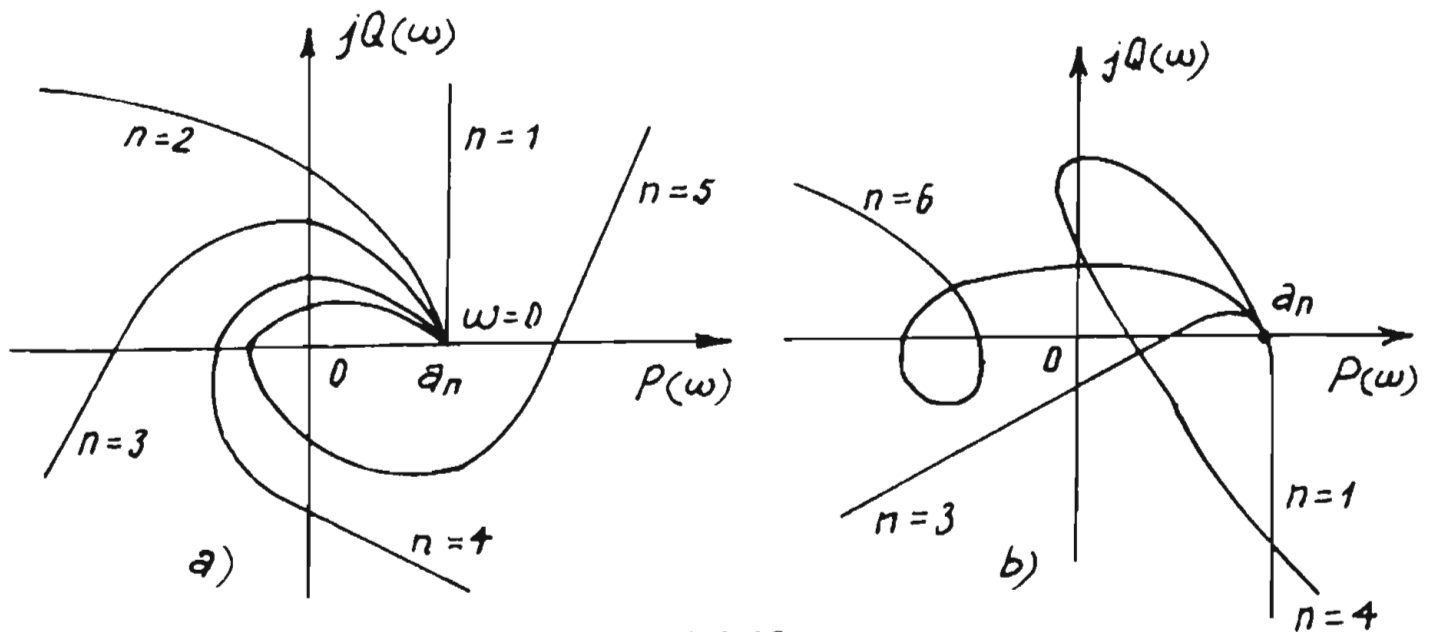
$$\Delta \arg A(j\omega) = n\pi, \quad -\infty < \omega < \infty$$

Vì $A(j\omega)$ và $A(-j\omega)$ liên hợp nhau nên:

$$\Delta \arg A(j\omega) = \Delta \arg A(j\omega), \quad \begin{matrix} -\infty < \omega < 0 \\ 0 < \omega < \infty \end{matrix}$$

Vậy: $\Delta \arg A(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2}$ (tức là $A(j\omega)$ quay $n \cdot \frac{\pi}{2}$ khi ω tăng từ 0 đến ∞).

Hình 3-15,a tương ứng với hệ thống ổn định, 3-15,b : không ổn định.



Hình 3-15.

3. Nhận xét

a) Xây dựng biểu đồ $A(j\omega)$ bằng cách thay $p = j\omega$ vào phương trình đặc tính rồi tách phần thực và phần ảo $A(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$.

b) Tiêu chuẩn Mikhailov có thể dùng để xét ổn định cho cả hệ thống hở và hệ thống kín.

3-4. PHƯƠNG PHÁP CHIA MIỀN D

Có thể dùng các tiêu chuẩn ổn định để tìm phạm vi biến đổi của một thông số nào đó trong hệ thống mà khả năng ổn định vẫn không thay đổi. Nhưng điều đó không phải đơn giản và dễ dàng đối với những hệ thống phức tạp. Và lại như thế cũng không biểu hiện rõ ràng sự phụ thuộc tính ổn định đối với thông số biến thiên đó. Để có một phương pháp xác định tổng quát tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào tham số biến đổi, 1948 Neimark đã đề ra phương pháp chia miền D. Sau đây sẽ trình bày nội dung.

1. Mặt giới hạn

Cho phương trình đặc tính của hệ thống điều khiển:

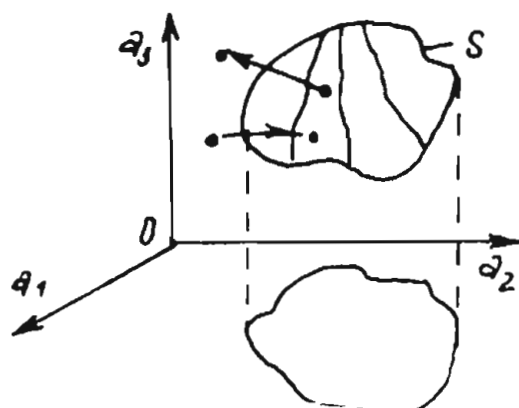
$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3-4)$$

tổng quát có m nghiệm ở bên phải và $(n-m)$ nghiệm ở bên trái trục ảo. Ứng với một tập hợp xác định các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$ ta sẽ có một tập hợp các nghiệm $p_1, p_2, \dots, p_n$ xác định. Khi các hệ số a_i biến thiên, vị trí các nghiệm p_i có thể dịch chuyển trên mặt phẳng phức phải qua trái hoặc ngược lại. Chẳng hạn xét không gian 3 hệ số a_1, a_2, a_3 biến thiên (hình 3-16). Phương trình đặc tính (3-4) có nghiệm $p = j\omega$, thì hệ thống ở giới hạn ổn định. Khi đó trong không gian (a_1, a_2, a_3) có một mặt S nào đó chia không gian thành các miền. Trên mặt phẳng nghiệm trục ảo $p = j\omega$ chia mặt phẳng thành hai miền bên trái ổn định và bên phải không ổn định thì trong không gian (a_1, a_2, a_3) mặt cong S cũng chia thành các miền ổn định và không ổn định. Trên hình 3-16 giả sử chia thành 2 miền. trong mặt cong S và ngoài mặt cong S . Giả sử trong mặt S là ổn định và ngoài mặt S là không ổn định. Phương trình mặt giới hạn S nếu $p = j\omega$:

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3-34)$$

Rõ ràng là miền xác định các thông số biến đổi a_1, a_2, a_3 ở trong mặt cong S là miền ổn định và miền ngoài mặt cong S sẽ xác định các thông số a_1, a_2, a_3 để hệ thống không ổn định. Khi các hệ số a_i

biến đổi từ ngoài vào trong S hoặc ngược lại tức là ứng với các nghiệm chạy từ bên phải qua bên trái mặt phẳng nghiệm (hình 3-17) (hoặc ngược lại). Mặt S chia không gian thành các miền ký hiệu là D_{n-m} (n bậc phương trình đặc tính; m : số nghiệm ở bên phải trục ảo). Khi $m = 0$, hệ thống có thể ổn định, tương ứng với miền D_n .



Hình 3-16.

2. Chia miền D theo một thông số biến đổi tuyến tính

Giả sử có một thông số biến đổi tuyến tính λ trong phương trình đặc tính:

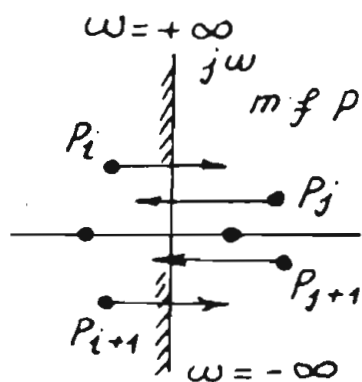
$$A(p) = N(p) + \lambda M(p) = 0. \quad (3-35)$$

Phương trình đường cong giới hạn các miền nếu thay $p = j\omega$:

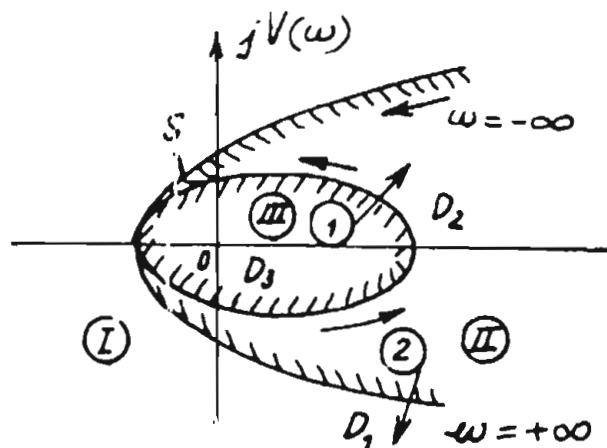
$$A(j\omega) = N(j\omega) + \lambda M(j\omega) = 0.$$

$$\lambda = \frac{-N(j\omega)}{M(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (3-36)$$

Thông số biến đổi λ là một thông số phức $\lambda(j\omega)$. Khi cho ω biến đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$ ta vẽ được đường cong S giới hạn giả sử có dạng trên hình 3-18 chia mặt phẳng thành 3 miền I, II, III. Nếu tiến hành gạch soe bên trái trục ảo từ $-\infty \rightarrow +\infty$ trên



Hình 3-17.



Hình 3-18.

mặt phẳng nghiệm số thì miền bên trái được gạch sọc là miền ổn định. Như vậy có thể gạch sọc đường cong giới hạn S phía trái từ $\omega = -\infty$ đến $\omega = +\infty$. Không chứng minh nhưng có thể thấy tương ứng rằng, miền được gạch sọc nhiều lần nhất có thể là miền ổn định. Trên hình 3-18 miền III có thể là miền ổn định. Khi dịch chuyển từ miền được gạch chéo D_{n-m} sang một miền không gạch chéo thì tương ứng có một nghiệm chạy từ trái qua phải mặt phẳng nghiệm, đó là miền D_{n-m-1} . Trên hình 3-18 giả sử từ miền III là D_3 chạy sang miền II là $D_{3-1} = D_2$; từ miền II sang miền I (mũi tên (2)) ta có miền $D_{2-1} = D_1$.

Sau khi đã tìm được miền D_n trên hình vẽ, ta sẽ lấy một điểm bất kỳ ở trong D_n để xác định trị số λ . Sau đó lấy λ ấy đem thế vào phương trình đặc tính (3-35) rồi dùng một tiêu chuẩn ổn định để xét ứng với λ đó hệ thống có thực là ổn định không. Nếu xét λ đó mà hệ thống ổn định thì có thể kết luận cả miền D_n là miền ổn định.

Ví dụ 3-8. Cho phương trình đặc tính của hệ thống:

$$A(p) = (T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) + k = 0,$$

trong đó T_1, T_2, T_3 cố định còn k biến đổi. Hãy tìm miền xác định k để hệ thống ổn định, từ đó tìm giá trị tới hạn k_{th} .

Giải.

Chuyển về dạng cơ bản: $A(p) = N(p) + \lambda M(p)$.

$$\text{Ta có: } \lambda = k; M(p) = 1; N(p) = (T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1).$$

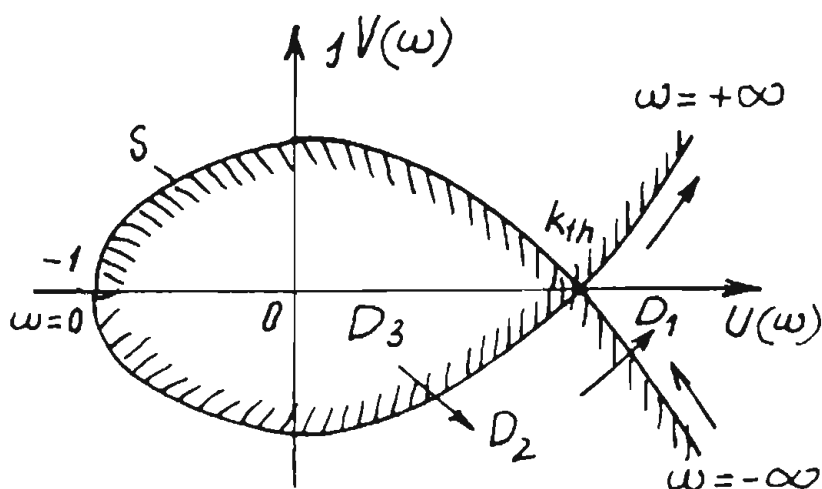
Phương trình đường cong giới hạn các miền:

$$\begin{aligned} \lambda(j\omega) &= - (T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)(T_3j\omega + 1) \\ &= (T_1T_2T_3\omega^2 - T_1 - T_2 - T_3)j\omega + (T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)\omega^2 - 1 \\ &= jV(\omega) + U(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{trong đó: } U(\omega) = (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\omega^2 - 1$$

$$V(\omega) = \omega(T_1T_2T_3\omega^2 - T_1 - T_2 - T_3).$$

Lấy $\omega = 0 \div \infty$ ta vẽ một nửa đường cong giới hạn S và soi ảnh qua trục hoành với $\omega = -\infty \div 0$. Tiến hành gạch chéo bên trái đường cong khi ω chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$. Miền D_3 là miền được gạch sọc hai lần.



Hình 3-19.

Thật vậy lấy $\lambda = k = 0$ (điểm gốc O). Ta sẽ có phương trình đặc tính:

$$A(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) = 0.$$

Có ba nghiệm thực âm: $p_1 = -1/T_1$; $p_2 = -1/T_2$; $p_3 = -1/T_3$ nên hệ thống ổn định. Vậy miền D_3 đúng là miền ổn định.

Tìm k_{th} nếu tính: $V(\omega_0) = 0$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$$

$$\text{Do đó: } k_{th} = U(\omega_0) = -1 + \omega_0^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)$$

$$= \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

3. Chia miền D theo hai thông số biến đổi tuyến tính

Giả sử hệ thống có hai thông số λ và σ biến đổi tuyến tính. Khi đó phương trình đặc tính có dạng:

$$A(p) = \sigma N(p) + \lambda M(p) + R(p) = 0. \quad (3-37)$$

Phương trình các đường cong giới hạn miền D là:

$$A(j\omega) = \sigma N(j\omega) + \lambda M(j\omega) + R(j\omega) \quad (3-38)$$

Các đa thức viết dạng phức:

$$\begin{cases} N(j\omega) = N_1(\omega) + jN_2(\omega) \\ M(j\omega) = M_1(\omega) + jM_2(\omega) \\ R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega) \end{cases} \quad (3-39)$$

Phương trình (3-38) khi tách thành 2 phương trình biến thực:

$$\begin{cases} \sigma N_1(\omega) + \lambda M_1(\omega) + R_1(\omega) = 0 \\ \sigma N_2(\omega) + \lambda M_2(\omega) + R_2(\omega) = 0 \end{cases} \quad (3-40)$$

Nghiệm hệ phương trình (3-40):

$$\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \quad ; \quad \sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\Delta} \quad (3-41)$$

trong đó:

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1(\omega) & N_1(\omega) \\ M_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix}; \Delta_\sigma = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & N_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix}; \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} M_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ M_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}$$

– Khi biến đổi ω từ $-\infty$ đến $+\infty$ nếu với các trị ω mà $\Delta \neq 0$ ta sẽ tìm được các đường cong chia miền D;

– Nếu với các trị ω mà $\Delta = 0$; $\Delta_\lambda \neq 0$; $\Delta_\sigma \neq 0$ thì hệ phương trình (3-40) vô nghiệm tức là hai đường thẳng song song với nhau. Khi đó đường cong giới hạn ổn định S sẽ tiến đến xa vô cùng.

– Khi $\Delta = \Delta_\lambda = 0$ hay $\Delta = \Delta_\sigma = 0$ khi đó hai đường thẳng (3-40) trùng khít lên nhau. Như vậy thì ứng với một trị ω mà các định thức đó triệt tiêu, đường cong giới hạn không phải xác định bởi một điểm xác định mà là một đường thẳng xác định. Ta gọi đó là đường thẳng đặc biệt hay là đường thẳng bổ sung.

Vì Δ , Δ_σ , Δ_λ là các hàm lẻ của ω cho nên có thể viết được:

$$\lambda = \frac{\omega \begin{vmatrix} M_1 & -R_1 \\ M_2 & -R_2 \end{vmatrix}}{\omega \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}}; \sigma = \frac{\omega \begin{vmatrix} -R_1 & N_1 \\ -R_2 & N_2 \end{vmatrix}}{\omega \begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}} \quad (3-42)$$

Với $\omega = 0$ và $\omega = \infty$ thì λ và σ có dạng $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$. Cho nên đó là các tần số đặc biệt để tạo ra các đường thẳng đặc biệt. Bây giờ ta phải tìm phương trình các đường thẳng đó.

Ứng với $\omega = 0$ thì λ và σ có dạng $\frac{0}{0}$

Phương trình đặc tính:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Nếu có $a_n = 0$ sẽ trở thành:

$$A(p) = p[a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}] = 0$$

Hay là:

$$A(j\omega) = j\omega[a_0(j\omega)^{n-1} + a_1(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}] = 0.$$

Như vậy thì hệ số $a_n = 0$ trong phương trình đặc tính cũng giống như tần số $\omega = 0$ trong phương trình đường cong giới hạn S. Vậy phương trình đường thẳng bổ sung với tần số $\omega = 0$ là:

$$a_n = 0. \quad (3-43)$$

Ứng với $\omega = \infty$ thì λ và σ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Phương trình đặc tính được viết ở dạng khác:

$$A(j\omega) = a_0 + \frac{a_1}{j\omega} + \frac{a_2}{(j\omega)^2} + \dots + \frac{a_n}{(j\omega)^n} = 0$$

Khi $\omega = \infty$ thì chính là bắt buộc $a_0 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng bổ sung thứ hai là:

$$a_0 = 0 \quad (3-44)$$

Quy tắc gạch chéo

1- Trên mặt phẳng (λ, σ) , trục hoành là λ , đường cong giới hạn S gạch chéo bên trái nếu $\Delta > 0$ và gạch chéo bên phải nếu $\Delta < 0$ theo chiều tăng của ω .

Vì Δ là hàm lẻ của ω nên với $\omega > 0$ và tăng từ ω_1 đến ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) thì $\Delta > 0$. Còn với $\omega < 0$ và ω chạy từ $-\omega_2$ đến $-\omega_1$ thì $\Delta < 0$. Do đó đường cong giới hạn S luôn luôn được gạch chéo cả hai lần

cùng một phía

Hình 3-20, a có $\omega_2 > \omega_1$ chiều tăng $+\omega$ có $\Delta(+\omega) > 0$, gạch chéo bên trái. Còn từ ω_2 đến ω_1 là chiều tăng ω (vì $\omega < 0$) có $\Delta(-\omega) < 0$,

gạch chéo bên phải. Cả hai lần gạch chéo đều trùng nhau. Tương tự khi ω tăng có $\Delta(+\omega) < 0$ ta gạch chéo bên phải đường cong giới hạn.

Thực tế vì λ và σ là các hàm chẵn của ω nên khi vẽ đường cong $\lambda(\sigma)$ chỉ cần lấy ω từ 0 đến $+\infty$. Nếu $\Delta(+\omega) > 0$, theo chiều tăng ω ta gạch chéo bên trái hai lần và $\Delta(+\omega) < 0$ theo chiều tăng ω ta gạch chéo bên phải hai lần.

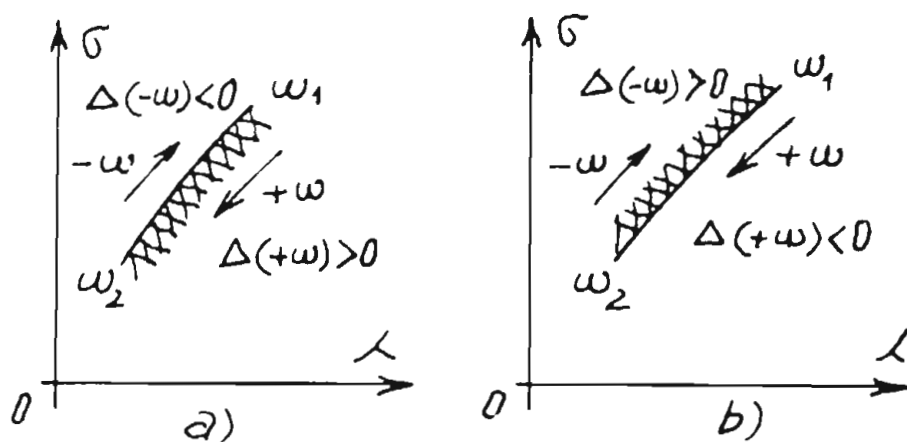
2- Ứng với $\omega_1 = 0$ (hoặc $\omega_1 = \infty$), đường thẳng đặc biệt được gạch chéo một lần cùng phía với đường cong giới hạn đã gạch chéo, còn ở nửa còn lại của nó sẽ được gạch chéo ở phía kia (hình 3-21, a).

3- Ứng với $\omega_1 \neq 0$ (hoặc $\neq \infty$) nếu đường cong giới hạn cắt qua đường thẳng đặc biệt mà định thức Δ không đổi dấu thì đường thẳng đặc biệt sẽ không gạch chéo; nếu định thức Δ đổi dấu thì đường thẳng đặc biệt được gạch chéo mỗi nửa cùng phía gạch sọc với đường cong giới hạn (hình 3-21, b).

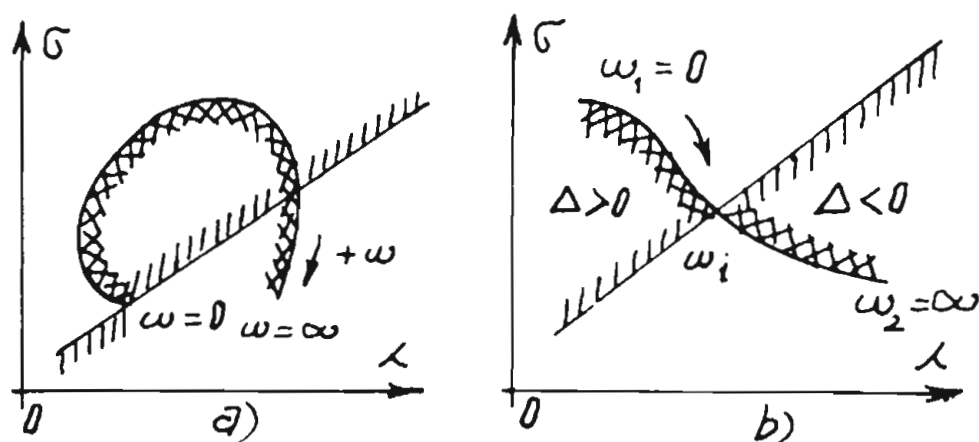
Tóm tắt các bước chia miền D hai thông số biến đổi tuyến tính:

1- Xác định đường cong giới hạn chia miền D

Tính Δ , Δ_j , Δ_σ và λ , σ . Cho $\omega = 0 \div \infty$ vẽ đường cong $\lambda(\sigma)$ theo



Hình 3-20.



Hình 3-21.

ω đã tính

2– Vẽ các đường thẳng đặc biệt có phương trình $a_0 = 0$ và $a_n = 0$.

3– Gạch chéo các đường cong giới hạn và đường thẳng đặc biệt theo quy tắc đã trình bày.

4– Xác định miền ổn định là miền được gạch chéo toàn bộ và nhiều lần nhất.

Thử lại bằng cách lấy một điểm trong miền đó rồi xét ổn định và đi đến kết luận cho cả miền.

Ví dụ 3–9. Cho phương trình đặc tính của một hệ thống:

$$p^3 + \lambda p^2 + \sigma p + 1 = 0.$$

Hãy xác định miền ổn định khi λ và σ biến đổi

Giải.

1– Phương trình đường cong giới hạn:

$$-j\omega^3 - \lambda\omega^2 + j\omega\sigma + 1 = 0.$$

Tách phần thực và ảo:

$$\begin{aligned} M_1(\omega) &= -\omega^2; & M_2(\omega) &= 0; & \Delta &= -\omega^3 \\ N_1(\omega) &= 0; & N_2(\omega) &= \omega; & \Delta_\lambda &= -\omega \\ R_1(\omega) &= 1; & R_2(\omega) &= -\omega^3; & \Delta_\sigma &= -\omega^5 \end{aligned}$$

Do đó tính λ và σ theo (3–41):

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}; \quad \sigma = \omega^2$$

Rõ ràng $\lambda\sigma = 1$ là đường cong giới hạn chia miền D, đó là một đường hypecbôl (hình 3–22).

2– Đường thẳng đặc biệt: không có vì $a_0 = 1 \neq 0$ và $a_n = 1 \neq 0$.

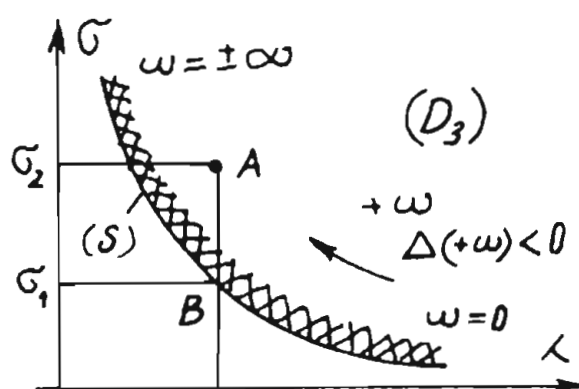
3– Gạch chéo theo quy tắc ở trên:

Vì $\Delta = -\omega^3 < 0$ khi $\omega > 0$, do đó phải gạch chéo bên phải đường cong $\lambda\sigma = 1$ hai lần.

4 – Nghiệm lại miền ổn định D_3 . (vì phương trình đặc biệt bậc 3). Theo tiêu chuẩn ổn định Hurwitz để hệ thống ổn định cần có điều kiện: $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$) và:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = \lambda \sigma - 1 > 0.$$

Tại điểm B trên đường cong S, có $\lambda \sigma_1 = 1$, nên $\Delta_2 = 0$ (ở giới hạn ổn định). Nếu lấy điểm A có ngay $\sigma_2 > \sigma_1$ tức $\lambda \sigma_2 > 0$ nên $\Delta_2 > 0$ và A ở trong D_3 ổn định, vậy D_3 là miền ổn định.



Hình 3-22.

Ví dụ 3–10. Cho hệ thống điều khiển gồm ba khâu quán tính có phương trình đặc tính.

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + 1 + k = 0$$

Hãy xác định miền ổn định khi có hệ số khuếch đại k và hằng số thời gian T_1 biến đổi. Cho $T_2 = 1$ s; $T_3 = 10$ s.

Giải.

1– Phương trình đường cong giới hạn:

$$10\lambda(j\omega)^3 - (11\lambda + 10)\omega^2 + (11 + \lambda)j\omega + \sigma = 0;$$

trong đó: $\lambda = T_1$ và $\sigma = 1 + k$.

Hoặc là:
$$\lambda[-11\omega^2 + j(-10\omega^3 + \omega)] + \sigma - 10\omega^2 + 11j\omega = 0.$$

Rút ra:

$$M_1(\omega) = -11\omega^2; \quad M_2(\omega) = -10\omega^3 + \omega$$

$$N_1(\omega) = 1; \quad N_2(\omega) = 0$$

$$R_1(\omega) = -10\omega^2; \quad R_2(\omega) = 11\omega$$

$$\Delta = \omega(10\omega^2 - 1)$$

$$\Delta_r = 11\omega.$$

$$\Delta_\sigma = 100\omega^5 + 121\omega^3$$

Vậy:

$$\lambda = \frac{11\omega}{\omega(10\omega^2 - 1)} \quad \frac{11}{10\omega^2 - 1}$$

$$\sigma = \frac{\omega(100\omega^4 + 121\omega^2)}{\omega(10\omega^2 - 1)} \quad \frac{100\omega^4 + 121\omega^2}{10\omega^2 - 1}$$

Với $\omega = 0 \div \infty$ vẽ được đường cong $\lambda(\sigma)$ trên hình 3-23.

2- Đường thẳng đặc biệt:

– $a_n = 0$, tức là $\sigma = 0$ đó là hoành trục.

– $a_0 = 0$, tức là $\lambda = 0$ đó là trục tung.

Vậy hai đường thẳng bổ sung là 2 trục tọa độ.

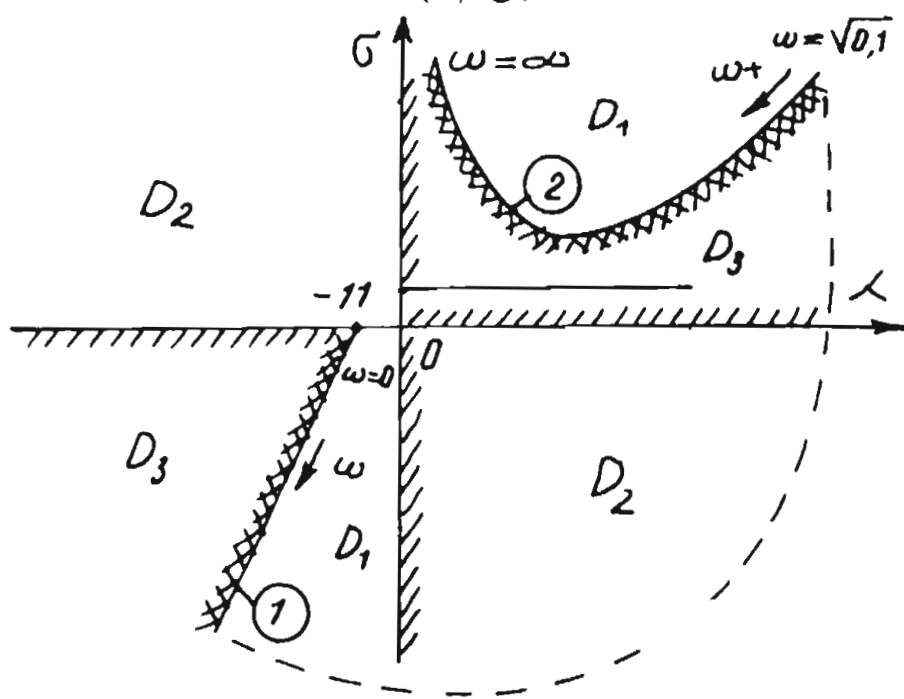
3- Gạch chéo theo quy tắc:

– Khi ω từ 0 đến 0,1 có $\Delta < 0$ nên nhánh (1) gạch bên phải hai lần.

– Khi ω từ 0,1 đến ∞ có $\Delta > 0$ nên nhánh (2) gạch bên trái hai lần.

Đường đặc biệt
 $\sigma = 0$ ứng với $\omega = 0$,
 gạch chéo cùng
 phía với đường
 cong giới hạn và
 đảo phía gạch chéo,
 khi cắt qua đường
 cong giới hạn.

Đường đặc biệt
 $\lambda = 0$ ứng với $\omega = \infty$
 được gạch chéo một
 phía cùng với đường
 cong giới hạn.



Hình 3-23.

4- Nghiệm lại miền ổn định D_3

Ta xét miền có $\lambda > 0$ và $\sigma > 0$ vì hệ số khuếch đại và hằng số thời gian là các số dương.

Lấy giá trị tại $\sigma = 1$ thì $k = 0$ nên phương trình đặc tính sẽ là:

$A(p) = (T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) = 0$ có ba nghiệm thực âm nên hệ thống ổn định. Vậy D_3 là miền ổn định.

3-5. PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ

3-5.1. Đặt vấn đề

Tương tự như phương pháp chia miền D , đối với một hệ thống điều khiển, khi có một thông số biến đổi (như hệ số khuếch đại, hằng số thời gian v.v...) từ 0 đến ∞ , ta cần phải xác định trong phạm vi nào của thông số biến đổi đó thì hệ thống sẽ ổn định. Ứng với một giá trị cố định của thông số biến đổi, hệ thống có một trạng thái ổn định nào đó. Ta có thể biểu diễn trạng thái ổn định của hệ thống bằng vị trí nghiệm số phương trình đặc tính hệ kín trên mặt phẳng phức. Khi giá trị thông số biến đổi thì vị trí nghiệm phương trình đặc tính trên mặt phẳng phức cũng thay đổi. Do sự thay đổi đó mà vị trí các nghiệm số phương trình đặc tính sẽ tạo nên một số quỹ đạo nào đó trong mặt phẳng phức.

Có thể thấy rõ rằng ứng với những đoạn quỹ đạo nghiệm số nào ở bên trái trục ảo thì hệ thống sẽ ổn định; giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo thì hệ thống ở giới hạn ổn định và những đoạn quỹ đạo nghiệm số ở bên phải trục ảo thì hệ thống sẽ không ổn định.

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số thường dùng cho hệ thống có một thông số biến đổi tuyến tính (thông thường là hệ số khuếch đại của hệ thống).

3-5.2. Phương pháp xây dựng quỹ đạo nghiệm số

Xét hệ thống Đ K.T.Đ có phương trình đặc tính bậc n :

$$A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3-45)$$

Nếu trong hệ thống có một thông số λ biến đổi thì phương trình đặc tính sẽ có dạng :

$$A(p) = N(p) + \lambda M(p) = 0, \quad (3-46)$$

trong đó:

$N(p)$ là đa thức toán tử có bậc n

$M(p)$ là đa thức toán tử có bậc m

Thực tế các hệ thống Đ.K.T.Đ thường có: $m \leq n$

Từ (3-46) có:

$$\lambda = \frac{-N(p)}{M(p)} \quad (3-47)$$

Gọi: p''_j ($j = 1, 2, \dots, m$) là các nghiệm của phương trình $M(p) = 0$.

p'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các nghiệm của phương trình $N(p) = 0$

p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các nghiệm của phương trình $A(p) = 0$

Ta có thể biểu diễn $M(p)$; $N(p)$ và $A(p)$ qua dạng tích của các thừa số:

$$M(p) = \prod_{j=1}^m (p - p''_j) \text{ (đa thức bậc } m)$$

$$N(p) = \prod_{i=1}^n (p - p'_i) \text{ (đa thức bậc } n)$$

$$A(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i) \text{ (đa thức bậc } n)$$

Khi đó (3-46) sẽ là:

$$A(p) = \prod_{i=1}^n (p - p'_i) + \lambda \prod_{j=1}^m (p - p''_j) = 0 \quad (3-48)$$

Để xây dựng được quỹ đạo nghiệm số, ta cần phải xác định : điểm xuất phát và điểm kết thúc của quỹ đạo nghiệm số; số lượng quỹ đạo trên mặt phẳng nghiệm, các đường thẳng tiệm cận của quỹ đạo; hướng dịch chuyển của quỹ đạo và các điểm đặc biệt.

1) Xác định điểm xuất phát của quỹ đạo nghiệm số

Giá trị ban đầu $\lambda = 0$ sẽ ứng với các điểm xuất phát của quỹ đạo. Khi $\lambda = 0$ theo (3-48), thì các nghiệm p_i của phương trình

đặc tính $A(p) = 0$ cũng chính là các nghiệm p'_i của phương trình $N(p) = 0$. Vì bậc của $A(p)$ và của $N(p)$ đều bằng n , cho nên quỹ đạo nghiệm số sẽ có n điểm xuất phát từ p'_i (p'_i là nghiệm của $N(p) = 0$).

Vậy: Ứng với giá trị $\lambda = 0$, quỹ đạo nghiệm số sẽ xuất phát từ n nghiệm p'_i của phương trình $N(p) = 0$.

2) Xác định điểm kết thúc của quỹ đạo nghiệm số

Các điểm kết thúc của quỹ đạo nghiệm số ứng với giá trị $\lambda = \infty$.

Phương trình đặc tính (3-48) có thể viết:

$$A(p) = \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^n (p - p'_i) + \prod_{j=1}^m (p - p''_j) = 0 \quad (3-49)$$

Khi $\lambda = \infty$ theo (3-49) thì các nghiệm p_i của phương trình đặc tính $A(p) = 0$ cũng chính là các nghiệm p''_j của phương trình $M(p) = 0$.

Vậy: Ứng với giá trị $\lambda = \infty$, quỹ đạo nghiệm số sẽ kết thúc ở m điểm biểu diễn nghiệm p''_j của phương trình $M(p) = 0$.

3) Xác định số lượng quỹ đạo trên mặt phẳng nghiệm

– Phương trình đặc tính $A(p) = 0$ có n nghiệm được biểu diễn bằng n vị trí mặt phẳng nghiệm ứng với một giá trị λ xác định. Khi λ biến đổi từ 0 đến ∞ , giá trị các nghiệm p_i của $A(p) = 0$ sẽ biến đổi, do đó vị trí của n nghiệm sẽ vạch nên n đường trên mặt phẳng nghiệm số.

– Nếu $m < n$ thì quỹ đạo nghiệm số có m đường khởi đầu từ m nghiệm p'_i và kết thúc ở m nghiệm p''_j . Vì quỹ đạo nghiệm số có tất cả n đường, do đó sẽ còn lại $(n - m)$ đường khởi đầu từ $(n - m)$ nghiệm p'_i và tiến ra xa vô cùng.

– Vì các nghiệm của $A(p) = 0$ có thể có các nghiệm phức liên hợp nên các quỹ đạo nghiệm số sẽ đối xứng qua trục thực.

4) Xác định các đường thẳng tiệm cận

Ta biết rằng nếu quỹ đạo nghiệm số có $(n-m)$ đường tiến ra xa vô cùng khi $\lambda \rightarrow \infty$, do đó ta cần phải tìm các đường thẳng tiệm cận cho $(n-m)$ đường đó

Từ (3-48) ta có thể viết:

$$-\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n (p-p'_i)}{\prod_{j=1}^m (p-p''_j)} = \frac{p^n - (\sum_{i=1}^n p'_i) \cdot p^{n-1} + \dots}{p^m - (\sum_{j=1}^m p''_j) \cdot p^{m-1} + \dots} \quad (3-50)$$

Thực hiện chia đa thức tử số và mẫu số của vế phải (3-50) sau đó chỉ lấy gần đúng hai số hạng đầu ta có:

$$-\lambda \approx p^{n-m} - (\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j) \cdot p^{n-m-1} \quad (3-51)$$

Hoặc là:

$$\begin{aligned} -\lambda &\approx p^{n-m} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j}{p} \right], \rightarrow \\ (-\lambda)^{1/n-m} &\approx p \cdot \left[\frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j}{p}}{p} \right]^{\frac{1}{n-m}} \end{aligned} \quad (3-52)$$

Thừa số thứ hai ở vế phải của (3-52) có dạng một nhị thức Newton, nếu khai triển ra và chỉ lấy gần đúng hai số hạng đầu phải xét với $|p| \rightarrow \infty$, ta có:

$$\begin{aligned} (-\lambda)^{\frac{1}{n-m}} &\approx p \left[1 - \frac{1}{n-m} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j}{p} \right] \\ &\approx p \frac{\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j}{n-m} \end{aligned}$$

Vậy:

$$p \approx (-\lambda)^{\frac{1}{n-m}} + R_0 \quad (3-53)$$

trong đó:

$$R_0 = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j \right) = \text{const.} \quad (3-54)$$

Từ (3-53), khi $\lambda \rightarrow \infty$ thì $p \rightarrow \infty$.

Có thể viết (3-53) ở dạng khác: (Khai triển số phức $(-\lambda)^{\frac{1}{n-m}}$)

$$p \approx \lambda^{\frac{1}{n-m}} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-m-1} \frac{2k+1}{n-m} \left(\frac{-1}{\lambda} \right)^{\frac{2k+1}{n-m}} \right] + R_0 \quad (k = 0; 1; \dots; n-m-1) \quad (3-55)$$

Phương trình (3-55) là phương trình các đường thẳng tiệm cận của $(n-m)$ quỹ đạo tiến ra xa vô cùng

Theo (3-55) ứng với $\lambda = 0$ thì $p = R_0 = \text{const}$, tức là $(n-m)$ đường thẳng tiệm cận đều đi qua 1 điểm (tâm) trên trục hoành có hoành độ là R_0 . Các đường thẳng tiệm cận này tạo thành một hình sao gồm $(n-m)$ tia. Mỗi một tia của hình sao tạo với trục hoành một góc nghiêng là:

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{n-m} \pi \quad (k = 0; 1; \dots; n-m-1) \quad (3-56)$$

Ví dụ 3-11.

– Nếu $(n-m) = 1$ thì từ (3-56) ta có:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{n-m} = \pi \quad (k = 0)$$

Đường thẳng tiệm cận chính là một nửa trục hoành tiến ra xa vô cùng trên hình 3-24a.

– Nếu $(n-m) = 2$ ta có hai đường thẳng tiệm cận (hình 3-24,b)

$$\alpha = \frac{\pi}{n-m} = \frac{\pi}{2} \quad (k = 0)$$

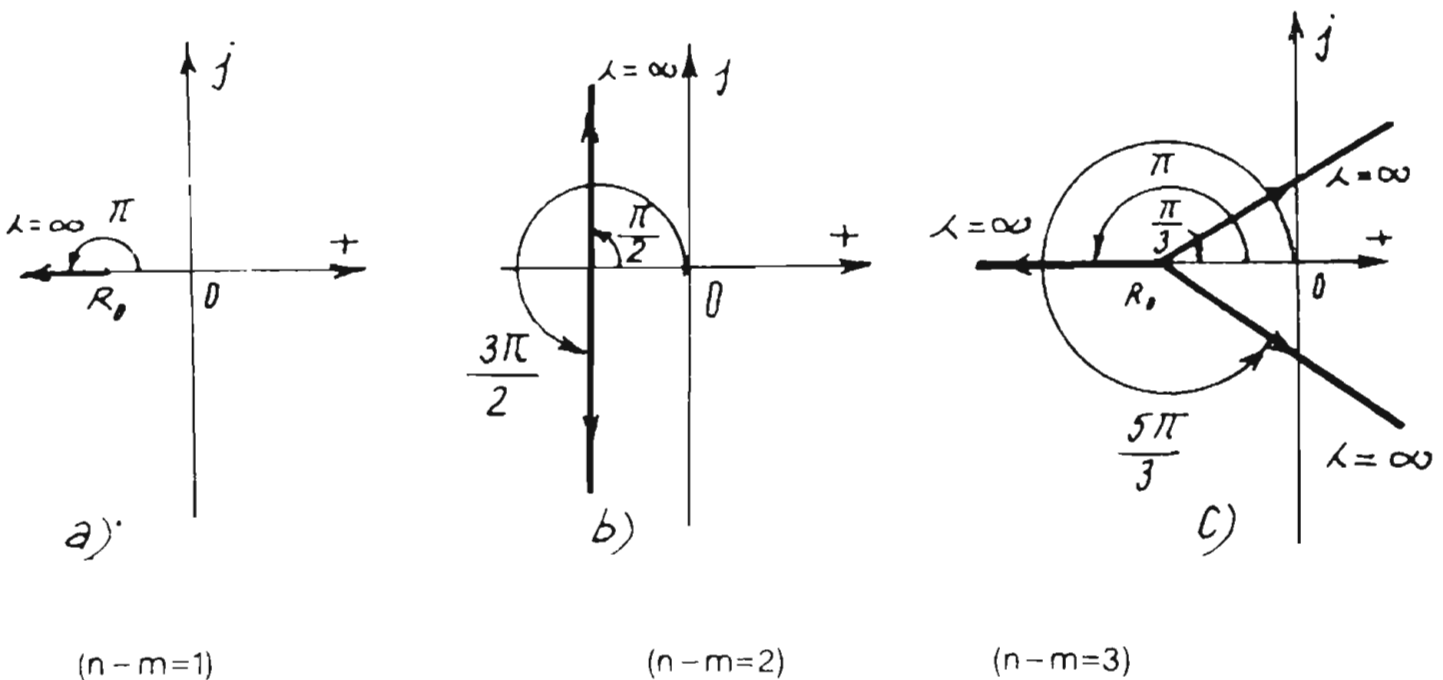
$$\alpha_1 = \frac{2 \times 1 + 1}{2} \pi = \frac{3\pi}{2} \quad (k = 1)$$

– Nếu $(n-m) = 3$ ta có 3 đường thẳng tiệm cận: (hình 3-24, c)

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{3} \quad (k = 0)$$

$$\alpha_1 = \frac{2 \times 1 + 1}{3} \pi = \pi \quad (k = 1)$$

$$\alpha_2 = \frac{2 \times 2 + 1}{3} \pi = \frac{5\pi}{3} \quad (k = 2)$$



Hình 3-24.

5) Xác định hướng dịch chuyển của quỹ đạo nghiệm

Từ phương trình đặc tính (3-46) ta viết thành:

$$-\lambda = \frac{N(p)}{M(p)} = f(p) \quad (3-57)$$

Giả thiết p là số thực, ta xây dựng đồ thị của hàm $f(p) = N(p)/M(p)$. Giao điểm của đường cong $f(p)$ với đường thẳng $-\lambda$ sẽ

xác định các nghiệm p_i của $A(p) = 0$ ứng với trị số λ xác định.

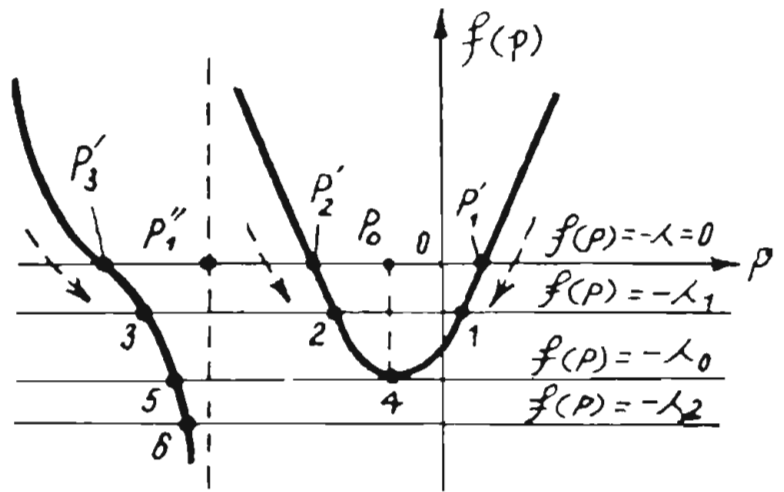
– Các điểm cực trị. $\frac{df(p)}{dp} = 0$ hay là.

$$M(p) \frac{dN(p)}{dp} - N(p) \frac{dM(p)}{dp} = 0 \quad (3-58)$$

sẽ xác định các điểm tách khỏi trục thực của mặt phẳng nghiệm.

– Từ đồ thị $f(p)$ và đường thẳng $-\lambda$, tùy thuộc sự biến đổi của λ mà ta xác định được hướng dịch chuyển của quỹ đạo.

Ví dụ 8-12. Hàm $f(p)$ vẽ trên hình 3-25. Đường thẳng $-\lambda = 0$ chính là trục hoành p , đường cong $f(p)$ cắt trục hoành ở ba điểm: p'_1 , p'_2 và p'_3 chính là ba nghiệm của phương trình đặc tính. Khi tăng dần λ , các điểm p'_1 và p'_2 sẽ co dần lại và khi $\lambda = \lambda_0$ thì $p'_1 = p'_2 = p_0$ (điểm số 4 trên hình 3-25), $\lambda > \lambda_0$, trên trục thực chỉ còn một nghiệm p'_3 và tăng $\lambda \rightarrow \infty$ nghiệm p'_3 sẽ tiến đến nghiệm p''_1 .



Hình 3-25.

6) Xác định các giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo của mặt phẳng nghiệm

Nghiệm nằm trên trục ảo có giá trị $p = j\omega_c$, khi đó phương trình đặc tính có dạng:

$$A(j\omega) = P_A(\omega_c) + jQ_A(\omega_c) = 0 \quad (3-59)$$

Trong (3-59) còn thông số λ_c chưa biết nên phối hợp giải hai phương trình:

$$\begin{aligned} P_A(\omega_c, \lambda_c) &= 0 \\ Q(\omega_c, \lambda_c) &= 0, \end{aligned} \quad (3-60)$$

ta sẽ xác định được giá trị tần số ω_c và λ_c ở giao điểm quỹ đạo nghiệm số và trục ảo

3-5.3. Trình tự xây dựng quỹ đạo nghiệm số và ví dụ áp dụng

1) Xác định các điểm đầu và cuối của quỹ đạo

- Viết phương trình đặc tính dạng:

$$N(p) + \lambda M(p) = 0.$$

- Điểm đầu của quỹ đạo ứng với n nghiệm của $N(p) = 0$
- Điểm cuối của quỹ đạo ứng với m nghiệm của $M(p) = 0$.

2) Xác định các đường thẳng tiệm cận của $(n-m)$ quỹ đạo tiến ra xa vô cùng

- Tâm hình sao của các tia tiệm cận có hoành độ:

$$R_o = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p'_i - \sum_{j=1}^m p''_j \right)$$

- Góc tạo bởi các tia của hình sao và trục hoành:

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{n-m} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n-m-1)$$

3) Xác định điểm tách khỏi trục thực và hướng dịch chuyển của quỹ đạo

- Vẽ đồ thị hàm để tìm hướng dịch chuyển của quỹ đạo:

$$f(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (\text{khi } p \text{ là số thực } -\infty < p < +\infty)$$

- Tính đạo hàm:

$$\frac{df(p)}{dp} = 0 \text{ để tìm điểm tách khỏi trục thực}$$

Nếu có nhiều điểm cực đại, ta phải chọn điểm có $\lambda < 0$ để phù hợp với phương trình (3-57).

4) Xác định giao điểm của trục ảo và quỹ đạo nghiệm

Giải các phương trình (3–60) có từ (3–59) để tìm ra : ω_c và λ_c

Ví dụ 3-13. Xây dựng quỹ đạo nghiệm số đối với hệ thống có hàm truyền đạt trạng thái hở:

$$W_h(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

khi hệ số khuếch đại k biến đổi từ 0 đến ∞ , cho biết $T_1 = 0,1$ s; $T_2 = 0,02$ s.

Giải.

1) Ta tìm được phương trình đặc tính hệ thống kín:

$$A(p) = p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{k}{T_1 T_2} = 0$$

Đối với dạng $N(p) + \lambda M(p) = 0$.

ta có $\lambda = \frac{k}{T_1 T_2}$; $N(p) = p(p+10)(p+50)$; $M(p) = 1$

– Điểm đầu quỹ đạo:

$N(p) = p(p + 10)(p + 50) = 0$ ta được ba điểm đầu của quỹ đạo nghiệm số là: $p'_1 = 0$; $p'_2 = -10 \text{ s}^{-1}$; $p'_3 = -50 \text{ s}^{-1}$

– Điểm cuối của quỹ đạo:

Vì $M(p) = 1 \neq 0$ nên quỹ đạo không có điểm kết thúc cố định p''_j , mà quỹ đạo nghiệm số có 3 đường đều tiến ra xa vô cùng khi $\lambda \rightarrow \infty$.

2) Vì $n-m = 3$ nên hình sao gồm ba tia xác định ba đường tiệm cận của quỹ đạo chạy ra xa vô cùng.

Tâm của hình sao có hoành độ tính theo công thức (3–54):

$$R_0 = \frac{1}{3} (-10 - 50 - 0) = -20 \text{ s}^{-1},$$

Hình sao ba tia có dạng như hình (3–24.c) đã vẽ ở trên.

3) Vẽ đồ thị hàm $f(p)$:

$$f(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = p(p + 10)(p + 50)$$

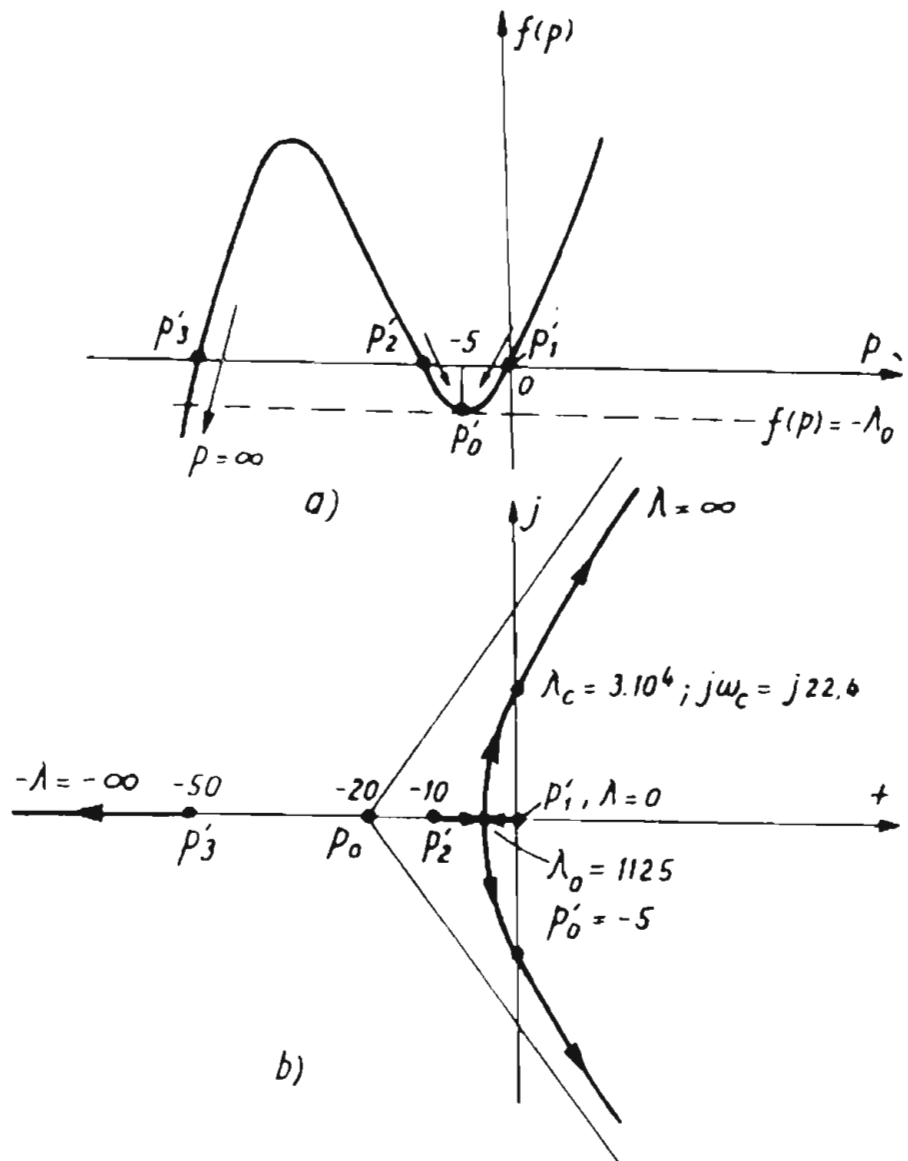
Khi p biến đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$ (hình 3-25,a)

Qua đồ thị $f(p)$ ta thấy nó cắt trục hoành ở ba điểm, xác định ba nghiệm của $N(p) = 0$ là $p'_1 = 0$; $p'_2 = -10$; $p'_3 = -50$.

– Khi λ tăng thì hai nghiệm p'_1 và p'_2 co lại gần nhau và ứng với $f(p) = \lambda_0$ thì chúng chập lại với nhau thành p'_0 . Điểm p'_0 là điểm cực đại của hàm $f(p) = \lambda$

Quỹ đạo nghiệm số vẽ trên hình 3-25,b bắt buộc p'_1 dịch sang trái còn p'_2 dịch sang phải.

Tại điểm chập p'_0 nếu $\lambda > \lambda_0$ thì đường thẳng $-\lambda$ và đường cong $f(p)$ chỉ cắt nhau ở một điểm p'_3 nghĩa là phương trình đặc tính $A(p) = 0$ lúc đó chỉ có một nghiệm thực p'_3 (vì hàm $f(p)$ là hàm thực) và phải có hai nghiệm phức liên hợp đó là p'_1 và p'_2 . Điều đó chứng tỏ từ



Hình 3-26.

điểm chấp p'_0 , quỹ đạo nghiệm số tách khỏi trục thực và chạy thành hai đường đối xứng nhau qua trục thực trên mặt phẳng nghiệm.

– Hoàn hảo điểm chấp p_0 (điểm tách khỏi trục thực của quỹ đạo) tính theo:

$$\frac{df(p)}{dp} = 3p^2 + 120.p + 500 = 0.$$

Giải ra: $p'_0 = -20 + \sqrt{4 - 500/3} = -5s^{-1}$

Giá trị λ_0 ứng với p'_0 là:

$$\lambda_0 = -p'_0(p'_0 + 10)(p'_0 + 50) = 1125.$$

– Khi $\lambda > \lambda_0$ chỉ có một giao điểm của $f(p)$ với đường thẳng λ (điểm p'_3) cho nên quỹ đạo nghiệm p'_3 sẽ hướng về nửa trái trục thực $(-\infty)$.

Quỹ đạo nghiệm p'_1, p'_2, p'_3 vẽ trên hình 3-25 – b.

4) Giao điểm của trục ảo và quỹ đạo nghiệm số:

Thế $p = j\omega_c$ vào phương trình đặc tính $A(p) = 0$ ta có:

$$A(j\omega_c) = j\omega_c(j\omega_c + 10).(p+50) + \lambda_c = 0$$

Hay là:

$$\begin{cases} \lambda_c - \omega_c^2(10 + 50) = 0 \\ \omega_c = \pm j \sqrt{\frac{1}{10.50}} = \pm j 22,4. \end{cases}$$

Vậy tại giao điểm của quỹ đạo nghiệm số và trục ảo tính được

$$\begin{cases} \omega_c = \pm j 22,4 \\ \lambda_c = 3.10^4 \end{cases}$$

Chương 4

**PHÂN TÍCH CHẤT LƯỢNG
HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN**

Chất lượng của hệ thống điều khiển tự động được đánh giá qua chỉ tiêu tính ổn định và các chỉ tiêu chất lượng khác của quá trình xác lập và quá trình quá độ.

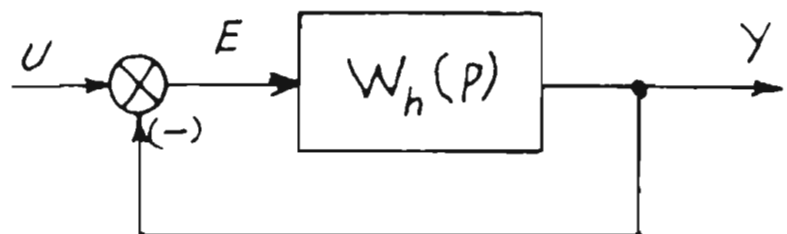
Vấn đề ổn định của hệ được xét ở chương 3. Trong chương này ta sẽ xét tới các nội dung:

- Đánh giá chất lượng hệ thống ở trạng thái xác lập.
- Tính quá trình quá độ của hệ thống và phân tích các chỉ tiêu chất lượng.
- Đánh giá chất lượng hệ thống qua tiêu chuẩn tích phân để tính sai số của hệ.

**4-1. TÍNH SAI SỐ CỦA HỆ THỐNG
Ở TRẠNG THÁI XÁC LẬP**

Trạng thái xác lập là trạng thái khi hệ thống có tác động đầu vào $u(t)$ và sau khi hết quá trình quá độ (hay là quá trình chuyển trạng thái) thì hệ thống sẽ thiết lập một trạng thái ổn định mới. Ở trạng thái xác lập mới này hệ thống sẽ có một sai số nào đó tùy thuộc vào tham số và cấu trúc của hệ.

Xét hệ thống vẽ trên hình 4-1, trong đó $W_h(p)$ là hàm truyền đạt của hệ khi chưa có



Hình 4-1.

phản hồi hay là ở trạng thái hở.

Tổng quát $W_h(p)$ có thể có dạng :

$$W_h(p) = \frac{k}{p^l} \frac{b_0 p^{n_l} + b_1 p^{n_l-1} + \dots + 1}{a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + 1} = \frac{Y(p)}{E(p)} \quad (4-1)$$

Hàm truyền đạt của hệ thống kín, khi có cả mạch phản hồi âm, từ hình 4-1 ta được

$$W_k(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{W_h(p)}{1 + W_h(p)} \quad (4-2)$$

Ta tính sai lệch $E(p)$ của hệ khi biết $U(p)$

Từ (4-1) rút ra :

$$Y(p) = W_h(p).E(p) \quad (4-3)$$

Thế (4-3) vào (4-2) ta có :

$$\frac{W_h(p) E(p)}{u(p)} = \frac{W_h(p)}{1 + W_h(p)} \quad (4-4)$$

$$\text{Hay là :} \quad E(p) = \frac{1}{1 + W_h(p)} U(p) \quad (4-5)$$

Sai số ở trạng thái xác lập, ký hiệu S_l :

$$S_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t),$$

Với $\varepsilon(t)$ là hàm gốc sai số ứng với ảnh Laplace của nó là $E(p)$ theo công thức (4-5).

Mặt khác dựa vào định lý tiến đến giới hạn của ảnh và gốc trong biến đổi Laplace

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) \quad (4-6)$$

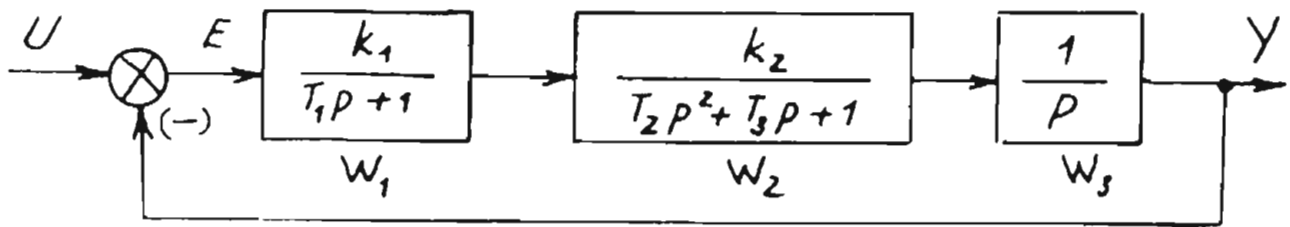
Vì thế sai số S_l sẽ là :

$$S_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + W_h(p)} U(p) \quad (4-7)$$

Từ công thức (4-1) và (4-7), thấy rõ sai lệch S_t phụ thuộc vào tín hiệu vào $U(p)$ và cấu trúc của hệ thống (biểu thị qua hàm truyền đạt $W_h(p)$)

$$1 - \text{Khi tín hiệu vào } U(p) = 1(t) = \begin{cases} 0 \text{ với } t < 0 \\ 1 \text{ với } t \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ với hệ cấp 4 sau đây :



Hình 4-2.

Tính hàm truyền đạt ở trạng thái hở $W_h(p)$

$$W_h(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$$

$$W_h(p) = \frac{k_1 k_2}{p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)} \quad (4-8)$$

Tín hiệu vào $u(t) = 1(t)$ là hàm đơn vị thì ảnh Laplace của nó là $U(p) = \frac{1}{p}$. Dem thế $W_h(p)$ và $u(p)$ vừa tính vào công thức (4-7) ta được :

$$S_t = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + k_1 k_2 / [p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)]} \cdot \frac{1}{p} \quad (4-9)$$

$$S_t = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1) + k_1 k_2} = 0 \quad (4-10)$$

Đối với hệ thống như hình 4-2, các hàm truyền $W_1(p)$ và $W_2(p)$ là các khâu quán tính và dao động nhưng vì có thêm khâu tích phân $W_3(p) = \frac{1}{p}$ dẫn đến sai số ở trạng thái xác lập bằng 0, tức $S_t = 0$. Hệ thống có $S_t = 0$ tức có thêm khâu tích phân được gọi là hệ vô sai cấp 1 (Astatic).

Cũng với ví dụ hình 4-2 nhưng nếu ta bỏ đi khâu tích phân trong hệ thống, lúc đó hàm truyền đạt hệ hở sẽ là

$$W_h(p) = \frac{k_1 \cdot k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)} \quad (4-11)$$

Sai lệch S_1 trong trường hợp này sẽ là :

$$S_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + W_h(p)} \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W_h(p)}$$

$$S_1 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \quad (4-12)$$

Từ (4-12) ta thấy sai lệch ở trạng thái xác lập của hệ thống phụ thuộc vào hệ số khuếch đại k_1 và k_2 của hệ thống. Nếu ta tăng k_1 hoặc k_2 thì S_1 sẽ giảm nhưng sẽ làm tính ổn định của hệ giảm đi.

2- Tín hiệu vào là hàm $u(t) = k_0 t$

$$U(p) = \frac{k_0}{p^2} \quad \text{là ảnh của hàm } u(t) = k_0 t \quad (4-13)$$

– Khi có khâu tích phân, $W_h(p)$ tính theo (4-8)

$$S_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + W_h(p)} U(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + W_h(p)} \cdot \frac{k_0}{p^2}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + k_1 k_2 / [p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)]} \cdot \frac{k_0}{p^2}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1) + k_1 k_2} \cdot \frac{k_0}{p^2} = \frac{k_0}{k_1 k_2} \quad (4-14)$$

trong đó k_0 là biên độ tín hiệu vào

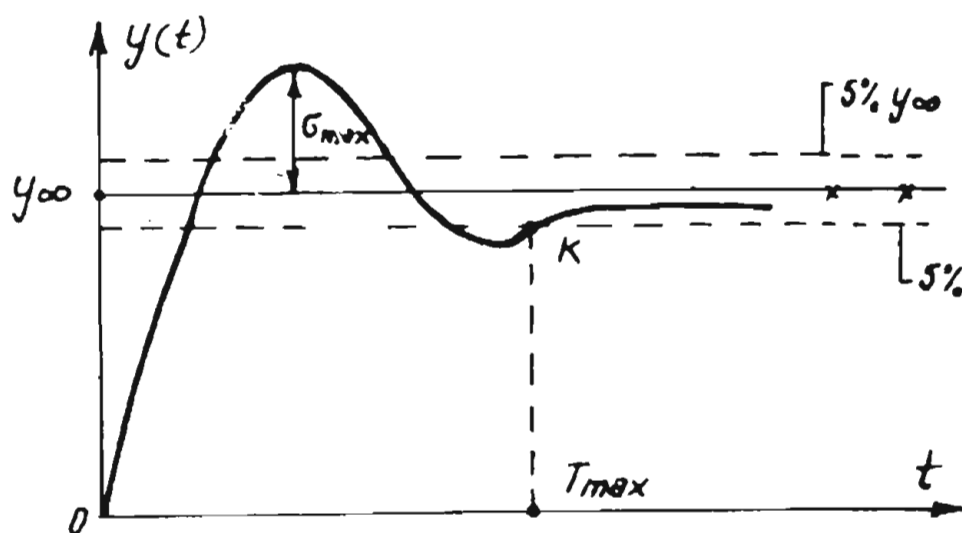
Khi tăng k_1 , k_2 thì S_1 sẽ giảm. Do đó khi tín hiệu vào là hàm tuyến tính của thời gian thì dù có khâu tích phân trong hệ thống, hệ đó vẫn tồn tại sai lệch $S_1 \neq 0$.

4-2. TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ HỆ THỐNG

Một hệ thống điều khiển tự động gọi là ổn định khi tín hiệu ra của hệ thống sẽ tắt dần theo thời gian

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd}(t) = 0 \quad (4-15)$$

hay là tín hiệu ra của hệ khi tín hiệu vào $u(t)$ là hàm đơn vị $u(t) = 1(t)$ sẽ tiến đến một giá trị ổn định hằng số.



Hình 4-3.

Trên hình 4-3 vẽ một dạng đồ thị tín hiệu ra của hệ thống $y(t)$.

Đường cong $y(t)$ có thể dao động quanh giá trị y_{∞} . Phía trên và dưới của giá trị y_{∞} ta lấy $5\% y_{\infty}$ vẽ thành một băng. Nếu đường

cong $y(t)$ lọt vào trong băng $\pm 5\% y_{\infty}$, giả sử cắt băng này ở điểm K. Tại K ta xác định $T_{\max}$ là thời gian quá trình quá độ lớn nhất của hệ thống.

Giá trị lớn nhất của $y(t)$ là $y_{\max}(t)$. Độ quá điều chỉnh của hệ : $\sigma_{\max} = y_{\max} - y_{\infty}$. Số lần dao động n xung quanh giá trị y_{∞} . Ba chỉ tiêu chất lượng của quá trình quá độ $\sigma_{\max}$, $T_{\max}$ và n sẽ do các yêu cầu thiết kế đặt ra. Giá trị của chúng càng nhỏ, thì chất lượng hệ thống càng cao. Giá trị của n thông thường đòi hỏi ≤ 3 .

Các chỉ tiêu chất lượng của hệ thống còn liên quan chặt chẽ với các bài toán tối ưu (Optimal) sau này.

Việc tính quá trình quá độ hệ thống là tìm nghiệm phương trình vi phân hoặc sai phân. Có nhiều phương pháp để tính nghiệm

- Các phương pháp số giải gần đúng trên máy tính.
- Các phương pháp giải tích như toán tử Laplace.

4-2.1. Phương pháp số Runge - Kutta

Đây là một phương pháp số có độ chính xác cao nhưng thời gian tính toán sẽ dài nếu hệ thống có cấp càng cao.

Sau đây ta khảo sát công thức tính toán đến 4 số hạng, chẳng hạn nêu công thức cho hệ thống cấp 2. Giả sử có hai phương trình vi phân cấp 1 sau đây :

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \quad (4-16)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \quad (4-17)$$

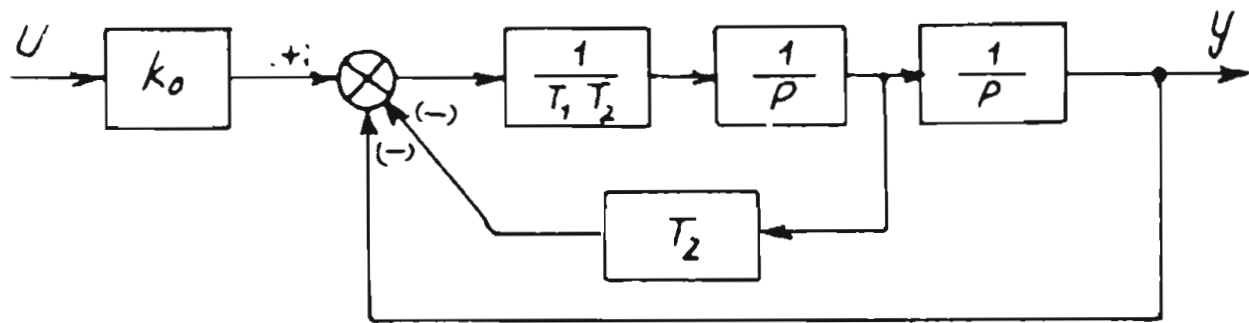
Chọn bước tính h , ta chuyển hệ phương trình vi phân (4-16) và (4-17) về hệ phương trình sai phân sau

$$\begin{aligned} y_1[k+1] &= y_1[k] + (k_{11} + 2 * k_{21} + 2 * k_{31} + k_{41})/6; \\ y_2[k+1] &= y_2[k] + (k_{12} + 2 * k_{22} + 2 * k_{32} + k_{42})/6; \end{aligned} \quad (4-18)$$

trong đó :

$$\left\{ \begin{aligned} k_{11} &= h \cdot f_1(y_1[k], y_2[k]); \\ k_{12} &= h \cdot f_2(y_1[k], y_2[k]); \\ k_{21} &= h \cdot f_1(y_1[k] + k_{11}/2, y_2[k] + k_{12}/2); \\ k_{22} &= h \cdot f_2(y_1[k] + k_{11}/2, y_2[k] + k_{12}/2); \\ k_{31} &= h \cdot f_1(y_1[k] + k_{21}/2, y_2[k] + k_{22}/2); \\ k_{32} &= h \cdot f_2(y_1[k] + k_{21}/2, y_2[k] + k_{22}/2); \\ k_{41} &= h \cdot f_1(y_1[k] + k_{31}/2, y_2[k] + k_{32}/2); \\ k_{42} &= h \cdot f_2(y_1[k] + k_{31}/2, y_2[k] + k_{32}/2); \end{aligned} \right. \quad (4-19)$$

Ví dụ 4-1. Cho hệ thống điều khiển trên hình 4-4.



Hình 4-4.

Từ sơ đồ cấu trúc ta xác định được hàm truyền đạt và phương trình vi phân :

$$W(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{k_o}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1} \quad (4-20)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left(-T_2 \frac{dy}{dt} - y(t) + k_o \cdot u \right) / (T_1 \cdot T_2). \quad (4-21)$$

Từ (4-21) ta chuyển về hệ phương trình vi phân cấp 1 sau :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 = f_1 \quad (4-22)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (k_o \cdot u - y_1 - T_2 y_2) / (T_1 \cdot T_2) = f_2. \quad (4-23)$$

Sau đây ta viết được chương trình tính nghiệm $y_1(t)$ và $y_2(t)$ bằng ngôn ngữ Pascal (Giả sử có thể cho số liệu $k_1 = 30$; $T_1 = 1$; $T_2 = 0.5$; bước tính $h = 0.02$).

PROGRAM Rukut Cap_2;

Uses crt, graph;

Const u = 1;

Var T1,T2,K0, K11, K12,K21, K22 : real;

K31, K32, K41, K42, h, m : real;

gd, gm, k : Integer ;

y1, y2 : array[0..640] of real;

BEGIN

Clrscr ;

Write ('Hệ số khuếch đại Ko = '); Readln (Ko);

Write ('Hằng số thời gian T1 = '); Readln (T1);

Write ('Hằng số thời gian T2 = '); Readln (T2);

Write ('Chọn bước tính h = '); Readln (h);

m := T1 * T2

y1[0] := 0; y2[0] := 0;

FOR k := 0 to 639 do

Begin

k11 := h * y2[k];

k12 := h * (k0 * u - T2 * y2[k] - y1[k])/m;

k21 := h * (y2[k] + k12/2);

k22 := h * (k0 * u - T2 * (y2[k] + k12/2) - (y1[k] + k11/2))/m;

k31 := h * (y2[k] + k22/2);

k32 := h * (k0 * u - T2 * (y2[k] + k22/2) - (y1[k] + k21/2))/m;

k41 := h * (y2[k] + k32/2);

k42 := h * (k0 * u - T2 * (y2[k] + k32/2) - (y1[k] + k31/2))/m;

y1[k + 1] := y1[k] + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6;

y2[k + 1] := y2[k] + (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)/6;

Writeln ('k =', k:4, 'y1[' , k, '] =', y1[k] : 6 : 2,

' , 'y2[' , k, '] =', y2[k] : 6 : 2);

delay (200);

end;

```

{ Vẽ đồ thị y1(t) và y2(t) }
gd := detect;
Initgraph (gd, gm, 'C:\TP\BGI');
setbkcolor (cyan);
setlinestyle (0,0,3);
setcolor (Red);
rectangle (2,2,637,477);
Outtextxy (240,40, 'F.F.Runge – Kutta Hệ thống cấp 2');
moveto (2, 240);
for k := 2 to 635 do
    begin
        lineto (k, 240 – Round (2 * y1[k]));
    end;
outtextxy (400, 230 – Round(2 * y1[k]), 'y1(t)');
setcolor (Blue);
moveto (2, 240);
For k := 2 to 635 do
    Begin
        lineto (k, 240 – Round (2 * y2[k]));
    end;
outtextxy (400, 230 – Round (2 * y2[k]), 'y2(t)');
outtextxy (10, 250, '0');
Repeat Until Keypressed;
Closegraph;
END.

```

Sau khi cho chạy chương trình trên máy vi tính với ngôn ngữ Pascal version 6.0, kết quả in ra màn hình các số liệu y_1

Phương pháp Runghe Kutta được viết theo ngôn ngữ C theo

/** P P RUNGHE-KUTTA MO HINH HOA HE CAP II **/
/** NGON NGU C ++ **/

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <conio.h>
```

```
int  gd,gm,i,n,m  ;
```

```
float K31,K32,K41,K42,h,u,Ka,q,kb ;
```

```
printf("\n dua vao cac tham so Kd,t1,t2 ") ;
```

```
printf("\n cho gia tri buoc tinh h :") ;
```

gd=DETECT ;

```
setcolor(15) ;
```

```
setfillstyle(CLOSE-DOT-FILL,CYAN) ;
```

```
rectangle(240,15,400,30) ;
```

```
setcolor(6) ;
```

```
outtextxy(220,50,"H.T dao dong Cap hai") ;
```

```
setcolor(1) ;
```

```
outtextxy(250,80,"T1.T2.y"+ T2 , 1);
```

```

for(m=0 ;m<=10 ;m++ )
{
    line(64*m,5,64*m,15) ;
    line(64*m,465,64*m,475) ;
    line(64*m+ 32,5,64*m+ 32,10) ;
    line(64*m+ 32,470,64*m+ 32,475) ;
}
for(m=0 ;m<=10 ;m++ )
{
    line(5,m*48,10,m*48) ;
    line(635,m*48,630,m*48) ;
}
setcolor(5) ;
setlinestyle(0,0,3) ;
rectangle(5,5,634,475) ;
moveto(1,475) ;
u=1 ;q=t1*t2 ; Ka=Kd*u ;
y1[0]=0 ;y2[0]=0 ;
for(i=1 ;i<=635 ;i++ )
{
    K11=h*y2[i] ;
    K12=h*(Ka -y1[i]-t2*y2[i])/q ;
    K21=h*(y2[i]+ K12/2) ;
    K22=h*(Ka-y1[i]-K11/2-t2*(y2[i]+ K12/2))/q ;
    K31=h*(y2[i]+ K22/2) ;
    K32=h*(Ka-y1[i]-K21/2-t2*(y2[i]+ K22/2))/q ;
    K41=h*(y2[i]+ K32) ;
    K42=h*(Ka-y1[i]-K31-t2*(y2[i]+ K32))/q ;
    y1[i+ 1]=y1[i]+ (K11+ 2*K21+ 2*K31+ K41)/6 ;
    y2[i+ 1]=y2[i]+ (K12+ 2*K22+ 2*K32+ K42)/6 ;
    lineto(i,475-(int)10*y1[i]) ;
}

getch() ;
closegraph();
return(0) ;

```

4-2.2. Phương pháp số Tustin

Phương pháp Runge – Kutta rất thông dụng để tính nghiệm phương trình vi phân tuyến tính và phi tuyến. Còn phương pháp Tustin được dùng để tính quá trình quá độ cho hệ thống liên tục từ sơ đồ cấu trúc – hàm truyền đạt.

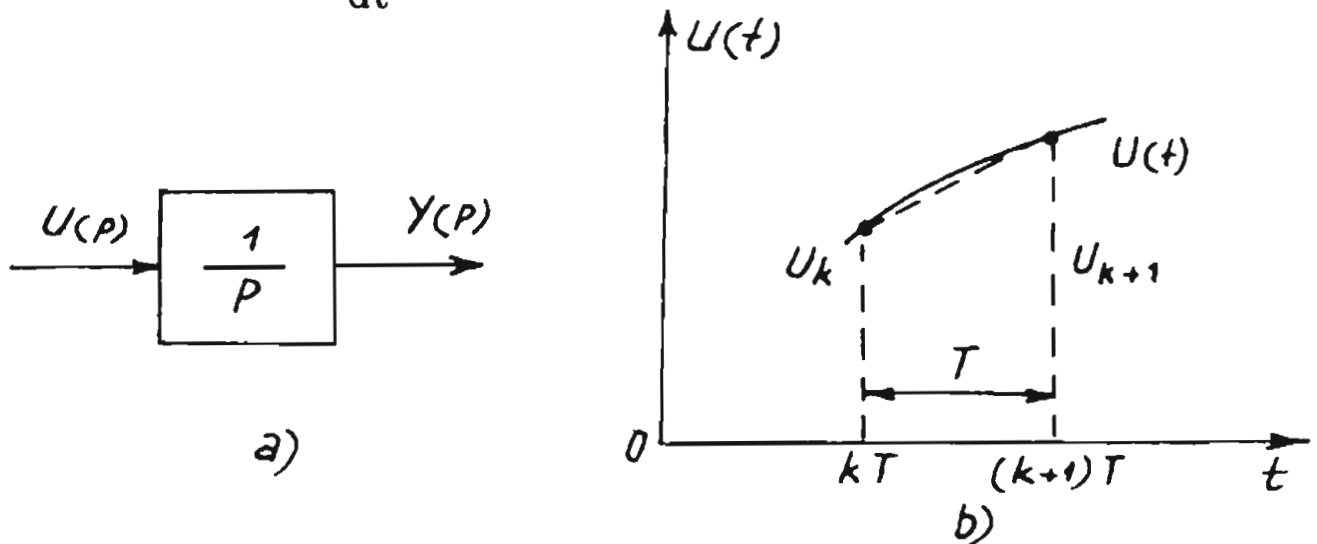
Tích phân một quá trình liên tục $u(t)$ được tính theo :

$$y(t) = \int_0^t u(t).dt \quad (4-24)$$

Biến đổi Laplace (4-24) với điều kiện đầu triệt tiêu .

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot u(p) \rightarrow W(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{1}{p} \quad (4-25)$$

Hoặc
$$\frac{dy}{dt} = u(t) \quad (4-26)$$



Hình 4-5.

Tín hiệu ra $y(t)$ theo (4-24) chính là diện tích hình thang vẽ trên hình 4-5,b , chiều cao T và 2 đáy $u(k)$; $u(k + 1)$

$$y(k + 1) - y(k) = \frac{T}{2}[u(k + 1) + u(k)] \quad (4-26)$$

Sau này, trong chương "Hệ thống điều khiển gián đoạn xung số"

ta sẽ thấy rõ thêm về phép biến đổi Z

Đơn giản ta có hàm gốc $y[k]$ và ảnh là $Y(Z)$

Gốc	Ảnh	
$y[k]$	$Y(Z)$	
$y[k + 1]$	$Z.Y(Z)$	
$y[k + 2]$	$Z^2 Y(Z)$	(4-27)
$y[k + n]$	$Z^n Y(Z)$	

Phương trình (4-26) gọi là phương trình sai phân.

Từ phương trình (4-26) áp dụng công thức (4-27) ta được một phương trình đại số của ảnh Z:

$$Z.Y(Z) = Y(Z) + \frac{T}{2} [Z.u(Z) + u(Z)] \quad (4-28)$$

Từ (4-28) ta tìm được hàm truyền rời rạc theo Z

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{u(Z)} = \frac{T}{2} \frac{Z + 1}{Z - 1} \quad (4-29)$$

Do vậy ứng với hàm truyền liên tục (4-25) ta tìm được hàm truyền rời rạc (4-29), hay nói cách khác ta có sự tương ứng $\frac{1}{p}$ và $\frac{T}{2} \frac{Z + 1}{Z - 1}$.

Hay

$$p = \frac{2}{T} \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (4-30)$$

Bây giờ có một quá trình ngược lại, từ hàm truyền liên tục $W(p)$, nếu ta đổi biến p thành biến Z theo công thức (4-30) và ta được một phương trình đại số của Z , cuối cùng áp dụng công thức (4-27) ta chuyển về phương trình sai phân dạng (4-26) và áp dụng cho việc viết chương trình trên máy tính số.

Ví dụ 4-2. Với hệ thống cấp 2 mô tả ở hình 4-4, ta có hàm truyền :

$$W(p) = \frac{k_o}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad (4-31)$$

Đổi biến $p = \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}$ theo (4-30), thế vào (4-31) ta có:

$$W(Z) = \frac{k_o}{T_1 T_2 \left(\frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1} \right)^2 + T_2 \cdot \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1} + 1}$$

$$W(Z) = \frac{k_o T^2 (Z^2 + 2Z + 1)}{AZ^2 + BZ + C} = \frac{Y(Z)}{u(Z)} \quad (4-32)$$

Trong đó các hệ số :

$$\begin{aligned} A &= 4.T_1 T_2 + 2.T.T_2 + T^2 \\ B &= 2.T^2 - 8.T_1 T_2 \\ C &= T^2 + 4.T_1 T_2 - 2.T.T_2 \end{aligned} \quad (4-33)$$

Phương trình đại số từ (4-32) là :

$$A.Z^2 Y(Z) + B.Z.Y(Z) + C.Y(Z) = k_o T^2 [Z^2.u(Z) + 2.Z.u(Z) + u(Z)] \quad (4-34)$$

Phương trình sai phân tương ứng với (4-34) là :

$$\begin{aligned} A.y[k+2] + B.y[k+1] + C.y[k] &= \\ k_o T^2 [u[k+2] + 2.u[k+1] + u[k]] \end{aligned} \quad (4-35)$$

Giả thiết tín hiệu vào $u(t) = 1(t) = 1$ với $t \geq 0$,

do đó $u[k] = u[k+1] = u[k+2] = 1$

$$A.y[k+2] + B.y[k+1] + C.y[k] = k_o T^2 .4.$$

Vậy:

$$y[k+2] = (-B \cdot y[k+1] - C \cdot y[k] + 4 \cdot k_o \cdot T^2) / A. \quad (4-36)$$

Từ công thức (4-33) và (4-36) ta có chương trình viết bằng

ngôn ngữ Pascal sau đây :

PROGRAM Tustin;

uses crt, graph;

const u = 1;

var T1, T2, K0, a, b, c : real;

gd, gm, k : integer ;

y : array[0..640] of real;

BEGIN

clrscr ;

Write (' Hệ số khuếch đại K0 = '); Readln (K0);

Write (' Hằng số thời gian T1, T2 '); Readln (T1, T2);

Write (' Chọn bước tính T - '); Readln (T);

y[0] := 0; y[1] := 0;

A := $4 \star T1 \star T2 + 2 \star T \star T2 + T \star T$;

B := $2 \star T \star T - 8 \star T1 \star T2$;

C := $T \star T + 4 \star T1 \star T2 - 2 \star T \star T2$;

For k := 2 to 640 DO

y[k + 2] = (- B $\star$ y[k + 1] - C $\star$ y[k] + k0 $\star$ T $\star$ T $\star$ u)/A;

Writeln (' k = ', k : 4, ' ' 'y[', k, '] = ', y[k] : 8 : 6); delay (100);

end;

gd := detect;

inltgraph (gd, gm, ' C : \tp\Bgi ');

setbkcolor (Black);

setcolor (lightgreen);

rectangle (2, 2, 637, 477);

setcolor (Red);

```

moveto (2, 477);
For k := 2 to 637 Do
    Begin
        lineto (k, 477 - Round (2 * y[k]));
    end ;
Outtextxy (350, 470 - Round (2 * y[k]), 'y(t): Tín hiệu ra Tustin');
Repeat Until Keypressed;
    closegraph;
END

```

Cũng chương trình này được viết theo ngôn ngữ C sau đây:

```

/*****
/*      MO HINH SO KHAU DAO DONG BAC HAI      */
/*      NHO PHUONG PHAP SO TUSTIN             */
*****/

#include<graphics.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<conio.h>
main()
{
    int  gd, gm, k ;
    float t1, t2, kd, t, a, b, c, u ;
    float y[640] ;
    printf("\n Vao he so Khuyech dai Kd =   ) ;
    scanf("%f", &kd) ;
    printf("\n Vao hang so thoi gian t1 =   ) ;
    scanf("%f", &t1) ;
    printf("\n Vao hang so thoi gian t2 =   ) ;
    scanf("%f", &t2) ;
    printf("\n Vao buoc tinh t = ", t ) ;
    scanf("%f", &t) ;

```

```

gd=DETECT ;
initgraph(&gd,&gm, "C :\\borlandc\\bgi ") ;
setbkcolor(0) ;
setfillstyle(CLOSE_DOT_FILL,BROWN) ;
bar(240,18,400,32) ;
setcolor(15) ;
rectangle(239,16,401,33) ;
setfillstyle(CLOSE_DOT_FILL,3) ;
bar(3,3,636,476) ;
outtextxy(235,22,"VE DO THI") ;
outtextxy(180,50,"PHUONG PHAP SO TUSTIN ") ;
outtextxy(225,70,"NGON NGU C++") ;
setcolor(4) ;
setlinestyle(0,0,3) ;
rectangle(0,0,639,479) ;
setcolor(6) ;
moveto(4,476) ;

$$a = 4 * t_1 * t_2 + 2 * t * t_2 + t * t$$


$$b = 2 * t * t - 8 * t_1 * t_2$$


$$c = t * t + 4 * t_1 * t_2 - 2 * t * t_2$$

u=1 ;y[0]=0 ;y[1]=0 ;
for(k=2 ; k<=636 ;k++ )

```

$$y[k] = (-b*y[k-1] - c*y[k-2] + 4*kd*t*t*u)/a ;$$

$$\text{lineto}(k, 478 - (\text{int})(10*y[k])) ;$$

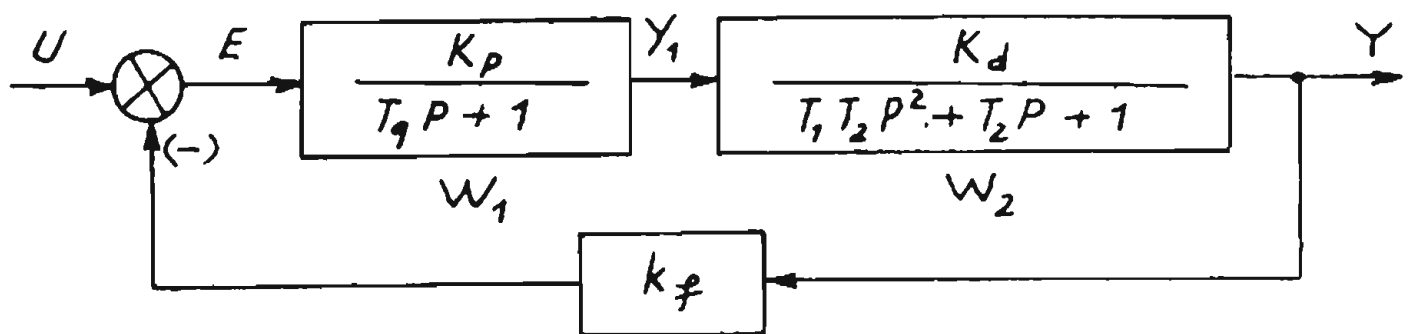
getch() ;

closegraph() ;

return(0) ;

Kết quả tính toán bằng phương pháp số Tustin và Runge–Kutta in từ hai chương trình này ra ề cơ bản là xấp xỉ nhau nhưng thời gian tính toán của phương pháp Tustin ít hơn thời gian của phương pháp Runge–Kutta hơn 3 lần. Do đó phương pháp số Tustin được sử dụng rộng rãi và tiện lợi hơn.

Ví dụ 4 - 3. Cho hệ thống điều khiển như hình 4–6. Hãy tính quá trình quá độ hệ thống theo phương pháp số Tustin..



Ảnh 4-6.

Hệ thống gồm một khâu quán tính $W_1(p)$ và một khâu dao động $W_2(p)$; Mạch phản hồi có hệ số truyền bằng 0,2.

$$\text{– Xét khâu quán tính : } W_1(p) = \frac{K_q}{T_q p + 1} = \frac{Y_1(p)}{E(p)} \quad (4-37)$$

Thế $p = \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1}$ vào (4-37) ta xác định được :

$$(2T_q + T).Z.Y_1(Z) + (T - 2T_q).Y_1(Z) = k_q T.Z.E(Z) + K_q.T.E(Z)$$

Hay :

$$Z.Y_1(Z) = A_1.Y_1(Z) + B_1.Z.E(Z) + B_1.E(Z),$$

trong đó :

$$\begin{aligned} A_1 &= (2T_q - T)/(2.T_q + T) \\ B_1 &= K_q.T/(2.T_q + T). \end{aligned} \quad (4-38)$$

Phương trình sai phân khâu quán tính có dạng :

$$y_1(k+1) = A_1.y_1(k) + B_1.E(k+1) + B_1.E(k) \quad (4-39)$$

– Đối với khâu dao động $W_2(p)$ ta đã xác định được phương trình sai phân (4-35) tương ứng với các hệ số (4-33):

$$\begin{aligned} y[k+2] &= (-B \star y[k+1] - c \star y[k] + k_d T^2. (u[k+2] + \\ &\quad + 2.u[k+1] + u[k]))/A_2; \end{aligned} \quad (4-40)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 4.T_1.T_2 + 2.T.T_2 + T^2 \\ B_2 &= 2.T^2 - 8.T_1.T_2 \\ C_2 &= T^2 + 4.T_1.T_2 - 2.T.T_2 \\ d_2 &= k_d.T^2 \end{aligned} \quad (4-41)$$

Phương trình sai phân mô tả hệ thống theo phương pháp Tustin vẽ trên hình 4-6 là :

$$\begin{aligned} E[k] &= u - kF \star y[k] \\ y_1[k+1] &= A_1 \star y_1[k] + B_1 \star E[k+1] + B_1 \star E[k] \\ y[k+1] &= (-B_2 \star y[k] - C_2 \star y[k-1] + d_2 \star (y_1[k+1] + \\ &\quad + 2 \star y_1[k] + y_1[k-1]))/A \end{aligned} \quad (4-42)$$

Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào giá trị hệ số khuếch đại k_q , k_d , k_f trong hệ.

Để xét ổn định cho hệ ta viết phương trình đặc tính của nó và dùng định thức Hurwitz để xét ổn định, ta sẽ tìm được điều kiện

tính k_f khi cho k_q, k_d .

$$k_f < (T_q/T_1 + 1/T_1 + T_2/T_1) / (K_q * K_d) = M \quad (4-43)$$

Chương trình Pascal để xét ổn định cho hệ thống và tính quá trình quá độ được nêu ra sau đây :

PROGRAM TustinHethong;

Uses CRT, graph;

Label tt;

Const u = 1;

VAR a1, b1, c1, a2, b2, c2, d2,

Kq, Tq, Kd, T1, T2, Kf,

M, T : Real;

gd, gm, k, l : integer ;

E, y1, y : array[0... 640] of Real;

BEGIN

Write ('Khuếch đại quán tính Kq = '); Readln (Kq);

Write ('Thời gian quán tính Tq = '); Readln (Tq);

Write ('Khuếch đại đối tượng Kd = '); Readln (Kd);

Write ('Hằng số thời gian T1 = '); Readln (T1);

Write ('Hằng số thời gian T2 = '); Readln (T2);

Write (' Bước tính T = '); Readln (T);

M := (Tq/T1 + 1/T1 + T2/T1)/(Kq * Kd);

Writeln ('Giá trị $K_f < M : 6 : 5$, 'Hệ thống mới ổn định ');

Write (' Hệ số phản hồi $K_f =$ '); Readln(Kf);

if Kf < m then goto tt;

if Kf > m then

Writeln ('Hệ thống không ổn định !');

Writeln ('Hãy cho lại các giá trị hệ số khuếch đại');

```

halt;
tt : y[0] := 0; y[1] := 0;
a1 := (2 * Tq - T) / (2 * Tq + T);
b1 := Kq * t / (2 * Tq + T);
a2 := 4 * T1 * T2 + 2 * T2 * T + T * T;
b2 := 2 * T + T - 8 * T1 * T2;
C2 := T + T + 4 * T1 * T2 - 2 * T * T2;
d2 := kd * T + T;
for k := 0 to 550 do
  Begin
    E[k] := U - kf * y[k];
    y1[k + 1] := a1 * y1[k] + b1 * E[k + 1] + b1 * E[k];
    y[k + 1] := ( - b2 * y[k] - C2 * y[k - 1] + d * y1[k + 1] +
      + 2 * d * y1[k] + d * y1[k - 1]) / a;
    Writeln ('k = ', k : 5, ' ', 'y[', k, ' ] = ', y[k] : 8 : 5);
  End;

  gd := detect;
  initgraph (gd, gm, 'C:\Tp\Bgi ');
  setlinestyle (0,0,3);
  setbkcolor (0);
  setcolor (Red);
  rectangle (2, 2, 637, 477);
  setcolor (12);
  Moveto(2, 477)
  FOR k := 0 to 550 do
    Begin
      lineto (k, 479 - Round (100 * y[k]));

```

```

        end;
        outtextxy (580, 470 – Round (100 * y[k], 'y(t)'),
        outtextxy (455, 450 – Round (100 * y[k], 'Tín hiệu ra hệ thống');
        Repeat Until Keypressed;
        Closegraph;
    END.

```

Khi chạy chương trình, ta có thể cho vào các giá trị

$$\begin{aligned}
 K_q &= 2; T_q = 1; \\
 K_d &= 10; T_1 = 0.5; T_2 = 0.2 \\
 T &= 0.05; K_f = 0.2
 \end{aligned}$$

Điều kiện để hệ thống ổn định là $K_f < 0.22$;

Chương trình mô hình hệ thống viết theo ngôn ngữ C:

```

/***** */
/*      MO HINH PHUONG PHAP SO TUSTIN      */
/*      HE THONG DIEU KHIEN TU DONG        */
/***** */

#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include <conio.h>
#include <dos.h>
float a,b,c,a1,b1,d;
kq,tq,t1,t2,kd,t,kf,m,m1 ;
int gd,gm,k,l ;
float y1[640],y2[640],y3[640] ;
main()
{
    printf("\n He so k. dai kq=") ;

```

```

scanf("%f",&kq) ;
printf("\n hang so thoi gian tq =") ;
scanf("%f",&tq) ;
printf("\n He so k. dai kd=") ;
scanf("%f",&kd) ;
printf("\n hang so thoi gian t1 =") ;
scanf("%f",&t1) ;
printf("\n hang so thoi gian t2 =") ;
scanf("%f",&t2) ;
printf("\n Buoc tinh t =") ;
scanf("%f",&t) ;
m=tq/t1+1/t1+t2/t1 ; m1=m/(kq*kd) ;
printf("\n Gia tri :kf< %4.4f",m1) ;
printf(" he thong moi on dinh") ;
printf("\n He so phan hoi kf=") ;
scanf("%f",&kf) ;
y [0]=0 ;y [1]=0 ;
a=4*t1*t2+ 2*t*t2+ t*t ;
b=2*t*t-8*t1*t2 ;
c=t*t+ 4*t1*t2-2*t*t2 ;d=kd*t*t ;
a1=(2*tq-t)/(2*tq+ t) ;
b1= kq*t/(2*tq+ t) ;
if( kq*kd*kf<m) goto tt ;
if (kq*kd*kf>m)
printf("\n He thong khong On dinh \n") ;
printf("\n Hay giam cac he so kq,kd,kf !\n") ;
getchar() ;
tt : printf("\nHe thong On dinh !") ;
for( k= 0 ;k<= 630 ;k++)
{
    y1[k]=1-kf*y3[k] ;
    y2[k]=a1*y2[k-1]+ b1*y1[k]+ b1*y1[k-1] ;
    y3[k+ 2]=(-b*y3[k+ 1]-c*y3[k]+
    d*y2[k+ 2]+ 2*d*y2[k+ 1]+ d*y2[k])/a ;
    printf("\n\t\tk=%3d y3=%6.2f",k,y3[k]) ;

```

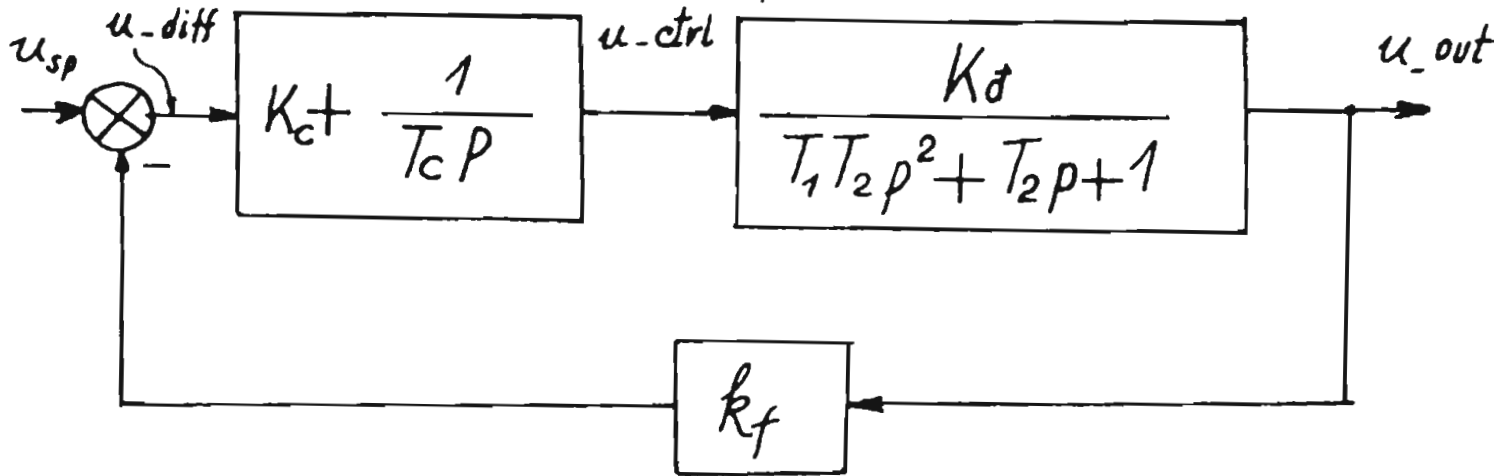
```

        delay(1) ;
    }
    getch() ;
    gd=DETECT ;
    initgraph(&gd,&gm,"c :\\borlandc\\bgi") ;
    setlinestyle(0,0,3) ;
    setbkcolor(0) ; setcolor(4) ;
    outtextxy(160,30,"FF SO TUSTIN-HE THONG DKTD")
    outtextxy(20,450,"0") ;
    setcolor(5) ;
    outtextxy(240,50," BORLANDC") ;
    rectangle(2,2,637,477) ;
    setcolor(1) ;
    for( l=0 ;l<=10 ;l++ )
    {
        line(64*l,5,64*l,15) ;
        line(64*l+ 32,5,64*l+ 32,10) ;
        line(64*l,475,64*l,464) ;
        line(64*l+ 32,475,64*l+ 32,468) ;
        line(5,48*l,10,48*l) ;
        line(635,48*l,630,48*l) ;
    }
    setcolor(2) ;
    moveto(1,477) ;
    for( k= 0 ;k<= 630 ;k++ )
    {
        lineto(k,479-(int)(10*y3[k]/1.6)) ;
    }
    outtextxy(580,470-(int)(10*y3[k]/1.6), "y3(t)") ;
    outtextxy(455,450-(int)(10*y3[k]/1.6), "Tin hieu ra He thong") ;
    getch() ;
    closegraph() ;
    return(0) ;

```

Ví dụ 2

Cho hệ thống điều khiển gồm bộ PID và đối tượng điều khiển có khâu phản hồi k_f theo sơ đồ cấu trúc sau:



Bằng phương pháp số TUSTIN, ta có hệ phương trình sai phân:

- Khâu PI (khâu PID chỉ lấy thành tỷ lệ P và tích phân I):

$$u_{ctrl}[k+2] = u_{ctrl}[k+1] + a_1 * u_{diff}[k+2] + b_1 * u_{diff}[k+1]$$

Trong đó

$$\begin{cases} a_1 = T/(2*T_c) + K_c \\ b_1 = T/(2*T_c) - K_c \end{cases}$$

Đối tượng điều khiển là Motor có phương trình sai phân :

$$u_{out}[k+2] = (-b_2 * u_{out}[k+1] - c_2 * u_{out}[k] + d_2 * (u_{ctrl}[k+2] + 2 * u_{ctrl}[k+1] + u_{ctrl}[k]))/a_2$$

Trong đó :

$$\begin{cases} a_2 = T^2 + 2.T.T_2 + 4T_1.T_2 \\ b_2 = 2T^2 - 8T_1.T_2 \\ c_2 = T^2 - 2TT_2 + 4T_1.T_2 \\ d_2 = k_d + 2 \end{cases}$$

Chương trình hệ thống viết bằng ngôn ngữ C được list ra như sau:

```

/*****
/*      MO HINH PHUONG PHAP SO TUSTIN          */
/*      HE THONG DIEU KHIEN TU DONG           */
/*      He thong kin bao gom 3 khâu :          */
/*      khâu PI co ham truyen  $K_c + 1/T_c.p$  */
/*      khâu dao dong  $K_d/(T_1.T_2.p^2 + T_2.p + 1)$  */
/*      khâu phan hoi co ham truyen  $K_f$  */
*****/
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include <conio.h>
#include <dos.h>
float SP,Kc,Tc2,Tc,Kd,T1,T2,Kf2,Kf,T ;
float a1,b1,a2,b2,c2,d2 ;
int gd,gm,k,l ;
float U-diff[640],U-fback[640],U-ctrl[640],U-out[640] ;
main()
{
    clrscr() ;
    printf(" He so khuyech dai Kd=") ;
    scanf("%f", &Kd) ;
    printf(" Hang so thoi gian T1=") ;
    scanf("%f", &T1) ;
    printf(" Hang so thoi gian T2=") ;
    scanf("%f", &T2) ;
    printf(" Diem dat SP=") ;
    scanf("%f", &SP) ;
    printf(" He so khuyech dai Kc=") ;
    scanf("%f", &Kc) ;
    Tc2=T1/Kc ;
    printf(" Hang so thoi gian Tc phai nho hon %f \n", Tc2) ;
    printf(" Hang so thoi gian Tc=") ;
    scanf("%f", &Tc) ;
    printf(" Buoc tinh T =" ) ;
    scanf("%f", &T ) ;
    Kf2=Tc/(Kd*T1-Kd*Kc*Tc) ;
    printf(" He so phan hoi Kf phai nho hon %f \n", Kf2) ;
    printf(" He so phan hoi Kf=") ;
    scanf("%f", &Kf) ;

```

```

/* cac tham so khau PI */
a1=T/(2*Tc)+ Kc ;
b1=T/(2*Tc)-Kc ;
/* cac tham so khau dao dong */
a2=T*T+ 2*T2*T+ 4*T1*T2 ;
b2=2*T*T-8*T1*T2 ;
c2=T*T-2*T2*T+ 4*T1*T2 ;
d2=Kd*T*T ;
/* cac gia tri dau */
U-out[0]=0 ; U-out[1]=0 ;
U-ctrl[0]=0 ; U-ctrl[1]=0 ;
U-diff[0]=SP ; U-diff[1]=SP ;
/* mo phong he thong */
for(k=0 ; k<640-2 ; k++)
{
    U-fback[k+ 2]=Kf*U-out[k+ 1] ;
    U-diff[k+ 2]=SP-U-fback[k+ 2] ;
    U-ctrl[k+ 2]=U-ctrl[k+ 1]+ a1*U-diff[k+ 2]+ b1*U-diff[k+ 1] ;
    U-out[k+ 2]=(-b2*U-out[k+ 1]-c2*U-out[k]+ d2*(U-ctrl[k+ 2]+
    2*U-ctrl[k+ 1]+ U-ctrl[k]))/a2 ;
    printf("\n\t\tk=%3d  U-out=%6.2f",k,U-out[k]) ;
    delay(10) ;
}
/* khoi tao che do do hoa */
gd=DETECT ;
initgraph(&gd,&gm,"c :\\borlandc\\bgi") ;
setlinestyle(0,0,DASHED-LINE) ;
setbkcolor(BLUE) ; setcolor(YELLOW) ;
outtextxy(160,30,"FF SO TUSTIN DE MO HINH HOA H.T DKTD");
outtextxy(20,450,"0") ;
setcolor(5) ;
rectangle(2,2,637,477) ;
setcolor(1) ;
for(l=0 ; l<=10 ; l++)
{
    line(64*l,5,64*l,15) ;line(64*l+ 32,5,64*l+ 32,10) ;
    line(64*l,475,64*l,464) ;line(64*l+ 32,475,64*l+ 32,468) ;

```

```

        line(5,48*1,10,48*1) ;line(635,48*1,630,48*1) ;
    }
    setcolor(14) ;
    moveto(1,479) ;
/* vẽ đồ thị */
    line(0,479-(int)SP,639,479-(int)SP) ;
    for(k=0 ; k<=640 ; k++)
    {
        lineto(k,479-(int)U-out[k]) ;
    }
    outtextxy(580,470-(int)U-out[k],"U-out(t)") ;
    outtextxy(455,450-(int)U-out[k],"Tin hieu ra He thong") ;
    getch() ;
    closegraph() ;
    return(0) ;
}

```

4-3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI

4-3.1. Phương trình trạng thái dừng, thuần nhất

Đây là một phương trình vi phân véc tơ hệ số hằng, mô tả quá trình tự do của hệ dừng tuyến tính .

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{x} . \quad (4-44)$$

Trước hết ta xét hệ mô tả bởi phương trình vi phân cấp 1 vô hướng :

$$\frac{dx}{dt} = ax . \quad (4-45)$$

điều kiện đầu $x(0)$.

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = a \int_0^t dt \quad (4-46)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = at;$$

$$\text{Hay } x(t) = x(0) e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} x(0) \frac{(at)^k}{k!} \quad (4-47)$$

trong đó $\frac{(at)^k}{k!}$ là khai triển Taylo hàm mũ e^{at}

Muốn giải phương trình vi phân véc tơ (4-44), ta thử tìm nghiệm dạng (4-47) trong đó hê số a được thay bằng ma trận A

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} X(0) \quad (4-48)$$

Hoặc :

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(0) \frac{A^k}{k!} t^k \quad (4-49)$$

Lấy đạo hàm theo t cả 2 vế của (4-49)

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} X(0) \quad (4-50)$$

Hay

$$\dot{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A \cdot A^{(k-1)} t^{(k-1)} X(0) \quad (4-51)$$

Đặt $k_1 = k - 1$, ta viết lại biểu thức (4-51)

$$\dot{X}(t) = A \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(At)^{k_1}}{k_1!} X(0) \quad (4-52)$$

Mặt khác do ta tìm nghiệm $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} X(0)$ như công thức (4-48), do vậy (4-51) sẽ là :

$$\dot{X}(t) = A X(t)$$

Ta đã chứng minh được (4-48) chính là nghiệm của phương trình trạng thái thuần nhất (4-44)

$$\text{Khai triển Taylo : } e^{At} = \frac{(At)^k}{k!} \quad (4-53)$$

Nên nghiệm phương trình trạng thái (4-44) viết đơn giản là

$$X(t) = e^{At} \cdot X(o) \quad (4-54)$$

Hàm mũ ma trận e^{At} được ký hiệu $\Phi(t)$; còn $e^{A(t-\tau)} = \Phi(t, \tau)$

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot t^k \quad (4-55)$$

được gọi là ma trận cơ bản hay ma trận quá độ (ma trận chuyển trạng thái).

Nghiệm phương trình trạng thái là :

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X(o) \quad (4-56)$$

Các tính chất của ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$.

$$(1) \quad \Phi(o) = e^{Ao} = e^o = I \quad (4-57)$$

$$(2) \quad \Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot \Phi(T) \quad (4-58)$$

Vì $\Phi(t+T) = e^{A(t+T)} = e^{At} \cdot e^{AT}$
 $= \Phi(t) \cdot \Phi(T).$

$$(3) \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad (4-59)$$

Vì $\Phi^{-1}(t) = [e^{At}]^{-1} = e^{-At} = e^{A(-t)}$
 $= \Phi(-t)$

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t) = A \cdot \Phi(t) \quad (4-60)$$

Vì $\frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{d}{dt} (e^{At}) = A \cdot e^{At} = A \cdot \Phi(t).$

$$(5) \quad \int_0^t \Phi(t) \cdot dt = A^{-1} \cdot [\Phi(t) - I] \quad (4-61)$$

(6) Biến đổi Laplace của $\Phi(t)$:

$$L\{\Phi(t)\} = L\{e^{At}\} = (pI - A)^{-1} \quad (4-62)$$

Biến đổi ngược từ $L\{\Phi(t)\}$ thành $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1} \{ (pI - A)^{-1} \} \quad (4-63)$$

4-3.2. Các phương pháp xác định ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$

1) Phương pháp dùng biến đổi Laplace

Từ phương trình trạng thái $\dot{X} = A.X$, chuyển sang phương trình theo ảnh Laplace :

$$p.X(p) - X(0) = A . X(p) \quad (4-64)$$

$$\text{Hay :} \quad X(p) = [p.I - A]^{-1} . X(0) \quad (4-65)$$

Từ (4-65) lấy biến đổi ngược Laplace ta tìm được $x(t)$:

$$X(t) = L^{-1} \{ [pI - A]^{-1} . X(0) \}. \quad (4-66)$$

Hoặc :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = L^{-1} \{ [pI - A]^{-1} \} \\ &= L^{-1} \{ \Phi(p) \} \end{aligned} \quad (4-67)$$

$$\text{Với hàm truyền đạt} \quad \Phi(p) = [pI - A]^{-1} \quad (4-68)$$

Ví dụ 4-4. Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (4-69)$$

$$\text{Tính } pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 & 0 & 0 \\ 0 & p+4 & -4 \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}$$

$$\det (pI - A) = (p + 1)((p + 4)p + 4)$$

$$\text{adj } (pI - A) = \begin{bmatrix} p(p+4)+4 & 0 & 0 \\ 0 & p(p+1) & (p+1).4 \\ 0 & -(p+1) & (p+1)(p+4) \end{bmatrix}$$

$$[pI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}[pI - A]}{\det(pI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{(p+4)p+4} & \frac{4}{(p+4)p+4} \\ 0 & \frac{-1}{(p+4)p+4} & \frac{p+4}{(p+4)p+4} \end{bmatrix}$$

Hoặc :

$$\Phi(p) = [pI - A]^{-1};$$

Ta tính $\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\{\Phi(p)\} = L^{-1}\{[pI - A]^{-1}\}$

Ta viết lại :

$$\Phi(p) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}$$

Ta cần tính biến đổi ngược Laplace của các số hạng ma trận $\Phi_{ij}(p)$.

$$\Phi_{11}(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = e^{-t}$$

$$\Phi_{22}(p) = \frac{p}{(p+4)p+4} = \frac{p}{p^2+4p+4} = \frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2}$$

$$\Phi_{22}(t) = L^{-1}\{\Phi_{22}(p)\} = e^{-2t} - \frac{2t \cdot e^{-2t}}{(2-1)!} = e^{-2t}(1-2t)$$

$$\Phi_{23}(p) = \frac{4}{(p+4)p+4} = \frac{4}{(p+2)^2};$$

$$\Phi_{23}(t) = L^{-1}\frac{4}{(p+2)^2} = 4t \cdot e^{-2t}$$

$$\Phi_{32}(p) = \frac{-1}{(p+4)p+4} = \frac{-1}{(p+2)^2}$$

$$\Phi_{32}(t) = L^{-1} \frac{-1}{(p+2)^2} = -t.e^{-2t}$$

$$\Phi_{33}(p) = \frac{p+4}{(p+4)p+4} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2}$$

$$\Phi_{33}(t) = L^{-1} \{ \Phi_{33}(p) \} = (1+2t).e^{-2t}$$

Vậy ta có kết quả ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$ là :

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4t.e^{-2t} \\ 0 & -t.e^{-2t} & (1+2t).e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (4-70)$$

2) Tính ma trận chuyển trạng thái nhờ công thức khai triển Taylo hàm mũ ma trận (4-55) (Cho ví dụ với phương trình (4-69))

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k . t^k = I + \frac{A}{1} t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -4t & 4t \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 6t^2 & -8t^2 \\ 0 & 2t^2 & -2t^2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} (1-t+t^2/2 + \dots) & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t+4t^2/2 - 2t(1-2t) + \dots) & (4t(1-2t+4t^2/2 + \dots)) \\ 0 & -t(1-2t+4t^2/2 + \dots) & (1-2t+4t^2/2 + 2t(1-2t) + \dots) \end{bmatrix}$$

Các số hạng trong ngoặc cũng là khai triển của e^{-t} và e^{-2t} . Do đó cuối cùng ta có :

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4t.e^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ngoài hai phương pháp cơ bản trên người ta còn đưa ra các phương pháp tính $\Phi(t)$ sau.

3) Phương pháp giá trị riêng (Eigenvalue Method)

$$\Phi(t) = e^{At} = T.e^{Jt}.T^{-1}$$

Trong đó e^{Jt} là dạng ma trận A chuyển về dạng đường chéo.

4) Phương pháp Caylay – Hamilton .

5) Phương pháp dựa vào thuật toán Leverrier.

Các phương pháp 3, 4, 5 có thể xem chi tiết ở TL[3,7,8,9,12] .

4-3.3. Phương trình trạng thái dừng, không thuần nhất

Xét phương trình trạng thái sau với ma trận hằng A, B .

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \quad (4-71)$$

Đem nhân trái hai vế (4-71) với e^{-At} ta được :

$$e^{-At} . \dot{X}(t) = e^{-At} . A . X(t) + e^{-At} . B . u(t) \quad (4-72)$$

$$\text{Vì} \quad \frac{d}{dt} e^{-At} = -e^{-At} . A = -A . e^{-At} \quad (4-73)$$

Từ công thức (4-72) ta rút ra :

$$e^{-At} . \dot{X}(t) - A e^{-At} . X(t) = e^{-At} . B . u(t). \quad (4-74)$$

Vế trái của (4-74) chính là đạo hàm . $\frac{d}{dt} [e^{-At} . X(t)]$.

Do đó :

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} . X(t)] = e^{-At} . B . u(t) \quad (4-75)$$

Lấy tích phân 2 vế (4-75) từ 0 đến t ta được

$$e^{-At} \cdot X(t) - X(0) = \int_0^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (4-76)$$

Nhân trái 2 vế (4-76) với e^{At} ta có

$$e^{At} \cdot e^{-At} \cdot X(t) - e^{At} \cdot X(0) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Vậy :

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) d\tau \quad (4-77)$$

Vì $e^{At} = \Phi(t)$

$$e^{A(t-\tau)} = \Phi(t - \tau) = \Phi(t, \tau). \quad (4-78)$$

Do đó :

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X(0) + \varphi_u(t),$$

$$\text{trong đó : } \varphi_u(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau) B \cdot u(\tau) d\tau. \quad (4-79)$$

Tương tự hệ thuần nhất, ta có thể tính nghiệm phương trình trạng thái theo biến đổi Laplace của phương trình (4-71):

$$p \cdot X(p) - X(0) = A \cdot X(p) + B \cdot u(p) \quad (4-80)$$

Hay

$$X(p) = [pI - A]^{-1} \cdot X(0) + [pI - A]^{-1} \cdot B \cdot u(p) \quad (4-81)$$

$$X(t) = L^{-1} \{X(p)\}. \quad (4-82)$$

Nếu điều kiện đầu là t_0 thì nghiệm (4-77) có thể viết :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau. \quad (4-83)$$

Theo ký hiệu $e^{A(t-\tau)} = \Phi(t, \tau)$ thì

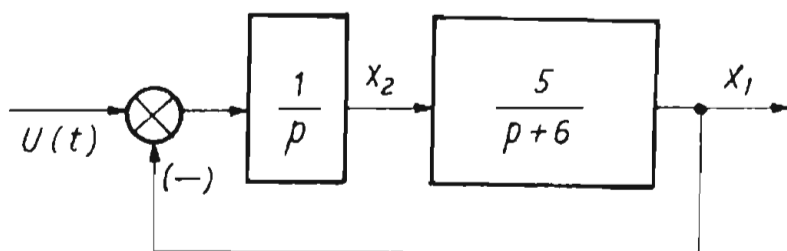
$$X(t) = \Phi(t, t_0) \cdot X(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (4-84)$$

Ví dụ 4–5. Cho hệ thống như cấu trúc trên hình 4– 7.

– Hãy viết phương trình trạng thái hệ thống.

– Tính ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t) = e^{At}$

– Tính quá trình quá độ theo các biến trạng thái khi không có tác động điều khiển, tức $u(t) = 0$ ứng với điều kiện đầu $x_1(0) = 4$ và $x_2(0) = 2$.



Hình 4-7.

– Tính quá trình quá độ của hệ khi $u(t) = \cos 2t$ tác động từ thời điểm

$t = 0$ và điều kiện đầu triệt tiêu $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Giải Ta chọn trạng thái x_1 và x_2 , từ sơ đồ cấu trúc ta viết được phương trình vi phân :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u(t) \end{cases}$$

Phương trình trạng thái có dạng :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Xác định $\Phi(t) = e^{At}$ theo biến đổi Laplace :

$$\Phi(p) = [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} p+6 & -5 \\ 1 & p \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p(p+6) + 5 = p^2 + 6p + 5 = (p+1)(p+5).$$

$$\text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 5 & p+6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p & 5 \\ -1 & p+6 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(p) = [pI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{p}{(p+1)(p+5)} & \frac{5}{(p+1)(p+5)} \\ \frac{-1}{(p+1)(p+5)} & \frac{p+6}{(p+1)(p+5)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(p) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(p+1)4} + \frac{5}{(p+5)4} & \frac{5}{4(p+1)} - \frac{5}{4(p+5)} \\ \frac{-1}{(p+1)4} + \frac{5}{(p+5)4} & \frac{5}{4(p+1)} - \frac{5}{4(p+5)} \end{bmatrix}$$

Từ ma trận ảnh $\Phi(p)$ ta tính được ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$ như sau :

$$\Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{-5t} & 5e^{-t} - 5e^{-5t} \\ e^{-t} + 5e^{-5t} & 5e^{-t} - e^{-5t} \end{bmatrix}$$

– Khi $u(t) = 0$ và điều kiện đầu $x_1(0) = 4, x_2(0) = 2$ thì nghiệm $X(t) = \Phi(t).X(0)$ là :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Với $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

– Khi $u(t) = \cos 2t$ và điều kiện đầu triệt tiêu $x_1(0) = x_2(0) = 0$ thì :

$$\Phi(t).X(0) = \Phi(t). \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \Phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^t (5.e^{-(t-\tau)} - 5.e^{-5(t-\tau)}) \cdot \cos 2\tau \cdot d\tau \\ \frac{1}{4} \int_0^t (5.e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}) \cdot \cos 2\tau \cdot d\tau \end{bmatrix}$$

Hay:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{29} (12\sin 2t + \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{25}{4} e^{-5t}) \\ \frac{1}{29} (14\sin 2t + 6\cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-5t}) \end{bmatrix}$$

4-3.4. Phương trình trạng thái hệ thống, có hệ số biến thiên theo thời gian

Trong phương trình trạng thái, tất cả các ma trận đều có các phần tử là hệ số biến thiên theo thời gian

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \cdot u(t) \end{cases} \quad (4-85)$$

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = C(t) \cdot X(t) + D(t) \cdot u(t) \end{cases} \quad (4-86)$$

1) Giải phương trình trạng thái không thuần nhất cấp 1 vô hướng

Trước khi giải phương trình ma trận:

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \cdot u(t) \quad (4-87)$$

– Đầu tiên ta cần giải phương trình cấp 1 vô hướng.

$$\dot{x} = a(t) \cdot x(t) \quad (4-88)$$

Nghiệm (4-88) có dạng :

$$x(t) = k \cdot [\exp (\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau)] \quad (4-89)$$

k là hằng số;

Đặt

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right) \quad (4-90)$$

(4-89) sẽ là .

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot k \quad (4-91)$$

Công thức (4-90), (4-91) là nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất cấp 1 vô hướng (4-88).

$$\text{Đạo hàm nghiệm (4-91)} \quad \dot{x}(t) = k \cdot \dot{\Phi}(t, t_0) \quad (4-92)$$

– Đối với phương trình không thuần nhất cấp 1 vô hướng dạng:

$$\dot{x} = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot u(t) \quad (4-93)$$

ta sẽ tìm nghiệm riêng bằng phương pháp biến thiên hằng số như nghiệm (4-91) nhưng k thay đổi

$$x(t) = k(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad (4-94)$$

(4-94) là nghiệm riêng của (4-93):

Đạo hàm (4-94) ta được

$$\dot{x} = k(t) \dot{\Phi}(t, t_0) + \dot{k}(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad (4-95)$$

Lấy nghiệm (4-94) thế vào phương trình (4-92) ta có :

$$= a(t) \cdot k(t) \cdot \Phi(t, t_0) + b(t) \cdot u(t) \quad (4-96)$$

Từ (4-91) ta nhân hai vế với $a(t)$ sẽ có .

$$a(t) \cdot x(t) = k \cdot a(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad (4-97)$$

Vì nghiệm phương trình thuần nhất (4-91) đã đạo hàm cả hai vế :

$$\dot{x}(t) = k \cdot \dot{\Phi}(t, t_0) \quad (4-98)$$

Phương trình thuần nhất (4-88)

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t) \quad (4-99)$$

So sánh (4-98) với (4-99) rút ra :

$$a(t) \cdot x(t) = k \dot{\Phi}(t, t_0) \quad (4-100)$$

So sánh tiếp (4-97) với (4-98), rút ra .

$$k.a(t).\Phi(t, t_0) = k.\dot{\Phi}(t, t_0) \quad (4-101)$$

Khi đó phương trình (4-96) sẽ là

$$\dot{x} = k\dot{\Phi}(t, t_0) + b(t).u(t) \quad (4-102)$$

So sánh (4-102) và (4-95) ta rút ra .

$$b(t).u(t) = \dot{k}(t).\Phi(t, t_0) \quad (4-103)$$

Hay là :

$$\frac{dk(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t, t_0).b(t).u(t) \quad (4-104)$$

$$k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0).b(\tau).u(\tau).d\tau, \quad (4-105)$$

trong đó :

$$k(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0) x(t_0) = x(t_0) \quad (4-106)$$

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(\tau)d\tau\right). \quad (4-107)$$

2) Giải phương trình trạng thái không thuần nhất có hệ số biến thiên theo thời gian (phương trình ma trận)

– Xét phương trình thuần nhất .

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) \quad (4-108)$$

Xét nghiệm (4-108) theo biểu thức :

$$X(t) = \Phi(t, t_0).X(t_0), \quad (4-109)$$

$$\text{trong đó :} \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (4-110)$$

Đạo hàm hai vế (4-109) ta được .

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0).X(t_0) = \dot{\Phi}(t, t_0).X(t_0) \quad (4-111)$$

Nhân trái hai vế (4-109) với ma trận $A(t)$ và so sánh với (4-108)

$$\dot{X}(t) = A(t).\Phi(t, t_0).X(t_0) \quad (4-112)$$

Từ (4-111) và (4-112) ta có

$$\dot{\Phi}(t, t_0) X(t_0) = A(t) \Phi(t, t_0) X(t_0) \quad (4-113)$$

Hay là .

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad (4-114)$$

trong đó :

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = \exp(A(t - t_0)) \quad (4-115)$$

Các tính chất của ma trận $\Phi(t, t_0)$ tương tự các tính chất ma trận mũ $\Phi(t) = \exp(At)$

$$* \Phi(t_0, t_0) = I; (e^{A(t_0 - t_0)} = I)$$

$$* \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_1, t_0); (e^{A(t_2 - t_0)} = (e^{A(t_2 - t_1)} \cdot (e^{A(t_1 - t_0)}))$$

$$\Phi^{-1}(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1); (e^{-A(t_1 - t_2)} = e^{A(t_2 - t_1)}).$$

– Để giải phương trình trạng thái không thuần nhất .

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t) \cdot u(t) \quad (4-116)$$

ta dùng phương pháp biến thiên hằng số như đối với phương trình cấp 1 vô hướng.

Giả thiết nghiệm phương trình thuần nhất có hằng số biến thiên $k(t)$

$$X(t) = \Phi(t, t_0) \cdot k(t) \quad (4-117)$$

Đạo hàm hai vế (4-114)

$$\dot{X}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \dot{k}(t) + \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot k(t) \quad (4-118)$$

Kết hợp với $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0)$ ta có :

$$\dot{X}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \dot{k}(t) + \dot{\Phi}(t, t_0) \cdot k(t) \quad (4-119)$$

Từ (4-119) và (4-117) ta có :

$$\dot{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \dot{k}(t) + A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot k(t) \quad (4-120)$$

Khi đó .

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) \cdot k(t) + B(t) \cdot u(t) \quad (4-121)$$

$$\text{Cuối cùng ta có :} \quad \Phi(t, t_0) \dot{k}(t) = B(t) \cdot u(t) \quad (4-122)$$

Vì có tính chất $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

$$k(t) = \Phi(t_0, t) \cdot B(t) \cdot u(t) \quad (4-123)$$

Lấy tích phân hai vế (4 - 120)

$$\int_{t_0}^t k(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau \quad (4-124)$$

$$k(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau \quad (4-125)$$

Thế (4 - 125) vào (4 - 117) ta có nghiệm tổng quát :

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau \quad (4-126)$$

Các phương pháp tính ma trận chuyển trạng thái của hệ không dừng xem TLTK [7, 8, 9, 12].

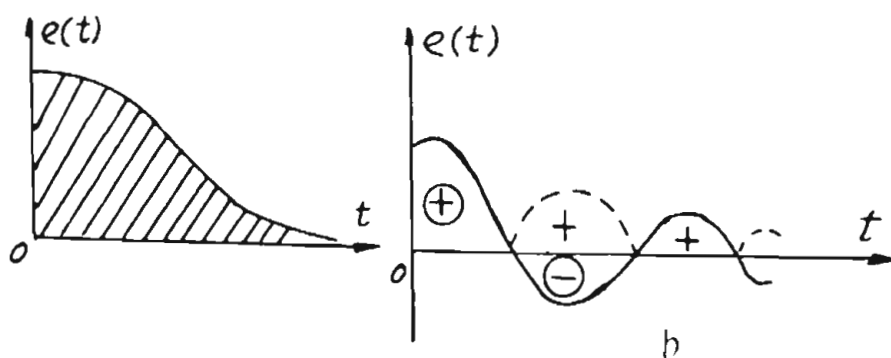
4-4. ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG QUA TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN

Gọi tín hiệu ra của hệ thống $y(t)$, giá trị của nó ở trạng thái xác lập là y_0 , sai lệch của cả quá trình điều khiển là $e(t) = y(t) - y_0$.

Ta xét một ước lượng tích phân dạng :

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (4-127)$$

Đối với hệ thống ổn định khi $t \rightarrow \infty$ thì $e(t) \rightarrow 0$. Trên hình 4a, I_1 chính là diện tích miền được gạch chéo. Nếu diện tích I càng bé thì chất lượng hệ thống càng tốt.



Hình 4-8.

Nếu tính tích phân I_1 theo công thức trên, khi sai lệch có dạng đường cong dao động như hình 4b, giá trị tích phân I_1 sẽ là tổng

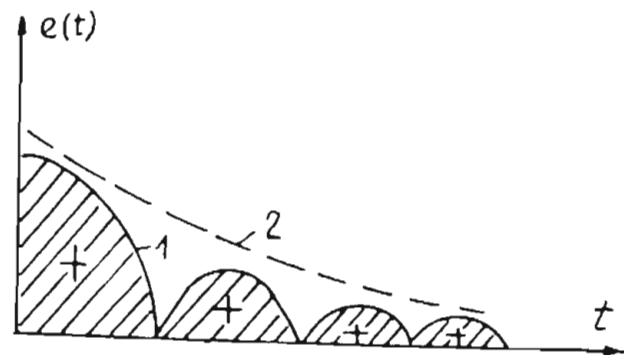
diện tích phân dương + và phần âm -, làm cho I_1 có giá trị nhỏ nhưng lại không phản ánh đúng chất lượng của hệ thống. Do vậy ta sẽ tính diện tích đường đứt nét nghĩa là phần diện tích âm sẽ được đặt lên trên trục hoành. Lúc đó tích phân I_1 sẽ trở thành I_2

$$I_2 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4 - 128)$$

Tuy nhiên tính toán tích phân I_2 thực sự sẽ gặp nhiều khó khăn. Do đó ta đưa ra công thức ước lượng tích phân bình phương sai lệch $e(t)$ là

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (4 - 129)$$

Ước lượng tích phân bình phương sai lệch cũng không phản ánh đúng bản chất dao động của sai lệch quá trình như trên hình 4c. So sánh $e(t)$ của quá trình (4-127) và



Hình 4-9.

quá trình (4-128), ta thấy rõ quá trình (4-128) không có dao động còn quá trình (4-127) có dao động. Nếu tính I theo $e^2(t)$ giá trị quá trình (4-127) sẽ nhỏ hơn quá trình (4-128). Do vậy người ta đưa ra ước lượng tích phân có cả thành phần đạo hàm de/dt để phản ánh được tốc độ biến thiên và sự dao động của $e(t)$.

$$I = \int_0^{\infty} \left[e^2(t) + \tau \left(\frac{de}{dt} \right)^2 \right] dt \quad (4 - 130)$$

Trong thực tế thường tính ước lượng đơn giản chỉ có $e^2(t)$ mà không xét tới de/dt .

Cách tính tích phân của quá trình dao động không âm :

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) \cdot dt$$

Dựa vào công thức biến đổi Laplace của $e(t)$:

$$E(p) = \int_0^{\infty} e(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (4 - 131)$$

(Trong đó e^{-pt} là $\exp(-pt)$, còn $e(t)$ là sai lệch).

$$\text{Vi} \quad \int_0^{\infty} e(t) \cdot dt = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \lim_{p \rightarrow 0} E(p)$$

$$\text{Do đó} \quad I_1 = \int_0^{\infty} e(t) \cdot dt = \lim_{p \rightarrow 0} E(p) \quad (4 - 132)$$

4-4.1. Tính tích phân bình phương của sai lệch

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) \cdot dt$$

Sai lệch $e(t)$ theo biến đổi Laplace có dạng tổng quát xác định từ sơ đồ cấu trúc :

$$E(p) = [1 - W_k(p)] \cdot u(p) \quad (4 - 133)$$

$$E(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{p} \quad (4 - 134)$$

(khi $u(t) = 1(t)$ thì $u(p) = \frac{1}{p}$).

Ước lượng tích phân I được tính theo công thức

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_2 \Delta_2 + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0) - \frac{b_m \cdot b_{m-1}}{a_n^2} \quad (4 - 135)$$

Trong đó Δ là định thức cấp n tính như sau

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (4-136)$$

Định thức Δ_k (với $k = m, m-1, \dots, 2, 1, 0$) ở công thức (4-135) có được bằng cách thay thế cột $(m-k+1)$ bằng cột :

$$\begin{array}{c} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \quad (4-137)$$

Các hệ số $B_m, B_{m-1}, \dots$ được tính theo công thức :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m = b_m^2 ; \\ B_{m-1} = b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2} ; \\ B_{m-2} = b_{m-2}^2 - 2b_{m-1} b_{m-3} + 2b_m b_{m-4} ; \\ \dots \dots \\ B_k = b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}; \\ \dots \dots \\ B_0 = b_0^2 ; \end{array} \right. \quad (4-138)$$

Trong định thức, các phần tử có chỉ số bé hơn n và lớn hơn n , sẽ nhận giá trị 0, còn trong công thức (4-138), các số hạng có chỉ số bé hơn 0 và lớn hơn m cũng được thay thế bằng giá trị 0

Khi $m = n-1$ ta có ($m = 2 ; n = 3$)

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty e^2(t) \cdot dt &= \frac{1}{2 \cdot a_n^2 \cdot \Delta} (B'_n \Delta_n + B'_{n-1} \Delta_{n-1} + \\ &+ \dots + (B'_2 \Delta_2 + B'_1 \Delta_1) - \frac{b'_n \cdot b'_{n-1}}{a_n^2} \end{aligned} \quad (4-139)$$

Trong đó :

$$B'_n = b_0^2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right)^2$$

$$B'_{n-1} = b_0^2 \left[\left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right) \right]$$

$$B'_{n-2} = b_0^2 \left[\left(\frac{b_{n-2}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right) - \left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-3}}{b_0} - \frac{a_{n-2}}{a_0} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right) \left(\frac{b_{n-4}}{b_0} - \frac{a_{n-4}}{a_0} \right) \right]$$

$$B'_1 = b_0^2 \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right)^2$$

$$b'_n = b_0 \left(\frac{b_n}{b_0} - \frac{a_n}{a_0} \right)$$

$$b'_{n-1} = b_0 \left(\frac{b_{n-1}}{b_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \right)$$

Ví dụ Tìm giá trị k_1 và k_2 trong hệ thống cấp 3 để cho ước lượng tích phân bình phương cực tiểu. Cho biết hàm truyền đạt hệ thống kín

$$W_k(p) = \frac{1}{p^3 + k_1 p^2 + k_2 p + 1}$$

Ảnh Laplace của sai lệch hệ thống $E(p)$

$$(\text{khi } u(t) = 1 \rightarrow u(p) = \frac{1}{p})$$

$$E(p) = \left[1 - W_k(p) \right] u(p) = \frac{p^2 + k_1 p + k_2}{p^3 + k_1 p^2 + 1} = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1}$$

Tính định thức :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & -1 \\ 0 & -1 & +k_1 \end{vmatrix} = k_1 k_2 - 1$$

Ước lượng tích phân I tính theo công thức sau với $m = n-1$;
 $m = 2$; $= 3$.

$$I = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2 a_3^2 \Delta} \left(B'_2 \Delta_2 + B'_1 \Delta_1 + B'_0 \Delta_0 - 2 b'_2 b'_1 \Delta \right)$$

- Tính Δ_2 bằng cách lấy cột $(a_{n-1} a_n 0 \dots 0)'$ thay thế cho cột thứ $(m - k + 1)$ với $m = 2$; $n = 3$; $k = 2$;
 $m - k + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$, tức là cột thứ nhất trong Δ .

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 & -a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & -k_1 & 0 \\ -1 & k_2 & -1 \\ 0 & -1 & k_1 \end{vmatrix} = k_1 \cdot k_2^2 - k_2 + k_1^2 .$$

- Tính Δ_1 bằng cách lấy cột $(a_2 a_3 0)'$ thay thế cho cột $(m - k + 1) = 2 - 1 + 1 = 2$ trong Δ , tức thay cho cột thứ 2

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & k_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k_1 \end{vmatrix} = K_1$$

- Tính Δ_0 bằng cách lấy cột $(a_2 a_3 0)'$ thay cho cột $(m - k + 1) = 2 - 0 + 1 = 3$ trong Δ .

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & -k_1 & k_2 \\ 0 & k_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Tính các hệ số :

$$\begin{cases} b'_2 = b_0 \left(-\frac{a_3}{a_0} \right) = -1 \\ B'_2 = b'^2_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b'_1 = b_0 \left(\frac{b_2}{b_0} - \frac{a_2}{a_0} \right) = 1 \left(\frac{k_2}{1} - \frac{k_2}{1} \right) = 0 \\ b'_0 = b_0 \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) = 1 \left(\frac{k_2}{1} - \frac{k_1}{1} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'_1 = b'^2_1 - 2b'_2 b'_0 = 0 \\ B'_0 = b'^2_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2 \cdot 1^2 \cdot (k_1 k_2 - 1)} \left[1 \cdot (k_1 k_2^2 - k_2 + k_1^2) + 0 \cdot k_1 + \right. \\ \left. + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (k_1 k_2 - 1) \right]$$

$$I = \frac{k_2}{2} + \frac{k_1^2}{2(k_1 k_2 - 1)}$$

Trong I chứa hai tham số k_1 và k_2 , để cho I cực tiểu ta phải tính

$$\frac{\partial I}{\partial k_1} = \frac{2k_1(k_1 k_2 - 1) - k_1^2 k_2}{2(k_1 k_2 - 1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial k_2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{k_1^3}{(k_1 k_2 - 1)^2} \right] = 0$$

Giải ra ta có : $k_1 = 1$ và $k_2 = 2$ Hệ có chất lượng tốt nhất với I cực tiểu nếu chọn $k_1 = 1$ và $k_2 = 2$

4-4.2. Tính ước lượng tích phân theo biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier của tín hiệu sai lệch $e(t)$ là

$$E(j\omega) = \int_0^{\infty} e(t) e^{j\omega t} dt$$

Biến đổi ngược Fourier của $E(j\omega)$ là $e(t)$

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Đối với ước lượng tích phân

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \int_0^{\infty} e(t) e(t) dt = \\ = \int_0^{\infty} e(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) \left[\int_0^{\infty} e(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

Đặt $E^*(j\omega) = \int_0^{\infty} e(t) e^{j\omega t} dt$ Biểu thức liên hợp của $E(j\omega)$

Vậy
$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) E^*(j\omega) d\omega .$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega$$

Biểu thức $E(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$

$$B(j\omega) = b_0(j\omega)^{n-1} + b_1(j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$$

Khi $n = 1, 2, 3, 4$ ta có công thức tính I như sau .

$$n = 1 \quad I = \frac{b_{n-1}^2}{2 a_0 a_1} ;$$

$$n = 2 \quad I = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2 a_0 a_1 a_2}$$

$$n = 3 \quad I = \frac{b_0^2 a_2 a_3 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1}{2 a_0 a_3 (-a_0 a_3 + a_1)}$$

$$n = 4 \quad I = \frac{T_4}{M_4} .$$

trong đó .

$$M_4 = 2a_0 a_4 (-a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 + a_1 a_2 a_3)$$

$$T_4 = b_0^2 (-a_1 a_4^2 + a_2 a_3 a_4) + (b_1^2 - 2b_1 b_2) a_0 a_3 a_4 + \\ + (b_2^2 - 2b_1 b_3) a_0 a_1 a_4$$

Ví dụ. Tính I biết

$$E(p) = \frac{p^2 + k_1 p + k_2}{p^3 + k_1 p^2 + k_2 p + 1} = \frac{b_0 p^2 + k_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

với $n = 3$; $m = n - 1 = 3 - 1 = 2$;

$$I = \frac{b_0^2 \cdot a_2 \cdot a_3 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) \cdot a_0 a_3 + a_0 a_1 b_2^2}{2 \cdot a_0 \cdot a_3 (-a_0 a_3 + a_1 a_2)}$$

$$I = \frac{1^2 \cdot k_2 \cdot 1 + (k_1^2 - 2k_2 \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot k_1 \cdot k_2^2}{2 \cdot 1 \cdot 1 (-1 \cdot 1 + k_1 k_2)} =$$

$$= \frac{k_2}{2} + \frac{k_1^2}{2(k_1 k_2 - 1)}$$

Đối với ước lượng tích phân dạng :

$$I = \int_0^{\infty} \left[e^2(t) + \tau^2 (e'(t))^2 \right] \cdot dt$$

Ta phân tích thành

$$I = \int_0^{\infty} \left[e(t) + \tau e'(t) \right]^2 dt - 2 \int_0^{\infty} \tau e(t) e'(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[e(t) + \tau e'(t) \right]^2 dt - 2 \tau e^2(t) \Big|_0^{\infty} ; \text{ (với } e(\infty) = 0 \text{)}$$

$$I = \int_0^{\infty} \left[e(t) + \tau e'(t) \right]^2 dt + \tau e_0^2 ; \text{ (với } e_0 = e(t=0) \text{)}$$

Hệ thống có chất lượng tối ưu nếu ước lượng tích phân I đạt cực tiểu ; vì $\tau \cdot e_0^2 \neq 0$ vậy muốn I cực tiểu thì :

$$e(t) + \tau e'(t) = 0$$

Phương trình này có nghiệm $e(t) = e_0 e^{-t/\tau}$

Vậy để hệ thống có chất lượng tốt nhất với sai lệch $e(t) = \min$, quá trình quá độ $e(t)$ phải là một quá trình suy giảm đơn điệu (không dao động)

Chương 5

TỔNG HỢP HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG TUYẾN TÍNH

Trong chương 3 và 4 ta đã nghiên cứu đến tính ổn định và chất lượng quá trình xác lập và quá trình quá độ của hệ thống liên tục. Ở đây ta xét tới các biện pháp ổn định hóa và nâng cao chỉ tiêu chất lượng hệ thống.

5-1. TỔNG HỢP HỆ THỐNG BẰNG CÁCH THAY ĐỔI THÔNG SỐ

Phương pháp này chỉ áp dụng cho hệ thống có cấu trúc ổn định, nghĩa là trong phương trình đặc tính .

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5-1)$$

phải có mặt đầy đủ tất cả các hệ số từ $a_0 \div a_n$ khác không.

Khi có mặt một thông số, ví dụ hằng số thời gian hoặc hệ số khuếch đại, ta có thể xác định được miền biến thiên thông số đó mà vẫn bảo đảm cho hệ ổn định. Với hệ thống chỉ có một thông số biến thiên ta có thể thực hiện ba phương pháp :

1– Thay đổi thông số theo tính toán ổn định bằng tiêu chuẩn ổn định đại số Hurwitz hoặc Routh.

2– Dùng phương pháp chia miền ổn định

3– Dùng phương pháp quỹ đạo nghiệm số.

Ví dụ 5-1. Cho hệ thống điều khiển mô tả bởi phương trình đặc tính sau :

$$0,05p^3 + (0,5.T + 0,01)p^2 + (0,5 + T).p + 20 = 0$$

Hãy xác định giá trị hằng số thời gian T để cho hệ thống ổn

định.

Giải Theo tiêu chuẩn Huaróvit, hệ thống muốn ổn định phải có các hệ số

$$a_0 = 0,005; a_1 = 0,3T + 0,01 > 0;$$

$$a_2 = 0,5 + T > 0 \text{ và } a_3 = 20$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$(0,5T + 0,01) \cdot (0,5 + T) - 20 \cdot 0,005 > 0$$

Từ đây ta giải ra $T > 0,24$ thì hệ thống ổn định.

Trong chương 4, khi phân tích chất lượng ta thấy rằng hệ số khuếch đại K của hệ thống sẽ ảnh hưởng nhiều đến sai lệch ở trạng thái xác lập. Sai lệch đó được tính theo công thức (khi $u(t) = 1(t)$):

$$S_1 = \frac{1}{1 + K}$$

Rõ ràng tăng K thì sai lệch S_1 giảm, nghĩa là độ chính xác của hệ thống tăng lên.

5-2. TỔNG HỢP HỆ THỐNG BẰNG CÁCH THAY ĐỔI CẤU TRÚC

Có những hệ thống điều khiển dù thay đổi thông số đến mức nào cũng không làm nó ổn định được. Hệ thống như vậy được gọi là hệ thống có cấu trúc không ổn định. Muốn làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái ổn định, ta phải thay đổi cấu trúc của nó.

Ví dụ 5-2. Cho hệ thống có cấu trúc vẽ trên hình 5-1. Từ sơ đồ ta xác định được phương trình đặc tính hệ kín sau :

$$T_1 T_2 p^4 + (T_1 + T_2) p^3 + p^2 + K = 0. \quad (5-2)$$

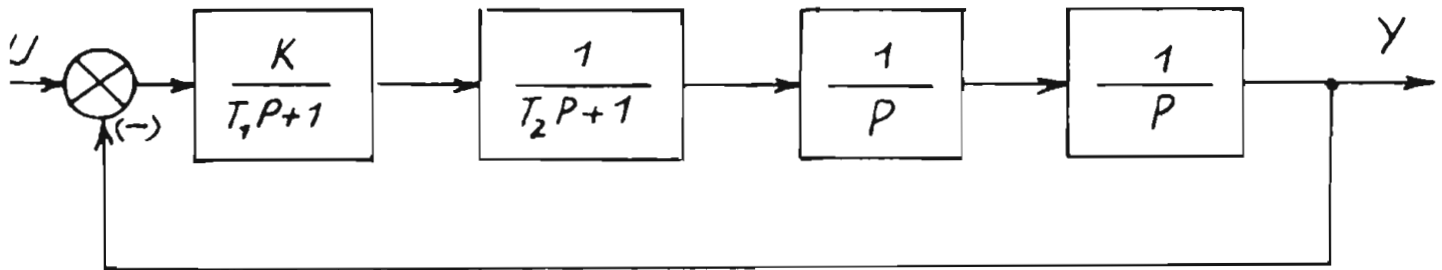
Trong phương trình (5-2) các hệ số $a_0 = T_1 T_2$;

$$a_1 = (T_1 + T_2); \quad a_2 = 1; \quad a_3 = 0 \text{ và } a_4 = K.$$

Vì $a_3 = 0$ nên hệ không ổn định.

Muốn làm cho hệ trở nên ổn định, ta nối tiếp thêm mạch phụ $W_f(p)$ có hàm truyền sau :

$$W_f(p) = \frac{T_3p + 1}{T_4p + 1} \quad (5-3)$$



Hình 5-1.

Khi đó hàm truyền đạt cả hệ thống ở trạng thái hở là :

$$W_h(p) = \frac{K \cdot (T_3p + 1)}{p^2(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_4p + 1)} \quad (5-4)$$

Phương trình đặc tính hệ kín sẽ là :

$$T_1T_2T_4p^5 + (T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4)p^4 + (T_1 + T_2 + T_3)p^3 + p^2 + KT_3p + K = 0. \quad (5-5)$$

Hệ thống mới tương ứng với phương trình đặc tính (5-5) có mặt đủ các hệ số a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 và a_5 .

Nếu tính toán, chọn lựa các hằng số thời gian T_3 và T_4 thích hợp, hệ thống mới sẽ có trạng thái ổn định. Vì vậy khi làm thay đổi cấu trúc (tức là cấp của phương trình vi phân hệ thống thay đổi) thì đặc tính chất lượng của hệ thống cũng thay đổi.

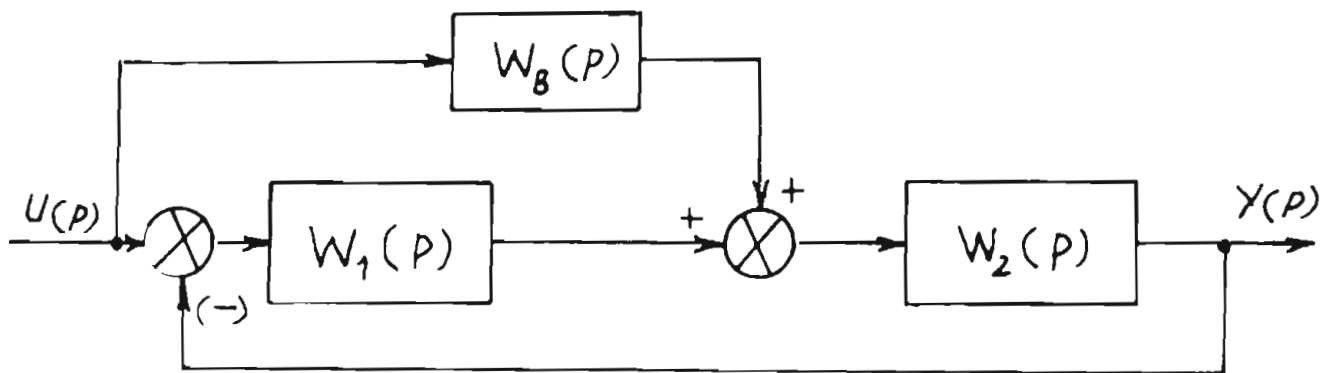
5-3. NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN VÀ ĐIỀU KHIỂN BÙ

Một hệ thống ĐKTD trong đó các tọa độ $y_1(t)$ và sai lệch $e(t)$

không phụ thuộc tác động bên ngoài $f_1(t)$ được gọi là hệ thống bất biến. Để giảm ảnh hưởng của nhiễu và tăng độ chính xác người ta thường sử dụng nguyên tắc bù sai lệch tác động đầu vào và bù nhiễu.

1. Phương pháp bù tác động đầu vào $u(t)$

Đây thực chất là một hệ thống điều khiển sai lệch và bù hỗn hợp. Sơ đồ vẽ trên hình 5-2 có khâu bù từ $u(t)$ đến ĐTDK $W_2(p)$.



Hình 5-2.

Ta dễ dàng xác định được hàm truyền hệ thống

$$W_k(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = [W_1(p) + W_B(p)] \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (5-6)$$

Mong muốn với tín hiệu đặt vào $u(t)$ thì hệ thống phải có đáp ứng $Y(t)$ trùng với $U(t)$, tức là $Y(t) \equiv U(t)$.

Điều đó chứng tỏ $W_k(p) = 1$ hay

$$[W_1(p) + W_B(p)] \cdot W_2(p) = 1 + W_1(p) \cdot W_2(p)$$

$$\text{Rút ra .} \quad W_B(p) = \frac{1}{W_2(p)} \quad (5-7)$$

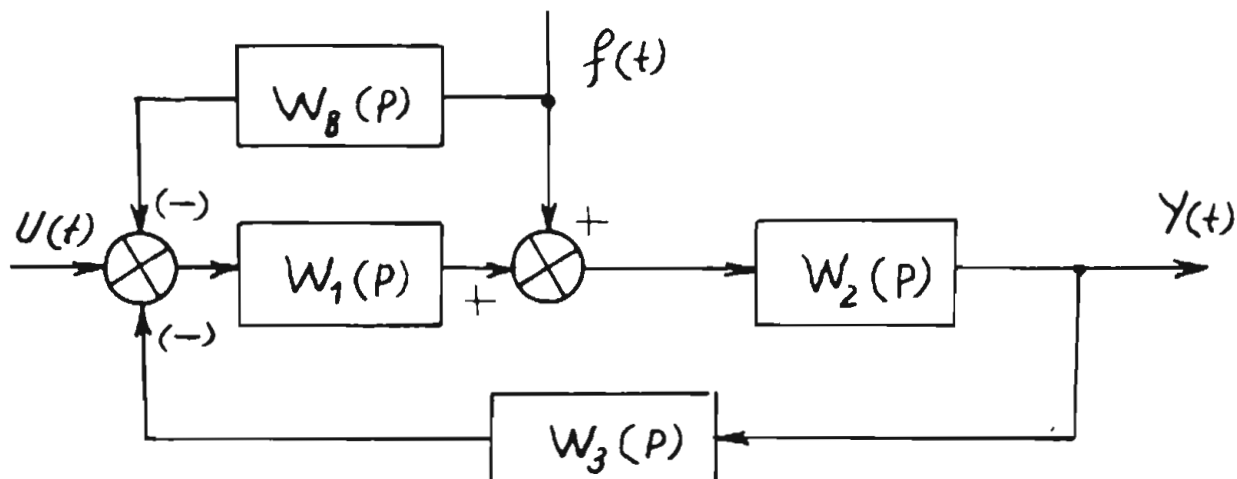
Nếu thực hiện được đẳng thức (5-7), hệ thống sẽ khử được sai lệch hệ thống vì $y(t) = u(t)$, đạt giá trị mong muốn.

2. Phương pháp bù nhiễu

Sơ đồ có nhiễu $f(t)$ tác động. Ta mong muốn tín hiệu ra chịu ảnh

hưởng của $f(t)$ ít nhất. Trong trường hợp $f(t) \neq 0$ mà $y(t)$ không hề phụ thuộc vào $f(t)$, ta nói rằng hệ thống bất biến với nhiễu.

Ví dụ 5-3. Cho hệ thống như trên hình (5-3), từ nhiễu $f(t)$ ta đưa thêm khâu bù có hàm truyền $W_B(p)$. Hệ thống có hai tín hiệu vào $u(t)$ và $f(t)$. Vì đây là hệ tuyến tính, ta áp dụng nguyên lý cộng tính (hay xếp chồng), tín hiệu ra $y(t)$ có hai thành phần :



Hình 5-3.

– $y_u(t)$ khi có $u(t) \neq 0$ và $f(t) = 0$:

$$Y_u(p) = \frac{w_1(p) \cdot w_2(p)}{1 + w_1(p) \cdot w_2(p) \cdot w_3(p)} \cdot u(p) \quad (5-8)$$

– $y_f(t)$ khi có $f(t) \neq 0$ và $u(t) = 0$:

$$Y_F(p) = \frac{(1 - w_1(p) \cdot w_B(p)) \cdot w_2(p)}{1 + w_1(p) \cdot w_2(p) \cdot w_3(p)} \cdot F(p) \quad (5-9)$$

Do đó

$$Y(p) = Y_u(p) + Y_F(p), \quad \text{hay là :}$$

$$Y(p) = \frac{w_1(p) \cdot w_2(p)}{1 + w_1(p) \cdot w_2(p) \cdot w_3(p)} \cdot u(p) + \frac{(1 - w_1(p) \cdot w_B(p)) \cdot w_2(p)}{1 + w_1(p) \cdot w_2(p) \cdot w_3(p)} \cdot F(p) \quad (5-10)$$

Từ (5-10) muốn $y(t)$ không phụ thuộc $f(t)$ mà chỉ phụ thuộc $u(t)$ thì hệ số của số hạng thứ hai phải bằng không, tức là :

$$1 - w_1(p).w_B(p) = 0$$

$$\text{Hay :} \quad w_B(p) = \frac{1}{w_1(p)} \quad (5-11)$$

5-4. THIẾT BỊ ĐIỀU KHIỂN TỶ LỆ TÍCH PHÂN VI PHÂN (PID)

Bộ điều khiển PID (Proportional Integral Derivative Controller) được sử dụng rất phổ biến trong công nghiệp. Có các loại PID điện tử, khí nén, và PID số. PID có thể lập trình trong máy tính hoặc bộ vi xử lý.

Bộ điều khiển PD được dùng trong điều khiển người máy, tay máy; còn PI được dùng trong điều khiển quá trình như nhiệt độ, áp lực v.v...

Phương trình mô tả bộ điều khiển *PID* với lượng vào $e(t)$ và lượng ra $m(t)$

$$m(t) = K_c \cdot e(t) + K_i \cdot \int e dt + K_d \frac{de}{dt} \quad (5-12)$$

Ảnh Laplace của (5-12) là .

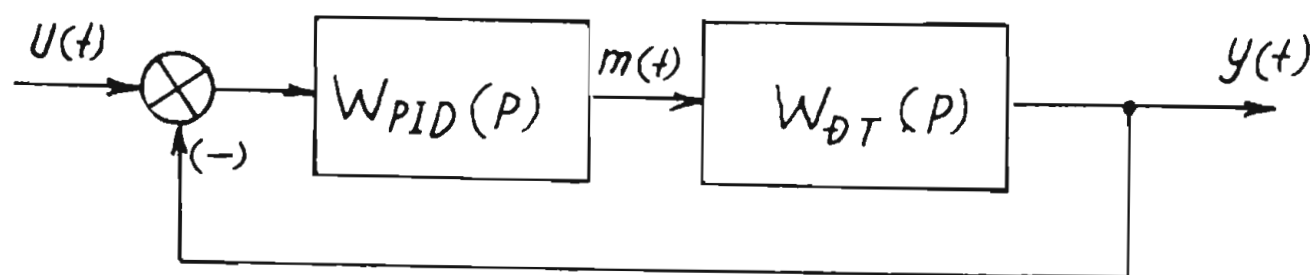
$$\frac{M(p)}{U(p)} = W_{PID}(p) = K_c + \frac{K_i}{p} + K_d P. \quad (5-13)$$

Để biết rõ tác dụng của luật điều khiển I, D ta sẽ xét các ví dụ sau. Bộ điều khiển PID sẽ nối tiếp với đối tượng điều khiển (hình 5-4).

Ví dụ 5-4. Cho biết :

$$\begin{cases} W_{DT}(p) = \frac{1}{p+1} ; \\ W_{PID}(p) = K_c + \frac{K_i}{p} \end{cases}$$

(chỉ xét hai luật : P và I).



Hình 5-4.

Từ sơ đồ hình 5-4 ta tính được hàm truyền đạt hệ kín :

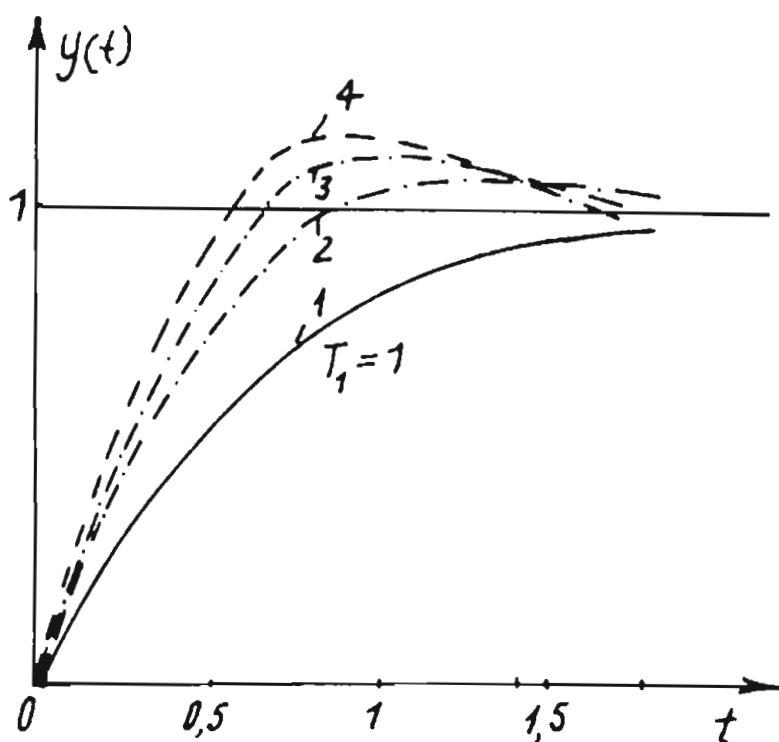
$$W_k(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{K_c(p + T_1)}{p^2 + (1 + K_c)p + K_c \cdot T_1} \quad (5-14)$$

trong đó $T_1 = K_i/K_c$.

Nếu chọn các tham số của bộ điều khiển PID khác nhau, ta được đặc tính hệ thống $y(t)$ khác nhau ứng với $u(t) = 1(t)$.

Khi $K_c = 3$ và với các giá trị $T_1 = 1; 2; 3; 4$ ta được đặc tính $y(t)$ của hệ thống vẽ trên hình 5-5.

Với $T_1 = 1$, ta có quá trình không dao động, độ quá điều chỉnh bằng không (overshoot) và thời gian quá trình quá độ kéo dài. Còn $T_1 = 2; 3; 4$, đặc tính có dao động tương ứng với độ quá điều chỉnh bằng 7,5%; 13,5% và 18,5%.



Hình 5-5.

Ví dụ 5-5. Khi đối tượng điều khiển là khâu bậc hai :

$$W_{DT}(p) = \frac{5}{(p+1)(0,5p + 1)} \quad (5-15)$$

Nếu hàm truyền đạt của bộ điều khiển PID có dạng sau :

$$W_{PID}(p) = K \left(\frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p + 1}{\alpha T_i p + 1} \right). \quad (5-16)$$

Giá trị T_i thông thường lớn hơn T_d rất nhiều còn :

$$0 < \alpha < 1.$$

– Khi $T_d = 0$, $\alpha = 1$, (5-16) sẽ trở thành :

$$W_{PI}(p) = K \left(\frac{1}{T_i p} + 1 \right) \quad (5-17)$$

Biểu thức (5-17) chỉ có thành phần tỷ lệ (p) và thành phần tích phân (I).

– Khi T_i rất lớn còn T_d và α rất nhỏ thì tích số $\alpha T_d \ll 1$; số hạng $\frac{1}{T_i p}$ bỏ qua. Lúc đó $W_{PD}(p) = K \left(\frac{T_d p + 1}{1} \right) \approx K(T_d p + 1) \quad (5-18)$

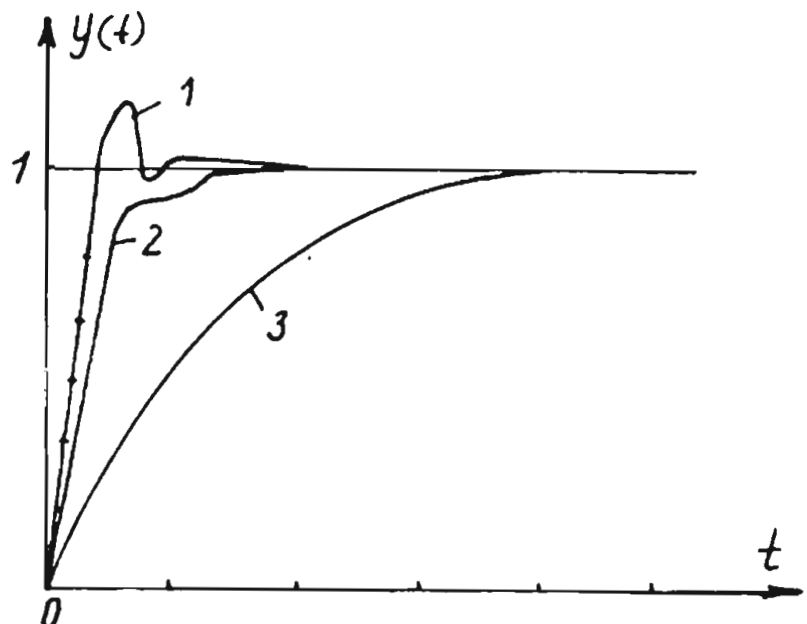
Biểu thức (5-18) chỉ còn thành phần tỷ lệ và thành phần đạo hàm $T_d \cdot p$.

– Khi T_i không đủ lớn còn $\alpha T_d \ll 1$, ta có bộ điều khiển PID :

$$W_{PID}(p) \approx K \left(\frac{1}{T_i p} + T_d p + 1 \right) \quad (5-19)$$

Đường cong ứng với K, T_i, T_d, α :

- (1) $K = 10, T_i = 2; T_d = 0,5;$
 $\alpha = 0,05.$
- (2) $K = 5; T_i = 2; T_d = 0,5;$
 $\alpha = 0,05;$
- (3) $K = 1; T_i = 2; T_d = 0,5$
và $\alpha = 0,05.$



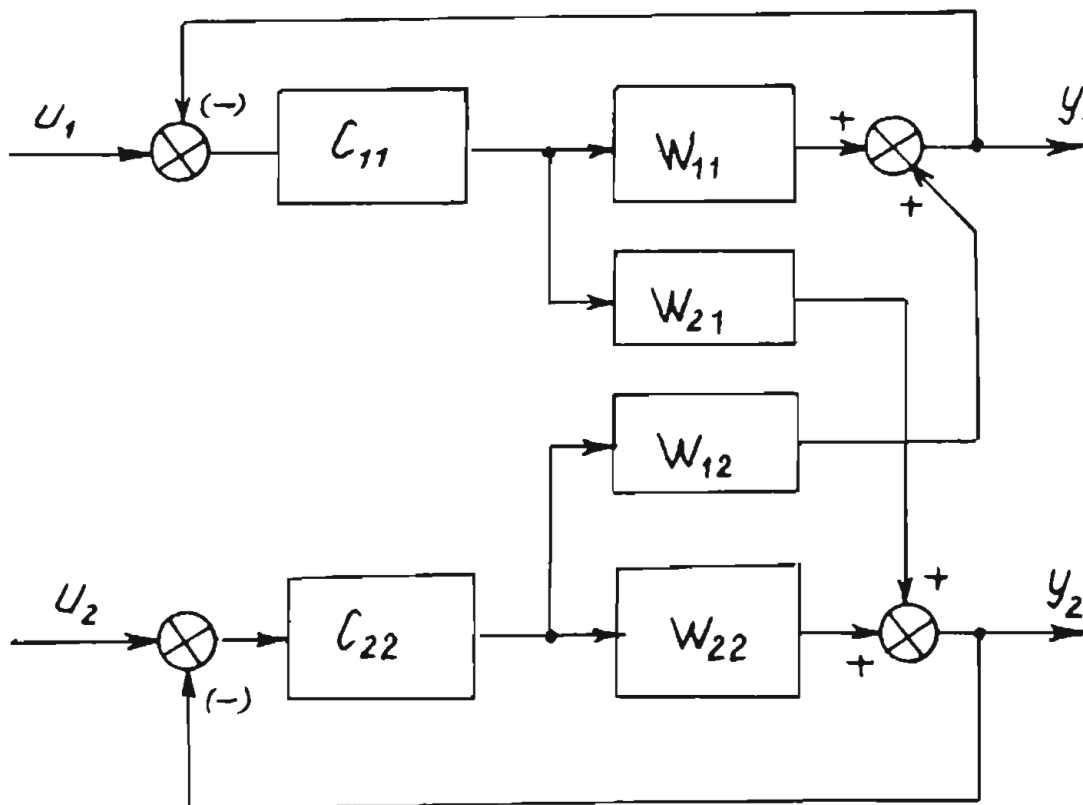
Nếu tính chọn hợp lý các thông số của bộ điều khiển PID, ta sẽ thu được đặc tính của hệ thống đạt chất lượng tốt.

Việc thiết kế để chọn lựa thông số của PID thường được thực hiện bằng phương pháp mô hình hóa trên máy vi tính.

5-5. XÁC ĐỊNH ĐIỀU KIỆN PHÂN LY CỦA HỆ THỐNG NHIỀU CHIỀU

Có những đối tượng điều khiển có nhiều tác động vào và nhiều tín hiệu ra. Ví dụ trong các bể chứa chất lỏng để khuấy trộn liên tục. Bể chứa này có hai tín hiệu vào là một dòng chất lỏng có nhiệt độ thấp và một dòng chất lỏng có nhiệt độ cao, cấp vào trong bể liên tục. Khi sản phẩm chất lỏng lấy ra khỏi bể chứa cũng chảy liên tục và do đó nhiệt độ cũng như mức chất lỏng bị thay đổi. Hai thông số này chính là hai tín hiệu ra cần điều khiển của hệ

Giả thiết ta xác định được mô hình toán học của hệ có hai tín hiệu vào và hai tín hiệu ra vẽ trên hình 5-7.



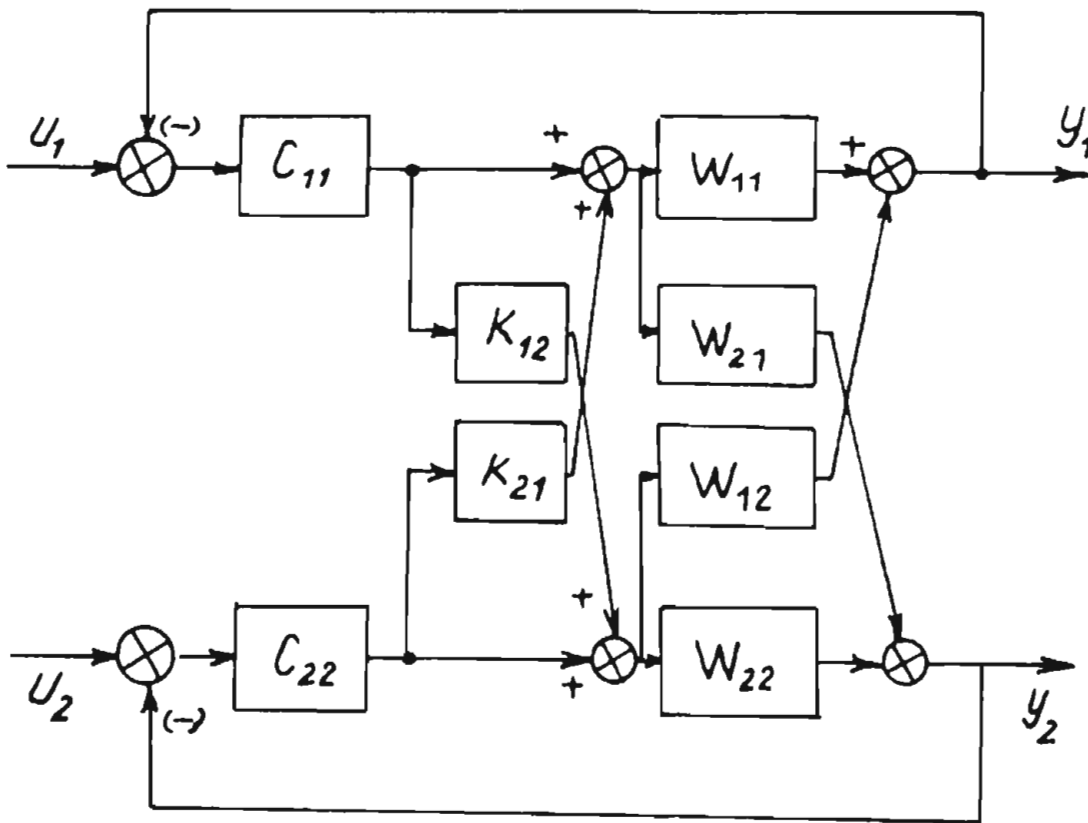
Hình 5-7.

Tín hiệu y_1 chịu ảnh hưởng của tín hiệu vào u_1 và cả u_2 .

Tín hiệu ra y_2 chịu ảnh hưởng của tín hiệu vào u_2 và cả u_1 .

Vấn đề đặt ra ở đây là hãy xây dựng hệ thống dựa trên hệ đã có ở hình 5-7 để sao cho thực hiện được điều kiện phân ly, nghĩa là y_1 chỉ chịu ảnh hưởng của tín hiệu vào u_1 mà "bất biến" với tín hiệu u_2 , tương tự tín hiệu ra y_2 chỉ chịu ảnh hưởng của tín hiệu u_1 . Thực hiện tổng hợp được hệ thống có tính chất phân ly này ta sẽ gọi là hệ thống phân ly (Decoupling Multivariable System).

Trên hình 5-8 trình bày một hệ thống phân ly có thêm hai khối mới là K_{12} và K_{21} còn các khối còn lại vẫn giữ nguyên như trên hình 5-7.



Hình 5-8.

– *Xác định điều kiện bất biến của y_1 đối với u_2*

Theo sơ đồ hình 5-8 nếu xem $u_1 = 0$ thì tín hiệu ra y_1 sẽ tính được như sau

$$y_1 = [(0 - y_1) \cdot C_{11} + K_{21} \cdot (C_{22} \cdot (u_2 - y_2))] \cdot w_{11} + w_{12} [K_{12} \cdot C_{11} (0 - y_1) + C_{22} (u_2 - y_2)] \quad (5-20)$$

Hay là :

$$y_1 (1 - C_{11} w_{11} - C_{11} K_{12} w_{12}) = u_2 \cdot C_{22} (K_{21} w_{11} + w_{12}) - y_2 \cdot C_{22} (w_{11} K_{21} + w_{12}).$$

Hay :

$$y_1 = \frac{C_{22} (K_{21} w_{11} + w_{12})}{1 - C_{11} w_{11} - C_{11} K_{12} w_{12}} \cdot u_2 - \frac{C_{22} (w_{11} K_{21} + w_{12})}{1 - C_{11} w_{11} - C_{11} K_{12} w_{12}} \cdot y_2 \quad (5-21)$$

Trong biểu thức (5-20) để y_1 không phụ thuộc vào tín hiệu u_2 thì số hạng thứ nhất có hệ số của u_2 bằng không, tức là

$$K_{21} w_{11} + w_{12} = 0 \quad (5-22)$$

Từ đây ta rút ra hàm truyền đạt K_{21} đưa thêm vào hệ (5-7) theo w_{11} và w_{12} đã biết là :

$$K_{21} = - \frac{w_{12}}{w_{11}} \quad (5-23)$$

– Xác định điều kiện bất biến của y_2 đối với u_1 .

Theo sơ đồ trên hình 5-8 nếu xem $u_2 = 0$ thì tín hiệu ra y_2 sẽ tính được như sau .

$$y_2 = [(0 - y_2) \cdot C_{22} + K_{12} (C_{11} (u_1 - y_1))] \cdot w_{22} + w_{21} [K_{21} \cdot C_{22} \cdot (u_2 - y_2) + C_{11} \cdot (0 - y_1)]. \quad (5-24)$$

$$\begin{aligned} \text{Hay :} \quad y_2 (1 - C_{22} w_{22} - C_{22} K_{21} w_{21}) &= \\ &= u_1 \cdot C_{11} (K_{12} w_{22} + w_{21}) - y_1 \cdot C_{11} (w_{22} K_{12} + w_{21}) \end{aligned}$$

Hoặc

$$y_2 = \frac{C_{11} (K_{12} w_{22} + w_{21})}{1 - C_{22} w_{22} - C_{22} K_{21} w_{21}} u_1 - \frac{C_{11} (w_{22} K_{12} + w_{21})}{1 - C_{22} w_{22} - C_{22} K_{21} w_{21}} y_1. \quad (5-25)$$

Trong biểu thức (5-25), để y_2 không phụ thuộc u_1 thì hệ số của u_1 phải bằng không. Từ đó ta rút ra .

$$K_{12} = - \frac{w_{21}}{w_{22}} \quad (5-26)$$

Vậy trong hệ thống nhiều chiều như đã mô tả ở hình 5-7 nếu ta tổng hợp bằng cách đưa thêm vào hai khối mới K_{21} và K_{12} như đã xác định ở công thức (5-23) và (5-26) thì các tín hiệu ra y_1 và y_2 không chịu tương tác của cả hai tín hiệu vào. Nghĩa là y_1 chỉ chịu điều khiển của riêng u_1 và y_2 chỉ chịu điều khiển riêng của u_2 . Đây chính là nguyên lý điều khiển phân ly.

5-6. TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC CỦA HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC

Khái niệm về điều khiển được và quan sát được (Controllability and Observability) do R-Kalman đề ra (Kalman, R.E. On the General Theory of Control Systems 1961).

Điều khiển được của một hệ thống là, với một tác động vào liệu có chuyển được trạng thái của hệ từ thời điểm đầu t_0 đến thời điểm cuối t_1 trong một khoảng thời gian hữu hạn $t_1 - t_0$ hay không ?

Quan sát được của hệ thống là với các tọa độ đo được ở biến ra y_1 của hệ, liệu ta có thể khôi phục được (Reconstructibility) các véc tơ trạng thái x_1 trong một khoảng thời gian hữu hạn hay không ?

1. Tính điều khiển được

Định lý 5-1. Hệ thống tuyến tính hằng mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}.u(t) \quad (5-27)$$

được gọi là *điều khiển được hoàn toàn* khi và chỉ khi ma trận sau đây có hạng bằng n

$$P = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (5-28)$$

$$\text{Rank}(P) = n.$$

Ví dụ 5-6. Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái :

$$\dot{X} = A.X + B.u,$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$

Theo công thức (5-28) ta xét điều kiện để hệ điều khiển được :

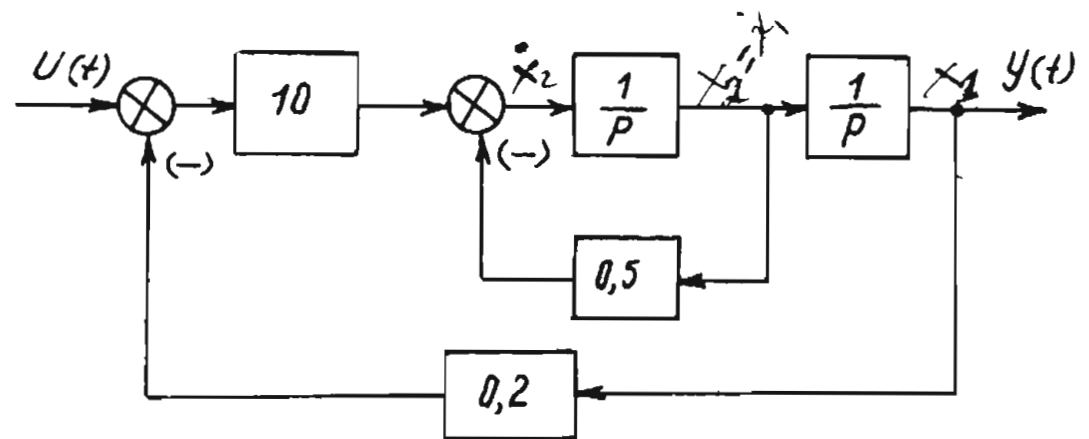
$$P = [B \quad AB \quad A^2B] \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2c \\ 0 & a_0c & (a_1a_2 + a_2a_4)c \\ c & a_4c & (a_2a_3 + a_4^2)c \end{bmatrix}$$

Hạng của ma trận P :

$\text{Rank}(P) = 3$ nếu $c \neq 0$ và $a_2 \neq 0$ thì hệ thống điều khiển được hoàn toàn.

Ví dụ 5-7.
Cho hệ thống mô tả bởi sơ đồ vẽ trên hình 5-9.

Từ đó ta xác định được:



Hình 5-9.

$$w_k(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{20}{2p^2 + p + 4}$$

Đặt $x_1 = y$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 0,5x_2 + 10.u.$$

Phương trình trạng thái tương ứng là :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u.$$

Xét điều kiện điều khiển của hệ theo công thức (5-28):

$$P = [B; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}; \text{ vì } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Tính $\det(P) = -100 \neq 0$ vậy $\text{Rank}(P) = 2$

Hệ cấp 2 ở trên là điều kiện được hoàn toàn vì hạng của ma trận P bằng 2.

2. Tính quan sát được

Định lý 5-2. Hệ tuyến tính liên tục dùng mô tả bởi phương trình

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases} \quad (5-29)$$

được gọi là quan sát được hoàn toàn khi và chỉ khi ma trận sau đây có hạng bằng n

$$L = \{C', A'C', (A')^2.C', \dots, (A')^{n-1}.C'\} \quad (5-29)$$

$$\text{Rank}(L) = n.$$

Ví dụ 5-8. Cho hệ thống điều khiển mô tả bởi phương trình sau:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A.X + Bu \\ y = C.X \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & -0,2 & 0,3 \\ -30 & -65 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad C = [1, 0, 0]$$

Hãy xét tính quan sát được của hệ thống.

Theo (5-29) ta tính

$$L = [C', A'C' \quad (A')^2 \quad C']$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -30 \\ 1 & -0,2 & -65 \\ 0 & 0,3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$A'.C' = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -30 \\ 1 & -0,2 & -65 \\ 0 & 0,3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A'.(A'.C') = (A')^2.C' \quad \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -30 \\ 1 & -0,2 & -65 \\ 0 & 0,3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}; \quad \det(A) = 0,3 \neq 0$$

Do đó Rank(L) = 3.

Vậy hệ thống cấp 3 (n = 3) ở trên là quan sát được hoàn toàn.

Ví dụ 5-9. Cho hệ thống ĐKTD mô tả bởi phương trình :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

trong đó : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} ; C = [1 \quad 0]$

– Ta tính ma trận P để xét tính điều khiển được của hệ thống

$$P = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = -9 + 9 = 0 \quad \text{Rõ ràng Rank}(P) < 2$$

Do đó hệ thống này không điều khiển được vì hệ có $n = 2$.

– Tính ma trận L để xét tính quan sát được của hệ thống :

$$L = [C' \quad A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = -1 \neq 0 ; \quad \text{Rank}(L) = 2$$

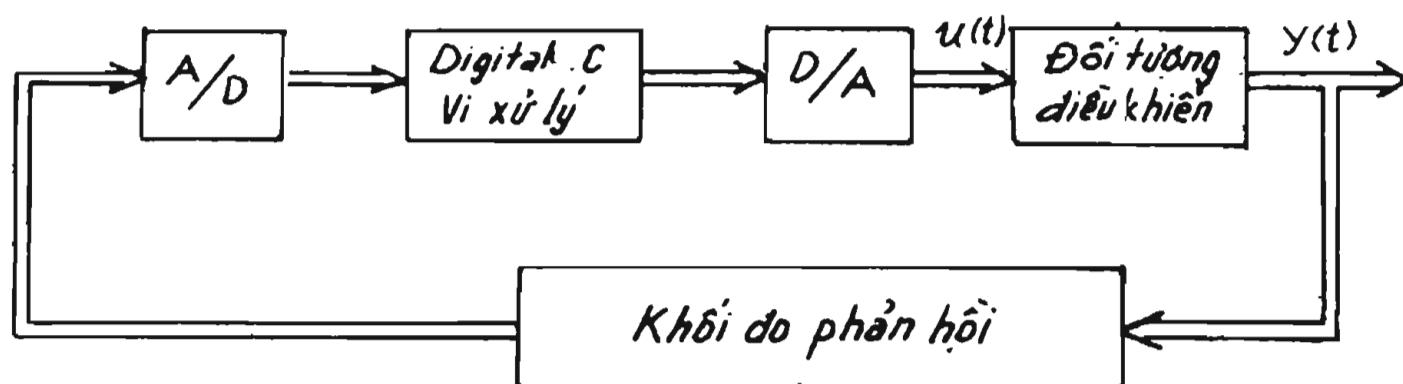
Vậy hệ thống này quan sát được, vì $n = 2$.

Chương 6

HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN XUNG SỐ

Gần đây các hệ thống thu thập, xử lý và truyền số liệu; các hệ thống công nghiệp sử dụng các mạch vi xử lý, các hệ thống lớn sử dụng máy vi tính và máy tính mini đã trở nên phổ biến. Các quá trình và hệ thống điều khiển có máy tính số, có bộ điều khiển số, có thiết bị biến đổi xung, đều thuộc lớp hệ thống xung - số, hoặc có khi còn gọi là hệ thống rời rạc hoặc hệ thống gián đoạn (Discrete-Time System).

Bộ điều khiển số hiện nay thực chất là một hệ vi xử lý. Trên hình 6-1 vẽ sơ đồ hệ điều khiển số điển hình.



Hình 6-1.

Đối tượng điều khiển thường là một hệ liên tục;

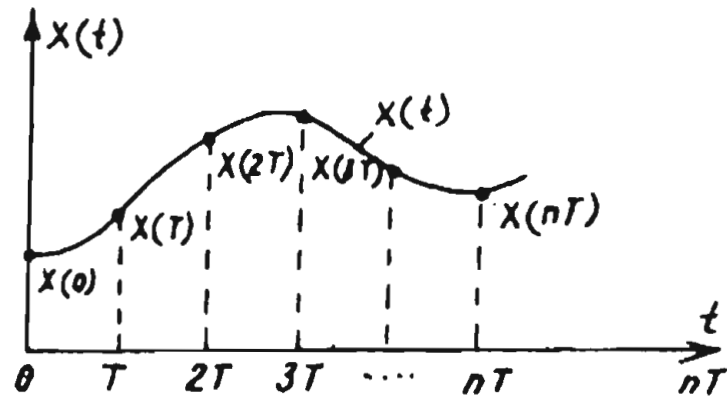
A/D: (Analog/Digital): Bộ biến đổi tương tự số.

D/A: (Digital/Analog): Bộ biến đổi số tương tự.

Tín hiệu vào và ra của đối tượng điều khiển là tín hiệu liên tục; còn tín hiệu vào và ra của máy tính số (bộ điều khiển số) là tín hiệu rời rạc (tín hiệu số). Hệ thống điều khiển có mạch phản hồi muốn

đưa vào vi xử lý phải qua bộ chuyển đổi tương tự số A/D. Còn tín hiệu ra của máy tính (vi xử lý) dùng để điều khiển đối tượng thường qua bộ biến đổi D/A. Các tín hiệu truyền đạt trong hệ có cả tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc.

Việc biến đổi từ tín hiệu liên tục thành rời rạc ta gọi là quá trình cắt mẫu (Sampling). Ví dụ trên hình 6-2 có tín hiệu liên tục $X(t)$ và tương ứng có tín hiệu rời rạc $X(nT)$. Thông thường khoảng thời gian cắt mẫu $T = \text{const}$.

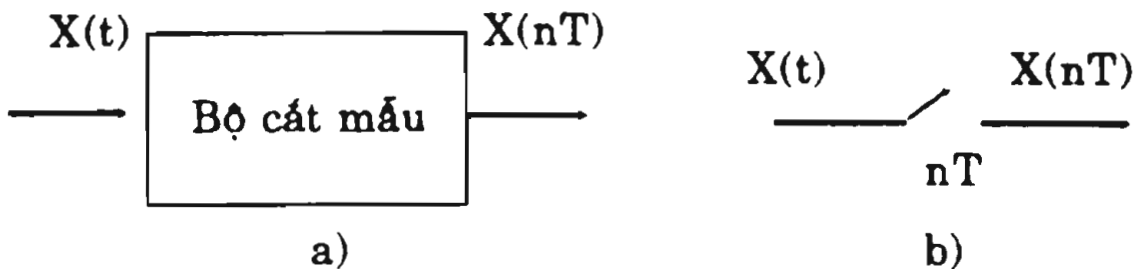


Hình 6-2.

Ta ký hiệu bộ cắt mẫu như trên hình 6-3.

Ví dụ có tín hiệu liên tục: $X(t) = 3 + 5.t + \sin 2t$ ở đầu vào bộ cắt mẫu thì ở đầu ra ta nhận được tín hiệu rời rạc:

$$X(nT) = 3 + 5.(nT) + \sin 2.(nT)$$



Hình 6-3.

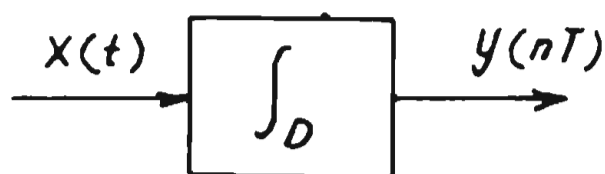
6-1. MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG XUNG-SỐ

1 Quá trình tích phân số

Xét khâu tích phân với ký hiệu $\int_D$ chỉ tích phân số. Nếu tích

phân liên tục của hàm $X(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot d\tau, \quad (6-1)$$



thì tích phân số của hàm $X(nT)$ là phép tính gần đúng: $(\int_D)$

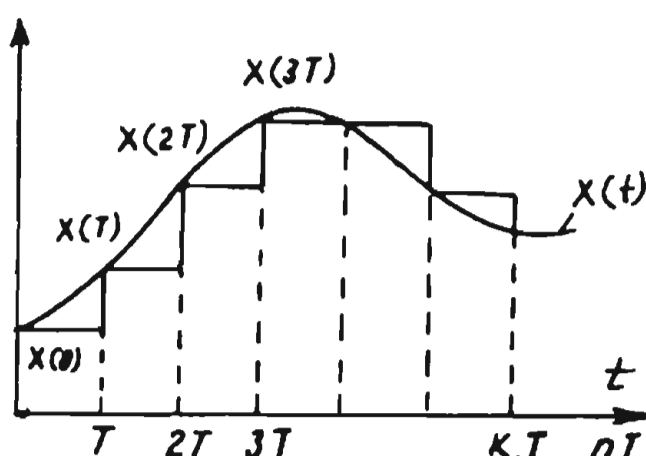
$$y(nT) = \sum_{n=0}^{k-1} T \cdot x(nT) \quad (6-2)$$

Hình 6-4.

của tích phân hàm liên tục $X(t)$

$$y(kT) = \int_0^{kT} x(\tau) \cdot d\tau \quad (6-3)$$

Trên hình 6-4 vẽ ký hiệu tích phân số còn trên hình 6-5 vẽ tín hiệu xấp xỉ $x(nT)$ của tín hiệu liên tục $X(t)$. Tích phân (6-1) là diện tích đường cong $x(t)$ với trục tọa độ x, y còn tích phân số (6-2) là tổng diện tích các mẫu chữ nhật có đáy là T và chiều cao là $X(nT)$, với $n = \overline{1, k}$.



Hình 6-5.

2. Sai phân của hàm rời rạc và phương trình sai phân

Nếu dãy xung $x(nT)$ trên hình 6-2 có thời hạn vô cùng nhỏ, ta có thể xem là xung tức thời. Dãy xung đó chính là hàm rời rạc. Hàm rời rạc là một dãy số $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(nT)$ chính là giá trị hàm $x(t)$ ở các thời điểm iT ($i = 0, 1, \dots, n$).

Hàm rời rạc có chu kỳ rời rạc hằng số ta ký hiệu là $x(i)$

Đối với hàm rời rạc $x(i)$ không có đạo hàm, vi phân và tích phân tuy nhiên cũng có các phép tính tương tự là sai phân và tổng.

– Sai phân cấp một tương tự với vi phân cấp một của hàm liên tục:

$$\Delta f(i) = f(i + 1) - f(i)$$

– Sai phân cấp hai:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(i) &= \Delta f(i + 1) - \Delta f(i) = [f(i + 2) - f(i + 1)] - [f(i + 1) - f(i)] \\ &= f(i + 2) - 2f(i + 1) + f(i).\end{aligned}$$

Sai phân cấp k:

$$\Delta^k f(i) = \Delta^{k-1} f(i + 1) - \Delta^{k-1} f(i) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} f(i + j) \quad (6-4)$$

Đối với hệ liên tục ta biết được phương trình vi phân mô tả động học dạng sau:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = u(t) \quad (6-5)$$

Tương tự đối với hệ xung số, động học của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây

$$A_0 \Delta^{(n)} y(i) + A_1 \Delta^{(n-1)} y(i) + \dots + A_n y(i) = u(i) \quad (6-6)$$

Nếu sử dụng công thức tính sai phân tổng quát (6-4) ta viết phương trình (6-6) dạng khác:

$$A_0 y(i + n) + a_1 y(i + n - 1) + \dots + a_n y(i) = u(i), \quad (6-7)$$

trong đó $u(i)$ là hàm rời rạc đầu vào của hệ thống còn $y(i)$ là hàm rời rạc đầu ra.

Cần chú ý đối với hệ liên tục, cấp của đạo hàm cao nhất trong phương trình vi phân chính là cấp của phương trình vi phân, còn ở hệ xung số, cấp của sai phân cao nhất không trùng với cấp cao nhất của phương trình sai phân. Ví dụ cho phương trình sai phân sau, trong đó có sai phân cấp 3:

$$\Delta^3 y(i) + 4 \Delta^2 y(i) + 5 \Delta y(i) + 2y(i) = 0 \quad (6-8)$$

Ta tính $\Delta^3 y(i)$ theo công thức (6-4):

$$\begin{aligned} \Delta^3 y(i) = & (-1)^3 \frac{3!}{0!(3-0)!} y(i+0) + (-1)^2 \frac{3!}{1!(3-1)!} y(i+1) + \\ & + (-1)^1 \frac{3!}{2!(3-2)!} y(i+2) + (-1)^0 \frac{3!}{3!(3-3)!} y(i+3) \end{aligned}$$

$$\Delta^3 y(i) = -y(i) + 3.y(i+1) - 3.y(i+2) + y(i+3)$$

$$\Delta^2 y(i) = y(i+2) - 2.y(i+1) + y(i)$$

$$\Delta y(i) = y(i+1) - y(i)$$

Thay vào (6-8) ta được:

$$\begin{aligned} y(i+3) - 3.y(i+2) + 3.y(i+1) - y(i) + 4.y(i+2) - 8y(i+1) + \\ + 4.y(i) + 5.y(i+1) - 5.y(i) + 2y(i) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Hay:} \quad y(i+3) + y(i+2) = 0 \quad (6-9)$$

Nếu đặt $i+2 = j$ ta có:

$$y(j+1) + y(j) = 0. \quad (6-10)$$

Ba phương trình (6-8), (6-9), (6-10) là hoàn toàn tương đương nhưng ở phương trình (6-10) thì chỉ là phương trình sai phân cấp một, trong lúc đó ở phương trình (6-8) lại chứa cả thành phần sai phân cấp ba. Do vậy phương trình sai phân dạng tổng quát (6-7) phải chứa đủ hai số hạng chủ yếu là $a_0 y(i+n)$ và $a_n y(i)$ mới gọi là phương trình cấp n .

6-2. PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI HỆ ĐIỀU KHIỂN XUNG-SỐ

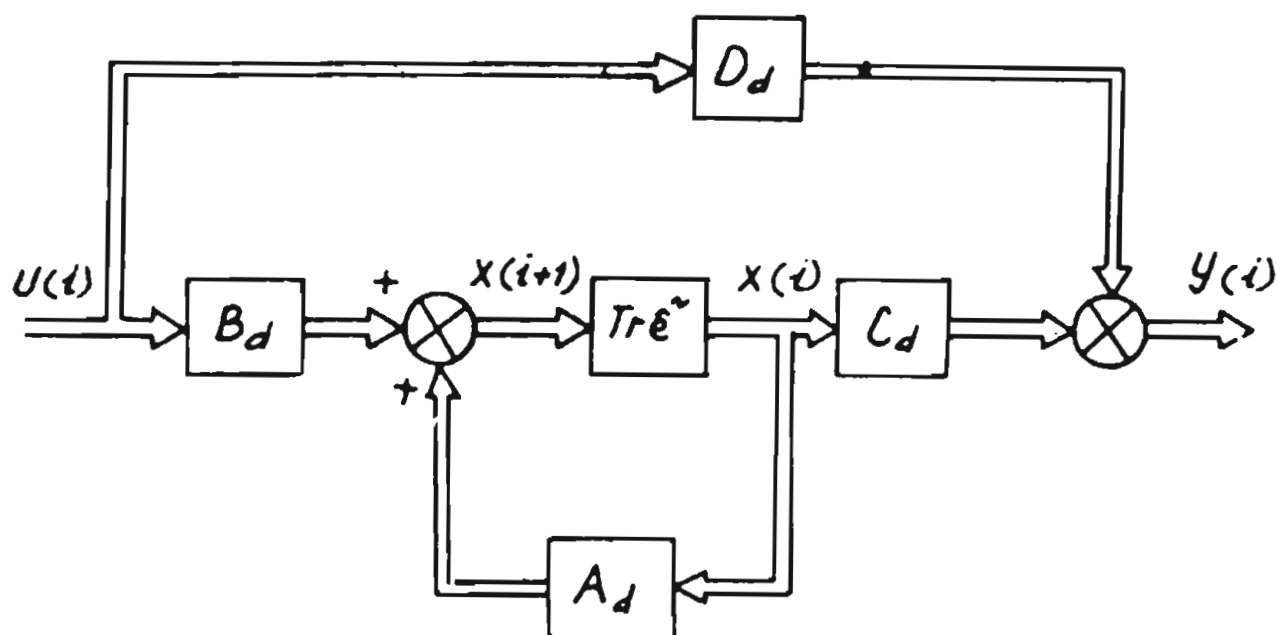
Ta đã biết đối với hệ liên tục mô tả bởi phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}.u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}.\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}.u(t). \end{cases} \quad (6-11)$$

Tương tự, đối với hệ thống xung số ta có phương trình trạng thái rời rạc sau đây:

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d x(i) + B_d u(i) \\ y(i) = C_d x(i) + D_d u(i) \end{cases} \quad (6-12)$$

Sơ đồ cấu trúc trạng thái biểu diễn cho hệ (6-12) vẽ trên hình 6-6.



Hình 6-6.

Ví dụ 6-1. Cho biết phương trình sai phân vô hướng cấp 3 sau:

$$a_0 x(i+3) + a_1 x(i+2) + a_2 x(i+1) + a_3 x(i) = u(i) \quad (6-13)$$

Viết phương trình trạng thái rời rạc cho hệ thống.

Đặt: $x(i) = x_1(i);$

$x(i+1) = x_2(i);$

$x(i+2) = x_3(i);$ (6-14)

Khi đó: $x(i+3) = x_3(i+1)$

Thế (6-14) vào (6-13) ta có:

$$\begin{cases} x_1(i+1) = 0.x_1(i) + 1.x_2(i) + 0.x_3(i) + 0.u(i) \\ x_2(i+1) = 0.x_1(i) + 0.x_2(i) + 1.x_3(i) + 0.u(i) \\ x_3(i+1) = -\frac{a_3}{a_0}.x_1(i) - \frac{a_2}{a_0}.x_2(i) - \frac{a_1}{a_0}.x_3(i) + \frac{1}{a_0}.u(i) \end{cases} \quad (6-15)$$

Dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix} \cdot u(i) \quad (6-16)$$

Hay:

$$x(i+1) = A_d \cdot x(i) + B_d \cdot u(i).$$

Nếu phương trình sai phân cho ở dạng (6-6), muốn viết về phương trình trạng thái dạng (6-16) trước hết ta phải chuyển về dạng (6-7) và sau đó tiến hành như đã thực hiện ở ví dụ 6-1.

Đối với hệ thống không dừng (hệ số phương trình sai phân biến thiên), phương trình trạng thái có dạng:

$$x(i+1) = A_d(i) \cdot x(i) + B_d(i) \cdot u(i), \quad (6-17)$$

trong đó các ma trận $A_d(i)$ và $B_d(i)$ phụ thuộc vào biến thời gian.

Trong hệ thống rời rạc, phần liên tục (gồm đối tượng điều khiển, sensor, ...) được mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \\ y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \end{cases} \quad (6-18)$$

Ở mục 4-3 ta đã có:

$$\Phi(t) = e^{At}; \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A(t - t_0)} \quad (6-19)$$

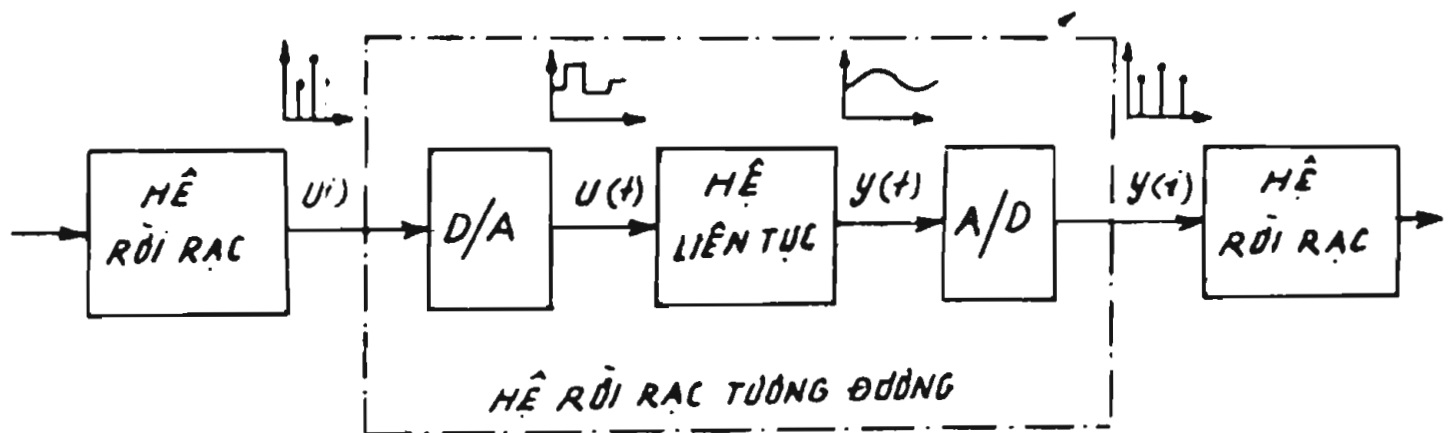
Nghiệm tổng quát của phương trình (6-18) là:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad (6-20)$$

Mạch cắt mẫu lý tưởng là tạo ra các xung ở các thời điểm rời rạc $i = 0, 1, 2, \dots$, đó chính là bộ biến đổi A/D, ví dụ từ $y(t)$ liên tục thành $y(i)$ rời rạc.

Bộ biến đổi I/A biến tín hiệu rời rạc $u(i)$ thành tín hiệu liên tục $u(t)$ nó lưu trữ giá trị (Sample and Hold) cấp không (Zero Order Hold). Giá trị được lưu giữ:

$$u(t) = u(i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2 \dots \quad (6-21)$$



Hình 6-7.

Tương tự như nghiệm dạng liên tục (6-20) ta có nghiệm ở trạng thái $x(t_{i+1})$ là

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i) \cdot x(t_i) + \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) \cdot B(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot u(t_i) \quad (6-22)$$

Phương trình ra:

$$y(t_i) = c(t_i) \cdot x(t_i) + D(t_i) \cdot u(t_i) \quad (6-23)$$

Đặt: $x(t_{i+1}) = x(i+1); x(t_i) = x(i);$

$$u(t_i) = u(i); y(t_i) = y(i); \quad (6-24)$$

$$\Phi(t_{i+1}, t_i) = \Phi(i+1, i);$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) \cdot B(\tau) \cdot d\tau = H(i+1, i). \quad (6-25)$$

Lúc đó ta nhận được phương trình trạng thái:

$$x(i+1) = \Phi(i+1, i) \cdot x(i) + H(i+1, i) \cdot u(i), \quad (6-26)$$

trong đó $H(i+1, i)$ là ma trận quá độ điều khiển.

Đối với hệ thống dùng các hệ số hằng ta có:

$$\Phi[(i+1)T - iT] = \Phi(T) = e^{AT} \quad (6-27)$$

$$H[(i+1)T - iT] = H(T) = \int_{t_1=iT}^{t_{i+1}=(i+1)T} \Phi[(i+1)T - \tau] B.d\tau.$$

Đổi biến tích phân: $q = (i+1)T - \tau$ thì $dq = -d\tau$

Cho nên:

$$H(T) = - \int_T^0 \Phi(q).B.dq = \int_0^T \Phi(q).B.dq$$

Hay là

$$H(T) = \int_0^T \Phi(\tau).B.d\tau \quad (6-28)$$

Khi đó phương trình (6-26) sẽ là:

$$x(i+1) = \Phi(T).x(i) + H(T).u(i) \quad (6-29)$$

Trong trường hợp tổng quát ta có phương trình trạng thái hệ rời rạc:

$$x(i+1) = A_d.x(i) + B_d.u(i) \quad (6-30)$$

$$\text{với } A_d = \Phi(T); B_d = H(T). \quad (6-31)$$

Phương trình ra của hệ là:

$$y(i) = C_d.x(i) + D_d.u(i) \quad (6-32)$$

Ví dụ 6-2. Cho hệ thống liên tục mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases}$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0];$

$$x = [x_1 \quad x_2]^T; \quad u: \text{vô hướng.}$$

Hãy tìm phương trình sai phân trạng thái của hệ rời rạc khi biết

thời gian rời rạc $T = 0,5 \text{ sec}$.

– Phương pháp thứ nhất – Dùng biến đổi Laplace:

Phương trình sai phân trạng thái hệ rạc có dạng:

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d \cdot x(i) + B_d \cdot u(i) \\ y(i) = C_d \cdot x(i), \end{cases}$$

trong đó:

$$\begin{cases} A_d = \Phi(T); \\ B_d = \int_0^T \Phi(\tau) \cdot B \cdot d\tau; C_d = C \cdot \Phi(T) \end{cases}$$

Ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$ có thể tính theo công thức:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\}$$

Ta tính:
$$pI - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p+0,1 \end{bmatrix}$$

$$\det(pI - A) = p(p + 0,1)$$

$$\text{adj}(pI - A) = \begin{bmatrix} p+0,1 & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}; [pI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/p & 1/p(p+0,1) \\ 0 & 1/(p+0,1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 10(1 - e^{-0,1t}) \\ 0 & e^{-0,1t} \end{bmatrix}$$

$$A_d = \Phi(T) = \Phi(t) \Big|_{t=T=0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 10(1 - e^{-0,1\tau}) \\ 0 & e^{-0,1\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0,1(1 - e^{-0,1T}) \\ 0,01e^{-0,1T} \end{bmatrix} \cdot dt =$$

$$\begin{bmatrix} 0,1T + e^{-0,1T} \\ -0,1 \cdot e^{-0,1T} \end{bmatrix} \Big|_0^{T=0,5} = \begin{bmatrix} 0,23 \\ 0,488 \end{bmatrix}$$

$$\text{vậy } x(i+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix} u(i)$$

$$C_d = C = [1 \quad 0]$$

– *Phương pháp thứ hai:* Để chuyển về phương trình trạng thái rời rạc, ta tiến hành tính gần đúng đạo hàm cấp n

$$\dot{x} \approx \frac{\Delta x}{T} = [x(i+1) - x(i)]/T \quad (6-33)$$

Phương trình trạng thái sau đây sẽ viết dạng kt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= C.x(t) \end{aligned} \quad (6-34)$$

Thế (6-33) vào (6-34) ta có:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= T.A.x(i) + x(i) + T.B.u(i) \\ y(i) &= C.x(i) \end{aligned}$$

Hay là:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= A_d.x(i) + B_d.u(i) \\ y(i) &= C_d.x(i), \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{cases} A_d = I + T.A \\ B_d = T.B \\ C_d = C \end{cases} \quad (6-35)$$

Phương trình vi phân (6-34) về phương trình i phân (6-35) sẽ sinh ra sai số khi chu kỳ cắt mẫu T lớn.

Áp dụng các số liệu đã cho, theo (6-35) ta tính được:

$$A_d = I + T.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0,95 \end{bmatrix}$$

$$B_d = T.B = 0,5. \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,005 \end{bmatrix}$$

$$C_d = C = [1 \quad 0]$$

Các kết quả tính toán gần với kết quả đã tính ở phương pháp thứ nhất.

– *Phương pháp thứ ba* (phương pháp hình thang): Ta thay thế đạo hàm gần đúng như sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \approx \frac{1}{T} [x(i+1) - x(i)] \\ x(t) = x_{t,b} = \frac{1}{2} [x(i+1) + x(i)] \\ u = u(i). \end{cases} \quad (6-36)$$

Thế (6-36) vào (6-34) ta được:

$$\frac{1}{T}[x(i+1) + x(i)] = \frac{A}{2}[x(i+1) + x(i)] + B.u(i)$$

Hay:

$$\begin{cases} x(i+1) = [I - \frac{T.A}{2}]^{-1} [\frac{T.A}{2} + I].x(i) + [I - \frac{T.A}{2}]^{-1} T.B.u(i) \\ y(i) = C_d.x(i), \end{cases} \quad (6-37)$$

Hay

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d.x(i) + B_d.u(i) \\ y(i) = C_d.x(i), \end{cases}$$

trong đó:

$$\begin{cases} A_d = [I - \frac{T.A}{2}]^{-1} [\frac{T.A}{2} + I] \\ B_d = [I - \frac{T.A}{2}]^{-1} T.B \\ C_d = C \end{cases} \quad (6-38)$$

Với hệ thống như số liệu trên, ta sẽ tìm được A_d , B_d theo công thức (6-38):

$$A_d = [I - \frac{T}{2}A]^{-1} [\frac{T}{2}A + I]$$

$$\frac{T}{2}A = 0,25 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & -0,025 \end{bmatrix}$$

$$I - \frac{T}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 \\ 0 & 1,025 \end{bmatrix}; \quad \det(I - \frac{T}{2}A) = 1,025;$$

$$\text{adj}(I - \frac{T}{2}A) = \begin{bmatrix} 1,025 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [I - \frac{T}{2}A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,244 \\ 0 & 0,976 \end{bmatrix};$$

$$[\frac{T}{2}A + I] = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 0,975 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,244 \\ 0 & 0,976 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 0,976 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,952 \end{bmatrix}$$

$$B_d = [I - \frac{T}{2}A]^{-1} \cdot T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0,244 \\ 0 & 0,976 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00122 \\ 0,00488 \end{bmatrix};$$

$$C_d = C = [1 \quad 0].$$

6-3. PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Trong hệ tuyến tính liên tục, phép biến đổi Laplace (p). giữ vai trò quan trọng thì trong hệ xung - số (hệ rời rạc) phép biến đổi Z cũng có chức năng tương tự.

Nếu có hàm liên tục $f(t)$, ta sẽ có hàm rời rạc $f(iT)$ với chu kỳ cắt mẫu T . Theo giải tích ta viết hàm $f(iT)$ như sau:

$$f(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - iT), \quad (6-39)$$

với $\delta(t - iT)$ là hàm xung Dirac.

Biến đổi Laplace của hàm $f(iT)$, ký hiệu là $F^*(p)$:

$$\begin{aligned}
 F^*(p) &= \int_0^{\infty} f(iT) e^{-pt} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - iT) \right] \cdot e^{-pt} dt \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - iT) \cdot e^{-pt} dt \\
 F^*(p) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(iT) \cdot e^{-ipT} \quad (6-40)
 \end{aligned}$$

Ta đặt: $Z = e^{pT}$, (6-41)

với p là biến toán tử Laplace liên tục

Từ (6-41) rút ra: $p = \alpha + j\omega$ (6-42)

$$p = \frac{1}{T} \ln Z, \quad (6-43)$$

Z là biến toán tử rời rạc:

$$Z = e^{\alpha T} \cos(\omega T) + j \cdot e^{\alpha T} \sin(\omega T) \quad (6-44)$$

Biểu thức (6-40), khi đổi biến $p = \frac{1}{T} \ln Z$:

$$F^*(p = \frac{1}{T} \ln Z) = F(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(iT) \cdot Z^{-i} \quad (6-45)$$

Vậy:

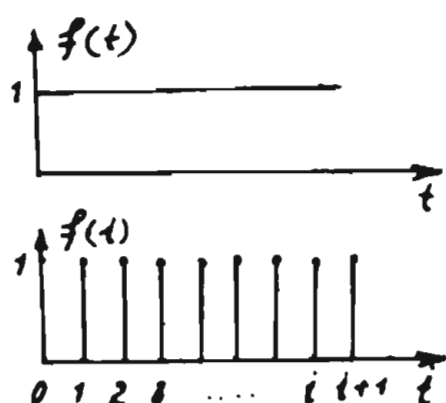
$$F(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(iT) \cdot Z^{-i} \quad (6-46)$$

$F(Z)$ là biến đổi Z của hàm $f(iT)$ y $f(t)$;

$$F(Z) = Z\{f(i)\}$$

Ví dụ 6-3. Cho hàm $f(t) = 1(t)$; $f(i) = 1(i)$

$$Z\{1(i)\} = F(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot Z^{-i} =$$



Hình 6-8.

Ví dụ 6-4. Cho hàm $f(t) = e^{-at}$ với a là hằng số.

$$f(i) = e^{-ai}; F(Z) = Z\{f(i)\} = Z\{e^{-ai}\}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-ai} \cdot Z^{-i} = \frac{Z}{Z - e^{-a}}$$

Trong bảng phụ lục 1 nêu biến đổi Laplace và biến đổi Z của các hàm $f(t)$ khác nhau.

Các tính chất của biến đổi Z

1. Tính chất dịch hàm gốc $f(i+1)$

$$Z\{f(i)\} = F(Z) \quad (6-47)$$

$$\begin{aligned} Z\{f(i+1)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} f(i+1) \cdot Z^{-i} \\ &= Z \cdot \sum_{i=0}^{\infty} f(i+1) \cdot Z^{-(i+1)} \end{aligned}$$

$$Z\{f(i+1)\} = Z \cdot \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot Z^{-i-1} - (0)$$

$$Z\{f(i+1)\} = Z \cdot F(Z) - Zf(0) \quad (6-48)$$

Tổng quát
$$Z\{f(i+m)\} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i+m) \cdot Z^{-i}$$

$$\begin{aligned}
 &= Z^m \cdot \sum_{i=0}^{\infty} f(i+m) \cdot Z^{-i} \\
 &= Z^m \left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot Z^{-i} - f(j) \cdot Z^{-j} \right]
 \end{aligned}$$

$$Z\{f(i+m)\} = Z^m \cdot F(Z) - \sum_{j=0}^{m-1} f^{n-j} \quad (6-49)$$

Với điều kiện đầu bằng không ta kết quả:

$$\begin{aligned}
 Z\{f(i+1)\} &= Z \\
 Z\{f(i+2)\} &= Z^2 \\
 &\dots \\
 Z\{f(i+m)\} &= Z^m.
 \end{aligned} \quad (6-50)$$

2. Tính chất tuyến tính:

$$Z\{a \cdot f_1(i) + b \cdot f_2(i)\} = a \cdot Z\{f_1(i)\} + b \cdot Z\{f_2(i)\} \quad (6-51)$$

3. Giá trị đầu của hàm gốc rời rạc:

$$f(i=0) = f(0) = F(Z) \quad (6-52)$$

$$\text{vì } F(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot Z^{-i} = f(0) \cdot Z^0 + f(1) \cdot Z^{-1} + f(2) \cdot Z^{-2} + \dots$$

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} F(Z) = f(0)$$

4. Giá trị cuối của hàm gốc rời rạc

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) \cdot F(Z) \quad (6-53)$$

$$\text{vì } Z\{f(i+1) - f(i)\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m [f(i+1) - f(i)] \cdot Z^{-i}$$

$$ZF(Z) - F(Z) = \lim_{m \rightarrow \infty} [f(i+1) - f(i)] \cdot Z^{-i}$$

$$\lim_{Z \rightarrow 1} [(Z - 1)F(Z) - f(0)] = \lim_{m \rightarrow \infty} [f(m) - f(0)]$$

$$f(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \lim_{Z \rightarrow 1} (Z - Z). \quad (6-54)$$

5. Biến đổi Z của sai phân $\Delta f(i)$ (sai phân tiến):

$$\Delta f(i) = f(i + 1) - f(i) \quad (6-55)$$

$$\begin{aligned} Z\{\Delta f(i)\} &= Z\{f(i + 1) - f(i)\} = Z\{f(i + 1)\} - Z\{f(i)\} \\ &= Z.F(Z) - Z.f(0) - F(Z) \end{aligned}$$

$$Z\{\Delta f(i)\} = (Z - 1).F(Z) - Z.f(0) \quad (6-56)$$

Tương tự đối với sai phân cấp hai:

$$\begin{aligned} Z\{\Delta^2 f(i)\} &= (Z - 1)Z\{\Delta f(i)\} - Z.f(0) \\ &= (Z - 1)^2.F(Z) - Z(Z - 1)f(0) - Z.f(0) \end{aligned} \quad (6-57)$$

6. Biến đổi Z của sai phân lùi $\nabla f(i)$:

$$\nabla f(i) = f(i) - f(i - 1) \quad (6-58)$$

$$\begin{aligned} Z\{\nabla f(i)\} &= Z\{f(i)\} - Z\{f(i - 1)\} \\ &= F(Z) - Z^{-1}.F(Z) \\ &= (1 - Z^{-1}).F(Z). \end{aligned} \quad (6-59)$$

7. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6-5.

a) Cho ánh xạ hiệu $y(i)$ của biến đổi Z:

$$y(Z) = \frac{1}{(1 - a.Z^{-1})(1 - Z^{-1})} \quad (6-60)$$

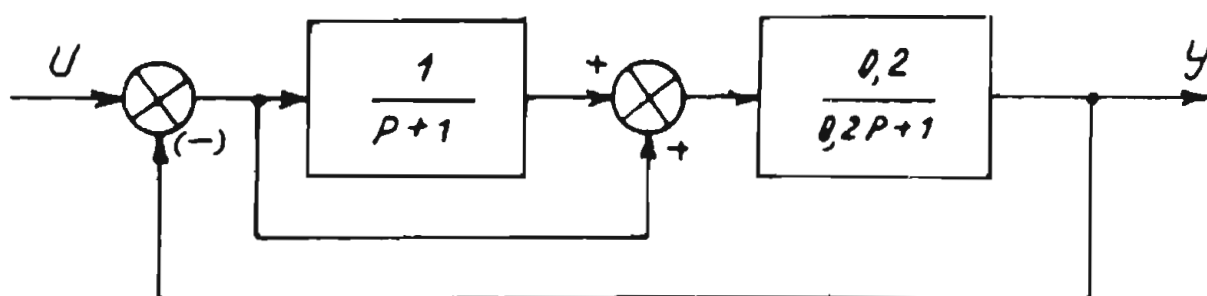
– Giá trị đầu của $y(i)$ tính theo công thức (6-54) là:

$$y(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} y(Z) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - a.Z^{-1}).(1 - Z^{-1})} = 1$$

– Giá trị cuối của $y(i)$ tính theo (6-54) là:

$$\begin{aligned}
 y(\infty) &= \lim_{Z \rightarrow 1} (Z - 1) \cdot Y(Z) \\
 &= \lim_{Z \rightarrow 1} (Z - 1) \cdot \frac{1}{(1 - a \cdot Z^{-1}) \cdot (1 - Z^{-1})} \\
 &= \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{Z}{1 - a \cdot Z^{-1}} = \frac{1}{1 - a} \quad (6-61)
 \end{aligned}$$

b) Cho hệ thống liên tục vẽ trên hình (6-9):



Hình 6-9.

Tín hiệu vào $u(t) = 1(t)$; $u(p) = \frac{1}{p}$. Từ sơ đồ 6-9 ta xác định được ảnh tín hiệu ra $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p + 5)} u(p).$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p + 2}{(p + 1)(p + 5)} \cdot \frac{1}{p} \right] = \frac{2}{5}.$$

Từ hình 6-9 qua một trong ba phương pháp chuyển từ hệ liên tục sang hệ rời rạc, ta có phương trình trạng thái liên tục sau đây:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (6-62)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (6-63)$$

và hệ phương trình trạng thái rời rạc là:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6T & -5T \\ T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(i) \quad (6-64)$$

Thực hiện biến đổi Z phương trình sai phân trạng thái (6-64) ta được phương trình ảnh Z với điều kiện đầu triệt tiêu:

$$\begin{bmatrix} Z-1+6T & 5T \\ -T & Z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(Z) \\ x_2(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(Z) \quad (6-65)$$

Biến đổi tiếp ta nhận được ảnh $x_1(Z)$ và $x_2(Z)$:

$$\begin{bmatrix} x_1(Z) \\ x_2(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{(Z-1)(Z-1+6T)+5T^2} \cdot \begin{bmatrix} Z-1 & -5T \\ T & Z-1+6T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} u(Z).$$

Biết $u(t) = 1(t) \rightarrow L\{u(t)\} = \frac{1}{p}$ và $Z\{u(i)\} = \frac{Z}{Z-1}$.

Để tính $x_1(\infty)$ và $x_2(\infty)$ ta áp dụng công thức (6-54):

$$\begin{cases} x_1(\infty) = \lim_{Z \rightarrow 1} (Z-1) \cdot x_1(Z) = 0 \\ x_2(\infty) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (6-66)$$

Lấy kết quả (6-66) thế vào công thức (6-63) ta có:

$$y(\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \quad (6-67)$$

Kết quả (6-67) tính theo biến đổi Z hệ rời rạc trùng với kết quả đã tính ở trên $y(\infty) = \frac{2}{5}$.

6-4. HÀM TRUYỀN ĐẠT HỆ THỐNG XUNG SỐ

Phần trên ta đã xét mô tả toán học hệ xung – số bằng phương trình trạng thái. Ở đây ta xét mô tả toán học hệ thống này theo hàm truyền đạt rời rạc.

1- Xác định hàm truyền đạt theo phương trình sai phân

Giả sử ta biết được phương trình sai phân hệ thống điều khiển rời rạc có dạng sau:

$$\begin{aligned} a_0 y(i + n) + a_1 y(i + n - 1) + \dots + a_n y(i) = \\ = b_0 u(i + m) + b_1 u(i + m - 1) + \dots + b_m u(i) \end{aligned} \quad (6-68)$$

Với điều kiện đầu triệt tiêu, nhờ công thức biến đổi Z của hàm chuyển dịch $Z\{f(i + m)\} = Z^m F(Z)$, từ (6-68) ta có phương trình đại số theo biến Z sau:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n Y(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m) u(z). \quad (6-69)$$

Tương tự hệ liên tục ta định nghĩa hàm truyền đạt hệ thống xung – số là $W(Z)$, bằng tỷ số lượng ra và lượng vào theo biến số Z:

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{u(Z)} = \frac{b_0 Z^m + b_1 Z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (6-70)$$

Nếu hệ thống được mô tả bởi phương trình trạng thái dạng ma trận:

$$x(i + 1) = A_d x(i) + B_d u(i) \quad (6-71)$$

Thực hiện biến đổi Z phương trình (6-71):

$$Z.X(Z) - Z.X(0) = A_d.X(Z) + B_d.u(Z) \quad (6-72)$$

Hay:

$$X(Z) = (Z.I - A_d)^{-1} B_d U(Z) + (Z.I - A_d)^{-1} Z.X(0) \quad (6-73)$$

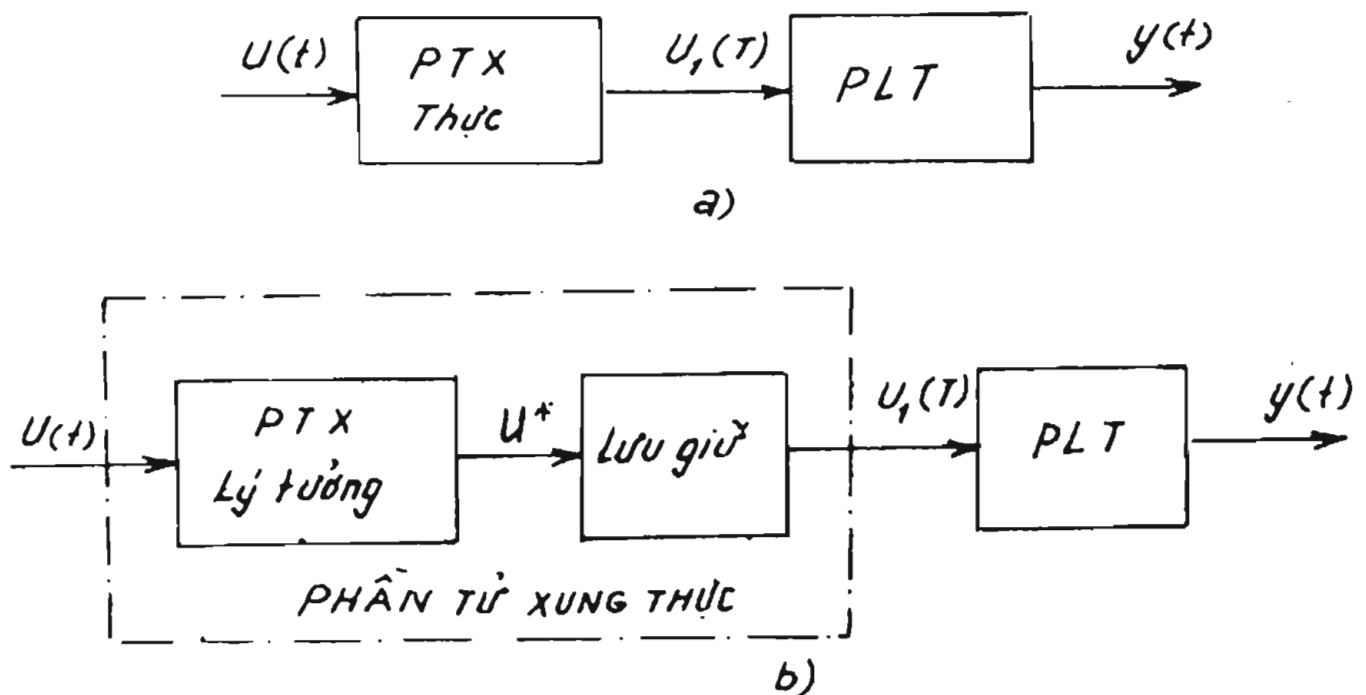
Biến đổi Z của phương trình ra:

$$y(i) = C_d \cdot x(i) \quad (6-74)$$

với điều kiện $x(0) = 0$, hàm truyền đạt ma trận:

$$W_{yu}(Z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = C_d(Z.I - A_d)^{-1} \cdot B_d \quad (6-75)$$

trong đó I là ma trận đơn vị.



Hình 6-10.

2. Xác định hàm truyền đạt rời rạc theo hàm truyền đạt phần liên tục.

Hệ thống xung-số khi có một phần tử tạo xung (ký hiệu PTX) nối tiếp với một phần liên tục (ký hiệu PLT) vẽ trên hình 6-10a.

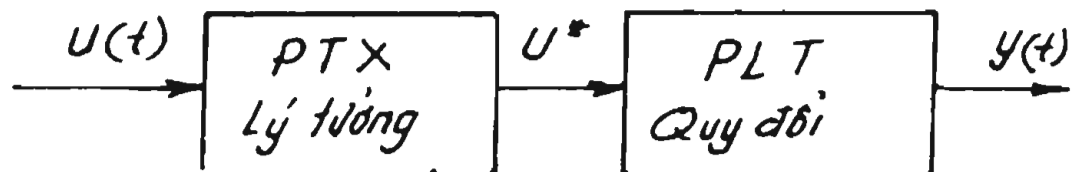
Về phương diện toán học: Phần tử xung thực (PTX) có thể tách thành hai phần: Một là phần tử xung lý tưởng và một nửa là phần tử lưu giữ (nó có tác dụng định hình lại dạng xung thực ở dạng PTX lý tưởng).

– Phần tử xung lý tưởng, có khi còn gọi là phần tử xung delta (Delta Impulse Sampler.) Đầu vào PTX lý tưởng là hàm liên tục $u(t)$ còn đầu ra của nó là dãy xung dạng hàm ốt (hàm Dirac) mà diện tích các xung ra tỷ lệ với biên độ tín hiệu vào $u(t)$ tại từng thời điểm rời rạc cách nhau một khoảng với chu kỳ cát mẫu T .

– Phần tử *lưu giữ* có đầu vào là u^* dạng xung $\delta(t)$ còn đầu ra của nó là các xung thực

Phương pháp phân tích hệ thống về sau, ta sẽ ghép phần tử lưu giữ (LG) với phần liên tục và tạo thành một phần liên tục quy đổi (PLTQD). Việc tách và ghép theo cách vừa trình bày chỉ tồn tại ở phương diện

phân tích toán học. Khi đó ta có sơ đồ tương đương vẽ trên hình 6-11.



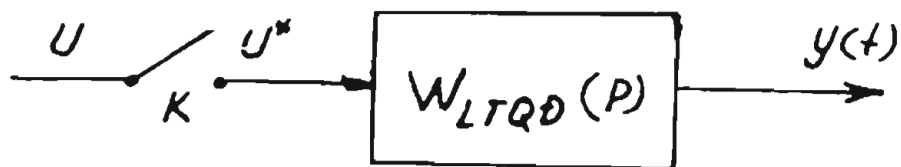
Hình 6-11.

Đối với phần tử liên tục quy đổi sẽ gồm nối tiếp phần tử LG mô tả bởi hàm truyền đạt liên tục $W_{LG}(p)$ và PLT có $W_{LT}(p)$.

Khi đó hàm truyền đạt PLTQD, ký hiệu $W_{LTQD}(p)$:

$$W_{LTQD}(p) = W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p) \quad (6-76)$$

Sơ đồ hình 6-11, đơn giản ta có thể biểu diễn bằng cấu trúc trên hình 6-12 với khóa ngắt K



Hình 6-12.

đặc trưng cho phần tử xung lý tưởng (δ).

Đối với phần tử LG, tùy thuộc vào dạng xung thực tế của PTX mà $W_{LG}(p)$ có dạng khác nhau.

Ví dụ 6-6. Cho tín hiệu ra phần tử xung PTX thực tế là một xung chữ nhật có biên độ bằng 1 và độ rộng xung τ , vẽ trên hình 6-13. Xung chữ nhật $u(t)$ có thể biểu diễn bằng tổng đại số hai hàm: $1(t)$ và $-1(t - \tau)$:

$$u_1(t) = 1(t) - 1(t - \tau) \quad (6-77)$$

Phần tử lưu giữ LG có tín hiệu vào là dạng hàm $\delta(t)$ nên biến

đổi Laplace của nó: $u^*(p) = 1$ Tín hiệu ra $u_1(t)$ của phân tử LG có ảnh Laplace.

$$u_1(p) = L\{1(t) - 1(t - \tau)\} = L\{1(t)\} - L\{1(t - \tau)\}$$

$$u_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} = (1 - e^{-p\tau}) \frac{1}{p} \quad (6-78)$$

trong đó $\tau = \gamma T$,

γ : hệ số tỷ lệ $0 \leq \gamma \leq 1$;

T : chu kỳ cắt mẫu,

τ : độ rộng xung chữ nhật.

Hàm truyền đạt phân tử LG là $W_{LG}(p)$:

$$W_{LG}(p) = \frac{u_1(p)}{u^*(p)} = (1 - e^{-\gamma T p}) \cdot \frac{1}{p} \quad (6-79)$$

Phần liên tục có hàm truyền đạt $W_{LT}(p)$

Phần liên tục quy đổi gồm nối tiếp phân tử LG và PLT:

$$W_{LTQD}(p) = W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p) = (1 - e^{-\gamma T p}) \frac{1}{p} W_{LT}(p) \quad (6-80)$$

Tín hiệu ra theo biến đổi Z của hệ hở là:

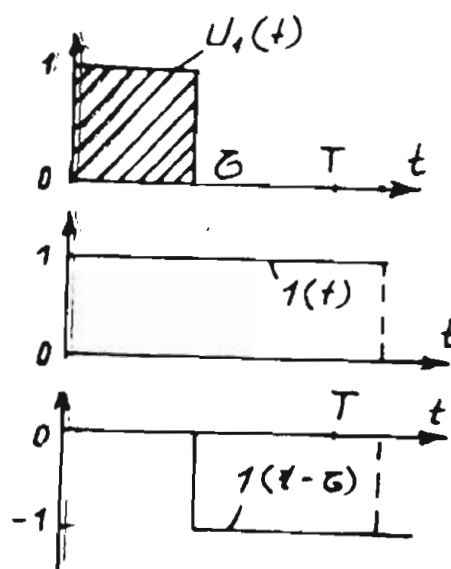
$$Y(z) = Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} \cdot u(z),$$

trong đó:

$$Y(z) = Z\{y(iT)\}$$

$$u(z) = Z\{u(iT)\}$$

$$Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} = Z\{f(iT)\},$$



Hình 6-13.

với $f(t) = L^{-1}\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\}$.

Từ $f(t)$, chuyển sang $f(iT)$ và tìm được $F(z) = Z\{f(iT)\}$

$F(z)$, chính là $W_{LTQD}(z)$.

Với xung dạng chữ nhật ta tính được W_{LG} theo (6-79). Phần tử lưu giữ kiểu này còn được gọi là lưu giữ cấp không (Zero Order Hold).

Ví dụ 6-7. Hãy xác định hàm truyền đạt theo biến đổi Z là $W(z)$. Khi biết hàm truyền đạt theo biến đổi p :

$$W(p) = \frac{a}{p(p+a)} = \frac{Y(p)}{u(p)}$$

Dựa vào phép biến đổi ngược Laplace ta có:

$$y(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}\right\}$$

$$= (1 - e^{-at}) \cdot u(t).$$

Khi $u(t) = 1$ thì:

$$\begin{cases} y(iT) = 1 - e^{-aiT} & \text{với } i \geq 0 \\ y(iT) = 0 & \text{với } i < 0 \end{cases}$$

Biến đổi Z của $y(iT)$ là $W(z)$

$$W(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - e^{-aiT}) \cdot Z^{-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} Z^{-i} - \sum_{i=0}^{\infty} e^{-aiT} \cdot Z^{-i}$$

$$\frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot Z^{-1}}$$

$$W(z) = \frac{Z^{-1} \cdot (1 - e^{-aT})}{(1 - Z^{-1}) \cdot (1 - e^{-aT} \cdot Z^{-1})} \quad \text{với } |Z| > 1.$$

Trong công thức (6-79), khi $\gamma = 1$ ta có: $W_{LG}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$

$$\text{Do đó: } Z\{w_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} = Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p} - e^{-pT} \frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}.$$

$$\text{Nếu đặt } f_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\} \text{ thì } L^{-1}\left\{\frac{e^{-pT} \cdot W_{LT}(p)}{p}\right\} = f_1(t - T)$$

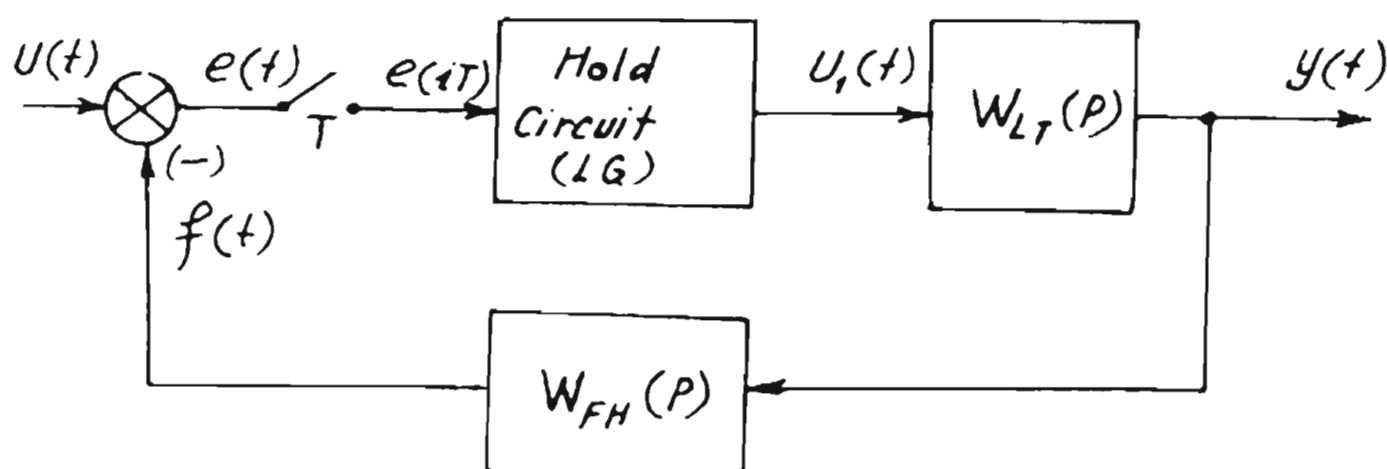
$$\text{Do đó: } Z\left\{e^{-pT} \frac{W_{LT}(p)}{p}\right\} = Z\{f_1(iT - T)\} = Z^{-1} \cdot Z\{f_1(iT)\} = Z^{-1} \cdot Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}$$

Vậy:

$$Z\{W_{LG}(p) W_{LT}(p)\} = (1 - Z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\} \quad (6-81)$$

3. Hàm truyền đạt của hệ thống xung - số kín

Ta xét hệ thống rời rạc cơ bản vẽ trên hình 6-14.



Hình 6-14.

Ta gọi mạch lưu giữ bậc không (Zero-Order Hold) là mạch mà trong khoảng thời gian rời rạc T , giá trị hàm rời rạc bằng hằng số như vẽ trên hình 6-15.

Hàm truyền đạt mạch LG ta đã tính được theo công thức (6-79).

$$W_{LG}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

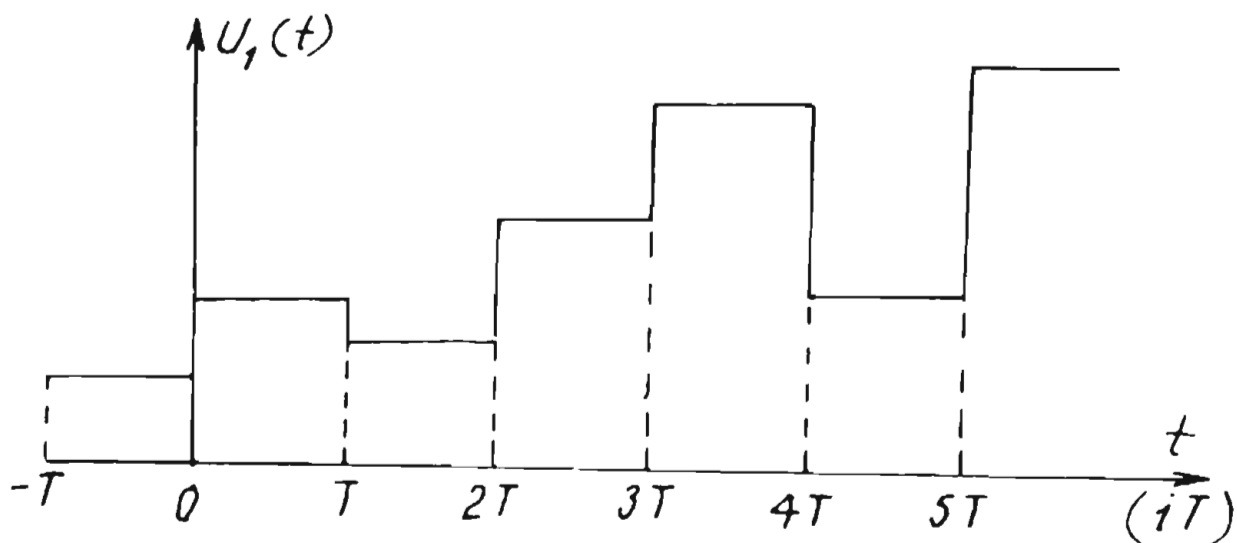
Từ sơ đồ hình 6-13 ta xác định:

$$Y(z) = Z\{W_{LG}(p) W_{LT}(p)\} E(z)$$

$$F(z) = Z\{W_{LG}(p) W_{LT}(p) W_{FH}(p)\} E(z) \quad (6-82)$$

trong đó:

$$\begin{cases} F(z) = Z\{f(iT)\} \\ E(z) = Z\{e(iT)\} \\ e(iT) = u(iT) - f(iT) \end{cases} \quad (6-83)$$



Hình 6-15.

Thực hiện biến đổi Z ta có:

$$E(z) = u(z) - F(z). \quad (6-84)$$

Phối hợp hai biểu thức (6-82) và (6-84) ta được:

$$\frac{E(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 + Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p) \cdot W_{FH}(p)\}} \quad (6-85)$$

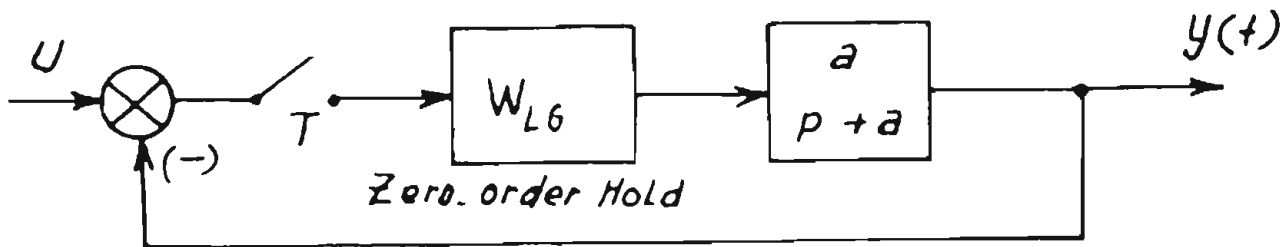
Hàm truyền đạt hệ kín $W_k(z)$ là:

$$W_k(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\}}{1 + Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p) \cdot W_{FH}(p)\}} \quad (6-86)$$

Ví dụ 6-8. Cho hệ thống xung số vẽ trên hình 6-16. Hãy xác định hàm truyền đạt hệ kín. Biết rằng ~~xung ra của~~ phần tử xung có

dạng chữ nhật (phần tử LG là Zero-order Hold). Phần liên tục quy đổi

$$W_{LTQD}(p) = W_{LG}(p) \cdot \frac{a}{p + a}$$



Hình 6-16.

Vì xung chữ nhật nên:

$$W_{LG}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

$$\text{Do đó: } y(t) = L^{-1}\{W_{LTQD}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{a}{p + a}\right\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + a}\right] \cdot (1 - e^{-pT})\right\}$$

$$y(t) = (1 - e^{-aT}) \cdot u(t) - (1 - e^{-a(t-T)}) \cdot u(t - T)$$

Hàm rời rạc:

$$y(iT) = (1 - e^{-aiT}) \cdot u(iT) - (1 - e^{-a(i-1)T}) \cdot u(iT - T)$$

$$\text{Do đó: } W_{LTQD}(z) = Y(z) = Z\{y(iT)\}$$

$$W_{LTQD}(z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot Z^{-1}} \cdot Z^{-1} \left(\frac{1}{1 - Z^{-1}} \right) - Z^{-1} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot Z^{-1}} \right) \cdot 1$$

$$W_{LTQD}(z) = \frac{Z^{-1}(1 - e^{-aT})}{(1 - e^{-aT} \cdot Z^{-1})} \quad (6-87)$$

Hàm truyền hệ kín là:

$$W_k(Z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{W_{LTQD}(p)\}}{1 + Z\{W_{LTQD}(p)\}} \quad (6-88)$$

$$W_k(z) = \frac{(1 - e^{-aT}) \cdot Z^{-1}}{1 + (1 - 2e^{-aT}) \cdot Z^{-1}} \quad (6-89)$$

6-5. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG XUNG-SỐ

Tương tự như trong hệ thống liên tục, một quá trình điều khiển trong hệ thống xung - số gồm hai quá trình: xác lập và quá độ. Nghiệm riêng phương trình sai phân bậc n đặc trưng cho quá trình quá độ:

$$a_0 \cdot y(i+n) + a_1 y(i+n-1) + \dots + a_n \cdot y(i) = b_0 u(i) \quad (6-90)$$

Từ hàm truyền đạt hệ hống kín theo biến đổi Z :

$$W_k(z) = \frac{Y(z)}{u(z)}$$

$$Y(z) = W_k(z) \cdot u(z). \quad (6-91)$$

Từ (6-91) ta xác định được phương trình đặc tính dạng:

$$a_0 \cdot Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_{n-1} Z + a_n = 0 \quad (6-92)$$

trong đó: $Z = e^{pT} = e^{(\alpha + j\omega)T} = e^{\alpha T} \cdot e^{j\omega T}$

$$Z = e^{\alpha T} (\cos \omega T + j \sin \omega T). \quad (6-93)$$

Qua biểu thức (6-93) thành phần $(\cos \omega T + j \sin \omega T)$ luôn có modun giới hạn bằng 1. Do đó modun của Z là:

$$|Z| = e^{\alpha T} \quad (6-94).$$

Từ (6-94) ta thấy:

$$\alpha > 0, |Z| > 1$$

$$\alpha = 0, |Z| = 1. \quad (6-95)$$

$$\alpha < 0, |Z| < 1.$$

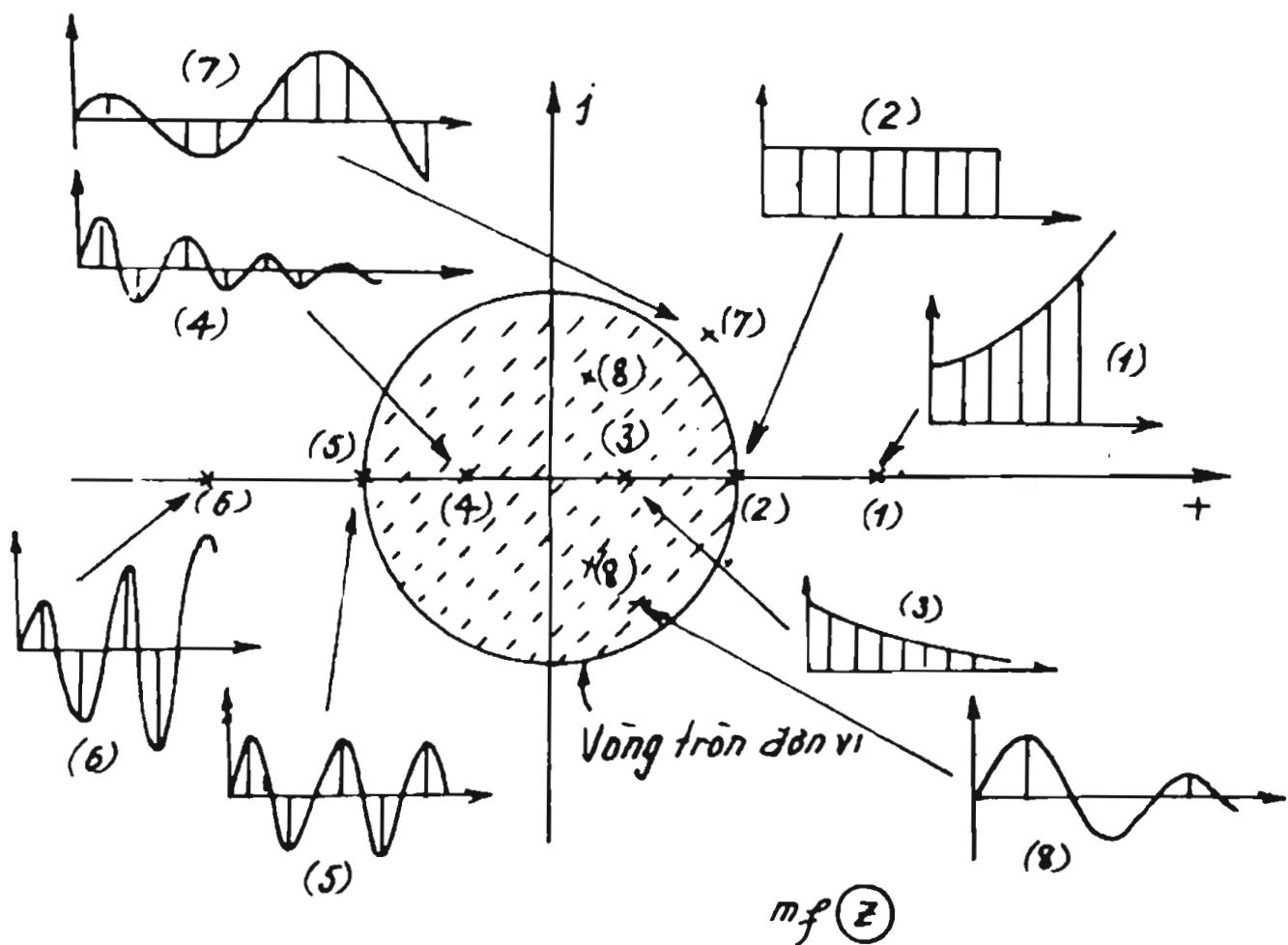
Ta có thể thấy quan hệ giữa mặt phẳng p và mặt phẳng Z từ (6-95):

Mặt phẳng p

Mặt phẳng z

$\alpha > 0$: Nửa bên phải mặt phẳng p $|Z| > 1$: Bên ngoài vòng tròn đơn vị
 $\alpha = 0$: Trục ảo $j\omega$ $|Z| = 1$: Đường tròn bán kính 1.
 $\alpha < 0$: Nửa bên trái mặt phẳng p $|Z| < 1$: Bên trong vòng tròn đơn vị.

Vì tại các nghiệm Z_i của phương trình đặc tính (6-92) từ (1)÷(8) tương ứng với các quá trình quá độ vẽ trên hình 6-17.



Hình 6-17.

Đối với hệ thống liên tục, trên mặt phẳng p , nếu phương trình đặc tính đều ở bên trái trục ảo $j\omega$ thì hệ sẽ ổn định. Tương ứng trong hệ thống xung – số nếu các nghiệm Z_i của phương trình đặc tính (6-92) ở trong vòng tròn đơn vị thì hệ sẽ ổn định.

Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz cho hệ liên tục chỉ áp dụng cho mặt phẳng p . Muốn sử dụng tiêu chuẩn đại số này (kể cả tiêu chuẩn

Routh), ta phải chuyển được mặt phẳng Z về mặt phẳng v tương đương. Muốn vậy, ta đổi biến Z thành v :

$$Z = \frac{v + 1}{v - 1} \quad (6-96)$$

Qua phép biến đổi Z thành v , tương ứng các

nghiệm Z_1 nằm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng Z (mp Z) trên hình 6-17 thì các nghiệm v_1 trên mặt phẳng v trên hình 6-18 sẽ nằm bên trái trục ảo j . Ví dụ có nghiệm v_1 nằm bên trái trục ảo. Ta xét các véc tơ tương ứng sau:

$$\overline{OP} = v_1; \overline{OQ} = v_1 + 1; \overline{OR} = v_1 - 1$$

$$\text{Hiển nhiên } |\overline{OR}| > |\overline{OQ}| \text{ tức là } Z_1 = \frac{v + 1}{v - 1} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} < 1.$$

Rõ ràng $|Z_1| < 1$, nghĩa là ứng với v_1 ở bên trái mp v sẽ tương ứng với nghiệm Z_1 nằm trong vòng tròn đơn vị mp Z .

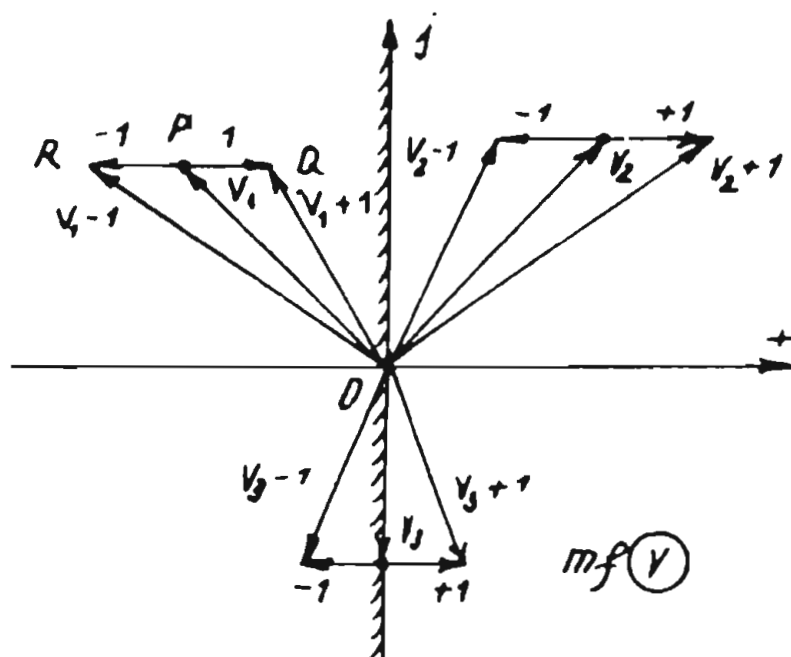
Ví dụ 6-9. Xét ổn định cho hệ thống xung – số sau đây: phần tử xung tạo ra xung chữ nhật còn phần liên tục là một khâu quán tính bậc một như đã vẽ trên hình 6-16.

Theo kết quả đã tính ở (6-88) và (6-89) ta có:

$$W_k(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{(1 - e^{-aT}).Z^{-1}}{1 + (1 - 2e^{-aT}).Z^{-1}}$$

Phương trình đặc tính của hệ thống xung – số này là:

$$1 + (1 - 2e^{-aT}).Z^{-1} = 0$$



Hình 6-18.

Hay $Z + (1 - 2.e^{-aT}) = 0$

Dạng ký hiệu chung: $a_0 Z + a_1 = 0$,

trong đó: $a_0 = 1$ còn $a_1 = 1 - 2.e^{-aT}$

Đổi biến $Z = \frac{v+1}{v-1}$ ta được:

$$a_0 \cdot \frac{v+1}{v-1} + a_1 = 0 \rightarrow a_0 v + a_0 + a_1 v - a_1 = 0.$$

Hay là:

$$(a_0 + a_1)v + a_0 - a_1 = 0$$

$$A_0.v + A_1 = 0.$$

Điều kiện ổn định cần và đủ của hệ thống cấp một là

$$A_0 = a_0 + a_1 > 0$$

$$A_1 = a_0 - a_1 > 0$$

$$1 + (1 - 2.e^{-aT}) > 0 \rightarrow 2(1 - e^{-aT}) > 0$$

$$1 - (1 - 2e^{-aT}) > 0 \rightarrow 2.e^{-aT} > 0.$$

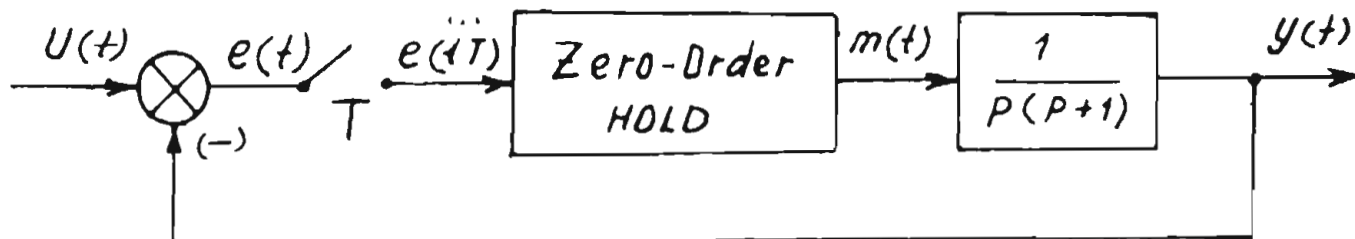
Muốn cho $A_0 > 0$ tức $1 - e^{-aT} > 0$ thì hai tham số a của đối tượng điều khiển và chu kỳ cắt mẫu T của phần tử xung sẽ ảnh hưởng đến tính ổn định của hệ thống. Ứng với một cặp giá trị a, T nào đó có thể làm cho $A_0 < 0$ và hệ thống sẽ mất ổn định. Đây là hệ xung – số cấp một. Trong lúc đó hệ liên tục cấp một luôn luôn ổn định.

6-6. TÍNH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG HỆ THỐNG XUNG-SỐ

Hệ liên tục ta xét các phương pháp tính toán quá trình quá độ nhờ phương pháp số. Đối với hệ xung – số ta cũng tiến hành tương tự. Sau đây ta sẽ trình bày hai phương pháp: không gian trạng thái và hàm truyền đạt rời rạc Z .

1. Phương pháp phương trình trạng thái

Cho hệ điều khiển xung vẽ trên hình (6-19)



Hình 6-19.

Phần tử tạo xung có dạng xung chữ nhật (Lưu giữ cấp không Z.O.H) Đối tượng điều khiển là phần liên tục có hàm truyền đạt

$$W_{LT}(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Từ sơ đồ ta có: $e(t) = u(t) - y(t)$

$$e(iT) = u(iT) - y(iT) \quad (6-98)$$

Phương trình trạng thái mô tả đối tượng điều khiển là:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} m(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (6-99)$$

Nghiệm của phương trình trạng thái (6-99) xác định theo công thức:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} m(0) d\tau \text{ với } 0 < t \leq T \\ y(t) = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (6-100)$$

$$\text{trong đó } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-101)$$

Khi $t = T$ ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= e^{AT} \mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(T) \mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}(\tau) \end{aligned}$$

Đổi biến $t = T - \tau \rightarrow$

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{At} dt = \int_0^T \Phi(t) dt$$

$$\Phi(T) = e^{AT}$$

Phương trình trạng thái phần liên tục ở dạng rời rạc là:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(i) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{m}(i) \\ \mathbf{y}(i) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}(i), \end{cases} \quad (6-102)$$

trong đó:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_d = \Phi(T) \\ \mathbf{B}_d = \int_0^T \Phi(t) \cdot \mathbf{B} \cdot dt \\ \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \end{cases}$$

Mã trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$ tính theo biến đổi Laplace ngược:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

Ta tính $p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{bmatrix}$

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (p+1)p$$

$$\text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}$$

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_d = \Phi(T) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 1 - e^{-\tau} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix}$$

Phương trình trạng thái DTĐK ở dạng rời rạc là:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((i+1)T) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(iT) + \mathbf{B}_d e(iT) \\ y(iT) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}(iT) \end{aligned}$$

Hay là:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1((i+1)T) \\ \mathbf{x}_2((i+1)T) \\ y(iT) = \mathbf{x}_2(iT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(iT) \\ \mathbf{x}_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} e(iT) \quad (6-103)$$

Lấy $e(iT) = u(iT) - y(iT)$ thay thế vào (6-103) ta được:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1((i+1)T) \\ \mathbf{x}_2((i+1)T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(iT) \\ \mathbf{x}_2(iT) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} [u(iT) - \mathbf{x}_2(iT)] \\ y(iT) &= \mathbf{x}_2(iT) \end{aligned}$$

Dạng đơn giản hơn:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1((i+1)T) \\ \mathbf{x}_2((i+1)T) \\ y(iT) = \mathbf{x}_2(iT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T}-1 \\ 1-e^{-T} & 2-T-e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(iT) \\ \mathbf{x}_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ T-1+e^{-T} \end{bmatrix} u(iT) \quad (6-104)$$

Đây chính là phương trình trạng thái của hệ thống kín rời rạc.

Tiếp đến, ta sẽ xét đáp ứng của hệ thống với 3 giá trị chu kỳ cắt mẫu (Sampling periods) $T = 0,1; 1$ và 4 sec

Tín hiệu vào $u(iT) = 1; i = 0, 1, 2 \dots$

Điều kiện đầu: $x_1(0) = x_2(0) = 0$

– Với $T = 0,1$ ta được:

$$\begin{bmatrix} x_1(0,1.(i+1)) \\ x_2(0,1.(i+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,905 & -0,095 \\ 0,095 & 0,995 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0,1i) \\ x_2(0,1i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,095 \\ 0,005 \end{bmatrix}$$

$$y(0,1.i) = x_2(0,1.i)$$

với $i = 0, 1, \dots$ ta xác định được dãy $y(i)$:

$$\{y(0), y(0,1), y(0,2), \dots\} =$$

$$= \{0; 0,005; 0,019; 0,041; 0,071; 0,106; 0,146; \dots\}$$

– Với $T = 1$ ta được:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,368 & -0,632 \\ 0,632 & 0,632 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,632 \\ 0,368 \end{bmatrix}$$

Dãy $y(i)$ tương ứng là:

$$\{y(0); y(1); y(2), \dots\} =$$

$$= \{0; 0,368; 1; 1,399; 1,349; 1,147; 0,894; \dots\} \quad (6-105)$$

– Với $T = 4$ ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1(4(i+1)) \\ x_2(4.(i+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0183 & -0,98 \\ 0,98 & 2,02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(4i) \\ x_2(4i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,98 \\ 3,02 \end{bmatrix}$$

Dãy $y(i)$ tương ứng:

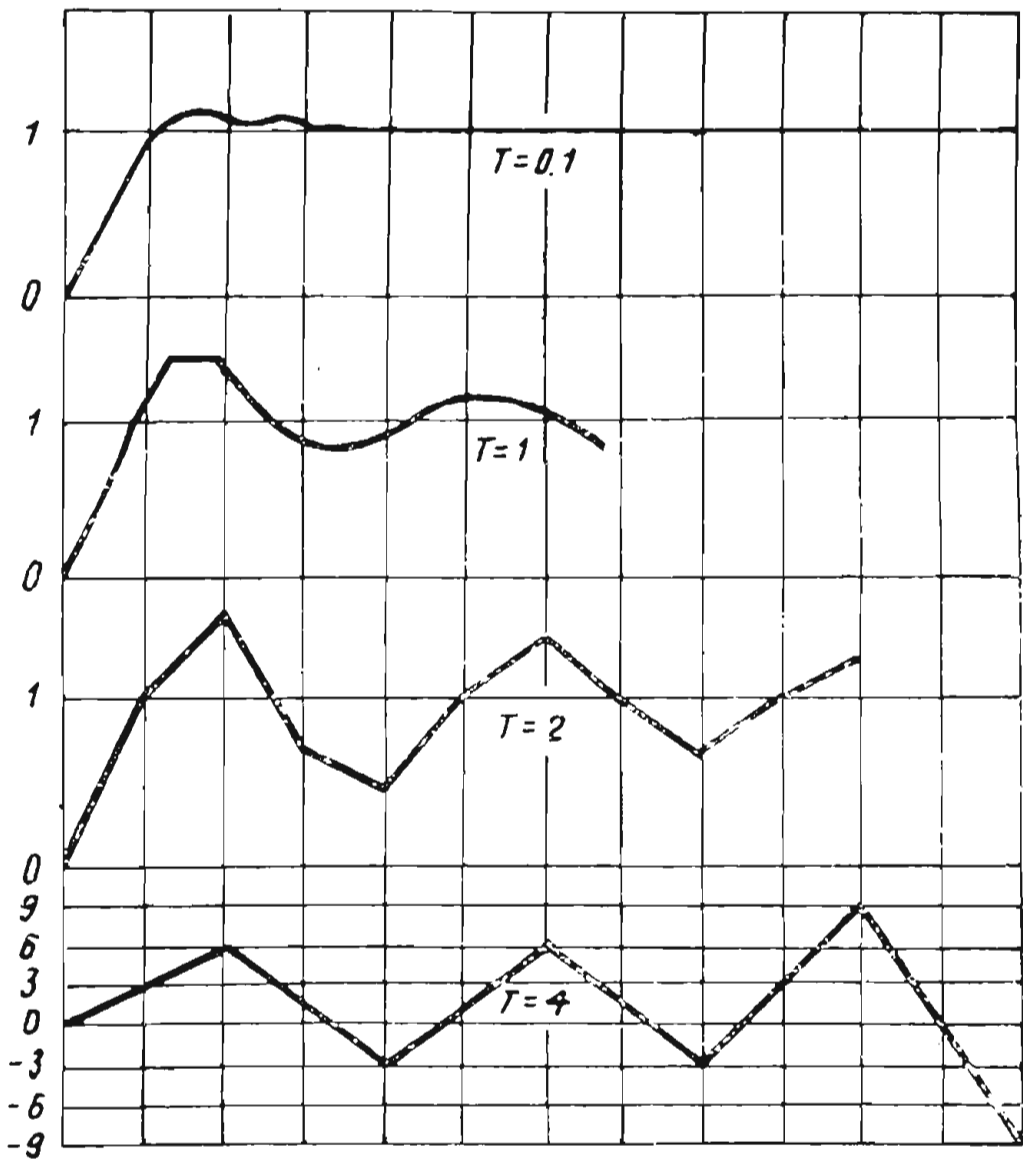
$$\{y(0); y(4); y(8); \dots\} =$$

$$= \{0; 3,02; -2,11; 5,34; -4,82; 8,6; -8,8; \dots\}$$

Đáp ứng của hệ với T khác nhau vẽ trên hình (6-20).

Với $T = 0.1; 1.0; T = 2.0$ hệ thống ổn định; còn với $T = 4$, hệ thống không ổn định.

Ở đây ta thấy rõ ràng chất lượng của hệ thống rời rạc phụ thuộc rất mạnh vào chu kỳ cắt mẫu T , thậm chí có thể làm hệ thống mất ổn định (trong lúc đó với hệ liên tục cấp hai, nó luôn luôn ổn định).



Hình 6-20.

2. Phương pháp biến đổi Z để tính quá trình quá độ

Ta xét lại ví dụ như đã vẽ trên hình 6-19 với chu kỳ cắt mẫu $T = 1$ s; Tín hiệu vào $u(t) = 1(t)$.

Theo công thức (6-86).

$$W_k(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{Z\{W_{LG}(p).W_{LT}(p)\}}{1 + Z\{W_{LG}(p).W_{LT}(p) W_{FH}(p)\}}$$

Ta tính

$$Y(z) = \frac{Z\{W_{LG}(p) \cdot \frac{1}{p(p+1)}\}}{1 + Z\{W_{LG}(p) \cdot \frac{1}{p(p+1)}\}} u(z) \quad (6-106)$$

Mặt khác theo công thức (6-81):

$$Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} = (1 - Z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Z\{W_{LG}(p) \cdot \frac{1}{p(p+1)}\} &= (1 - Z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\} \\ &= (1 - Z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right\} \\ &= (1 - Z^{-1}) \cdot [Z\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - Z\left\{\frac{1}{p}\right\} + Z\left\{\frac{1}{p+1}\right\}] \end{aligned}$$

Dựa vào bảng biến đổi Z ta có

$$Z\{W_{LG}(p) \cdot \frac{1}{p(p+1)}\} = (1 - Z)^{-1} \cdot \left[\frac{T \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{Z}{z-1} + \frac{Z}{z - e^{-T}} \right]$$

Với $T = 1$ ta có kết quả:

$$Z\{W_{LG}(p) \cdot \frac{1}{p(p+1)}\} = \frac{0,368 \cdot z + 0,264}{(Z-1)(Z-0,368)} \quad (6-107)$$

Với $u(t) = 1(t)$ ta có $u(z) = \frac{Z}{z-1}$

Vậy biến đổi z của tín hiệu ra $Y(z)$ là:

$$Y(z) = \frac{Z(0,368 \cdot Z + 0,264)}{(Z-1)(Z^2 - Z + 0,632)} \quad (6-108)$$

Từ (6-108) ta tìm được các điểm cực của hàm truyền là:

$$\begin{cases} Z = 1 \\ Z = 0,5 \pm j0,615 \end{cases}$$

Vì có hai điểm cực là số phức do đó dãy $y(iT)$ sẽ chứa cả thành phần dao động

Để tính $y(iT)$ ta khai triển (6-108) thành chuỗi lũy thừa của Z^{-1} dạng sau:

$$Y(z) = 0,368 Z^{-1} + 1,0 Z^{-2} + 1,399 Z^{-3} + 1,399 Z^{-4} + 1,147 Z^{-5} + 0,894 Z^{-6} + \dots \quad (6-109)$$

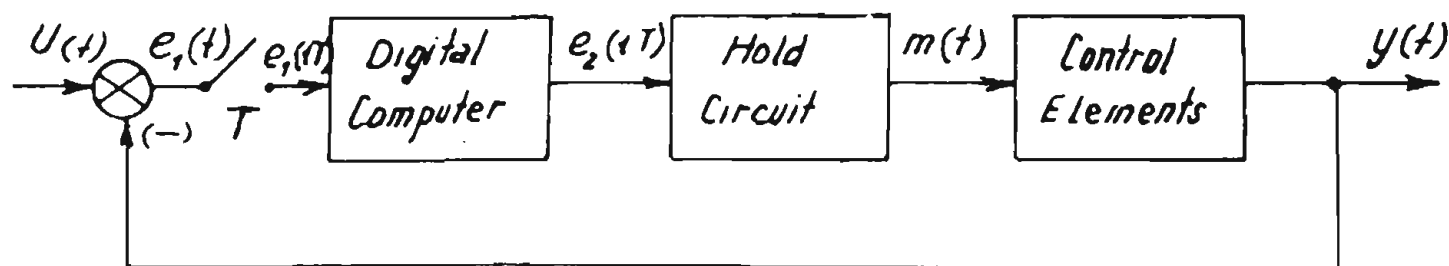
Từ (6-109) ta tìm được dãy $y(iT)$:

$$y(iT) = \{0,368; 1,0; 1,399; 1,399; 1,399; 1,147, 0,894; \dots\} \quad (6-110)$$

Kết quả (6-110) trùng với kết quả đã tính ở (6-105).

6-7. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG CÓ MÁY TÍNH SỐ

Sơ đồ hệ thống điều khiển có máy tính số (điển hình là máy vi tính) vẽ trên hình 6-21



Hình 6-21

Các hệ thống điều khiển có máy tính, đơn giản là bộ điều khiển số (Digital Controller) đang được sử dụng khá phổ biến trong các ngành kỹ thuật, công nghiệp. Lý thuyết điều khiển tự động từ 1970 trở về trước chưa chú ý các phương pháp phân tích và tổng hợp hệ thống có máy tính số. Trong suốt chương này ta đã đề cập đến hệ xung số, đó chính là cốt lõi cho việc nghiên cứu hệ thống có máy tính.

Phương trình của máy tính số là phương trình sai phân dạng:

$$e_2(iT) = b_0 e_1(iT) + b_1 e_1((i-1)T) + \dots + b_n e_1((i-n)T) - a_1 e_2((i-1)T) - a_2 e_2((i-2)T) - \dots - a_n e_2((i-n)T), \quad (6-111)$$

trong đó: $e_1(iT)$ là tín hiệu vào của máy tính số.

$e_2(iT)$ là tín hiệu ra của máy tính số.

iT : các thời điểm rời rạc với thời gian cắt mẫu T

Phương trình (6-111) có thể chuyển về dạng phương trình trạng thái rời rạc dạng tổng quát (ta gọi là quy hoạch trực tiếp: direct programming) sau đây:

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \\ \dots \\ x_n((i+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \\ \vdots \\ x_n(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e_1(iT) \quad (6-112)$$

$$e_2(iT) = [b'_1 \quad b'_2 \quad \dots \quad b'_n] \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \\ \vdots \\ x_n(iT) \end{bmatrix} + b_0 e_1(iT) \quad (6-113)$$

$$b'_j = b_j - b_0 \cdot a_j \text{ với } j = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ 6-10. Có phương trình sai phân sau:

$$y(i) = -2.y(i-1) + 0,5.y(i-2) - 0,2.y(i-3) + \\ + 0,5.u(i) - 0,4.u(i-1) + 0,1.u(i-2)$$

Tương ứng với các hệ số:

$$a_1 = 2 \quad ; \quad \text{và} \quad b_0 = 0,5$$

$$a_2 = -0,5 \quad ; \quad b_1 = -0,4$$

$$a_3 = 0,2 \quad ; \quad b_2 = 0,1.$$

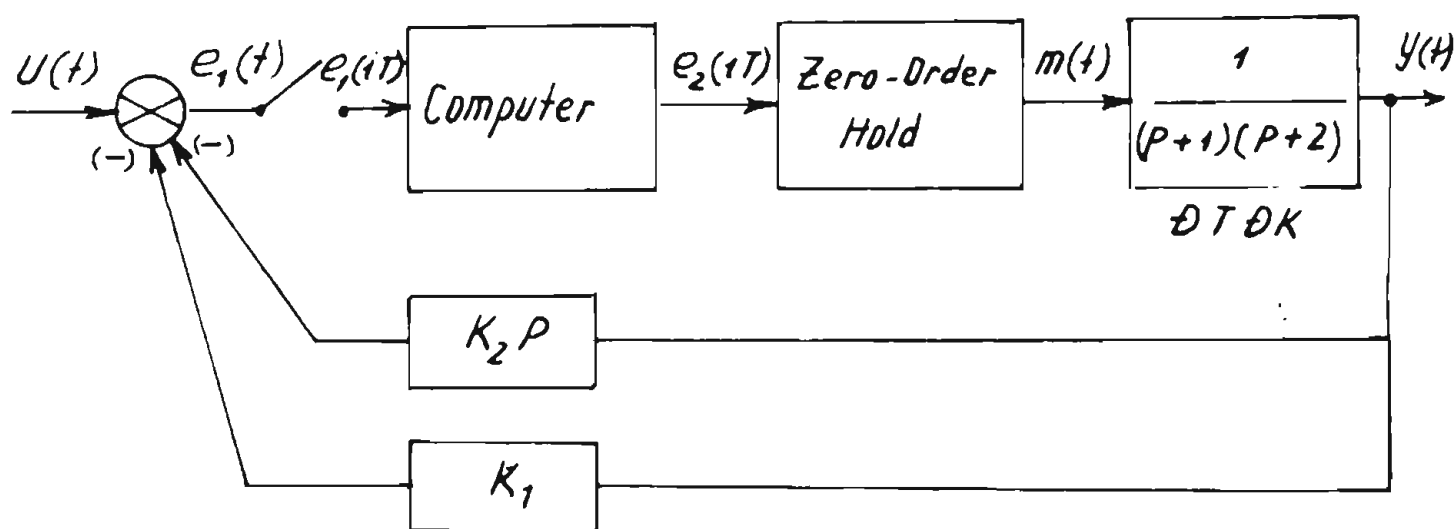
Theo (6-112) và (6-113) ta có phương trình trạng thái rời rạc là:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0,5 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(i)$$

$$y(i) = \begin{bmatrix} -1,4 & 0,35 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + 0,5 \cdot u(i)$$

Ví dụ 6-11. Cho sơ đồ điều khiển hệ thống bằng máy vi tính vẽ trên hình 6-22. Biết rằng phương trình sai phân mô tả luật điều khiển trong máy vi tính cho bởi phương trình sai phân sau:

$$e_2(iT) = 1,2 \cdot e_1(iT) - 0,4 \cdot e_1((i-1)T) - 0,25 \cdot e_2((i-1)T). \quad (6-114)$$



Hình 6-22.

Từ phương trình (6-114) ta có phương trình trạng thái sau:

$$\begin{cases} x_3((i+1)T) = -0,25 \cdot x_3(iT) & e_1(iT) \\ e_2(iT) = -0,1 \cdot x_3(iT) + 1,2 \cdot e_1(iT). \end{cases} \quad (6-115)$$

Phương trình trạng thái của đối tượng điều khiển liên tục tương ứng với hàm truyền đạt $W_{DT}(p) = 1/(p+1)(p+2)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot m(t) \quad (6-116)$$

$$y(t) = x_2.$$

Từ phương trình trạng thái liên tục (6-116) bằng các phương pháp đã nêu trên, ta có phương trình trạng thái rời rạc tương ứng:

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-T} + 2e^{-2T} & -2e^{-T} + 2e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} & 2e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-T} - e^{-2T} \\ \frac{1}{2}e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \end{bmatrix} \cdot m(iT)$$

Hai kênh phản hồi âm có hàm truyền k_1 và k_2p :

$$e_1(t) = u(t) - k_1 y(t) - k_2 \dot{y}(t) \quad (6-118)$$

Từ phương trình trạng thái đối tượng điều khiển (6-116) ta có

$$\begin{aligned} y(t) &= x_2 \\ \dot{y}(t) &= x_1 \end{aligned} \quad (6-119)$$

Phương trình (6-118) viết ở dạng rời rạc:

$$e_1(iT) = u(iT) - k_1 x_2(iT) - k_2 x_1(iT). \quad (6-120)$$

$$\text{Ta cũng nhận thấy:} \quad m(iT) = e_2(iT). \quad (6-121)$$

Bây giờ kết hợp các phương trình (6-115), (6-117), (6-120) và (6-121) ta xác định được phương trình trạng thái rời rạc hệ thống kín, trong đó riêng phương trình (6-117) viết lại dạng ký hiệu ma trận gọn hơn:

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot m(iT) \quad (6-122)$$

Từ (6-122) ta có phương trình trạng thái rời rạc của hệ kín có máy tính số:

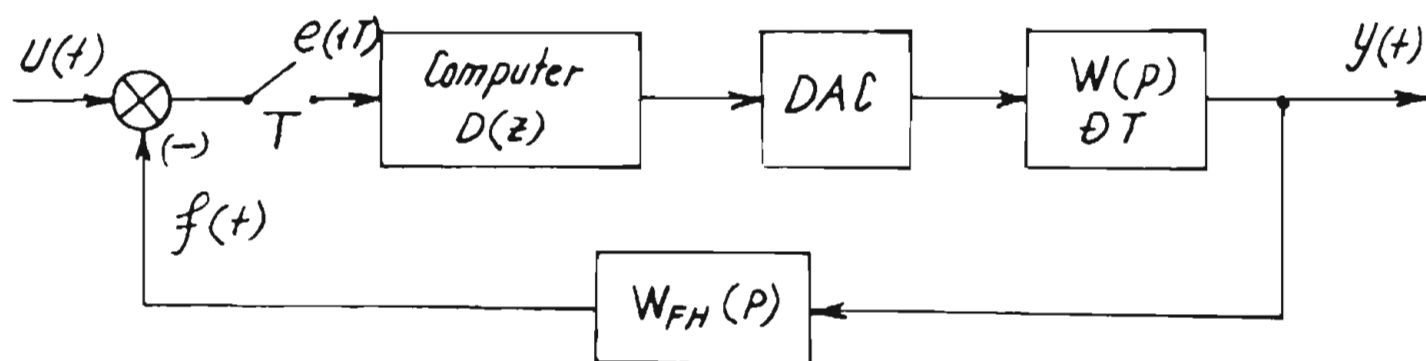
$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \\ x_3((i+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - 1,2b_1.k_2 & a_{12} - 1,2b_1.k_2 & -0,1.b_1 \\ a_{21} - 1,2b_2.k_2 & a_{22} - 1,2b_2.k_1 & -0,1b_2 \\ -k_2 & -k_1 & -0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \\ x_3(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,2b_1 \\ 1,2b_2 \\ 1 \end{bmatrix} .u(iT) \quad (6-123)$$

Từ phương trình (6-123) ta có thể tính và vẽ được các đáp ứng trạng thái $x_1(iT)$; $x_2(iT)$ và $x_3(iT)$ bằng máy tính.

Ngoài phương pháp vừa trình bày, ta có thể dựa vào cách tính hàm truyền đạt của máy tính số. Chẳng hạn ứng với phương trình sai phân (6-114) ta có thể xác định được hàm truyền đạt rời rạc của máy tính số:

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} \quad (6-124)$$

Đối tượng điều khiển là phần tử liên tục có hàm truyền đạt $W_{DT}(p)$.



Hình 6-23.

Từ hình 6-23, biến đổi Z của tín hiệu ra là $Y(z)$:

$$Y(z) = D(z).z\{W_{LG}(p).W_{DT}(p)\}.E(z). \quad (6-125)$$

Tương tự tín hiệu phản hồi về $f(t)$:

$$F(z) = D(z)Z\{W_{LG}(p).W_{DT}(p).W_{FH}(p)\}.E(z) \quad (6-126)$$

$$E(z) = u(z) - F(z). \quad (6-127)$$

Kết hợp (6-126) và (6-127) ta tính được:

$$E(z) = \frac{u(z)}{1 + D(z) \cdot Z\{W_{LG}(p).W_{DT}(p).W_{FH}(p)\}} \quad (6-128)$$

Thế (6-128) vào (6-125) ta có hàm truyền đạt của hệ thống kín có máy tính số là:

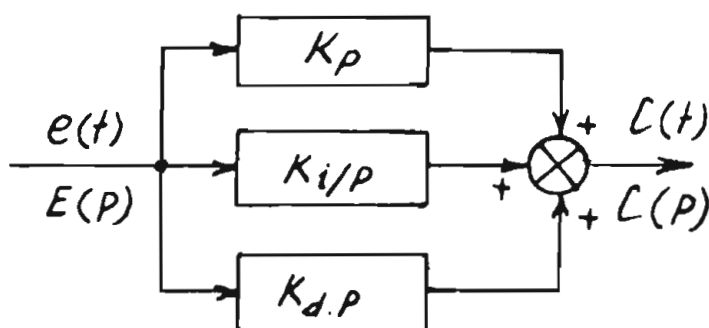
$$W_K(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{D(z).Z\{W_{LG}.W_{DT}(p)\}}{1 + D(z).Z\{W_{LG}(p).W_{DT}(p).W_{FH}(p)\}} \quad (6-129)$$

Từ (6-129) ta có thể xét được ổn định hệ thống và tính được quá trình quá độ.

Khi sử dụng máy tính để điều khiển quá trình, ta có thể thực hiện được nhiều thuật toán điều khiển phức tạp. Đơn giản nhất ta cũng có thể sử dụng máy tính để thực hiện một bộ điều khiển số, P.I.D – Bộ điều khiển tỷ lệ, tích phân, vi phân.

6-8. BỘ ĐIỀU KHIỂN PID SỐ

Bộ điều khiển P.I.D (Proportional-Integral-Derivative) liên tục vẽ



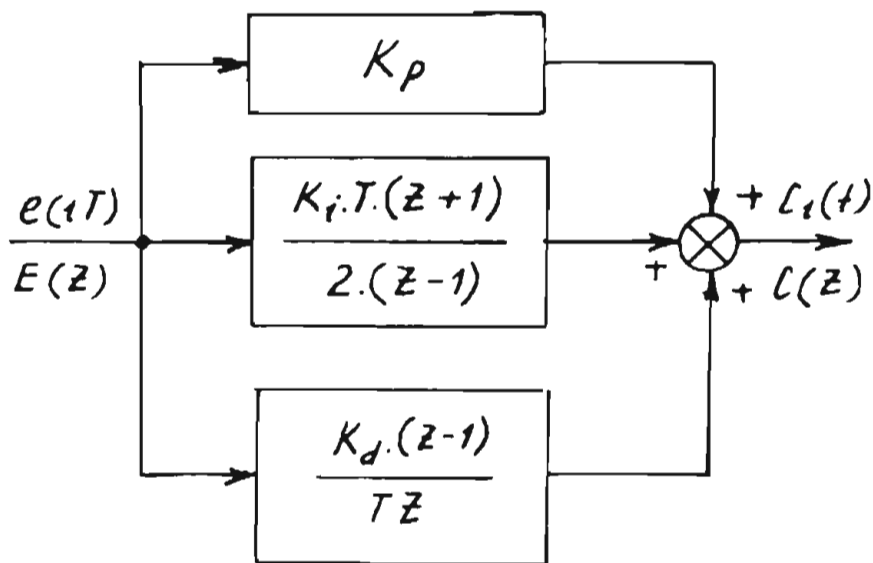
trên hình 6-24, gồm ba kênh song song: tỷ lệ, tích phân và vi phân.

– Khâu tỷ lệ có hệ số truyền K_p

– Khâu tích phân K_i/p

– Khâu vi phân $K_d.p$.

Hình 6-24.



Hình 6-25.

Đối với khâu tích phân số ta có nhiều cách để thực hiện, ví dụ phương pháp tích phân hình thang (số Tustin):

$$\frac{K_i \cdot T \cdot (Z + 1)}{2(Z - 1)}$$

Còn khâu vi phân (đạo hàm của $e(t)$) tại $t = T$ có

thể xấp xỉ bởi:

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=T} \approx \frac{e(iT) - e((i-1)T)}{T}$$

Biến đổi Z sẽ được:

$$K_d \cdot \frac{z - 1}{T \cdot Z}$$

Hàm truyền đạt PID số được vẽ trên hình 6-25:

$$\begin{aligned} W_{PID}(z) &= \left(K_p + \frac{K_i T (Z + 1)}{2(Z - 1)} + \frac{K_d (Z - 1)}{T \cdot Z} \right) \quad (6-130) \\ &= \frac{(K_i T^2 + 2K_d + 2K_p T)Z^2 + (K_p T^2 - 2K_p T - 4K_d)Z + 2K_d}{2 \cdot T \cdot Z(Z - 1)} \end{aligned}$$

Ví dụ 6-12. Cho hệ thống điều khiển biết Đ.T.Đ.K có hàm truyền đạt:

$$W_{DT}(p) = \frac{10}{(p + 1)(p + 2)}$$

biết phần tử tạo xung dạng chữ nhật có $W_{LG}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$

Theo công thức (6–81):

$$Z\{W_{LG}(p).W_{DT}(p)\} = (1 - Z^{-1}).Z\left\{\frac{W_{DT}(p)}{p}\right\}.$$

Tương tự như đã tính với kết quả (6–107), ở đây ta có:

$$Z\{W_{LG}(p). \frac{10}{(p+1)(p+2)}\} = (1 - Z^{-1}).Z\left\{\frac{10}{p(p+1)(p+2)}\right\} = W_{LTQD}(z)$$

Vậy:

$$W_{LTQD}(z) = \frac{0,0453 (z + 0,904)}{(Z - 0,905)(Z - 0,819)}$$

Ứng với $T = 0,1$ s

Hàm truyền đạt mạch kín khi không có bộ PID là:

$$W_K(z) = \frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{0,0453(z + 0,904)}{Z^2 - 1,679.Z + 0,782} \quad (6-131)$$

– Nếu hệ thống có thêm $W_{PID}(z)$ với các tham số:

$$K_p = 1; K_i = 0,997 \text{ và } K_d = 0$$

Hàm truyền đạt bộ điều khiển PID là:

$$W_{PID}(z) = 1,0499. \frac{Z - 0,905}{Z - 1} \quad (6-132)$$

Lúc đó hàm truyền đạt cả hệ hở (bao gồm bộ PID, bộ tạo xung W_{LG} và Đ.T.ĐK):

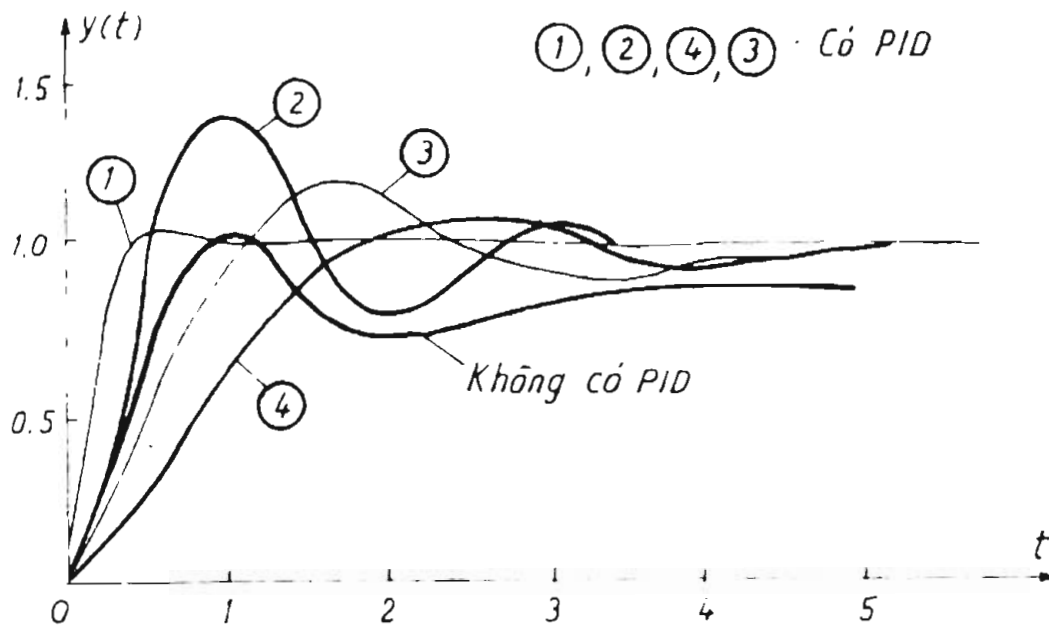
$$W_{PID}(z).W_{LTQD}(z) = \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 1)(z - 0,819)} \quad (6-133)$$

Ta có thể xác định được hàm truyền đạt cả hệ thống số kín ứng với bộ điều khiển PI (vì $K_d = 0$). Các kết quả tính toán vẽ trên hình 6–26.

Khi có PID:

$$1 \quad K_p = 1,45; K_i = 1; K_d = 0,43$$

- 2 $K_p = 1; K_i = 0,997; K_d = 0$
 3 $K_p = 0,5; K_i = 0,498; K_d = 0$
 4 $K_p = 0,25; K_i = 0,249; K_d = 0$



Hình 6-26.

6-9. TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC CỦA HỆ XUNG-SỐ

Khái niệm về tính điều khiển được và quan sát được lần đầu tiên do Kalman nêu ra.

Giả sử biết phương trình trạng thái của hệ xung số sau:

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d \cdot x(i) + B_d u(i) \\ y(i) = C_d \cdot x(i), \end{cases} \quad (6-134)$$

trong đó x là vectơ n chiều; A_d : ma trận $n \times n$ chiều.

1. Tính điều khiển được

Một hệ thống được gọi là điều khiển được nếu ta có thể tìm được một véc tơ điều khiển $u(i)$ để chuyển được hệ thống từ một trạng

thái ban đầu bất kỳ đến một trạng thái cuối bất kỳ trong một khoảng thời gian giới hạn.

Bởi vậy ta cần phải tìm điều kiện để xác định được tác động điều khiển nhằm chuyển hệ thống từ một trạng thái $x(0)$ đến trạng thái cuối $x(n)$ đã cho.

Ta viết lại phương trình (6-134):

$$\begin{cases} x(1) = A_d x(0) + B_d u(0) \\ x(2) = A_d x(1) + B_d u(1) = A_d^2 x(0) + A_d B_d u(0) + B_d u(1) \\ \dots \\ x(n) = A_d^n x(0) + A_d^{n-1} B_d u(0) + \dots + B_d u(n-1). \end{cases}$$

Hoặc là:

$$x(n) - A_d^n x(0) = [A_d^{n-1} B_d \quad A_d^{n-2} B_d \quad \dots \quad B_d] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} \quad (6-135)$$

Vì A_d , $x(0)$, $x(n)$ đã biết nên vế trái của phương trình (6-135) là xác định. Nghiệm duy nhất $u(i)$ chỉ tồn tại khi ma trận sau đây có hạng bằng n :

$$M = [A_d^{n-1} B_d \quad A_d^{n-2} B_d \quad \dots \quad B_d] \quad (6-136)$$

$$\text{Rank}(M) =$$

Khi đó ta nói hệ thống điều khiển được hoàn toàn.

Ví dụ 6-13. Cho hệ thống cấp hai sau đây:

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix} \cdot u(i)$$

$$y(i) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix},$$

trong đó $A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix}$; $B_d = \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix}$; $C_d = [1, 0]$

Theo tiêu chuẩn điều khiển được hoàn toàn của Kalman, ta tính:

$$M = [A_d B_d \quad B_d] \quad \text{với} \quad A_d B_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00361 \\ 0,00464 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } M = [A_d B_d \quad B_d] = \begin{bmatrix} 0,00361 & 0,00123 \\ 0,00464 & 0,00488 \end{bmatrix}$$

Vì $\det(M) \neq 0$ nên $\text{Rank}(M) = 2$.

Vậy hệ thống điều khiển được hoàn toàn.

2. Tính quan sát được

Hệ thống được gọi là quan sát được nếu theo các số liệu đo được ở đầu ra $y(i)$ ta có thể xác định được các trạng thái $x(i)$ của nó (các ước lượng trạng thái).

Từ phương trình ra $y(i) = C_d \cdot x(i)$ ta viết lại:

$$\begin{cases} y(0) = C_d \cdot x(0) \\ y(1) = C_d \cdot x(1) = C_d \cdot A_d \cdot x(0) \\ \dots \\ y(n-1) = C_d \cdot A_d^{n-1} \cdot x(0). \end{cases}$$

Hoặc viết cách khác với ký hiệu dấu phẩy cho chuyển vị:

$$[y'(0) \quad y'(1) \quad \dots \quad y'(n-1)] = x'(0) \cdot [C'_d \quad A'_d C'_d \quad \dots \quad (A')^{n-1} \cdot C'_d]. \quad (6-137)$$

Vì véc tơ $y(i)$ đã biết, nghiệm duy nhất $x(0)$ tồn tại chỉ khi ma trận sau:

$$N = [C'_d \quad A'_d C'_d \quad (A')^{n-1} \cdot C'_d]$$

Có hạng bằng n:

$$\text{Rank}(N) = n. \quad (6-138)$$

Ví dụ 6-14. Với số liệu đã cho ở ví dụ 6-13, ta sẽ xác định ma trận

$$N = [\ C'_d \quad A'_d C'_d \] ; \quad C_d = [\ 1 \quad 0 \] \rightarrow C'_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tính:} \quad [\ A'_d \cdot C'_d \] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,488 & 0,951 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,488 \end{bmatrix}$$

$$\text{vậy } N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0,488 \end{bmatrix}$$

$$\det(N) = 0,488 \neq 0 ; \quad \text{Rank}(N) = 2$$

Vậy hệ thống trên quan sát được hoàn toàn.

Chương 7

**HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG
TỐI ƯU****7-1. KHÁI NIỆM CHUNG**

Các hệ thống điều khiển thiết kế đều phải thỏa mãn những yêu cầu chất lượng đề ra. Các chỉ tiêu chất lượng đó phải tốt nhất theo một số mặt nào đó, hay ta thường gọi là tối ưu. Trong trường hợp tổng quát, các chỉ tiêu chất lượng tối ưu thường được gọi là tiêu chuẩn tối ưu (mô tả hàm mục đích nào đó) ký hiệu là Q .

Các hệ thống Đ K.T.Đ được xét trước đây có thể xem là hệ thống tối ưu nếu các chỉ tiêu chất lượng yêu cầu chính là những tiêu chuẩn tối ưu. Chẳng hạn các tiêu chuẩn tối ưu đó là:

- Thời gian quá trình quá độ ngắn nhất.
- Độ quá điều chỉnh $\sigma_{\max}$ bé nhất
- Sai lệch tĩnh là nhỏ nhất
- Giá thành rẻ nhất
- Năng lượng tiêu thụ trong hệ thống là ít nhất
- Cấu trúc là đơn giản nhất v.v...

Tiêu chuẩn tối ưu Q thường biểu diễn bởi phiếm hàm (Phiếm hàm là đại lượng có giá trị xác định ứng với một hàm xác định). Tùy thuộc vào đặc điểm của tiêu chuẩn tối ưu Q mà ta có thể lập ra các bài toán tối ưu khác nhau.

Trong thực tế, các thông số và tọa độ của hệ thống tối ưu thường bị hạn chế do nhiều điều kiện. Các hạn chế đó xác định từ các tính chất vật lý của đối tượng điều khiển và từ những yêu cầu thiết kế đặt ra. Ví dụ xét đối tượng điều khiển là một động cơ điện một

chiều, kích từ độc lập, để đảm bảo độ bền cơ học của các chi tiết cần phải hạn chế tốc độ quay; để đảm bảo đối chiều an toàn và tránh phát nóng cần hạn chế dòng điện phản ứng v.v...

Vậy hệ thống Đ.K.T.Đ tối ưu là hệ thống đảm bảo tiêu chuẩn tối ưu Q đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) trong những điều kiện hạn chế do hoạt động của hệ thống đặt ra.

Ta có thể nêu ra một số ví dụ về hệ thống điều khiển tối ưu như:

- Hệ thống điều khiển máy bay, tên lửa cần đảm bảo việc sử dụng nhiên liệu ít nhất khi chuyển động với hành trình dài nhất.
- Hệ thống máy nâng hầm mỏ cần thực hiện nâng tải với năng suất cao nhất và hạ tải an toàn nhất.
- Hệ thống điều khiển ra đa cần xác định vị trí mục tiêu nhanh nhất v.v...

Nội dung cơ bản cần nghiên cứu trong điều khiển tối ưu là:

1) Thiết lập bài toán tối ưu

Trong đó cần phải xác định phương trình trạng thái của đối tượng điều khiển; nêu lên được các điều kiện hạn chế; xác định được sơ kiện và biên kiện của bài toán; lập được tiêu chuẩn tối ưu Q của hệ thống.

2) Xác định al gôrit điều khiển (hay là luật điều khiển).

Trong đó nêu ra phương pháp giải bài toán tối ưu để xác định tín hiệu điều khiển tác động vào đối tượng điều khiển để cho tiêu chuẩn tối ưu Q đạt cực đại.

3) Tổng hợp thiết bị điều khiển tối ưu

Trong đó cần xác định hàm tổng hợp, xây dựng thiết bị tính tối ưu bằng các phần tử thực tế.

Đối với hệ thống Đ.K.T.Đ tối ưu hiện nay được phân thành hai loại chủ yếu: hệ thống tối ưu tiên định (tức là hệ thống tối ưu có tin

tức đây đủ về đối tượng điều khiển) và hệ thống tối ưu ngẫu nhiên (tức là hệ thống tối ưu có tin tức không đây đủ về đối tượng điều khiển)

Ở đây ra sẽ xét hệ thống tối ưu có tin tức đây đủ về đối tượng điều khiển.

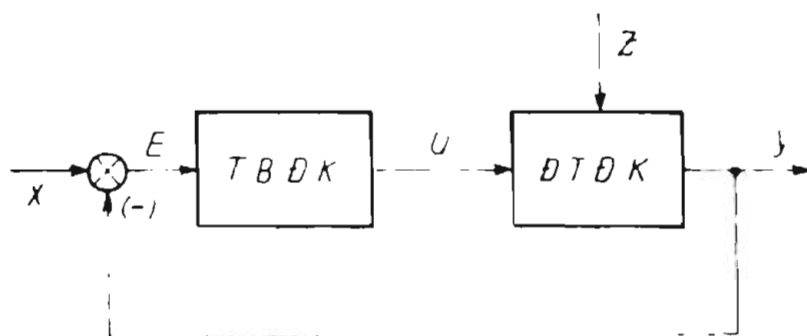
Việc nghiên cứu hệ thống Đ.K.T.Đ tối ưu là một nhiệm vụ trong lý thuyết các quá trình tối ưu. Sự hình thành và phát triển của lý thuyết này chỉ mới độ vài chục năm nay. Có thể xem đó cũng là một ngành khoa học điều khiển thâm nhập vào nhiều lĩnh vực khác nhau như: kinh tế, năng lượng, cơ học, vật lý, y học, sinh vật học v.v... Chính vì vậy mà việc nghiên cứu lý thuyết các quá trình tối ưu ngày nay đã tập hợp được một đội ngũ đông đảo các nhà khoa học.

Sau đây chúng ta chỉ nghiên cứu các vấn đề chính trong nội dung hệ thống tối ưu tiền định. Còn đối với hệ thống tối ưu ngẫu nhiên được xét ở Tập 2 Lý thuyết Đ.K.T.Đ.

7-2. THIẾT LẬP BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Một hệ thống Đ.K.T.Đ tối ưu biểu diễn bằng sơ đồ cấu trúc trên hình 7-1 bao gồm hai phần chủ yếu: đối tượng điều khiển (Đ.T.Đ.K) và thiết bị điều khiển (T.B.Đ.K).

Trên sơ đồ cấu trúc ký hiệu X là tín hiệu vào; Y : tín hiệu ra. U : tín hiệu điều khiển; Z : tín hiệu nhiễu; ε : sai lệch. Các tín hiệu trong hệ thống thường biểu diễn bằng các véc tơ.



Hình 7-1.

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\e &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \\u &= (u_1, u_2, \dots, u_m) \\z &= (z_1, z_2, \dots, z_l).\end{aligned}\tag{7-1}$$

7-2.1. Xác định phương trình trạng thái của đối tượng điều khiển

Phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K thường là phương trình vi phân có dạng:

$$\begin{cases} dy_1/dt = f_1(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t) \\ dy_2/dt = f_2(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t) \\ \dots \dots \dots \\ dy_n/dt = f_n(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t) \end{cases}\tag{7-2}$$

Trong hệ (7-2), các hàm $f_1, f_2, \dots, f_n$ có thể là các hàm tuyến tính và phi tuyến. Trong chương này ta xét các hàm f_i ($i = 1, \dots, n$) là hàm tuyến tính, không phụ thuộc vào tín hiệu nhiễu z_i ($i = 1, \dots, l$) và thời gian t . Khi đó hệ (7-2) có dạng:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + \sum_{k=1}^m b_{ki}u_k \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}\tag{7-3}$$

Nếu Đ.T.Đ.K được mô tả bởi một phương trình vi phân cấp n có một tín hiệu ra y và một tín hiệu điều khiển u :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = u,\tag{7-4}$$

trong đó vế phải của (7-4) không chứa các thành phần đạo hàm của u , bằng cách đặt:

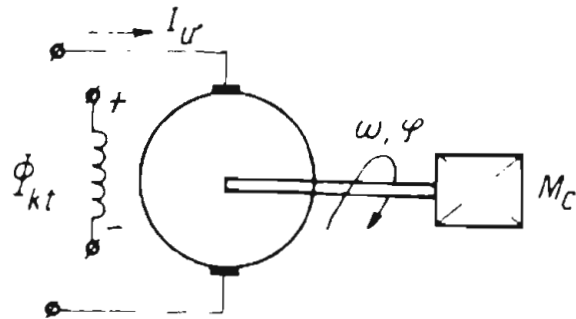
$$y_1 = y; \quad y_2 = dy/dt; \quad y_3 = d^2y/dt^2; \quad \dots; \quad y_{n-1} = d^{n-2}y/dt^{n-2}\tag{7-5}$$

ta sẽ có:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\
 &\vdots \\
 \frac{dy_{n-1}}{dt} &= y_n \\
 \frac{dy_n}{dt} &= \frac{-1}{a_0} (a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_n y_1 - U).
 \end{aligned} \tag{7-6}$$

Ví dụ 7-1. Viết phương trình trạng thái của đối tượng điều khiển là động cơ điện một chiều kích từ độc lập, $\Phi_{kt} = \text{const}$.

Trên hình 7-2, tín hiệu điều khiển U là dòng điện phần ứng I_U , còn tín hiệu ra y là góc quay φ của trục động cơ.



Hình 7-2.

Phương trình cân bằng mô men của động cơ:

$$k_M I_U - M_c = J \frac{d\omega}{dt} \tag{7-7}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{7-8}$$

trong đó $k_M = C_M \Phi = \text{const}$; J : mô men quán tính; ω : tốc độ góc; φ : góc quay; giả sử bỏ qua phụ tải trên trục động cơ: $M_c = 0$ thì:

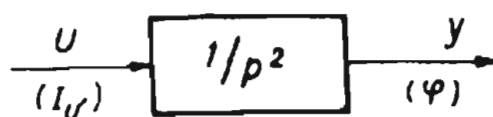
$$k_M I_U = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \tag{7-9}$$

Nếu xét theo thời gian tương đối bằng cách đặt:

$$\tau = t \sqrt{k_M / J}$$

thì (7-9) có dạng:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = I_U \quad (7-10)$$



Đặt ký hiệu: $\varphi = y$; $I_U = U$ ta có:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = U \quad (7-11)$$

Hình 7-3.

Vậy phương trình trạng thái của động cơ điện là một phương trình vi phân cấp hai. Sơ đồ cấu trúc của động cơ vẽ trên hình 7-3.

7-2.2. Điều kiện hạn chế

Các thông số trong hệ thống tối ưu không phải lấy với mọi giá trị bất kỳ mà thường chỉ lấy với các giá trị cho phép nào đó. Chẳng hạn như điện áp, dòng điện, tốc độ, gia tốc, năng lượng, nhiên liệu, v.v... đối với từng hệ thống đều có các trị hạn chế nhất định. Vì thế hạn chế giá trị các thông số là yếu tố rất quan trọng khi nghiên cứu hệ thống tối ưu.

1) Điều kiện hạn chế tín hiệu điều khiển $\overline{U}$

Tín hiệu điều khiển $\overline{U}$ là một véc tơ có các tọa độ $u_1, u_2, \dots, u_m$ tạo thành một không gian m chiều. Nếu các tọa độ u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) có các giá trị hạn chế ta nói rằng véc tơ $\overline{u}$ bị giới hạn trong siêu diện $\Omega(\overline{U})$ nào đó, ký hiệu là:

$$\overline{u} \in \Omega(\overline{U}) \quad (7-12)$$

Đối với một số trường hợp hạn chế của tín hiệu điều khiển U_i được viết dạng:

$$a_i \leq U_i \leq b_i \quad (7-13)$$

Nếu tính theo đơn vị tương đối, thông thường trong các bài toán tối ưu ta thấy hạn chế U được viết dạng:

$$|U| \leq 1. \quad (7-14)$$

2) Điều kiện hạn chế tín hiệu ra $\vec{y}$

Các tín hiệu ra y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các tọa độ pha tạo thành một không gian pha. Xuất phát từ các điều kiện thực tế mà các tọa độ pha y_i cũng có giá trị hạn chế. Tổng quát có thể xem hạn chế tín hiệu ra y_i là bị giới hạn ở trong siêu diện $\Gamma(y)$ nào đó và được ký hiệu:

$$\vec{y} \in \Gamma(\vec{y}). \quad (7-15)$$

Đối với một số trường hợp có thể viết:

$$h_i \leq |y_i| \leq r_i \quad (7-16)$$

Ví dụ 7-2. Đối với động cơ điện một chiều, để đảm bảo độ bền cơ học, cần hạn chế tốc độ quay:

$$|\omega| \leq r_1$$

Nếu lượng ra y là góc quay φ thì

$$|\omega| \quad |dy/dt| \leq r_1$$

Mặt khác, để đảm bảo việc đổi chiều an toàn và tránh phát nóng quá giới hạn cho phép ta cần phải hạn chế dòng điện phản ứng:

$$|I_u| \leq r_2.$$

Vì mômen $M = k_M I_u = J d\omega/dt$ cho nên ta sẽ có hạn chế:

$$|I_u| \quad |k_1 d\omega/dt| \quad |k_1 d^2 y/dt^2| \leq r_2.$$

Qua đây ta thấy tín hiệu điều khiển I_u có hạn chế: $|I_u| \leq r_2$ nhưng đồng thời tín hiệu ra $y = \varphi$ cũng có giá trị hạn chế theo đạo hàm bậc một và bậc hai của nó.

7-2.3. Thành lập tiêu chuẩn tối ưu

Khi thiết kế hệ thống tối ưu, ta không nói tối ưu một cách chung chung mà phải nói tối ưu về một mặt nào đó. Vì thế, ứng với một bài toán tối ưu sẽ có một tiêu chuẩn tối ưu xác định.

Thông thường, tiêu chuẩn tối ưu Q được biểu diễn bằng một phiếm hàm dạng:

$$Q = \int_0^T G(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t).dt, \quad (7-17)$$

trong đó G là một hàm xác định đối với các tọa độ y_i ; tín hiệu điều khiển U_i và thời gian t .

Việc thành lập tiêu chuẩn tối ưu Q phải dựa vào đặc tính của đối tượng, các yêu cầu kỹ thuật, kinh tế v.v... đặt ra, nghĩa là phải tìm được mô tả toán học có thể có mối liên hệ giữa y_i và u_i và t để thỏa mãn một yêu cầu tối ưu nào đó.

Khi đã có tiêu chuẩn tối ưu Q , ta phải tìm cực trị của Q (cực đại hoặc cực tiểu) theo mục đích bài toán đặt ra. Vì thế Q còn được gọi là hàm mục đích.

Như vậy thì việc giải bài toán tối ưu chính là tìm cực trị của phiếm hàm (7-17). Vấn đề đó nằm trong nội dung bài toán biến phân được giải quyết trong "phép tính biến phân" [T.L. 1].

7-2.4. Đặt bài toán tối ưu

1. Bài toán tối ưu tác động nhanh

Giả sử đối tượng điều khiển là động cơ điện một chiều được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$d^2y/d\tau^2 = u.$$

Bài toán được đặt ra như sau:

Hãy tìm luật điều khiển $u(t)$ với điều kiện hạn chế:

$$|u| \leq 1 \quad (7-18)$$

để cho động cơ quay từ vị trí ban đầu có góc quay và tốc độ đều bằng không đến vị trí cuối cùng có góc quay bằng φ_0 và tốc độ bằng không với một khoảng thời gian ngắn nhất.

Đối với bài toán tối ưu tác động nhanh vì cần thời gian ngắn nhất nên phiếm hàm Q sẽ là:

$$Q = \int_0^T G(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t).dt = T(\min) \quad (7-19)$$

Rõ ràng từ (7-19) phải có:

$$G(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t) \equiv 1. \quad (7-20)$$

2. Bài toán tối ưu kinh tế

Ví dụ với Đ.T.Đ.K là động cơ điện một chiều như bài toán tối ưu tác động nhanh ở trên, do đó phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K và các điều kiện hạn chế như cũ, không có gì thay đổi.

Tổn hao năng lượng trong hệ thống sẽ là:

$$Q = \int_0^T U_u \cdot I_u \cdot dt = \min. \quad (7-21)$$

Dựa vào phương trình cân bằng điện áp:

$$U_u = I_u R_u + k_e \omega \quad (7-22)$$

và phương trình cân bằng mô men:

$$k_M I_u - M_c = J d\omega/dt \quad (7-23)$$

Ta tính được:

$$Q = \int_0^T U_u I_u dt = \frac{k_e M_c}{k_M} \varphi_0 + \int_0^T R_u I_u^2 dt, \quad (7-24)$$

trong đó $\varphi_0 = \int_0^T \omega dt$ là góc quay của động cơ từ vị trí ban đầu đến vị trí cuối cùng.

Tiêu chuẩn tối ưu Q theo (7-24) phụ thuộc vào bình phương dòng điện I_u (tức là tín hiệu điều khiển động cơ). Muốn tìm cực tiểu của (7-24) với số hạng thứ nhất là hằng số ta chỉ cần tìm cực tiểu của tiêu chuẩn tối ưu:

$$Q = \int_0^T U^2 \cdot dt = \min, \quad (7-25)$$

với $U = I_u$ là tín hiệu điều khiển.

Tiêu chuẩn tối ưu (7-25) là hàm mục tiêu mô tả cho tổn hao

năng lượng tiêu hao trong hệ thống là bé nhất. Đó cũng là tiêu chuẩn tối ưu của bài toán tối ưu kinh tế.

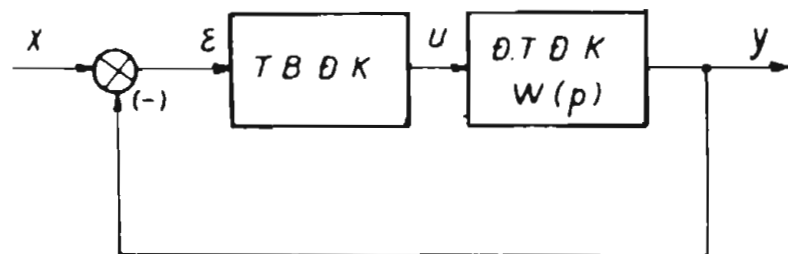
3. Bài toán tối ưu về thiết kế giải tích thiết bị điều khiển

Đây là bài toán tìm luật điều khiển u là một hàm giải tích liên hệ với tín hiệu sai lệch của hệ thống để cho hệ thống có chất lượng tốt nhất (tức là phải đảm bảo giá trị tích phân chất lượng đã xét ở chương 4 cực tiểu). Việc xác định phương trình vi phân tối ưu đó của T.B.Đ.K bằng giải tích toán học ta gọi là thiết kế giải tích T.B.Đ.K.

Tiêu chuẩn tối ưu đối với bài toán thiết kế giải tích T.B.Đ.K có thể biểu diễn bằng tiêu chuẩn tích phân sau:

$$Q = \int_0^{\infty} [\epsilon^2 + \tau(\epsilon')^2 + U^2 + \beta.(U')^2].dt, \quad (7-26)$$

trong đó thành phần ϵ^2 và $\tau(\epsilon')^2$ đặc trưng cho sai lệch của hệ thống đạt cực tiểu và thời gian quá trình quá độ bé nhất như đã giải thích ở chương 4; còn



Hình 7-4.

thành phần U^2 đặc trưng cho năng lượng tiêu hao trong hệ thống là ít nhất (tương tự tiêu chuẩn tối ưu kinh tế (7-25) đã xét) và thành phần $\beta.(U')^2$ đảm bảo cho trong T.B.Đ.K tuyến tính không có những tín hiệu điều khiển mà tốc độ biến thiên của nó lớn vô hạn không thể chấp nhận được.

7-3. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU

Giải bài toán tối ưu là xác định cực trị của một tiêu chuẩn tối ưu nào đó (phiếm hàm nào đó). Từ đây ta sẽ tìm ra luật điều khiển tối

ưu $U(t)$ tuân theo điều kiện hạn chế đã đặt ra.

Tìm cực trị của phiếm hàm $Q[y(t), u(t)]$ thuộc về loại bài toán biến phân. Luật điều khiển $u(t)$ để cho Q đạt cực trị ta gọi là đường cực trị.

1) Các phương pháp gián tiếp cơ bản

Đó là các phương pháp biến phân cổ điển, phương pháp quy hoạch động và nguyên lý cực đại. Các phương pháp này cho phép chuyển bài toán biến phân về bài toán giải tích quen thuộc, thông qua đó để tìm các đường cực trị đơn giản hơn. Cụ thể đối với phép tính biến phân cổ điển ta chuyển về dạng phương trình Euler – Lagrange, đối với phương pháp quy hoạch động ta chuyển về phương trình Bellman và đối với nguyên lý cực đại ta chuyển về tìm cực đại của hàm H .

2) Các phương pháp trực tiếp

Nội dung phương pháp trực tiếp là thay thế phiếm hàm Q bằng một hàm có số biến hữu hạn và sau đó lấy giới hạn để có nghiệm của bài toán biến phân. Khi đó ta có thể sử dụng các máy tính để giải bài toán biến phân dễ dàng.

Hiện nay do toán học hiện đại phát triển mạnh nên người ta đã dùng phương pháp giải tích hàm để giải các bài toán điều khiển tối ưu phức tạp. Trong giải tích hàm sẽ sử dụng tới lý thuyết về các không gian trùu tượng (không gian hàm, không gian tuyến tính định chuẩn v.v...), dựa trên cơ sở lý thuyết tập hợp để đề ra một phương pháp tổng quát giải bài toán tối ưu. Đây là một phương pháp hiện đại mới ra đời gần đây, tuy chưa được sử dụng rộng rãi song có rất nhiều triển vọng.

Các phương pháp kể trên đây được dùng để giải bài toán tối ưu đối với các hệ thống tiền định.

Đối với các hệ thống ngẫu nhiên, việc giải bài toán tối ưu phải dựa vào lý thuyết xác suất thống kê, chẳng hạn như bài toán Wiener cho hệ tuyến tính và các bài toán thuộc hệ thống thích nghi.

Sau đây ta sẽ nghiên cứu ba phương pháp cơ bản và rất thông dụng để giải bài toán tối ưu: phương pháp biến phân cổ điển; phương pháp quy hoạch động và nguyên lý cực đại.

7-4. PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN CỔ ĐIỂN

Phương pháp biến phân cổ điển được hình thành từ bài toán về "đường đoản thời" của J-Bernoulli năm 1696. Sau đó thì Euler và Lagrange đã thiết lập được các bài toán biến phân và cách giải tổng quát hơn. Nội dung bài toán biến phân cổ điển được xét như sau..

1) Thành lập phương trình Euler

Cho phiếm hàm dạng:

$$Q = \int_0^T G[y(t), y'(t)] \cdot dt. \quad (7-26)$$

Giả sử hàm $G[y(t), y'(t)]$ đơn trị và liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó, còn hàm $y = f(t)$ đơn trị và liên tục trong khoảng $[0 - T]$ và các đạo hàm bậc một liên tục trong khoảng đó (nói gọn là hàm $y = f(t)$ thuộc về một lớp hàm $C_{(1)}$ nào đó).

Bài toán biến phân đặt ra ở đây là hãy tìm một đường cong $f(t)$ thuộc lớp $C_{(1)}$ để cho phiếm hàm (7-26) đạt cực trị.

Muốn giải bài toán ta xét hàm:

$$y = f(t) + \alpha \cdot \delta(t), \quad (7-27)$$

ở lân cận hàm $f(t)$.

Trong đó α là một tham số bé; $\delta(t)$ là một hàm bất kỳ thuộc lớp $C_{(1)}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\delta(0) = \delta(T) = 0. \quad (7-28)$$

Khi đó phiếm hàm (7-26) sẽ là một hàm của α :

$$Q(\alpha) = \int_0^T G[f(t) + \alpha \delta(t); f'(t) + \alpha \delta'(t)] \cdot dt \quad (7-29)$$

Nếu α rất bé, ta phân tích $Q(\alpha)$ thành chuỗi:

$$Q(\alpha) = [Q(\alpha)]_{\alpha=0} + \frac{\alpha}{1!} \left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2!} \left[\frac{d^2Q}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=0} + \dots \quad (7-30)$$

Các số hạng $\alpha \left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0}$ và $\alpha^2 \left[\frac{d^2Q}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=0}$ gọi là các biến phân bậc nhất và bậc hai của phiếm hàm Q và ký hiệu tương ứng là δQ và $\delta^2 Q$.

Nếu $f(t)$ làm cho phiếm hàm Q đạt cực trị thì:

$$\left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0. \quad (7-31)$$

Nếu lấy vi phân hai vế của (7-29) theo α và thế $\alpha = 0$ vào ta sẽ có:

$$\left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = \int_0^T \left[\frac{\partial G}{\partial y} \delta(t) + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta'(t) \right] dt. \quad (7-32)$$

Tính số hạng: $\int_0^T \frac{\partial G}{\partial y'} \delta'(t) dt = \left[\delta(t) \cdot \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_0^T - \int_0^T \delta(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dt.$

Do điều kiện (7-28) nên:

$$\int_0^T \frac{\partial G}{\partial y'} \delta'(t) dt = - \int_0^T \delta(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dt.$$

Vậy:

$$\left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = \int_0^T \delta(t) \cdot \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] dt \quad (7-33)$$

Để cho hàm $Q(\alpha \rightarrow 0)$ đạt cực trị thì phải có

$$\left[\frac{dQ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0$$

Cho nên có thể nhận thấy rằng khi đó có:

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) = 0. \quad (7-34)$$

Phương trình (7-34) gọi là phương trình Euler, đó là một phương trình vi phân thông thường

2) Bài toán biến phân có cực trị buộc. Phương trình Euler – Lagrange

Đối với bài toán điều khiển mà phương trình của Đ.T.Đ.K có dạng:

$$\varphi_i[y(t), y'(t)] = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7-35)$$

Ta nói rằng cực trị của phiếm hàm Q còn bị ràng buộc bởi điều kiện (7-35).

Bài toán điều khiển tìm cực trị của phiếm hàm Q với điều kiện buộc (7-35) là *bài toán điều khiển không holoônôm* tức là trong phương trình buộc có đạo hàm (khác với bài toán điều khiển holoônôm là trong phương trình buộc không chứa đạo hàm). Để giải bài toán biến phân cực trị buộc, ta phải dùng phương pháp thừa số bất định Lagrange tức là trong phương trình Euler ta thay hàm $G[y(t), y'(t)]$ bằng hàm:

$$G^* = G[y(t), y'(t)] + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot \varphi_i[y(t), y'(t)] \quad (7-36)$$

Khi đó phương trình Euler là:

$$\frac{\partial G^*}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial y'} = 0, \quad (7-37)$$

trong (7-36), $\lambda_i(t)$ gọi là thừa số Lagrange

Muốn giải bài toán ta phải dùng phương trình ràng buộc (7-35) và một phương trình Euler (7-37) để xác định $(n+1)$ ẩn số: $y(t)$ và $\lambda_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$).

3) Bài toán đẳng chu

Điều kiện buộc cho ở dạng tích phân xác định:

$$\int_0^1 \Psi_i[y(t), y'(t)] dt = L_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7-38)$$

trong đó L_i là các trị số hằng.

Để giải bài toán tìm cực trị của phiếm hàm Q khi có điều kiện buộc (7-38) ta áp dụng phương trình Euler đối với hàm phụ:

$$G^* = G[y(t), y'(t)] + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \psi_i[y(t), y'(t)], \quad (7-39)$$

trong đó λ_i là các thừa số bất định Lagrange không phụ thuộc vào thời gian. Muốn giải bài toán ta phải dùng n phương trình buộc (7-38) và một phương trình Euler.

4) Ví dụ áp dụng

Ví dụ 7-3. Xét bài toán tối ưu kinh tế ở mục 7-2 với đối tượng là động cơ điện một chiều có phương trình trạng thái:

$$d^2y/dt^2 = U \quad (7-40)$$

Hãy xác định luật điều khiển $U(t)$ khi động cơ quay từ vị trí đầu có tốc độ $y'(0) = 0$ đến vị trí cuối cùng có tốc độ $y'(T) = 0$ trong khoảng thời gian T cố định và góc quay cố định:

$$\int_0^T y'(t) \cdot dt = \varphi_0. \quad (7-41)$$

Để cho tổn hao năng lượng trong động cơ tiêu thụ ít nhất, tức là phải tìm cực tiểu của hàm mục tiêu:

$$Q = \int_0^T U^2(t) \cdot dt \quad (7-42)$$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Ký hiệu} \quad y_1 &= y \\ y_2 &= y' = dy_1/dt. \end{aligned}$$

Các giả thiết của bài toán tối ưu sẽ là:

$$y'_2 = U \quad (7-43)$$

$$y_2(0) = y_2(T) = 0 \quad (7-44)$$

$$\int_0^T y_2(t) \cdot dt = \varphi_0 \quad (7-45)$$

Khi đó phiếm hàm (7-42) có dạng.

$$Q = \int_0^T [y'_2(t)]^2 dt \quad (7-46)$$

Ở đây bài toán biến phân đặt ra như sau: Hãy tìm cực tiểu của phiếm hàm (7-46) thỏa mãn điều kiện buộc (7-45) (điều kiện đẳng chu) với các biên kiện đã cho (7-44).

Áp dụng phương trình Euler

$$\frac{\partial G^*}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial y'} = 0,$$

trong đó: $G^* = G[y(t), y'(t) + \lambda_1 \Psi_1[y(t), y'(t)]$

Cụ thể có:

$$G = [y'_2(t)]^2; \quad \Psi_1 = y_2(t).$$

Do đó:

$$G^* = [y'_2(t)]^2 + \lambda_1 y_2(t). \quad (7-47)$$

Tính: $\partial G^* / \partial y = \lambda_1; \quad \partial G^* / \partial y' = 2.y'_2(t)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial y'} = \frac{d}{dt} (2.y'_2) = 2y''_2(t)$$

Phương trình Euler – Lagrange sẽ là:

$$\lambda_1 - 2y''_2(t) = 0.$$

Hay là: $y''_2(t) = \lambda_1/2 \quad (7-48)$

Lấy tích phân thứ nhất phương trình vi phân (7-48) ta có

$$U(t) = y'_2(t) = \frac{\lambda_1}{2} t + C_1, \quad (7-49)$$

và tiếp tục lấy tích phân (7-49) ta được:

$$y_2(t) = \frac{\lambda_1}{4} t^2 + C_1 t + C_2 \quad (7-50)$$

Xác định hằng số tích phân C_1, C_2 và thừa số bất định

Lagrange. Theo điều kiện bờ (7-44) có:

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 = C_2. \\ y_2(T) = \frac{\lambda_1}{4} T^2 + C_1 T = 0. \end{cases}$$

Theo điều kiện đẳng chu (7-45) ta có:

$$\varphi_0 \int_0^T y_2(t).dt = \int_0^T \left(\frac{\lambda_1}{4} t^2 + C_1 t \right).dt = \frac{\lambda_1}{12} T^3 + \frac{C_1}{2} T^2$$

Giải ra cuối cùng ta có:

$$C_1 = \frac{6.\varphi_0}{T^2}; \quad C_2 = 0 \quad \text{và} \quad \lambda_1 = \frac{-24.\varphi_0}{T^3}.$$

Vậy tín hiệu điều khiển tối ưu $U_{t,u}(t)$ và quá trình tối ưu $y_{t,u}(t)$ sẽ là:

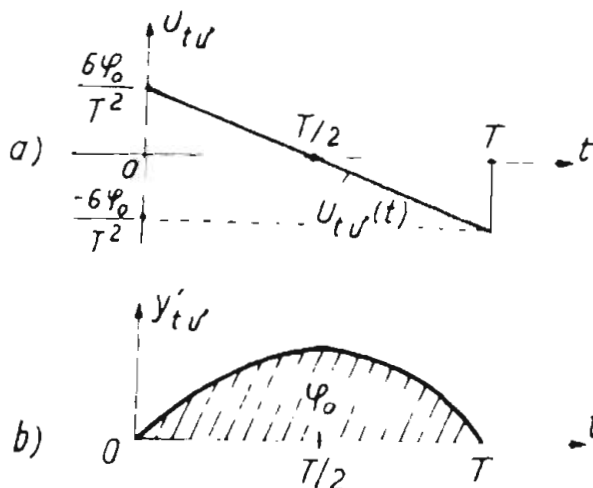
$$U_{t,u}(t) = \frac{6.\varphi_0}{T^2} - \frac{12.\varphi_0}{T^3} t \quad (7-51)$$

$$y_{t,u}(t) = \frac{6.\varphi_0}{T^2} .t - \frac{6.\varphi_0}{T^3} t^2. \quad (7-52)$$

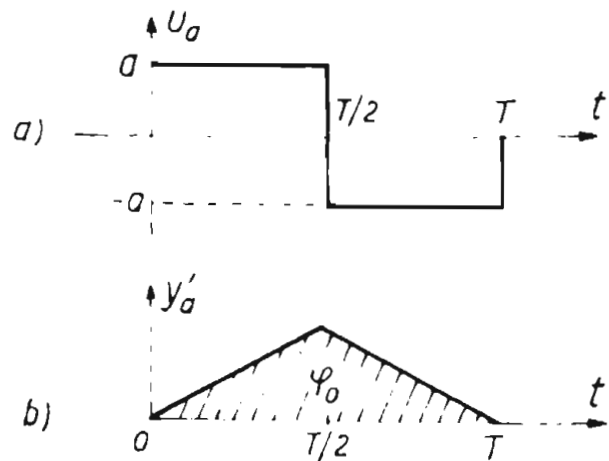
Giá trị cực tiểu năng lượng tiêu thụ trong hệ thống là:

$$Q_{t,u} = \int_0^T [U_{t,u}(t)]^2 .dt = \frac{12.\varphi_0^2}{T^3} \quad (7-53)$$

Đồ thị của $U_{t,u}(t)$ và $y_{t,u}(t)$ vẽ trên hình 7-5.



Hình 7-5.



Hình 7-6.

Để chứng tỏ rằng tín hiệu điều khiển tìm được ở trên là tối ưu, ta thử lấy một tín hiệu điều khiển $U_a(t)$ có dạng hàm gián đoạn vẽ trên hình 7-6a.

Góc quay của động cơ trong khoảng thời gian T bằng diện tích hình tam giác được gạch sọc trên hình 7-6b là φ_0 và đúng bằng diện tích hình parabol trên hình 7-5b.

$$\varphi_0 = 2 \int_0^{T/2} y'_a \cdot dt = 2 \int_0^{T/2} a \cdot t \cdot dt = \frac{aT^2}{4}$$

Do đó
$$a = \frac{4 \cdot \varphi_0}{T^2}$$

Vậy:

$$u_a(t) = \begin{cases} + 4 \cdot \varphi_0 / T^2 & \text{khi } 0 \leq t \leq T/2 \\ - 4 \varphi_0 / T^2 & \text{khi } T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (7-54)$$

Tổn thất năng lượng khi điều khiển theo $U_a(t)$ là:

$$Q_a = \int_0^T U_a^2(t) \cdot dt = \frac{16 \cdot \varphi_0^2}{T^3} \quad (7-55)$$

So sánh (7-53) và (7-55) ta thấy ngay $Q_{tu} < Q_a$. Vậy tín hiệu điều khiển tối ưu (7-51) sẽ làm cho động cơ quay một góc φ_0 trong thời gian T với năng lượng tổn hao ít nhất.

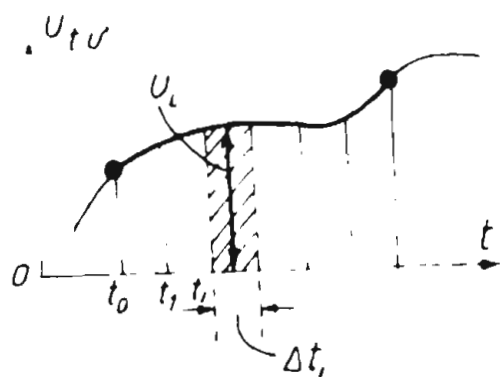
Chú ý. Phương pháp biến phân cổ điển giải bài toán tối ưu bằng phương trình Euler – Lagrange chỉ dùng cho bài toán tuyến tính, các tín hiệu điều khiển và tọa độ pha là các hàm liên tục. Phương pháp này chỉ mới cho ta điều kiện cần của tối ưu. Nếu tín hiệu điều khiển có đặt điều kiện hạn chế, chẳng hạn $|U| < 1$ thì việc áp dụng phương trình Euler trở nên khó khăn.

7-5. PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH ĐỘNG

Vào những năm thứ 50 của thế kỷ này, nhà toán học Mỹ R. Belman đã tìm ra một phương pháp tổng quát – phương pháp quy hoạch động – để giải bài toán biến phân.

7-5.1. Nguyên lý tối ưu và nội dung phương pháp

Đối với bài toán biến phân tìm cực trị của phiếm hàm



Hình 7-7.

$$Q = \int_{t_0}^T G[u, y, t] dt \quad (7-56)$$

ứng với một giá trị tối ưu $Q_{t,u}$ sẽ có một đường cực trị $U_{t,u}(t)$ xác định lấy trong khoảng $[t_0, T]$. Đường cực trị $U_{t,u}(t)$ liên tục được thay thế bằng một đường gãy khúc từng đoạn trên hình

7-7 bằng cách chia khoảng $T - t_0$ thành N khoảng nhỏ Δt . Cứ ứng với một khoảng Δt ta lấy $U_{t,u}(t)$ là một giá trị không đổi. Lúc đó hàm $U_{t,u}(t)$ có dạng:

$$U_{t,u}(t) = \begin{cases} U_0 = U(t_0) & \text{với } t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t = t_1 \\ U_1 = U(t_1) & \text{với } t_1 \leq t \leq t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t = t_2 \\ \dots\dots\dots \\ U_{N-1} = U(t_{N-1}) & \text{với } t_{N-1} \leq t \leq t_{N-1} + \Delta t = t_0 + N\Delta t = T \end{cases}$$

Như vậy phiếm hàm (7-56) sẽ được thay thế bằng tổng:

$$Q = \sum_{i=0}^{N-1} G[u_i, y_i, t_i] \cdot \Delta t. \quad (7-57)$$

Trong (7-57), U_i là các giá trị rời rạc. Lúc đó Q từ một phiếm hàm trở thành một hàm. Tìm cực trị của hàm Q theo (7-57) có N biến U_i bằng cách tính:

$$\partial Q / \partial u_i = 0. \quad (7-58)$$

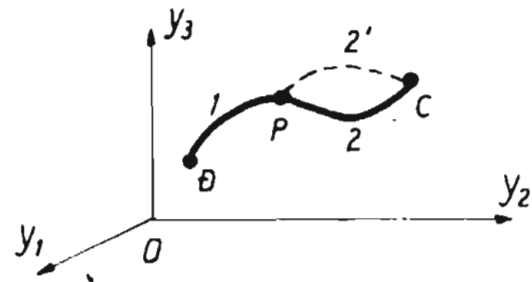
Để xác định được U_i ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) ta phải giải đồng thời N phương trình vi phân. Muốn lời giải chính xác thì số bước N phải tăng lên, điều đó sẽ làm tăng số lượng phương trình vi phân và gây nhiều phức tạp trong tính toán. Quá trình giải bài toán theo kiểu này được gọi là *quá trình một bước*.

Để việc giải bài toán được đơn giản hơn, Benmal đã đề ra phương pháp quy hoạch động cho phép tìm nghiệm $U(t_i)$ không phải cùng một lúc giải N phương trình vi phân, mà tuần tự từ bước này sang bước khác. Quá trình giải bài toán tối ưu như vậy gọi là *quá trình nhiều bước*.

Cơ sở của phương pháp quy hoạch động là nguyên lý tối ưu. Nguyên lý tối ưu phát biểu như sau:

"Bất cứ một đoạn cuối cùng nào của quỹ đạo tối ưu cũng là một quỹ đạo tối ưu".

Trên hình 7-8 ta thấy nếu quỹ đạo 1 - 2 giữa hai điểm D-C là tối ưu thì đoạn cuối cùng của quỹ đạo từ điểm bất kỳ P đến C cũng là quỹ đạo tối ưu. Ngoài quỹ đạo P.2.C, chẳng hạn quỹ đạo P2'C không thể coi là quỹ đạo tối ưu được.



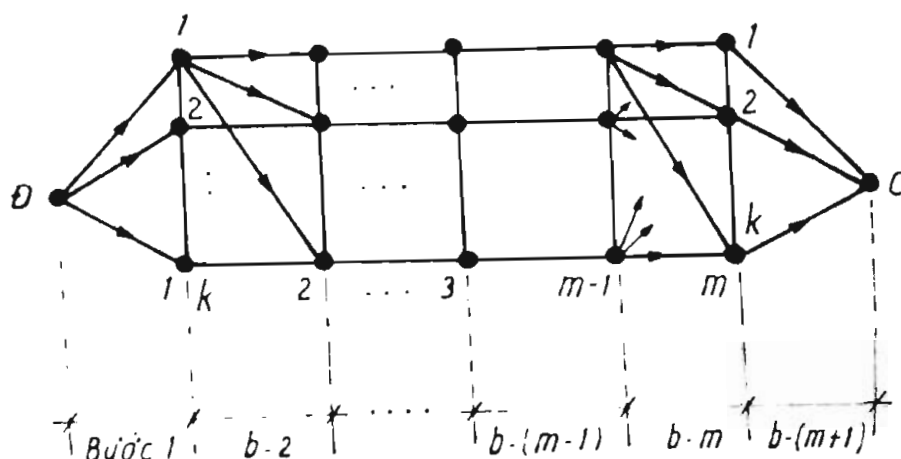
Hình 7-8.

Nguyên lý tối ưu ở trên không phải là một nguyên lý có tính chất tổng quát mà nó chỉ đúng cho những hệ thống có quỹ đạo tối ưu không phụ thuộc vào tiền sử của hệ thống nghĩa là chỉ phụ thuộc vào trạng thái của hệ thống từ thời điểm đang xét trở đi mà thôi.

Để thấy được thực chất của phương pháp quy hoạch động, ta xét một ví dụ đơn giản sau đây: Có một đối tượng chuyển động từ điểm đầu D đến điểm cuối C qua $(m + 1)$ bước và ở mỗi một bước lại có k phương án khác nhau trong đó cần đảm bảo cho một tiêu chuẩn tối ưu Q đạt cực tiểu. Muốn vậy, trên hình 7-9 ta phải cho một quỹ đạo đi từ D đến C để cho tiêu chuẩn tối ưu Q đạt cực tiểu trong tất cả các quỹ đạo có thể có. Bài toán này có thể gặp trong trường hợp cụ thể ví dụ như cần xác định một hành trình của máy bay, tên lửa đi qua các vị trí đã cho biết để sao cho nhiên liệu sử dụng là ít nhất. Trong trường hợp này, đại lượng Q là một hàm của $(m.k)$ biến số. Số lượng các phương án có thể có (tức là số lượng hành trình)

sẽ bằng k^m . Nếu k và m khá lớn thì việc xác định phương án tối ưu sẽ vô cùng khó khăn.

Bài toán xác định trị cực tiểu của hàm Q có m biến số và mỗi biến lại có k giá trị sẽ chuyển thành một bài toán đơn giản hơn bằng cách tìm cực tiểu của hàm một biến



Hình 7-9.

có k giá trị. Vì vậy nhờ phương pháp quy hoạch động mà bài toán đặt ra việc chọn một phương án tối ưu trong k^m phương án có thể

thay thế bằng bài toán chọn liên tiếp nhiều lần một phương án tối ưu. Trong k phương án có thể – Chẳng hạn nếu $m = k = 10$ ta chỉ cần chọn liên tiếp một phương án tối ưu trong 10 phương án chứ không phải chọn một phương án tối ưu trong 10^{10} phương án. Sau đây ta xét mô tả toán học của phương pháp quy hoạch động.

7-5.2. Phương pháp quy hoạch động đối với hệ thống gián đoạn

Để đơn giản, ta xét hệ thống Đ.T.Đ.K được mô tả bởi phương trình vi phân cấp một sau:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(y, u), \quad (7-59)$$

trong đó tín hiệu điều khiển U có hạn chế: $U \in \Omega$. Hãy xác định $U(t)$ để tiêu chuẩn tối ưu sau đây đạt cực tiểu:

$$Q = \int_0^T G_1(y, u) dt + \varphi_1[y(T)], \quad (7-60)$$

trong đó: $T = \text{const}; y(t = 0) = y_0$.

Nếu chia khoảng thời gian T thành N khoảng nhỏ τ tức là $T = N\tau$, khi đó các hàm $y(t)$ và $u(t)$ sẽ trở thành $y[N\tau]$ và $u[N\tau]$, còn phương trình vi phân (7-59) sẽ trở thành phương trình sai phân:

$$y[(k + 1)\tau] - y[k\tau] = \tau \cdot f_1(y[k\tau], u[k\tau]).$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} \tau \cdot f_1(y[k\tau], u[k\tau]) = f(y[k\tau], u[k\tau]) \\ \tau \cdot G_1(y[k\tau], u[k\tau]) = G(y[k\tau], u[k\tau]) \end{cases} \quad (7-61)$$

$$\text{Do đó ta có: } y[(k + 1)\tau] = y[k\tau] + f(y[k\tau], u[k\tau]) \quad (7-62)$$

$$Q = \sum_{k=0}^{N-1} G(y[k\tau], u[k\tau]) + \varphi(y[N\tau]). \quad (7-63)$$

Dựa vào nguyên lý tối ưu, giải bài toán theo phương pháp quy hoạch động bằng cách đi ngược từ điểm C đến điểm D của quỹ đạo pha trên hình 7-8.

1) Đoạn quỹ đạo cuối cùng: $(N - 1)\tau \leq t \leq N\tau$

$$Q_{N-1} = G(y[(N - 1)\tau], U[(N - 1)\tau]) + \varphi(y[N\tau]).$$

Vì theo (7-62):

$$y[N\tau] = y[(N - 1)\tau] + f(y[(N - 1)\tau], U[(N - 1)\tau]).$$

Cho nên:

$$Q_{N-1} = G(y[(N - 1)\tau], U[(n - 1)\tau]) + \varphi(y[(N - 1)\tau] + f(y[(N - 1)\tau], U[(N - 1)\tau])) \quad (7-64)$$

Giả thiết rằng trạng thái của hệ thống tại thời điểm $t = (N-1)\tau$ đã biết, tức là biết được $y[(N-1)\tau]$ nên Q_{N-1} chỉ còn phụ thuộc $u[(N-1)\tau]$.

Dựa vào điều kiện tìm cực tiểu của hàm Q_{N-1} theo $U[(N-1)\tau]$ ta tìm được giá trị tối ưu của tín hiệu điều khiển là $U_{t,u}[(N-1)\tau]$ và giá trị cực tiểu của Q_{N-1} là Q_{N-1}^0 .

$$Q_{N-1}(\min) = \min_{u_{N-1} \in \Omega} Q_{N-1} = Q_{N-1}^0(y[(N-1)\tau])$$

Hay là

$$Q_{N-1}^0(y[(N-1)\tau]) = \min_{u_{N-1} \in \Omega} [G(y[(N-1)\tau], u[(N-1)\tau]) + \varphi\{y[(N-1)\tau] + f(y[(N-1)\tau], u[(N-1)\tau])\}] \quad (7-65)$$

Vì giả thiết trạng thái của hệ thống $y[(N-1)\tau]$ đã biết nên trong (7-65), Q_{N-1} chỉ phụ thuộc vào một biến $U[(N-1)\tau]$. Tín hiệu điều khiển tối ưu cần tìm $U_{1u}[(N-1)\tau]$ tính theo (7-65) lại là một hàm của $y[(N-1)\tau]$.

2) Xét đoạn quỹ đạo ứng với $(N-2)\tau \leq t \leq N\tau$

Đoạn quỹ đạo này bao gồm hai đoạn tương ứng với: $(N-1)\tau \leq t \leq N\tau$ và $(N-2)\tau \leq t \leq (N-1)\tau$.

Khi đó phiếm hàm (7-63) có dạng:

$$Q_{N-2} = G\{y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]\} + G\{y[(N-1)\tau], u[(N-1)\tau]\} + \varphi(y[N\tau]). \quad (7-66)$$

Hay là:

$$Q_{N-2} = G\{y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]\} + Q_{N-1} \quad (7-67)$$

Ký hiệu giá trị cực tiểu của Q_{N-2} là Q_{N-2}^0 . Giả thiết rằng trạng thái của hệ thống $y[(N-2)\tau]$ đã biết, ta sẽ có:

$$\begin{aligned} Q_{N-2}^0 &= \min_{u_{N-2} \in \Omega} Q_{N-2} = \min_{u_{N-2} \in \Omega} G(y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]) + \\ &\quad + \min_{u_{N-1} \in \Omega} Q_{N-1} = \\ &= \min_{u_{N-2} \in \Omega} G\{y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]\} + Q_{N-1}^0\{y[(N-1)\tau]\}. \end{aligned} \quad (7-68)$$

Theo (7-62) có:

$$y[(N-1)\tau] = y[(N-2)\tau] + f\{y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]\}.$$

Cho nên (7-68) có dạng:

$$\begin{aligned} Q_{N-2}^0 &= \min_{u_{N-2} \in \Omega} [G\{y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau]\} + \\ &\quad + Q_{N-1}^0\{y[(N-2)\tau] + f(y[(N-2)\tau], u[(N-2)\tau])\}]. \end{aligned} \quad (7-69)$$

Trong (7-69), Q_{N-2} chỉ phụ thuộc vào một biến $U[(N-2)\tau]$. Tín hiệu điều khiển tối ưu cần tìm $U_{1,u}[(N-2)\tau]$ tính theo (7-69) lại là một hàm của $y[(N-2)\tau]$.

3) Suy rộng cho đoạn quỹ đạo bất kỳ ứng với $(N-k)\tau \leq t \leq N\tau$

Lấy $k = 2, 3, \dots, N$. Tương tự như biểu thức (7-69), trong trường hợp tổng quát sẽ có:

$$Q_{N-k}^0 = \min_{u_{N-k} \in \Omega} [G\{y(N-k)\tau, U[(N-k)\tau]\} + \\ + Q_{N-k-1}^0 \{y[(N-k)\tau] + f(y(N-k)\tau, u[(N-k)\tau])\}] \quad (7-70)$$

Trong (7-70), Q_{N-k} là hàm chỉ phụ thuộc vào một biến $U[(N-k)\tau]$. Tín hiệu điều khiển tối ưu cần tìm $U_{1,u}[(N-k)\tau]$ tính theo (7-70) lại là một hàm của $y[(N-k)\tau]$

Từ hai biểu thức (7-65) và (7-70) ta sẽ xác định được các tín hiệu điều khiển tối ưu $U_{1,u}[(N-1)\tau]$, $U_{1,u}[(N-k)\tau]$ với $k = 2, 3, \dots, N$.

Vì bài toán cho biết sơ kiện $y(t=0) = y_0$ cho nên $U_{1,u}(0)$ xác định được. Theo (7-62), biết $y(0)$ và $U_{1,u}(0)$ ta sẽ tính được $y(\tau)$ và do đó sẽ tìm được $U_{1,u}(\tau)$ theo (7-70). Sau đó cũng lại theo (7-62) ta tìm ra $y(2\tau)$ và xác định được $U_{1,u}(2\tau)$ theo (7-70). Cứ tiếp tục mãi cho đến điểm cuối cùng D của quỹ đạo, cuối cùng ta sẽ tìm được trị số $y(T)$ và xác định được $U_{1,u}(T)$. Điều đó chứng tỏ rằng, trong cả khoảng $0-T$ ta sẽ tìm được tín hiệu tối ưu $U_{1,u}$ để cho tiêu chuẩn tối ưu Q đạt cực tiểu, nghĩa là bài toán tối ưu đã được giải quyết.

Qua đây ta thấy rằng ban đầu dựa vào nguyên lý tối ưu, để tìm giá trị tối ưu của tín hiệu điều khiển $U(t)$, ta đã xét từ điểm cuối C đến điểm đầu D của quỹ đạo tối ưu (hướng đi ngược). Khi đã đến bước cuối cùng tức là tìm được $U_{1,u}(0)$ theo trạng thái ban đầu $y(0)$ ta lại lặp lại cách giải theo hướng thuận từ điểm D đến điểm C của quỹ đạo để tìm ra $U_{1,u}(t)$ đang còn phụ thuộc vào trạng thái $y(t_1)$ chưa biết. Quá trình giải theo hướng thuận từ D đến C cho ta cách xác định cụ thể tín hiệu điều khiển tối ưu của $U_{1,u}(t)$ để cho phiếm hàm Q đạt cực tiểu.

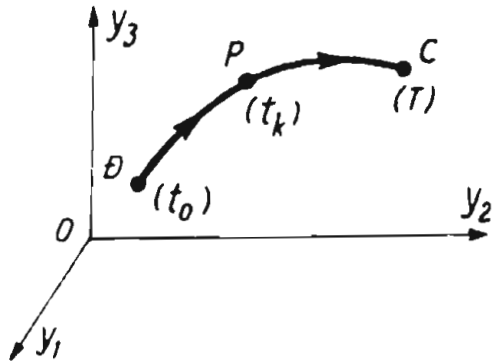
Phương pháp quy hoạch động giải bài toán theo "quá trình nhiều bước" thường cho ta kết quả của $U(t)$ theo các giá trị rời rạc. Muốn có $U(t)$ biểu diễn qua các hàm giải tích, ta phải dùng phương pháp tính gần đúng (giống như phương pháp tìm hàm giải tích của các quan hệ thực nghiệm).

7-5.3. Quy hoạch động đối với hệ thống liên tục

1) Đối với hệ thống không ô tô nôm

Phương trình của Đ.T.Đ.K có dạng vectơ:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y}, \vec{u}, t) \quad (7-71)$$



Hình 7-10

Hãy xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ để cho phiếm hàm sau đạt cực tiểu:

$$Q = \int_{t_0}^T G(\vec{y}, \vec{u}, t) dt \quad (7-72)$$

Cho biết điều kiện đầu có $\vec{y}(t = t_0) = \vec{y}(t_0)$.

Ký hiệu giá trị cực tiểu của Q là Q^0 . Rõ ràng Q^0 là một hàm của $y(t_0)$ và T .

$$Q^0[\vec{y}(t_0), T] = \min_{u \in \Omega} Q[\vec{y}(t), \vec{u}(t), t] \quad (1-73)$$

Trên quỹ đạo tối ưu ở hình 7-10 ta lấy một điểm P ứng với thời điểm t_k . Khi đó phiếm hàm (7-72) có dạng:

$$Q = \int_{t_0}^{t_k} G(\vec{y}, \vec{u}, t) dt + \int_{t_k}^T G(\vec{y}, \vec{u}, t) dt \quad (7-74)$$

Dựa vào nguyên lý tối ưu, đoạn quỹ đạo PC (ứng với $t_k - T$) cũng là quỹ đạo tối ưu, khi đó ta sẽ có:

$$Q^0[\vec{y}(t_0), T] = \min_{U \in \Omega} Q[\vec{y}(t_k), T, \vec{U}] \quad (7-75)$$

Hay là

$$Q^0[\vec{y}(t_0), T] = \min_{u \in \Omega} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} G(\vec{y}, \vec{u}, t) dt + Q^0[\vec{y}(t_k), T] \right\} \quad (7-76)$$

Bây giờ ta xét một điểm chuyển động từ điểm cuối C đến điểm đầu D của quỹ đạo pha tối ưu. Lúc đó điểm đầu D không thể xem là cố định và t_0 trở thành một đại lượng biến đổi. Thời điểm t_k , chia quỹ đạo pha thành hai đoạn cũng được coi là một đại lượng biến đổi. Ta có thể lấy t_k rất gần t , nghĩa là có thể thay t_k bằng $t + \Delta t$. Khi đó (7-76) có dạng:

$$Q^0[\vec{y}(t), T] = \min_{u \in \Omega} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(\vec{y}, \vec{u}, \tau) d\tau + Q^0[\vec{y}(t + \Delta t), T] \right\} \quad (7-77)$$

Khai triển các số hạng ở vế phải (7-77) thành chuỗi Taylo ở lân cận t ta có:

$$\begin{aligned} Q^0[\vec{y}(t), T] = \min_{u \in \Omega} & \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(\vec{y}, \vec{u}, \tau) d\tau + \right. \\ & + \left[\frac{d}{d(t + \Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} G(y, u, \tau) d\tau \right] \Delta t + \varepsilon_1 + Q^0[y(t), T] + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial Q^0}{\partial (t + \Delta t)} \Delta t + \varepsilon_2 \left. \right\} \end{aligned} \quad (7-78)$$

Trong (7-78) số hạng $\int G(y, u, \tau) d\tau = 0$ còn $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ là ác số hạng bậc cao của chuỗi Taylo, đó là các vô cùng bé bậc cao.

Với t cố định (vì t chính là t_0 đã nói ở trên) thì đạo hàm của biểu thức tích phân trong dấu ngoặc vuông sẽ là đạo hàm theo biến Δt .

Khi đó các dấu $\frac{d}{d\Delta t} \int_t^{t+\Delta t}$ sẽ khử nhau và chỉ còn lại giá trị hàm dưới dấu tích phân là:

$$G(y, u, t + \Delta t).$$

Vì $Q^0[y(t), T]$ không chứa u nên $Q^0[y(t), T]$ có thể đưa ra ngoài dấu $\min_{u \in \Omega}$ và khử với giá trị $Q^0[y(t), T]$ ở vế trái của (7-78).

Nếu bỏ qua các vô cùng bé bậc cao $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ và chia hai vế cho Δt rồi lấy giới hạn khi $\Delta t \rightarrow 0$ ta được:

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ G(y, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial Q^0}{\partial t} \right\} = 0. \quad (7-79)$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \dots, y_n; u_1, \dots, u_m, t)$$

Cho nên:

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ G[y, u, t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} f_i[y, u, t] + \frac{\partial Q^0}{\partial t} \right\} = 0. \quad (7-80)$$

Phương trình (7-80) gọi là phương trình Bellman

Để tìm tín hiệu điều khiển $u(t)$, từ (7-80) ta tính đạo hàm của vế trái rồi cho triệt tiêu sẽ được hệ phương trình Bellman sau đây.

$$\begin{cases} G[y, u, t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \cdot f_i[y, u, t] + \frac{\partial Q^0}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 Q^0}{\partial t \cdot \partial u} = 0. \end{cases} \quad (7-81)$$

Nếu ký hiệu:

$$\text{grad } Q^0 = \left(\frac{\partial Q^0}{\partial y_1}, \frac{\partial Q^0}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial Q^0}{\partial y_n} \right)$$

$$F[y, u, t] = (f_1[y, u, t], \dots, f_n[y, u, t]),$$

thì tích vô hướng của $\text{grad} Q^0$ và F sẽ là:

$$\langle \text{grad} Q^0, F \rangle = \frac{\partial Q^0}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial Q^0}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dots + \frac{\partial Q^0}{\partial y_n} \cdot f_n.$$

Khi đó phương trình Bellman(7-80) có dạng:

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ G[y, u, t] + \langle \text{grad} Q^0, F[y, u, t] \rangle + \frac{\partial Q^0}{\partial t} \right\} = 0 \quad (7-82)$$

2) Đối với hệ thống Ôtônôm

Vì phiếm hàm Q không chứa biến thời gian t nên:

$$\frac{\partial Q^0}{\partial t} = 0.$$

Khi đó phương trình Bellman có dạng:

$$\min_{u \in \Omega} \{ G[y(t), u(t)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \cdot f_i[y(t), u(t)] = 0 \quad (7-83)$$

Hoặc là:

$$\begin{cases} G[y(t), u(t)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \cdot f_i[y(t), u(t)] = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} = 0 \end{cases} \quad (7-84)$$

Ví dụ 7-4. Hãy xác định tín hiệu điều khiển là điện áp đặt vào phần ứng động cơ điện một chiều để sao cho tổn thất năng lượng trong quá trình làm việc bé nhất. Cho biết: phụ tải của động cơ là $M_c = k_1 \omega$; Từ thông động cơ không biến đổi; động cơ làm việc ở tốc độ thấp; bỏ qua điện cảm phần ứng; Mômen quán tính của động cơ và phụ tải là $J = 0,2 \text{ g.cm.sec}^2$; Giá trị bằng số: $C_e = 0,096 \text{ V.sec}$; $C_M = 30 \text{ g.cm/a}$; $k_1 = 10 \text{ g.cm.sec}$; $R_u = 5 \Omega$.

Giải

* Lập phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K:

Phương trình cân bằng điện áp và mômen của động cơ là:

$$U_u = I_u R_u + C_e \cdot \omega$$

$$C_M I_u - k_1 \omega = J \frac{d\omega}{dt}$$

Giải ra và thế giá trị bằng số $\frac{C_e C_M}{R_u} = \frac{0,096 \cdot 30}{5} = 0,52$

$k_1 = 10 \gg 0,52$ do đó ta có:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-k_1}{J} \omega + \frac{C_M}{J \cdot R_u} U_u.$$

Tìm hàm mục tiêu:

Vì động cơ làm việc ở tốc độ thấp nên $C_e \cdot \omega \ll I_u R_u$,

do đó:

$$I_u \approx \frac{U_u}{R_u}$$

Tổn thất điện ở trong động cơ là:

$$\Delta P_d = I_u U_u = \frac{U_u^2}{R_u}$$

Tổn thất cơ của hệ thống:

$$\Delta P_c = 9,81 \cdot 10^{-5} \cdot M_c \cdot \omega = 9,81 \cdot 10^{-5} \cdot k_1 \cdot \omega^2$$

Vậy tổn thất toàn bộ của hệ thống trong suốt quá trình làm việc là:

$$Q = \int_0^{\infty} \left(9,81 \cdot 10^{-5} \cdot k_1 \cdot \omega^2 + \frac{U_u^2}{R_u} \right) dt.$$

Hoặc:

$$Q = \int_0^{\infty} (a_1 \omega^2 + a_0 \cdot U_u^2) dt.$$

với:

$$a_0 = 0,2 \text{ J/s.v}^2; a_1 = 0,981 \cdot 10^{-3} \cdot \text{J.s}$$

★ Xác định luật điều khiển U:

Áp dụng phương trình Benmal (7–84): (Vì hệ thống được xét là hệ Ôtônôm, phiếm hàm Q không chứa biến t)

$$\left\{ \begin{array}{l} G[y(t), u(t)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \cdot f_i[y(t), u(t)] = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} = 0 \end{array} \right.$$

Với ví dụ này ta có: $n=1$ vì phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K là phương trình vi phân cấp một.

$$f_1[y(t), u(t)] = -\frac{k_1}{J}\omega + \frac{C_M}{J.R_u}.U_u$$

$$G[y(t), u(t)] = a_1\omega^2 + a_o.U_u^2$$

Cho nên thế vào phương trình Benmal ta thu được:

$$a_1\omega^2 + a_o.U_u^2 + \left(\frac{-k_1}{J}\omega + \frac{C_M}{J.R_u}.U_u\right).\frac{\partial Q^o}{\partial \omega} = 0$$

$$2a_o.U_u + \frac{C_M}{J.R_u} \frac{\partial Q^o}{\partial \omega} = 0$$

Rút $\partial Q^o/\partial \omega$ từ phương trình dưới thế vào phương trình trên ta được:

$$\frac{C_M}{J.R_u}.a_o.U_u^2 - 2a_o\frac{k_1}{J}\omega.U_u - a_1\frac{C_M}{J.R_u}.\omega^2 = 0.$$

Từ đó có: $U_u = -k\omega$.

Với:

$$k = +\frac{-k_1 R_u}{C_M} + \sqrt{\left(\frac{k_1 R_u}{C_M}\right)^2 + \frac{a_1}{a_o}} \approx 0,87.10^{-3} \text{ V.s.}$$

Vậy muốn cho tổn thất năng lượng trong hệ thống bé nhất thì tín hiệu điều khiển (điện áp phản ứng) phải biến thiên tỷ lệ bậc nhất với vận tốc góc của động cơ.

7-6. NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI

Nguyên lý cực đại Pontryagin (mang tên nhà toán học Nga) được phát minh trong năm 1956 – 1960, để giải các bài toán tối ưu. Sau đây ta sẽ tìm hiểu nội dung nguyên lý cực đại.

7-6.1. Nội dung nguyên lý cực đại

Xét Đ.T.Đ.K mô tả bởi hệ phương trình vi phân cấp một:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, \dots, y_n; U_1, \dots, U_m), (i = 1, \dots, n) \quad (7-85)$$

trong đó y_i là các tọa độ pha; U_j là các tín hiệu điều khiển.

Nhiệm vụ cần giải quyết là hãy xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ để chuyển hệ thống từ trạng thái $y(0)$ đến trạng thái $y(T)$ để cho phiếm hàm sau đạt cực trị:

$$Q = \int_0^T G[\vec{y}, \vec{u}, t].dt. \quad (7-86)$$

với điều kiện hạn chế $u(t) \in \Omega(U)$

Nếu đưa vào hệ thống một tọa độ pha phụ y_0 xác định từ phương trình:

$$\frac{dy_0}{dt} = G(\vec{y}, \vec{u}, t) = f_0(\vec{y}, \vec{u}, t) \quad (7-87)$$

Khi đó phối hợp hệ (7-85) và phương trình vi phân (7-87) ta sẽ có một hệ $(n + 1)$ phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= f_i(y_1, \dots, y_n; U_1, \dots, U_m) \\ i &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7-88)$$

Như vậy có thể thấy rằng, từ bài toán tối ưu tìm cực trị của phiếm hàm $Q[y, u, t]$ bằng cách đưa vào một tọa độ pha phụ y_0 mà khi lấy tích phân hai vế (7-87) có:

$$\int_0^T \frac{dy_0}{dt}.dt = y_0(T) = \int_0^T G[\vec{y}, \vec{u}, t]dt = Q \text{ (cực trị).}$$

ta đã chuyển về bài toán tìm cực trị của tọa độ pha $y_0(T)$ là giá trị ứng với trạng thái cuối cùng của tọa độ pha y_0 .

Trong nguyên lý cực đại còn đưa vào các biến số phụ: $\Psi_0(t)$, $\Psi_1(t)$, ..., $\Psi_n(t)$ và hàm H :

$$H = \sum_{i=0}^n \Psi_i(t) f_i[\vec{y}, \vec{u}, t] \quad (7-89)$$

Các hàm $\Psi_i(t)$ được xác định từ hệ phương trình vi phân:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (7-90)$$

Thế (7-89) vào (7-90) ta có:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_i}{dt} = - \sum_{k=0}^n \Psi_k(t) \cdot \frac{\partial f_k[\vec{y}, \vec{u}, t]}{\partial y_i} \\ i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (7-91)$$

Lấy đạo hàm (7-89): $\partial H / \partial \Psi_i = f_i[y, u, t]$ và so sánh với (7-88) ta có:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (7-92)$$

Hệ các phương trình vi phân (7-90) và (7-92) gọi là dạng liên hợp chính tắc.

Nguyên lý cực đại được phát biểu dưới dạng định lý sau đây:

Điều kiện cần để cho tín hiệu điều khiển $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$ và quỹ đạo $\vec{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]$ là tối ưu, thì ta phải xác định được hàm $\Psi(t) = [\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_n(t)]$ liên tục, khác không thỏa mãn phương trình (7-90) để sao cho với bất kỳ thời điểm t nào ($0 \leq t \leq T$) thì hàm $H[\vec{\Psi}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)]$ của biến $\vec{U} \in \Omega$ cũng đạt cực đại ở điểm $\vec{u} = \vec{u}(t)$:

$$H[\vec{\Psi}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)] = \max_{\vec{U} \in \Omega}$$

Từ đây ta rút ra trình tự giải bài toán tối ưu theo nguyên lý cực đại như sau:

1) Viết phương trình trạng thái của Đ.T.F.K theo dạng (7-88) tức là gồm $(n + 1)$ phương trình vi phân cấp một:

$$dy_i/dt = f_i[\vec{y}, \vec{u}, t] \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (7-93)$$

2) Thành lập hàm H :

$$H = \sum_{i=0}^n \Psi_i(t) \cdot f_i[\vec{y}, \vec{u}, t].$$

3) Xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ theo cực đại của hàm H đối với biến $U(t)$ từ:

$$\partial H / \partial U_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (7-94)$$

4) Vì hàm $U(t)$ còn phụ thuộc vào $\Psi_i(t)$ tức là:

$$U_j(t) = \varphi_j[\Psi_i(t)],$$

do đó ta phải xác định các hàm $\psi_i(t)$ liên tục, khác không từ phương trình:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) . \quad (7-95)$$

Tóm lại, muốn xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ ta phải giải tất cả $(2n + m + 2)$ phương trình, trong đó có: $(n + 1)$ phương trình vi phân cấp một của Đ.T. Đ.K (7-93), $(n + 1)$ phương trình đối với hàm $\Psi_i(t)$ (7-95) m phương trình đạo hàm riêng đối với biến $U_j(t)$: (7-94)

Qua đây ta thấy, bài toán tìm đường cực trị (tín hiệu điều khiển $U(t)$) để cho phiếm hàm (tiêu chuẩn tối ưu Q) đạt cực trị nhờ nguyên lý cực đại, ta đã chuyển được về dạng bài toán giải tích dễ giải quyết hơn bằng cách tìm biến $U_j(t)$ để cho hàm $H[U_j(t)]$ đạt cực đại. Chính vì thế mà phương pháp giải bài toán tối ưu vừa trình bày ở đây được gọi là phương pháp nguyên lý cực đại.

7-6.2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 7-5. Động cơ điện một chiều được mô tả bởi phương trình:

$$d^2y/dt^2 = U.$$

Điều kiện hạn chế:

$$|u| \leq 1$$

Hãy xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ để cho hệ thống từ trạng thái ban đầu $y(0)$ chuyển về gốc tọa độ của không gian pha với thời gian ngắn nhất.

Đây là bài toán tối ưu tác động nhanh, phiếm hàm có dạng:

$$Q = \int_0^T 1 \cdot dt = T \text{ (min)}; G[y, u, t] = 1$$

Bài toán tối ưu được giải theo trình tự sau đây:

1) Viết phương trình Đ.T.Đ.K về dạng (7–93) bằng cách đặt:

$$y_1 = y; \quad y_2 = dy/dt.$$

$$dy_1/dt = y_2 = f_1(y, u)$$

$$dy_2/dt = U = f_2(y, u)$$

2) Thành lập hàm H theo: $H = \sum_{i=0}^n \Psi_i \cdot f_i[y, u, t]$

Theo (7–87): $f_0 = G = 1$ nên:

$$H = \Psi_0 + \Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2.$$

$$= \Psi_0 + \Psi_1 y_2 + \Psi_2 U.$$

3) Xác định tín hiệu điều khiển $U(t)$ theo (7–94):

$$\partial H / \partial u = \Psi_2(t) = 0.$$

Qua kết quả này ta thấy hàm phụ $\psi_2(t) = 0$ không thể chấp nhận được vì không thỏa mãn điều kiện của hàm $\psi_i(t)$ trong nguyên lý cực đại đã phát biểu. Vì thế muốn hàm H đạt cực đại có thể lấy U cực đại, tức là lấy các giá trị đầu mút của khoảng $-1 \leq u \leq 1$

$$u = +1 \text{ hoặc } u = -1.$$

Để cho H cực đại, nếu lấy $\Psi_2(t) > 0$ thì $u = +1$

còn $\Psi_2(t) < 0$ thì $u = -1$.

Tín hiệu điều khiển $u(t)$ phụ thuộc vào dấu của hàm $\psi_2(t)$ được viết theo ký hiệu:

$$u = \text{sign} \cdot \Psi_2(t)$$

4) Xác định hàm $\Psi_i(t)$ theo (7–95) ta có:

$$d\Psi_0/dt = -\partial H/\partial y_0 = 0$$

$$d\Psi_1/dt = -\partial H/\partial y_1 = 0$$

$$d\Psi_2/dt = -\partial H/\partial y_2 = -\Psi_1.$$

Giải hệ phương trình này ta có:

$$\Psi_0 = C_0 = \text{Const}$$

$$\Psi_1 = C_1 = \text{Const.}$$

$$\Psi_2 = C_2 - C_1 t.$$

Vậy
$$U = 1.\text{sign}(C_2 - C_1 t).$$

Hàm $\Psi_2(t) = C_2 - C_1 t$ đổi dấu không quá một lần. Do đó tín hiệu điều khiển $u(t) = \text{sign}(C_2 - C_1 t)$ là hàm có giá trị không đổi từng đoạn và có các giá trị giới hạn bằng +1 và bằng -1. Hàm $U(t)$ có nhiều nhất là hai khoảng giá trị không đổi. Hệ thống tối ưu được xét ở đây là hệ thống phi tuyến (role).

7-6.3. Định lý về n-khoảng

Qua ví dụ 7-5 ta thấy rằng với Đ.T.Đ.K mô tả bằng phương trình vi phân cấp hai có nghiệm thực không dương thì tín hiệu điều khiển $U(t)$ là một hàm xác định không quá hai khoảng không đổi. Thực ra nhận xét này chỉ là trường hợp riêng của bài toán tối ưu tuyến tính khi phương trình đặc tính bậc n có n nghiệm thực, không dương. Việc xác định số khoảng của tín hiệu điều khiển tối ưu $U(t)$ trong trường hợp tổng quát được trình bày ở "định lý n-khoảng" do A.A. Phendbaum tìm ra 1953. Nội dung định lý như sau:

Đối với hệ thống tuyến tính mô tả bằng phương trình đặc tính bậc n , có tất cả các nghiệm là thực, không dương còn điều kiện hạn chế của tín hiệu điều khiển cho ở dạng $|u| \leq 1$ thì tín hiệu điều khiển $U(t)$ làm cho phép hàm Q đạt cực trị, là một hàm không đổi từng đoạn bằng ± 1 và có không quá n khoảng không đổi.

Chú ý: định lý n-khoảng không thể áp dụng được cho hệ thống điều khiển phi tuyến hoặc hệ thống tuyến tính mà phương trình đặc tính có nghiệm phức liên hợp.

Để chứng minh định lý n-khoảng ta có thể dùng nguyên lý cực

đại. Giả sử hệ thống mô tả bởi phương trình:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b \cdot u. \quad (7-96)$$

Với $a_0, a_1, \dots, a_n$ và b là hệ số còn u đặt hạn chế $|u| \leq 1$. Để đơn giản ta giả thiết phẩm hàm Q không chứa U và tuyến tính. Ta chuyển phương trình hệ thống (7-96) về dạng (7-6):

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2 \\ dy_2/dt &= y_3 \\ dy_n/dt &= \frac{b}{a_0} U - \frac{1}{a_0} (a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_n y_1). \end{aligned} \quad (7-78)$$

Lập hàm $H = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i$:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i = \Psi_1 y_2 + \Psi_2 y_3 + \dots + \Psi_{n-1} y_n - \\ &- \Psi_n \frac{1}{a_0} (a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_n y_1) + \Psi_n \cdot \frac{b}{a_0} U. \end{aligned} \quad (7-98)$$

Để tìm tín hiệu U ta tính $\partial H / \partial U = 0$ có $\Psi_n \cdot \frac{b}{a_0} = 0$ nghĩa là $\Psi_n = 0$ điều đó không thỏa mãn điều kiện đặt ra trong nguyên lý cực đại tức là Ψ_n phải liên tục, khác không. Do đó để cho $H_{\max}$ chỉ có thể:

$$\Psi_n \cdot \frac{b}{a_0} U = \max_{|u| \leq 1} \quad (7-99)$$

Từ (7-99) ta tìm được luật điều khiển tối ưu:

$$u(t) = \text{sign} \Psi_n(t) \quad (7-100)$$

nghĩa là hàm $u(t)$ chỉ lấy hai giá trị $+1$ hay -1 .

Để xác định $\Psi_n(t)$ trong (7-100) ta viết các phương trình (7-95):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_1} = \Psi_n \cdot \frac{a_n}{a_0} \\ \frac{d\Psi_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_2} = \Psi_n \cdot \frac{a_{n-1}}{a_0} - \Psi_1 \\ \dots \\ \frac{d\Psi_n}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_n} = \Psi_n \cdot \frac{a_1}{a_0} - \Psi_{n-1} \end{array} \right. \quad (7-101)$$

Giải ra ta có:

$$(-1)^{n-1} \frac{d^n \Psi_n}{dt^n} = \frac{a_n}{a_0} \Psi_n - (-1) \cdot \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{d\Psi_n}{dt} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_0} \frac{d^{n-1} \Psi_n}{dt^{n-1}}$$

Hoặc là:

$$(-1)^n \cdot a_0 \frac{d^n \Psi_n}{dt^n} + (-1)^{n-1} \cdot a_1 \cdot \frac{d^{n-1} \Psi_n}{dt^{n-1}} + \dots + (-1)^1 \cdot a_{n-1} \cdot \frac{d\Psi_n}{dt} - a_n \Psi_n = 0. \quad (7-102)$$

Phương trình đặc tính của (7-102) có dạng:

$$(-1)^n \cdot a_0 \cdot p^n + (-1)^{n-1} a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + (-1)^1 \cdot a_{n-1} \cdot p - a_n = 0. \quad (7-103)$$

Phương trình đặc tính (7-103) chỉ khác phương trình đặc tính của (7-96) ở dấu của các hệ số. Cho nên các nghiệm của (7-103) chỉ khác các nghiệm của phương trình đặc tính của (7-96) về dấu còn giá trị vẫn là các nghiệm thực. Khi đó nghiệm của (7-103) có dạng:

$$\Psi_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t}. \quad (7-104)$$

Từ (7-104) ta thấy rằng, hàm $\Psi_n(t)$ bằng tổng của n hàm mũ $C_i e^{p_i t}$ trong đó các số mũ p_i đổi dấu không quá $(n-1)$ lần, cho nên tín hiệu điều khiển $U(t) = \text{sign} \Psi_n(t)$ sẽ không có quá n khoảng không đổi. Vậy định lý n khoảng đã được chứng minh.

7-7. MỐI LIÊN HỆ GIỮA BA PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN CỔ ĐIỂN, QUY HOẠCH ĐỘNG VÀ NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI ĐẶC ĐIỂM VÀ PHẠM VI ỨNG DỤNG CỦA CHÚNG

7-7.1. Mối liên hệ giữa nguyên lý cực đại và phương trình Euler

Ta thấy nguyên lý cực đại là một phương pháp gián tiếp để giải bài toán biến phân. Đối với một số bài toán tối ưu, ta có thể dùng phương pháp biến phân cổ điển, phương pháp quy hoạch động và nguyên lý cực đại giải ra đều cho cùng một kết quả. Nguyên lý cực đại để giải bài toán với các hạn chế tín hiệu điều khiển là hàm liên tục từng đoạn. Nếu bài toán tối ưu không đặt hạn chế thì nguyên lý cực đại và phương pháp biến phân cổ điển đều cho kết quả như nhau. Do đó ta sẽ tìm mối liên hệ giữa nguyên lý cực đại và phương trình Euler

Giả sử Đ.T.Đ.K được mô tả bởi phương trình:

$$dy/dt = u. \quad (7-105)$$

Ta cần tìm cực tiểu của phiếm hàm:

$$Q = \int_0^T G[\vec{y}, \vec{u}, t].dt.$$

Ta ký hiệu:

$$\begin{cases} y_0 = \int_0^t G[\vec{y}, \vec{u}, t]dt \\ y_1 = y \end{cases} \quad (7-106)$$

Khi đó ta có hệ phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} dy_0/dt &= G[\vec{y}, \vec{u}, t] \\ dy_1/dt &= u. \end{aligned} \quad (7-107)$$

Hàm H trong nguyên lý cực đại có dạng:

$$H = \sum_{i=0}^n \Psi_i f_i(\vec{y}, \vec{u}, t) = \sum_{i=0}^1 \Psi_i f_i(\vec{y}, \vec{u}, t)$$

$$H = \Psi_0 G(\vec{y}, \vec{u}, t) + \Psi_1 U. \quad (7-108)$$

Hệ phương trình đối với hàm Ψ_i :

$$\begin{cases} d\Psi_0/dt = -\partial H/\partial y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\Psi_1/dt = -\partial H/\partial y_1 = -\partial H/\partial y = -\Psi_0 \cdot \frac{\partial G(\vec{y}, \vec{u}, t)}{\partial y} \end{cases} \quad (7-109)$$

Xác định giá trị $U(t)$ để H cực đại từ:

$$\partial H/\partial u = \Psi_0 \cdot \frac{\partial G(\vec{y}, \vec{u}, t)}{\partial u} + \Psi_1 = 0. \quad (7-110)$$

Vì $\Psi_0 = \text{const}$ nếu lấy $\Psi_0 = 1$ thì:

$$\Psi_1 = \frac{\partial G(\vec{y}, \vec{u}, t)}{\partial u} \quad (7-111)$$

Mặt khác, thế $\Psi_1 = -1$ trong phương trình thứ hai của (7-109) và lấy tích phân hai vế ta có:

$$\Psi_1 = C_1 + \int_0^t \frac{\partial G(y, u, \tau)}{\partial y} d\tau \quad (7-112)$$

Từ (7-111) và (7-112) ta có:

$$\frac{\partial G(\vec{y}, \vec{u}, t)}{\partial u} = C_1 + \int_0^t \frac{\partial G(\vec{y}, \vec{u}, \tau)}{\partial y} d\tau \quad (7-113)$$

Lấy vi phân hai vế của (7-113) theo thời gian và kết hợp với $dy/dt = u$ ta có:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial y} \quad (7-114)$$

Vì $y' = u \rightarrow \partial u = \partial y'$ nên ta có:

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial G}{\partial y'} = 0. \quad (1-115)$$

Rõ ràng phương trình vi phân (7-115) rút từ nguyên lý cực đại trong trường hợp Đ.T.Đ.K được mô tả bởi phương trình $y' = U$ hoàn toàn giống phương trình Euler (7-34) đã có ở mục 1-4.

7-7.2. Mối liên hệ giữa nguyên lý cực đại và phương pháp quy hoạch động

Đối với phương pháp quy hoạch động ta đã tìm được phương trình Bellman dạng:

$$\min_{u \in \Omega} \{G(\vec{y}, \vec{u}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} f_i(\vec{y}, \vec{u}, t) + \frac{\partial Q^0}{\partial t}\} = 0 \quad (7-116)$$

Đối với một hàm tổng quát μ có tính chất:

$$\min\{\mu\} = -\max\{-\mu\},$$

thì (7-116) sẽ trở thành:

$$\max_{u \in \Omega} \{-G[\vec{y}, \vec{u}, t] + \sum_{i=1}^n f_i[y, u, t] \cdot \left(\frac{-\partial Q^0}{\partial y_i}\right) - \frac{\partial Q^0}{\partial t}\} = 0 \quad (7-117)$$

Đối với hệ thống ô tô nôm, không có mặt biến t trong hàm f_i khi đó phương trình Bellman có dạng:

$$\max_{u \in \Omega} \{-G[\vec{y}(t), \vec{u}(t)] + \sum_{i=1}^n f_i[\vec{y}(t), \vec{u}(t)] \cdot \left(\frac{\partial Q^0}{\partial y_i}\right)\} = 0 \quad (7-118)$$

Đối với hệ thống không Ô tô nôm, nếu đặt $t = y_{n+1}$ thì:

$$\frac{\partial Q^0}{\partial t} = \frac{\partial Q^0}{\partial y_{n+1}}$$

Cho nên (7-118) có dạng:

$$\max_{u \in \Omega} \{-G[\vec{y}, \vec{u}, y_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n+1} \left(-\frac{\partial Q^0}{\partial y_i}\right) f_i[\vec{y}, \vec{u}, y_{n+1}]\} = 0 \quad (7-119)$$

Nếu đưa vào một tọa độ pha phụ y_0 xác định theo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_0}{\partial t} &= G[\vec{y}, \vec{u}, t] = G[\vec{y}, \vec{u}, y_{n+1}] \\ &= f_0[\vec{y}, \vec{u}, y_{n+1}]\end{aligned}\quad (7-120)$$

Khi đó có:

$$y_0 = \int_0^t G[\vec{y}, \vec{u}, t] = Q_{(\min)} = Q^0 \quad (7-121)$$

Với điều kiện ban đầu: $y(t = 0) = 0$ (1-122)

Như vậy thì:

$$\partial y_0 = \partial Q^0 \quad \text{hay là} \quad \frac{\partial Q^0}{\partial y_0} = 1.$$

Do đó (7-119) có dạng đơn giản hơn:

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \left(-\frac{\partial Q^0}{\partial y_i} \right) \cdot f_i[y, u, t] \right\} = 0 \quad (7-123)$$

Nếu đặt $\psi_i(t) = -\partial Q^0 / \partial y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) thì ta có:

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} f_i[y, u, t] \cdot \psi_i(t) \right\} = 0 \quad (7-124)$$

Nếu xét hệ thống ôtonôm thì (7-118) sẽ có dạng:

$$\max_{u \in \Omega} \left\{ \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot f_i[y, u, t] \right\} = 0 \quad (7-125)$$

Biểu thức cuối cùng cần phải có giá trị cực đại tức là tương ứng với cực đại của hàm H trong nguyên lý cực đại:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \cdot f_i[y, u, t].$$

Qua đó ta thấy rằng, từ phương pháp quy hoạch động ta có thể suy ra nguyên lý cực đại (hoặc ngược lại).

7-7.3. Đặc điểm và phạm vi ứng dụng của các phương pháp gián tiếp

1. Phương pháp biến phân cổ điển

Việc tìm cực trị của phiếm hàm được trình bày qua cách giải phương trình Euler đối với các bài toán không có hạn chế (vì các đường cực trị ở đây chính là các tín hiệu điều khiển $u(t)$, phải là hàm liên tục, khả vi), và qua cách giải phương trình Euler – Lagrange đối với bài toán có hạn chế cho theo dạng một phương trình nào đó (vì điều kiện buộc đối với bài toán hólônôm, không hólônôm và đẳng chu đã nói ở trên).

Như vậy đối với bài toán có hạn chế đã được giải nhờ phương trình Euler – Lagrange trong đó cần phải xác định các thừa số Lagrange rất khó khăn

Thực tế ta đang gặp bài toán tối ưu mà tín hiệu điều khiển $U(t)$ lại là hàm liên tục từng đoạn, cho nên việc áp dụng phương trình Euler – Lagrange và việc giải quyết bài toán đó rất phức tạp. Chính vì thế mà phương pháp biến phân cổ điển bị hạn chế khả năng sử dụng trong thực tế rất nhiều.

2. Phương pháp quy hoạch động

Tốt nhất nên áp dụng phương pháp quy hoạch động đối với hệ thống gián đoạn. Đặc biệt đối với các bài toán tối ưu phức tạp dùng máy tính số tác động nhanh giải quyết bằng phương pháp này rất có hiệu quả. Tất nhiên khi đó do hàm mô tả tín hiệu điều khiển tìm được $U(t)$ theo bảng số liệu rời rạc nên biểu thức giải tích của $U(t)$ chỉ là gần đúng. Đối với hệ thống liên tục phương pháp này sử dụng ít vì khó giải phương trình Benmal.

3. Phương pháp dùng nguyên lý cực đại

Phương pháp này rất có hiệu quả khi giải các bài toán có hạn chế dù hạn chế thông số cho theo hàm liên tục hoặc hàm gián đoạn đều được cả. Sử dụng phương pháp này để giải bài toán tối ưu phi tuyến có khó khăn, đặc biệt trong việc xác định các hàm phụ $\Psi_i(t)$

để cho hàm H đạt cực đại.

7-8. TỔNG HỢP HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Nhiệm vụ quan trọng và có ý nghĩa thực tế nhất khi nghiên cứu các quá trình tối ưu là tổng hợp được hệ thống tối ưu, tức là phải xác định được sơ đồ cấu trúc, đặc tính và tham số của thiết bị điều khiển.

Tổng hợp T.B.Đ.K tối ưu được thực hiện đối với cả hệ thống hở và hệ thống kín. Đối với hệ thống kín, việc tổng hợp có phức tạp hơn nhưng có nhiều ưu điểm hơn. Vì thế ở đây ta chỉ xét việc tổng hợp T.B.Đ.K đối với hệ thống kín.

Qua bước giải bài toán tối ưu, luật điều khiển $U(t)$ đã xác định được và nhờ Đ.T.Đ.K xem như xác định được đặc tính nên quá trình tối ưu $y(t)$ được xác định. Nếu xác định được tín hiệu vào $x(t)$ thì sai lệch $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ xác định. Từ đó ta tìm được hàm $U(\varepsilon)$ gọi là hàm tổng hợp.

Khi đã có hàm tổng hợp $U(\varepsilon)$, ta cần phải xây dựng thiết bị tính thực hiện hàm đó. Vì thế thiết bị tính ở trong bài toán tổng hợp tối ưu giữ một vai trò rất quan trọng. Ta có thể thực hiện xây dựng thiết bị tính số và thiết bị tính tương tự. Tuy nhiên loại thiết bị tính số còn được sử dụng ít vì phức tạp và giá thành cao. Vì vậy người ta thường dùng thiết bị tính tương tự để tổng hợp hệ thống tối ưu.

Việc tổng hợp hệ thống tối ưu phải thực hiện qua hai bước:

- a) Xác định hàm tổng hợp $U(\varepsilon)$
- b) Xây dựng thiết bị tính thực hiện hàm tổng hợp.

Sau đây ta sẽ nêu một ví dụ về bài toán tổng hợp hệ thống tối ưu đơn giản.

Ví dụ 7-6. Tổng hợp thiết bị điều khiển với Đ.T.Đ.K được mô tả bởi phương trình: $d^2y/dt^2 = U$, để cho Đ.T.Đ.K chuyển từ trạng

thái ban đầu $y(t_0)$ đến trạng thái $y = 0$ với thời gian ngắn nhất nếu tín hiệu điều khiển U có hạn chế:

$$|u| \leq 1.$$

1. Xây dựng quỹ đạo pha tối ưu và xác định hàm tổng hợp $U(\varepsilon)$

Bài toán này theo nguyên lý cực đại ta đã tìm được luật điều khiển tối ưu $U(t)$ có dạng:

$$u(t) = \text{sign}(C_2 - C_1 t),$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số phụ thuộc vào điều kiện đầu $\Psi_1(t_0)$ và $\Psi_2(t_0)$. Nếu C_1 và C_2 xác định được thì bài toán tổng hợp ở đây rất đơn giản. Tuy nhiên theo nguyên lý cực đại, các hằng số C_1 và C_2 trong luật điều khiển $u(t)$ là rất khó xác định. Cho nên trong trường hợp này với phương trình vi phân của Đ.T.Đ.K là cấp hai ta có thể dùng phương pháp mặt phẳng pha để xác định hàm tổng hợp.

Như trên ta đã biết, hàm $u(t)$ là hàm có giá trị không đổi từng đoạn và lấy các giá trị giới hạn bằng $+1$ và bằng -1 . Hàm đó có không quá hai đoạn không đổi (vì hàm $u(t) = C_2 - C_1 t$ chỉ đổi dấu không quá một lần trong khoảng $0 \leq t \leq T$).

* Phương trình vi phân của Đ.T.Đ.K có thể viết dạng (7-6):

$$\begin{cases} dy_1/dt = y_2 \\ dy_2/dt = U. \end{cases}$$

– Khi $U(t) = +1$ ta có: $dy_1/dy_2 = y_2$.

Phương trình quỹ đạo pha có dạng:

$$y_1 = \frac{1}{2} (y_2)^2 + C$$

Phương trình này biểu diễn bằng một họ parabol có điểm lồi quay về phía trái.

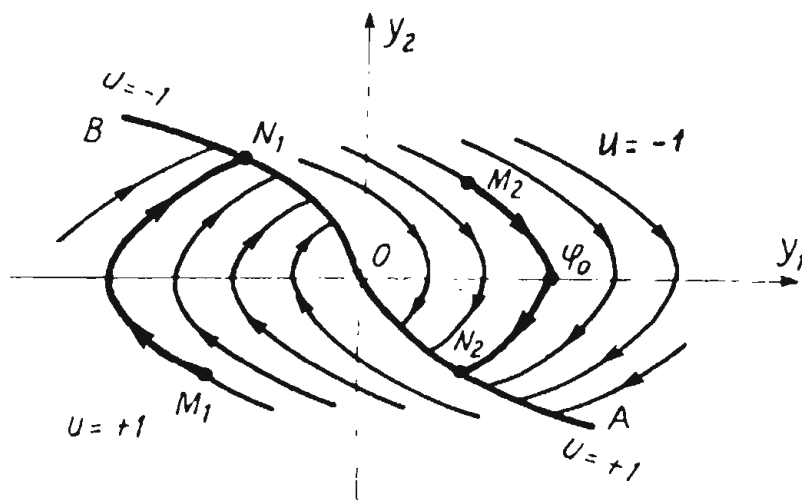
– Khi $u(t) = -1$ ta có: $dy_1/dy_2 = -y_2$

Phương trình quỹ đạo pha có dạng:

$$y_1 = -\frac{1}{2}(y_2)^2 + C'.$$

Phương trình này biểu diễn bằng một họ parabol quay điểm lồi sang phía phải.

Vì $U(t)$ lấy các trị giới hạn $+1$ và -1 đồng thời lại chỉ có không quá hai đoạn không đổi nên giả sử ban đầu ứng với $u(t) = +1$, điểm biểu diễn sẽ



Hình 7-11.

chuyển động trên đoạn quỹ đạo pha M_1N_1 , sau đó $u(t) = -1$ thì điểm biểu diễn sẽ chuyển động trên đoạn parabol thứ hai N_1O . Nhánh parabol BN_1O gọi là đường chuyển đổi, đi qua gốc tọa độ (vì quỹ đạo pha tối ưu cần tìm phải đi về gốc tọa độ pha). Ngược lại nếu ban đầu ứng với $u(t) = -1$ và sau đó $u(t) = +1$ thì điểm chuyển động sẽ ở trên hai nhánh parabol M_2N_2 và N_2O .

Nhánh parabol AO đi qua gốc O ứng với $u(t) = +1$ và $C = 0$ được biểu diễn bằng phương trình:

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_2)^2 \quad (7-126)$$

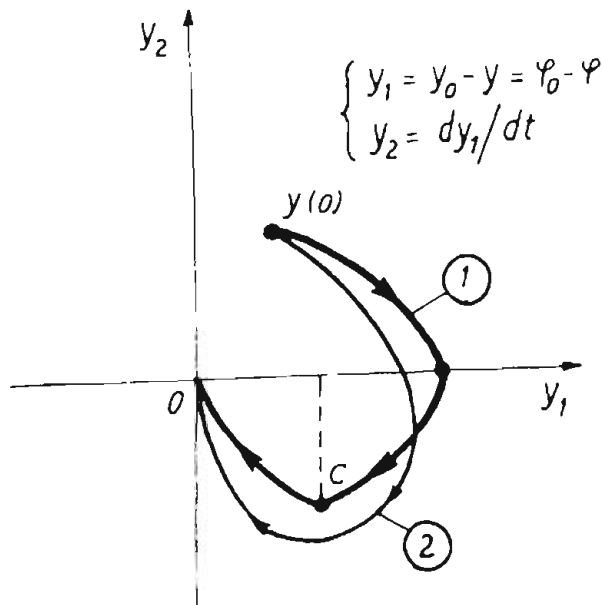
Nhánh parabol BO cũng đi qua gốc O ứng với $u(t) = -1$ và $C = 0$ được biểu diễn bằng phương trình:

$$y_1 = -\frac{1}{2}(y_2)^2 \quad (7-127)$$

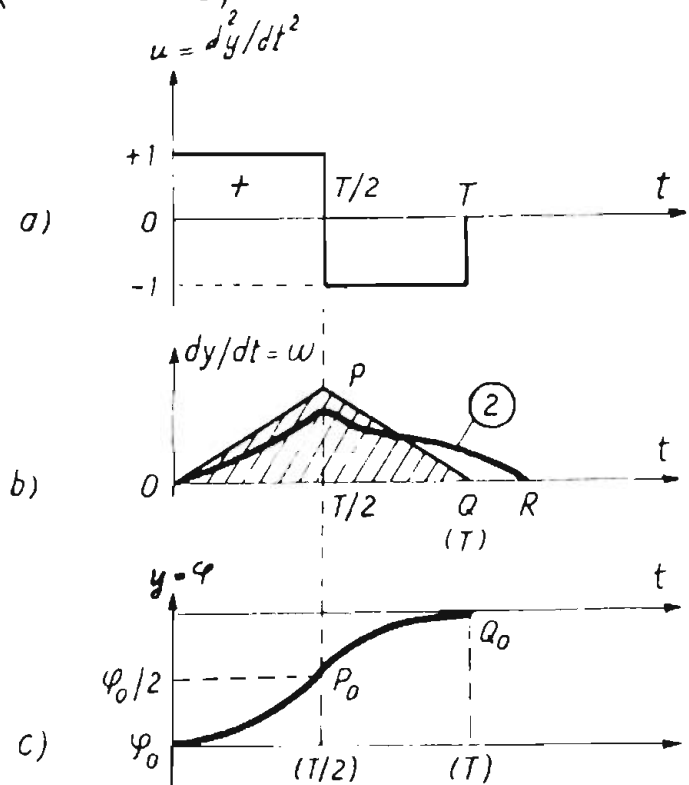
Qua hình 7-11, ứng với một trạng thái ban đầu ta chỉ xác định

được một quỹ đạo pha. Vì nguyên lý cực đại chỉ mới cho ta biết điều kiện cần của tối ưu do đó, ở đây ta phải chứng minh quỹ đạo pha tìm được là quỹ đạo tối ưu.

Thật vậy, ứng với một quỹ đạo pha trên hình 7-11 hệ thống sẽ có một quá trình xảy ra nhất định. Đối với bài toán tối ưu tác động nhanh ở đây cần phải chuyển hệ thống từ vị trí A đến vị trí B xác định trong khoảng thời gian ngắn nhất, tức là động cơ phải quay một góc φ_0 trong khoảng thời gian ngắn nhất. Muốn vậy ban đầu động cơ phải được mở máy với gia tốc đến cực đại và sau đó phải hãm với gia tốc ngược cực đại (hình 7-13)



Hình 7-12.



Hình 7-13.

Với gia tốc d^2y/dt^2 biến thiên theo quy luật trên hình 7-13a thì quỹ đạo pha tương ứng là 1 trên hình 7-12. Khi đó tốc độ $\omega = dy/dt$ biến thiên theo đường thẳng trên hình 7-13b.

Với gia tốc dương có: $\omega = dy/dt = t$ với $0 < t < T/2$

và quá trình của hệ thống (góc quay φ) biến đổi theo quy luật vẽ trên hình 7-13c biểu diễn bằng phương trình:

$$y = \frac{t^2}{2}, \quad 0 < t < T/2.$$

là đoạn Parabol OP_0

Với gia tốc âm có: $\omega = dy/dt = T/2 - (t - T/2)$

với $T/2 \leq t \leq T$.

và góc quay y biến đổi theo quy luật:

$$y = T^2/4 - 1/2(T - t)^2$$

Góc quay $\varphi_0 = \omega t = \text{const}$ để động cơ cần phải quay với thời gian $T_{\min}$ chính là diện tích tam giác OPQ trên hình 7-13b không đổi.

Nếu giả sử tồn tại một quỹ đạo pha ② khác quỹ đạo pha ① trên hình 7-12 được xem là tối ưu, khi đó quá trình $y(t)$ sẽ thay đổi khác với đường OP_0Q_0 trên hình 7-13c, và tương ứng với tốc độ dy/dt biểu diễn bằng đường cong ② trên hình 7-13b. Vì điều kiện hạn chế gia tốc $U = d^2y/dt^2$, $|U| \leq 1$ cho nên độ nghiêng của đường cong ② không thể lớn hơn độ nghiêng đường OP và PQ nghĩa là bất kỳ đường cong $\omega(t) = dy/dt$ nào cũng bắt buộc phải nằm dưới đường OP khi $t \leq T/2$ và cắt qua đường PQ một lần khi $t \geq T/2$. Như vậy điểm kết thúc R của đường cong ② trên trục hoành nhất thiết phải nằm bên phải điểm Q để cho diện tích do đường cong ② tạo ra phải đúng bằng diện tích tam giác OPQ . Điều đó chứng tỏ thời gian chuyển động ứng với quỹ đạo ② lớn hơn thời gian chuyển động ứng với quỹ đạo ① nghĩa là chỉ có thể có quỹ đạo ① là quỹ đạo tối ưu mà thôi.

Quá trình của hệ thống đặc trưng bằng điểm biểu diễn trên quỹ đạo pha theo hai nhánh parabol. Nhánh parabol thứ hai luôn đi qua gốc tọa độ. Ứng với trạng thái đầu nếu $u = +1$ ta có nhánh parabol thứ hai là đường AO và $u = -1$ ta có nhánh parabol thứ hai là BO trên hình 7-11. Đường cong AOB được gọi là đường chuyển đổi vì đó là nơi hệ thống đổi trạng thái từ $u = +1$ đến $u = -1$ (hoặc ngược lại).

Nhánh AO biểu diễn bằng phương trình (7-126)

Vì trên AO có $y_1 > 0$ và $y_2 < 0$ nên (7-126) có dạng:

$$y_1 = (-\text{sign}y_2) \frac{(y_2)^2}{2} \quad (1-128)$$

Nhánh BO biểu diễn bằng phương trình (7-127). Vì trên BO có $y_1 < 0$ và $y_2 > 0$ cho nên (7-127) có dạng:

$$y_1 = -(\text{sign}y_2) \cdot \frac{(y_2)^2}{2} \quad (7-129)$$

Vì (7-128) và (7-129) như nhau, do đó phương trình của cả đường chuyển đổi AOB sẽ là:

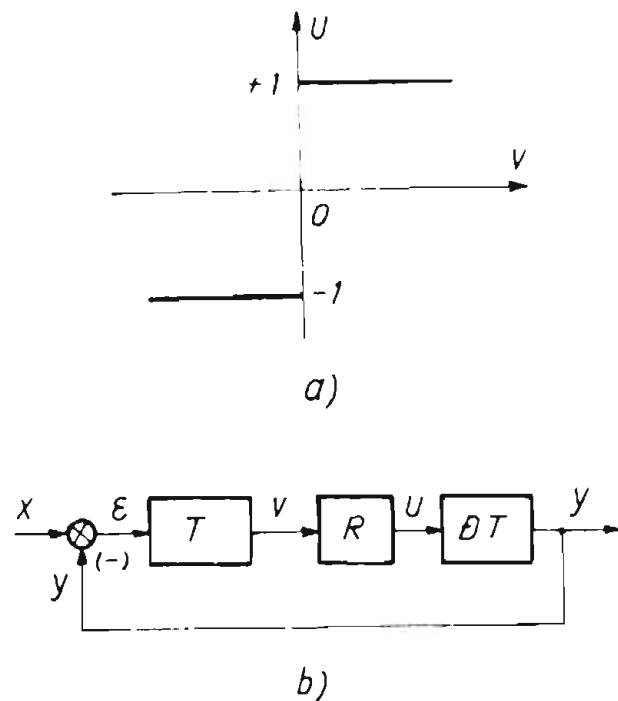
$$y_1 = -\text{sign}y_2 \cdot \frac{(y_2)^2}{2} \quad (7-130)$$

Vì tín hiệu U chỉ lấy hai giá trị $+1$ và -1 cho nên nó phải được tạo ra nhờ một rơle lý tưởng R trên hình 7-14b có đặc tính trên hình 7-14a. Đầu vào của R là tín hiệu v cũng là một hàm của các thông số và tọa độ của hệ thống. Nhiệm vụ của thiết bị tính T là để tính thời gian chuyển đổi của rơle R để cho hệ thống từ gia tốc dương sang gia tốc âm. Điều đó sẽ xảy ra khi

v (là lượng ra của thiết bị tính T) đi qua giá trị không. Do đó phương trình của tín hiệu v ở đầu ra thiết bị tính T là:

$$v = y_1 + \frac{1}{2} (y_2)^2 \cdot \text{sign}y_2 \quad (7-131)$$

Khi có chuyển đổi thì $v = 0$ tức là ta có phương trình đường



Hình 7-14.

chuyển đổi AOB. Dễ dàng thấy rằng các điểm biểu diễn ở bên phải đường chuyển đổi tức là $u = -1$ thì $v < 0$ còn các điểm biểu diễn ở bên trái đường chuyển đổi, ở đó có $u = +1$ thì $v > 0$.

Tín hiệu điều khiển tối ưu U cuối cùng có dạng:

$$u = \text{sign } v$$

Hay là:

$$u = \text{sign} \left\{ y_1 + \frac{1}{2} (y_2)^2 \cdot \text{sign} y_2 \right\} \quad (7-132)$$

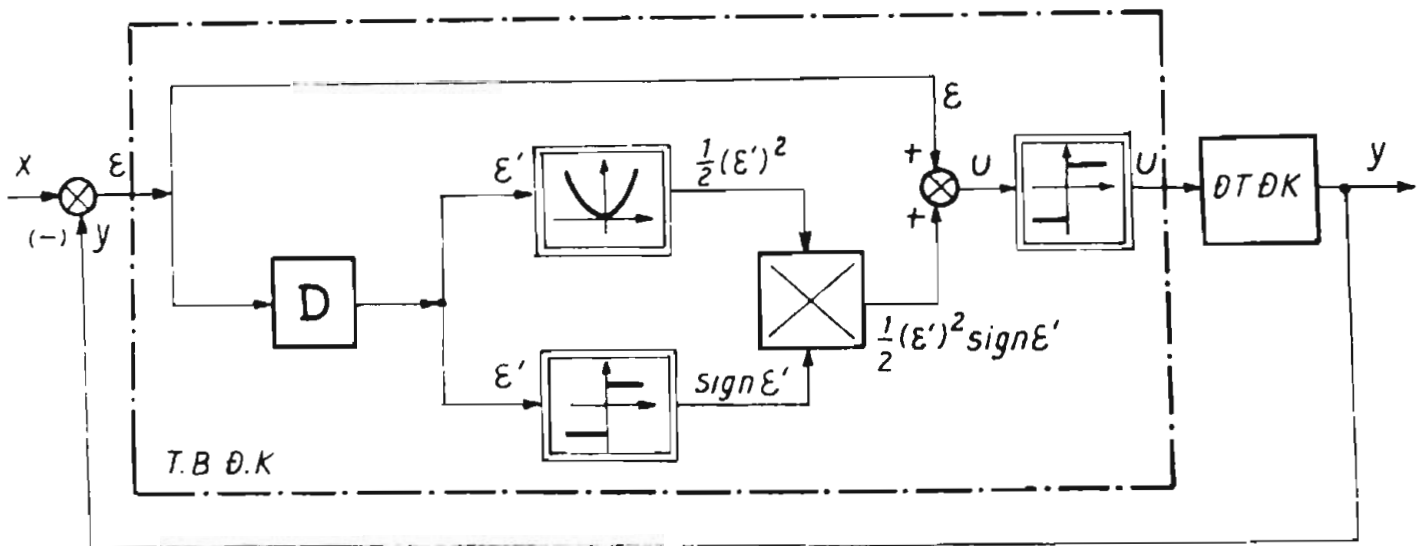
Nếu đổi về dạng ε cụ thể $y_1 = y$ thay bằng ε còn $y_2 = dy/dt$ thay bằng $d\varepsilon/dt = \varepsilon'$ ta sẽ có:

$$U = \text{sign} \left\{ \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon')^2 \text{sign} \varepsilon \right\} \quad (7-133)$$

Hàm $U(\varepsilon)$ theo (7-133) gọi là hàm tổng hợp.

2. Xây dựng thiết bị tính thực hiện hàm tổng hợp

Hàm v là tín hiệu vào của rơle R dùng để điều khiển việc đóng cắt của R nên v còn gọi là "hàm đóng cắt" hay là "hàm chuyển đổi". Để mô tả đúng hàm $U(\varepsilon)$ trên sơ đồ cấu trúc hình 7-15 ta



Hình 7-15.

thực hiện bằng thuật toán trên mô hình tương tự hoặc bằng giải tích trong máy vi tính rồi thông qua ADC và DAC để điều khiển đối tượng

7-9. TỔNG HỢP HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN GẦN TỐI ƯU

Để tạo ra các thiết bị điều khiển tối ưu thực hiện được trong kỹ thuật ta phải giải bài toán tổng hợp tối ưu với điều kiện

Cần đơn giản hóa mô tả toán học của Đ.T.Đ.K

Cần đơn giản hóa angôrit điều khiển tối ưu vừa tìm được.

1. Đơn giản hóa mô tả toán học của Đ.T.Đ.K

Việc tổng hợp T.B.Đ.K sẽ đơn giản nếu ta đơn giản hóa được phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K trong phạm vi cho phép. Ta có thể tiến hành đơn giản hóa phương trình trạng thái của Đ.T.Đ.K bằng cách

– Tuyến tính hóa hoặc bỏ qua các đặc tính phi tuyến của Đ.T.Đ.K

Hạ cấp phương trình vi phân đến cấp hai hoặc tối đa là cấp ba, thực hiện bằng cách bỏ qua các hệ số hằng trong số hạng đạo hàm cao cấp (tức là bỏ qua các hằng số thời gian có trị số bé).

2. Đơn giản hóa hàm tổng hợp (hay là hàm chuyển đổi)

Qua hai ví dụ tổng hợp ở trên ta thấy thực hiện luật điều khiển tối ưu nhờ hàm tổng hợp v đưa vào role lý tưởng hai vị trí.

Hàm tổng hợp là một hàm phi tuyến phức tạp của các tọa độ pha. Để thực hiện nó ta phải xây dựng thiết bị tính khá phức tạp, thậm chí với Đ.T.Đ.K chỉ mô tả bởi phương trình vi phân bậc hai tối giản. Phương pháp đơn giản hóa phương trình trạng thái Đ.T.Đ.K không phải lúc nào cũng cho phép chuyển về phương trình vi phân tuyến tính từ cấp hai trở lại. Rõ ràng có những Đ.T.Đ.K mà phương trình vi phân sau khi đã đơn giản hóa rồi vẫn còn cao, khi đó hàm tổng hợp tìm được cũng rất phức tạp chẳng hạn có dạng:

$$v(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Hàm tổng hợp $v(y_1, \dots, y_n) = 0$ đơn giản nhất là hàm tuyến tính, khi đó đường chuyển đổi qua gốc tọa độ là một đường thẳng và thiết bị tính chỉ cần dùng các bộ khuếch đại tuyến tính và bộ cộng.

Gọi $v_o(y_1, \dots, y_n)$ là hàm tổng hợp tối ưu chặt chẽ và hàm $v_{d.g}(y_1, \dots, y_n)$ là hàm tổng hợp tối ưu đã được đơn giản. Hệ thống gần tối ưu thực hiện theo hàm $v_{d.g}(y_1, \dots, y_n)$ sẽ có một sai lệch so với hệ thống tối ưu chặt chẽ thực hiện theo hàm tổng hợp $v_o(y_1, \dots, y_n)$.

Sai lệch đó được đánh giá theo tích phân:

$$Q_s = \int \dots \int_{(S)} [v_o(y_1, \dots, y_n) - v_{d.g}(y_1, \dots, y_n)]^2 dy_1, \dots, dy_n \quad (7-134)$$

Xét trường hợp hệ thống tối ưu cấp hai đơn giản thì sai lệch cần đánh giá là:

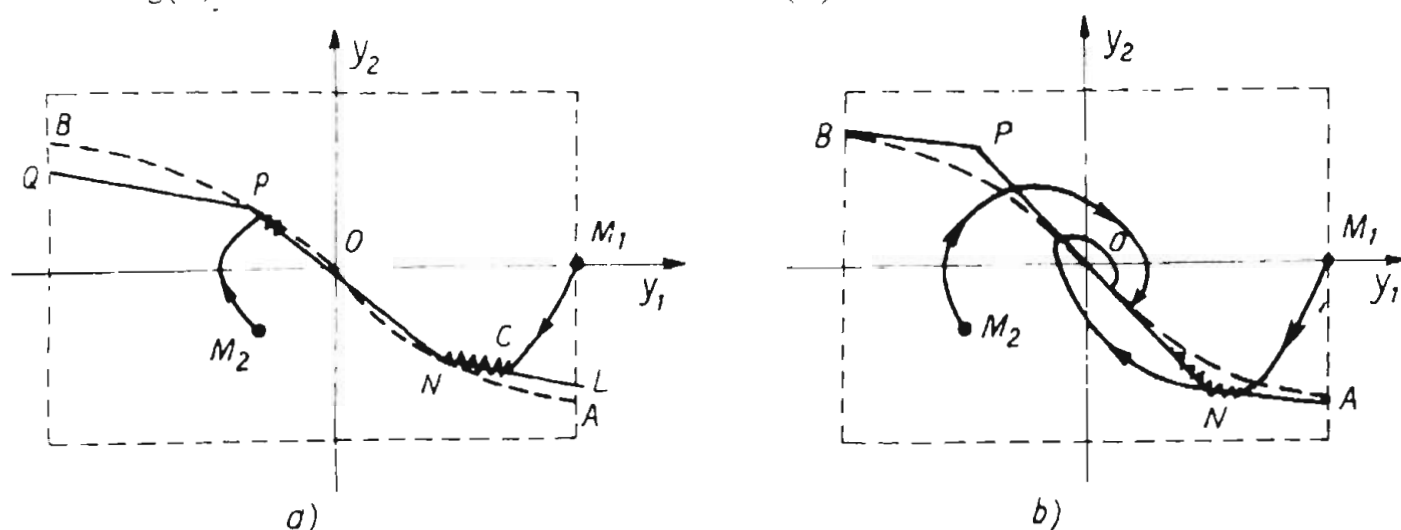
$$Q_s = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [v_o(y_1, y_2) - v_{d.g}(y_1, y_2)]^2 dy_1 dy_2 \quad (7-135)$$

Nếu giá trị Q_s càng bé thì hệ thống gần tối ưu được tổng hợp càng gần với hệ thống tối ưu chặt chẽ.

Xét ví dụ trên hình 7-16a và hình 7-16b hàm tổng hợp $v(y_1, y_2)$ được tiệm cận theo hai cách khác nhau.

Nếu theo cách tiệm cận như trên hình 7-16a thì thay thế đường

chuyển đổi AOB (đứt nét) đã tìm được theo hàm $v_0(y_1, y_2)$ chặt chẽ bằng đường gần đúng LNOPQ tuyến tính ba đoạn mô tả bởi hàm $v_{dg(a)}(y_1, y_2)$ và sai lệch $Q_{s(\alpha)}$ xác định theo 7-135. Nếu lấy gần đúng hàm như trên hình 7-16b bằng đường ANOPB mô tả bởi hàm $v_{dg(b)}(y_1, y_2)$ và có sai lệch là $Q_{s(\alpha)}$.



Hình 7-16.

Trên hình 7-16a giả sử ứng với trạng thái ban đầu ở M_1 , điểm biểu diễn theo quỹ đạo tối ưu chuyển động đến điểm C trên đoạn thẳng gần đúng LN và trượt đến điểm N rồi theo đường chuyển đổi tối ưu đi vào gốc tọa độ.

Nếu ứng với trạng thái ban đầu ở M_2 , sau khi điểm biểu diễn gặp đường chuyển đổi PO, nó sẽ đi vào gốc tọa độ theo đoạn thẳng PO và hệ thống chuyển động theo chế độ trượt. Quá trình quá độ ứng với quỹ đạo pha gần đúng trên hình 7-16a là một quá trình không dao động.

Trên hình 7-16b, ứng với trạng thái ban đầu M_1 điểm biểu diễn chuyển động theo quỹ đạo tối ưu rồi cắt đường chuyển đổi AN và sau đó lại chuyển động theo quỹ đạo tối ưu thứ hai và cắt đường chuyển đổi PO rồi tiếp tục đi theo quỹ đạo tối ưu thứ ba và cắt đường chuyển đổi ANO v.v... Quỹ đạo pha đó cứ xoắn dần vào gốc tọa độ. Vì thế trường hợp này, quá trình quá độ là một quá trình dao động tắt dần (vì quỹ đạo pha ứng với quá trình đó hội tụ vào tiêu điểm cân bằng 0).

7-10. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU ĐỐI VỚI PHIẾM HÀM DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Các vấn đề được xét ở trên trong chương này là những nguyên lý cơ bản của điều khiển tối ưu, chủ yếu xét cho những bài toán tối ưu đơn giản một chiều.

Phần này ta đề cập đến một lớp bài toán điều khiển tối ưu phức tạp hơn, được xét trong không gian trạng thái.

7-10.1. Điều khiển tối ưu đối với hệ thống liên tục

Phiếm hàm chất lượng dạng tổng quát:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' R_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}' R_2 \mathbf{u}) dt \quad (7-136)$$

Các ma trận R_1 và R_2 được gọi là ma trận trọng lượng và thường có dạng đường chéo. Các thành phần $\mathbf{x}' R_1 \mathbf{x}$ và $\mathbf{u}' R_2 \mathbf{u}$ có dạng toàn phương và đặc trưng cho các chỉ tiêu chất lượng về đặc tính tốt nhất của hệ thống và năng lượng tiêu hao ít nhất tương ứng.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' R_1 \mathbf{x} &= [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] \cdot \begin{vmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ & & \\ 0 & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \\ \mathbf{x}_n \end{vmatrix} \\ &= [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] \begin{vmatrix} r_1 \mathbf{x}_1 \\ \\ r_n \mathbf{x}_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n r_{1i} \cdot \mathbf{x}_i^2 \end{aligned} \quad (7-137)$$

$$\mathbf{u}' R_2 \mathbf{u} = \sum_{j=1}^m r_{2j} \cdot \mathbf{u}_j^2 \quad (7-138)$$

Do đó:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\sum_i r_{1i} \cdot \mathbf{x}_i^2 + \sum_j r_{2j} \cdot \mathbf{u}_j^2 \right) dt \quad (7-139)$$

1. Phương trình Liapunov

Xét hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{B}.u \\ y &= \mathbf{C}.\mathbf{x}\end{aligned}\quad (7-140)$$

Phương trình để xác định tác động điều khiển tối ưu có thể viết dưới dạng:

$$u = -\mathbf{K}.\mathbf{x} \quad (7-141)$$

Trong đó $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$ là ma trận điều khiển tối ưu cần xác định. Thế (7-141) vào (7-140) ta có:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}.\mathbf{K}).\mathbf{x} \quad (7-142)$$

Lấy chuyển vị (7-141):

$$u' = (-\mathbf{K}.\mathbf{x})' = -\mathbf{x}'.\mathbf{K}' \quad (7-143)$$

Thế (7-143) vào (7-136) ta được:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}'.\mathbf{R}_1.\mathbf{x} + \mathbf{x}'.\mathbf{K}'.\mathbf{R}_2.\mathbf{K}.\mathbf{x})dt \\ Q &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}'(\mathbf{R}_1 + \mathbf{K}'.\mathbf{R}_2.\mathbf{K}).\mathbf{x}.dt\end{aligned}\quad (7-144)$$

Ta nhận thấy rằng khi hệ thống kín ổn định, tức là $\mathbf{x}(\infty) = 0$ thì sẽ tồn tại một ma trận $\mathbf{P}$ xác định dương, thực, đối xứng có các phần tử bằng số để sao cho:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}'.\mathbf{P}.\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}'(\mathbf{R}_1 + \mathbf{K}'.\mathbf{R}_2.\mathbf{K}).\mathbf{x} \\ \mathbf{P} &= \{p_{ij}\} \end{aligned} \right. \quad (7-145)$$

Ma trận $\mathbf{P}$ xác định dương nếu như tất cả các định thức con chính của nó lớn hơn không, nghĩa là:

$$p_{11} > 0;$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} > 0 \quad (7-146)$$

Thế (7-145) vào (7-144) sẽ cho ta giá trị phiếm hàm:

$$\begin{aligned} Q &= - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (x' \cdot P \cdot x) dt = - \frac{1}{2} x' \cdot P \cdot x \Big|_0^{\infty} = \\ &= - \frac{1}{2} x'(\infty) \cdot P \cdot x(\infty) + \frac{1}{2} x'(0) \cdot P \cdot x(0) \end{aligned}$$

Hay là:

$$Q = \frac{1}{2} x'(0) \cdot P \cdot x(0) \quad (7-147)$$

Từ (7-145) ta tính:

$$\frac{d}{dt} (x' \cdot P \cdot x) = \dot{x}' \cdot P \cdot x + x' \cdot P \dot{x} \quad (7-148)$$

Vì theo (7-142) $\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x$ nên

$$\dot{x}' = ((A - B \cdot K) \cdot x)' = x' \cdot (A - B \cdot K)' \quad (7-149)$$

Thế $\dot{x}$ từ (7-142) và $\dot{x}'$ từ (7-149) vào vế phải (7-148) ta được:

$$\frac{d}{dt} (x' \cdot P \cdot x) = x' \cdot [(A - B \cdot K)' \cdot P + P \cdot (A - B \cdot K)] \cdot x \quad (7-150)$$

Kết hợp (7-145) và (7-150) cuối cùng ta có

$$(A - B \cdot K)' \cdot P + P \cdot (A - B \cdot K) = -R_1 - K' \cdot R_2 \cdot K \quad (7-151)$$

Phương trình (7-151) được gọi là phương trình ma trận Liapunov. Nghiệm P của phương trình này là một ma trận đối xứng, xác định dương:

Từ phương trình (7-147), muốn tìm giá trị cực tiểu của phiếm hàm Q ta tính các đạo hàm:

$$\frac{\partial Q}{\partial k_{ij}} = 0 \quad (7-152)$$

Với k_{ij} là các phần tử của ma trận K

Từ đó ma trận nghiệm xác định được, ma trận K cũng xác định được và cuối cùng ta tính được điều khiển tối ưu:

$$u = -K.x.$$

2. Phương trình Riccati

Theo phương pháp quy hoạch động Belman, đối với hệ thống không dừng, điều khiển tối ưu $u(t)$ có thể xác định được nhờ phương trình Belman (7-80)

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ G[y, u, t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^0}{\partial y_i} f_i[y, u, t] + \frac{\partial Q^0}{\partial t} \right\} = 0 \quad (7-153)$$

Trong đó: $Q = \int_{t_0}^T G[y, u, t].dt$ là phiếm hàm chất lượng.

Khi bài toán tối ưu xét với hệ thống biểu diễn bằng phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = A(t).x + B(t).u \quad (7-154)$$

Ta cần tìm điều khiển tối ưu $U(t)$ để cực tiểu phiếm hàm chất lượng sau đây:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^T [x'.R_1(t).x + u'.R_2(t)u].dt \quad (7-155)$$

với $R_1(t)$ và $R_2(t)$ là ma trận đối xứng xác định dương có đạo hàm cấp hai liên tục theo t .

Khi đó phương trình Belman (7-153) sẽ có sự thay thế các thành phần: $G[y, u, t]$ sẽ là:

$$\left(\frac{1}{2} x'(t).R_1(t).x(t) + \frac{1}{2} u'(t).R_2(t).u(t) \right) = G(y, u, t) \quad (7-156)$$

Còn $f_i(y, u, t)$ được thay bằng: $(A(t).x + B(t).u)'$

Hiện giờ ta viết lại phương trình Belman dạng khác:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial Q''}{\partial t} = & \left[\frac{1}{2} \dot{x}'(t).R_1(t).x(t) + \frac{1}{2} u''(t).R_2(t).u''(t) \right] + \\
& + \left(\frac{\partial Q''}{\partial x} \right)' . (A(t).x + B(t).u'')
\end{aligned} \quad (7-157)$$

Trong đó

u'' : giá trị điều khiển tối ưu để Q đạt cực tiểu với giá trị Q'' ;

u''' là u'' chuyển vị; $\left(\frac{\partial Q''}{\partial x} \right)'$ là chuyển vị của $\frac{\partial Q''}{\partial x}$.

Quá trình xác định cực tiểu của phiếm hàm đã dẫn tới điều kiện:

$$\frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{u=u''} + \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial Q''}{\partial x} \right)' . (A(t).x + B(t).u) \right] \Big|_{u=u''} = 0 \quad (7-158)$$

Trong đó G chỉ biểu thức (7-156).

Từ (7-158), cuối cùng ta xác định được điều khiển tối ưu u'' :

$$U''(t) = - R^{-1}(t).B^T(t). \left(\frac{\partial Q''}{\partial x} \right) \quad (7-159)$$

Nếu ta muốn tổng hợp điều khiển tối ưu tuyến tính như là hàm của các tọa độ thì thay cho tiêu chuẩn chất lượng Q'' phải lấy dạng toàn phương:

$$Q''(x, t) = \frac{1}{2} \dot{x}' . P . x \quad (7-160)$$

Dem thay thế phương trình (7-159) và (7-160) vào phương trình Belman (7-157) ta nhận được phương trình ma trận Riccati:

$$-\frac{dP(t)}{dt} = -P(t).B(t).R_2^{-1}.B'(t).P(t) + P(t).A(t) + A'(t)P(t) + R_1(t) \quad (7-161)$$

Về mặt lý thuyết, ma trận $P(t)$ có thể xác định được nhờ việc lấy tích phân phương trình (7-161). Sau khi tính được $P(t)$, và vì $P(t)$ đối xứng cho nên nhờ các biểu thức (7-159) và (7-160) ta xác định được tác động điều khiển tối ưu:

$$u''(x, t) = - R_2^{-1}(t).B^{-1}(t).P(t).x(t) \quad (7-162)$$

Đối với hệ thống dừng, phiếm hàm chất lượng có dạng:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'(t).R_1.x(t) + u'(t).R_2.u(t)).dt \quad (7-163)$$

Trong đó R_1 và R_2 là các ma trận hằng xác định dương. Điều kiện $\lim_{T \rightarrow \infty} P(T) = 0$, lúc này phương trình Riccati (7-161) sẽ trở thành phương trình đại số Riccati dạng ma trận, phi tuyến sau:

$$-PBR_2^{-1}B'P + PA + A'P + R_1 = 0 \quad (7-163)$$

Giải phương trình (7-163) ta xác định được ma trận hằng P .

Điều khiển tối ưu lúc này sẽ là:

$$U^0(x, t) = -R_2^{-1}.B'.P.x = -K.x \quad (7-164)$$

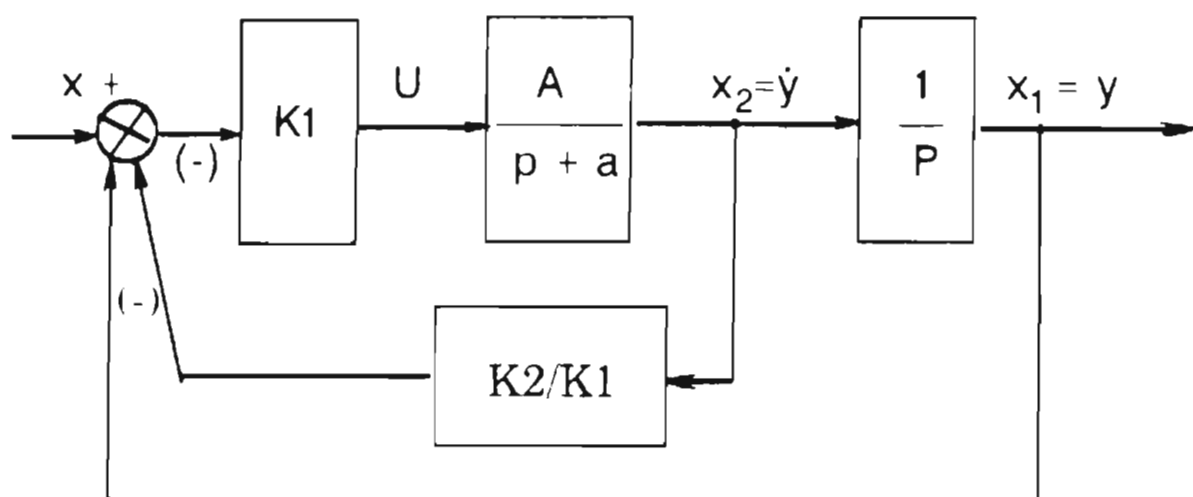
Từ phương trình (7-164) rõ ràng muốn biết được $u^0(t)$ ngoài R_2 , B đã biết và P đã xác định từ (7-163) thì bắt buộc phải biết tất cả n trạng thái của véc tơ trạng thái x nghĩa là phải đo được chính xác tín hiệu ra $x_1(t)$ và $(n - 1)$ thành phần đạo hàm của nó. Đây là một yêu cầu rất nghiêm ngặt.

Trong thực tế, ta thường gặp bài toán xác định điều khiển tối ưu $u^0(t)$ là đại lượng vô hướng. Đặc biệt trong các bài toán phức tạp như điều khiển vũ trụ, trong các hệ thống nhiều chiều ta mới phải xác định véc tơ điều khiển tối ưu $u^0(t)$ nhiều chiều.

3. Các ví dụ ứng dụng

Ví dụ 7-7. (Dựa vào phương trình Riccati 7-163).

Cho hệ thống điều khiển cấp hai vẽ trên hình 7-17



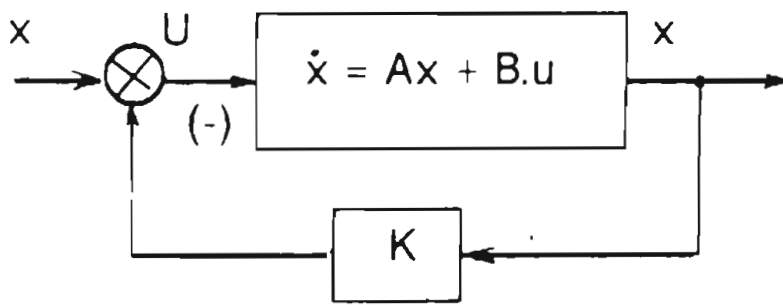
Hình 7-17.

Đối tượng điều khiển có hàm truyền đạt: $W_{DT}(p) = \frac{A}{p(p+a)}$

Biến trạng thái $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$;

Phương trình trạng thái có dạng:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \cdot U \quad (7-165)$$



Hình 7-18.

Phản hồi trạng thái dạng tổng quát như đã vẽ trên hình 7-18.

Phương trình điều khiển:

$$u = -K.x = -[k_1 \quad k_2] \cdot x \quad (7-166)$$

Phiếm hàm chất lượng:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x' R_1 x + u' R_2 u) dt$$

Trong đó $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix}$; $R_2 = r_2$; $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

Phương trình Riccati (7-163) sẽ là:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \cdot r_2^{-1} \cdot [0 \quad A] \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Hay là:

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11}-ap_{12} \\ p_{11}-ap_{12} & 2p_{12}-2ap_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_2^{-1}A^2p_{12}^2 & r_2^{-1}A^2p_{12}p_{22} \\ r_2^{-1}A^2p_{12}p_{22} & r_2^{-1}A^2p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dạng vô hướng, vì tính chất đối xứng của ma trận nên chỉ còn có 3 phương trình:

$$\begin{aligned} 1 - A^2 \cdot r_2^{-1} p_{12} &= 0 \\ p_{11} - ap_{12} - A^2 r_2^{-1} \cdot p_{12} \cdot p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - 2a \cdot p_{22} + r_1 - A^2 \cdot r_2^{-1} \cdot p_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7-167)$$

Từ (7-167) ta giải ra nghiệm p_{ij} :

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sqrt{\frac{a^2 r_2}{A^2} + \frac{2\sqrt{r_2}}{A}} + r_1 \\ p_{12} &= -\frac{1}{A} \sqrt{r_2} \\ p_{22} &= -\frac{ar_2}{A^2} + \frac{\sqrt{r_2}}{A} \cdot \sqrt{\frac{a^2 r_2}{A^2} + \frac{2\sqrt{r_2}}{A}} + r_1 \end{aligned} \quad (7-168)$$

$$\begin{aligned} \text{Điều khiển tối ưu} \quad U^0(x, t) &= -R_2^{-1} \cdot B' \cdot P \cdot x = -K \cdot x \\ K &= +R_2^{-1} B' \cdot P \end{aligned} \quad (7-169)$$

$$\text{Trong đó} \quad R_2^{-1} = r_2^{-1}; \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (7-170)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

Thay thế (7-168) và (7-170) vào (7-169) ta sẽ xác định được ma trận K và điều khiển tối ưu $u^0(t)$.

Ví dụ 7-8. Cho hệ thống điều khiển mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} \cdot U \quad (7-171)$$

Hãy xác định điều khiển tối ưu U^0 để cho phiếm hàm chất lượng sau đây đạt giá trị cực tiểu:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} (x_1^2 + 0,25 \cdot u^2) dt \quad (7-172)$$

Đầu tiên ta xác định các dữ kiện của bài toán tối ưu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}; \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_2 = 0,25.$$

Áp dụng phương trình Riccati (7-163)

$$P \cdot A + A'P + R_1 - PBR_2^{-1}B'P = 0$$

$$P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0,1 \end{bmatrix} \cdot P + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0,25} [0 \quad 0,01] \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-173)$$

với

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix};$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11} - 0,1 \cdot p_{12} \\ 0 & p_{12} - 0,1 \cdot p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} - 0,1 \cdot p_{12} & p_{12} - 0,1 \cdot p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- 4 \cdot 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} p_{22}^2 & p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{12} \cdot p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta viết dạng vô hướng phương trình Riccati:

$$\begin{cases} 1 - 4 \cdot 10^{-4} \cdot p_{12}^2 = 0 \\ p_{11} - 0,1 \cdot p_{22} - 4 \cdot 10^{-4} \cdot p_{12} \cdot p_{22} = 0 \\ 2(p_{12} - 0,1 \cdot p_{22}) - 4 \cdot 10^{-4} \cdot p_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad (7-174)$$

Giải hệ (7-174) ta được:

$$P_{11} = 11,18; \quad p_{12} = 50; \quad p_{22} = 309. \text{ Hay là } p = \begin{bmatrix} 11,18 & 50 \\ 50 & 309 \end{bmatrix}$$

Do đó ma trận điều khiển theo (7-164):

$$\begin{cases} U^0(x, t) = -K.x \\ K = R_2^{-1}.B'.P \end{cases}$$

$$K = R_2^{-1}.B'.P = 4. \begin{bmatrix} 0 & 0,01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11,18 & 50 \\ 50 & 309 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12,36 \end{bmatrix}$$

Vậy điều khiển tối ưu $u^0(t)$ là:

$$U^0(t) = -K.x(t) = - \begin{bmatrix} 2 & 12,36 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} = -2x_1(t) - 12,36x_2(t)$$

$$U^0(t) = -2.x_1(t) - 12,36.x_2(t). \quad (7-175)$$

Nghiệm của bài toán $u^0(t)$ thể hiện qua (7-175), rõ ràng muốn cho phẩm hàm chất lượng Q đạt cực tiểu thì tác động điều khiển phải tỷ lệ tuyến tính với các biến trạng thái $x_1(t)$ và $x_2(t)$

Vì điều khiển tối ưu thực hiện phản hồi biến trạng thái do đó ta cần kiểm tra lại *điều kiện ổn định của hệ thống*.

$$\text{Từ phương trình trạng thái: } \begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ u = -K.x \end{cases} \quad (7-176)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có thể viết: } \quad \dot{x} &= A.x - B.Kx \\ \dot{x} &= (A - B.K).x \\ \dot{x} &= A_S.x \end{aligned}$$

Với $A_S = A - BK$. Để xét ổn định ta cần tính $PI - A_S$ với P là biến toán tử Laplace.

$$A_S = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 & -0,2236 \end{bmatrix}$$

$$pI - A_S = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0,02 & p + 0,2236 \end{bmatrix};$$

Phương trình đặc tính của hệ thống là:

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A_S) = \lambda^2 + 0,2236\lambda + 0,02 = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc tính là:

$$\lambda_{1,2} = -0,1118 \pm j0,086$$

Phần thực của nghiệm $-0,1118 < 0$, do đó hệ thống đã tổng hợp ổn định. Vậy điều khiển tối ưu $u^0(t)$ tính được theo (7-175) là hoàn toàn chấp nhận được.

7-10.2. Điều khiển tối ưu đối với một hệ thống xung - số

Từ chương 6, ta đã biết phương pháp lập phương trình trạng thái hệ thống xung số:

$$\begin{cases} x(i+1) = A_d \cdot x(i) + B_d \cdot u(i) \\ y(i) = C_d \cdot x(i) \end{cases} \quad (7-177)$$

với điều kiện đầu $x(i_0) = x_0$

Tiêu chuẩn tối ưu dạng toàn phương đối với hệ thống xung số có thể suy từ công thức (7-136) của hệ liên tục nếu ta đổi tích phân bằng tổng và các biến liên tục bằng các biến rời rạc:

$$Q = \sum_{i=i_0}^{i_1-1} [x'(i+1) \cdot R_1(i+1) \cdot x(i+1) + u'(i) \cdot R_2(i) \cdot u(i)] \quad (7-178)$$

Trong đó: $R_1(i+1) \geq 0; R_2(i) > 0$ với $i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1$

Khi giải bài toán tổng hợp điều khiển tối ưu nhờ phương pháp quy hoạch động TL[9] ta xác định được:

$$U(i) = -K(i) \cdot x(i) \quad (7-179)$$

trong đó với mọi $i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1$

Ma trận điều khiển tối ưu $K(i)$:

$$K(i) = \{R_2(i) + B'_d(i) \cdot [R_1(i+1) + P(i+1)]B_d(i)\}^{-1} \cdot B'_d(i) \cdot [R_1(i+1) + P(i+1)] \cdot A_d(i) \quad (7-180)$$

$$P(i) = A'_d(i) \cdot [R_1(i+1) + P(i+1)] \cdot [A_d(i) - B_d(i) \cdot K(i)] \quad (7-181)$$

với điều kiện biên: $P(i_1) = P_1$

Giá trị phiếm hàm tối ưu đối với điều khiển này:

$$Q^0 = x'(i_0) \cdot P(i_0) \cdot x(i_0) \quad (7-182)$$

Phương trình (7-180) và (7-181) có thể giải theo trình tự ngược. Đầu tiên, ứng với (7-181), theo $P(i+1)$ và $K(i)$ ta xác định được $P(i)$. Đối với $P(i+1)$ lấy bằng $P(i_1)$, i_1 có giá trị lớn bất kỳ.

Ví dụ 7-9. Hãy xác định luật điều khiển tối ưu rời rạc biết hệ thống có đối tượng điều khiển mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \cdot x(t) \end{aligned} \quad (7-183)$$

Phiếm hàm chất lượng:

$$Q = \sum_{i=0}^{i_1-1} [x_1^2(i+1) + 0,001 \cdot u^2(i)]$$

Chu kỳ cắt mẫu $T = 0,5$ s; $i_1 = 50$.

Giải.

– Bằng phương pháp đã biết ở chương 6, ta dễ dàng xác định được phương trình trạng thái hệ xung số từ phương trình trạng thái liên tục:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= A_d \cdot x(i) + B_d \cdot u(i) \\ y(i) &= C_d \cdot x(i) \end{aligned}$$

Trong đó: $A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix}$; $B_d = \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix}$; $C_d = [1, 0]$

– Nghiệm bài toán tối ưu được tính theo (7-180), (7-181):

$$U(i) = -K(i).x(i)$$

$$F(i) = \{R_2(i) + B'_d(i).[R_1(i+1) + P(i+1)].B_d(i)\}^{-1}.B'_d(i). \\ \cdot [R_1(i+1) + P(i+1)].A_d(i);$$

$$P(i) = A'_d(i).[R_1(i+1) + P(i+1)].[A_d(i) - B_d(i).K(i)];$$

$$i = 0, 1, \dots, i_1 = 1.$$

– Ta xác định các ma trận theo dữ kiện bài toán:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_2 = 0,001; \quad B_d = [0,00123 \quad 0,00488];$$

$$A'_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,488 & 0,951 \end{bmatrix};$$

– Ta tính toán $K(49)$ khi biết $P(50) = 0$:

$$K(49) = [0,001 + [0,00123 \quad 0,00488]. \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]. \\ \left[\begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix} \right]^{-1} [0,00123 \quad 0,00488]. \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]. \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} \\ = [1,228 \quad 0,599] = [k_1 \quad k_2]$$

$$U(49) = -K(49).x(49)$$

$$= -1,228.x_1(49) - 0,599.x_2(49).$$

Bây giờ ta tính:

$$P(49) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,488 & 0,951 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} \\ - \left[\begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix} \right] \cdot [1,228 \quad 0,599] = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4873 \\ 0,4873 & 0,2378 \end{bmatrix}.$$

Sau đó ta xác định:

$$\begin{aligned}
 K(48) = & \left[0,001 + \begin{bmatrix} 0,00123 & 0,00488 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4873 \\ 0,4873 & 0,2378 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00123 \\ 0,00488 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,00123 & 0,00488 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} 0,9985 & 0,4873 \\ 0,4873 & 0,2378 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,488 \\ 0 & 0,951 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,77 & 3,87 \end{bmatrix} \right] ;
 \end{aligned}$$

$$U(48) = - K(48) \cdot x(48) = - 4,77 \cdot x_1(48) - 3,87 \cdot x_2(48).$$

Tiếp tục tính toán nhờ máy tính, kết quả cuối cùng ta sẽ xác định được với $i = 40$, ma trận $K(i)$ sẽ xem là hằng số $K(i) \approx \begin{bmatrix} 25 & 63 \end{bmatrix}$. Vậy điều khiển tối ưu cuối cùng sẽ là:

$$u(i) = - \begin{bmatrix} 25 & 63 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{bmatrix}$$

CÁC BÀI TẬP LỚN VỀ ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC ĐIỀU KHIỂN XUNG SỐ VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Phần này trình bày các bài tập lớn xuyên suốt từ chương 1 đến chương 7 của cuốn sách.

Nội dung bao gồm

- Xây dựng sơ đồ cấu trúc từ sơ đồ nguyên lý ;
- Xét ổn định của hệ thống tuyến tính liên tục ;
- Tính quá trình quá độ của hệ thống ;
- Xác định điều kiện điều khiển được và quan sát được của hệ thống ;
- Khảo sát phương pháp phân tích và đánh giá chất lượng của hệ điều khiển xung số ;
- Giải bài toán điều khiển tối ưu để xác định luật điều khiển tối ưu cho hệ thống xung số được giải trình trong năm bài tập lớn.

Bài 1 về điều khiển tuyến tính liên tục, dành cho các chương từ 1 đến 5.

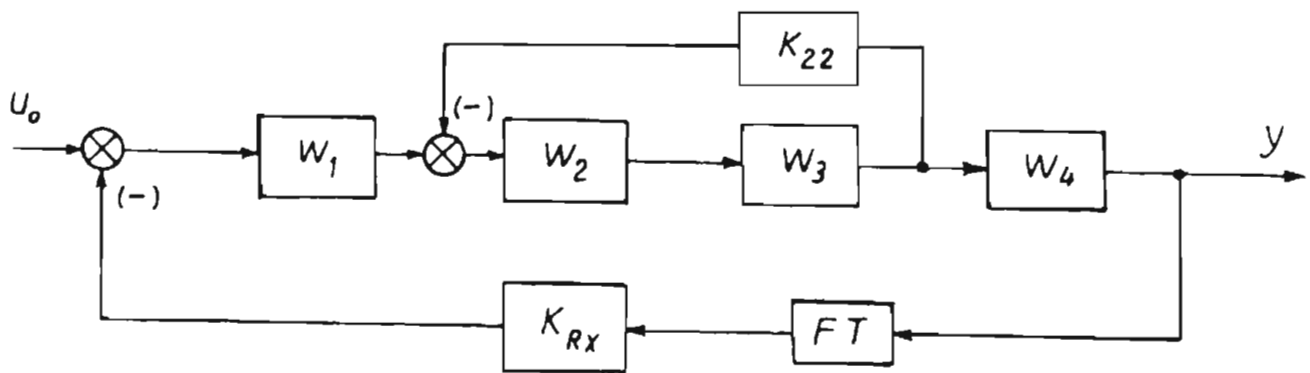
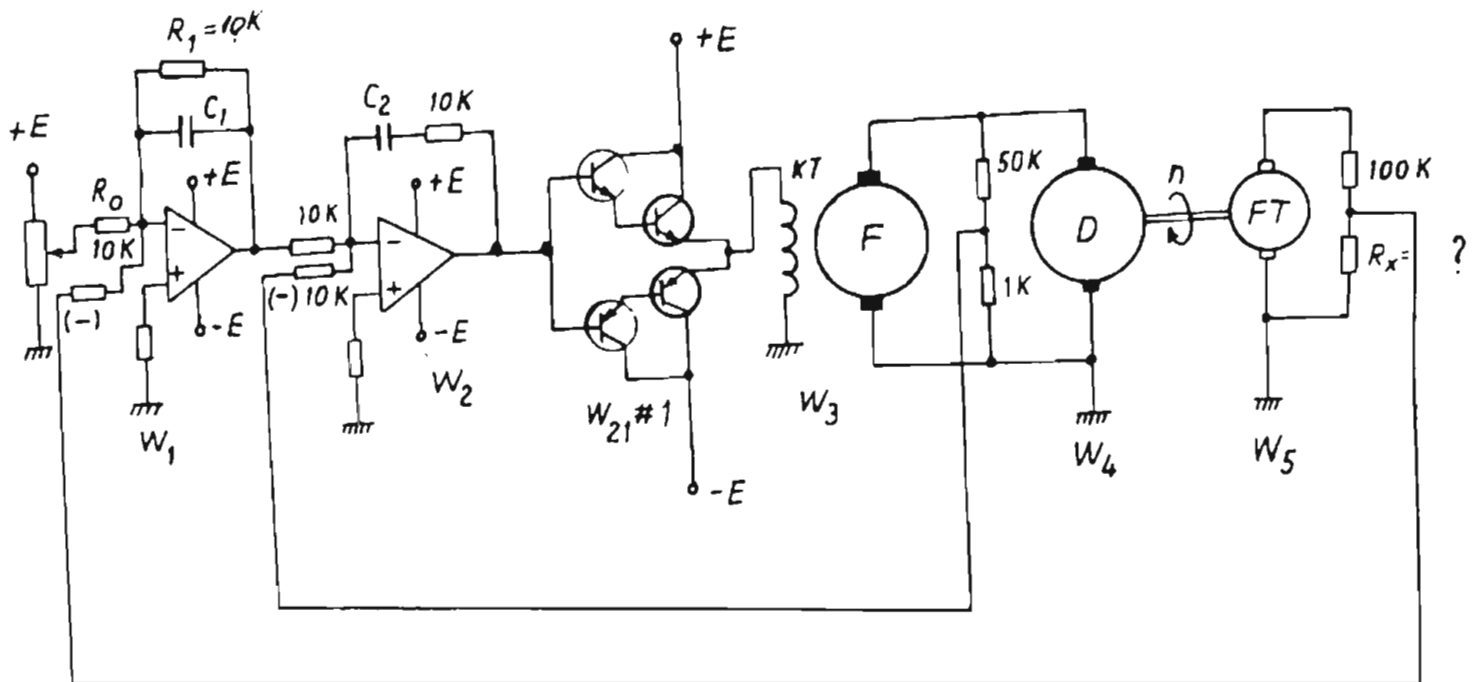
Bài 2, 3, 4 về điều khiển xung số và điều khiển tối ưu, dành cho hai chương 6 và 7.

Tất cả các bài tập lớn đều được viết theo ngôn ngữ Pascal các ngôn ngữ C cho chương trình mô hình hoá hệ thống. Các list chương trình và kết quả được in kèm theo.

ĐỀ TỔNG QUÁT

Bài tập lớn lý thuyết ĐKTD

Cho hệ thống mô tả bởi sơ đồ sau đây



Đề bài

I) Cho biết các số liệu :

- Khuếch đại lặp (KD dòng) $W_{21} = 1$
- Máy phát F có $T_f = 0,25$; $K_f = 1,6$
- Động cơ $K_d = 6,5$; $T_u = 0,2$; $T_C = 0,1$
- Máy phát tốc độ FT có $K_{ft} = 0,125$

II) Nhiệm vụ

- 1. Viết phương trình hàm truyền đạt và phương trình trạng thái từng phần tử có trong hệ thống ; Lập sơ đồ cấu trúc hệ thống.
- 2. Cho giá trị C_1 và C_2 (từng nhóm một, mỗi nhóm 2 người). Hãy xác định giá trị R_1 để cho hệ thống ổn định (giá trị $= R_1$ max).
- 3. Vẽ đặc tính tần số biên độ và pha lôgarit của toàn hệ thống và tính K_1 tới hạn (của W_1).
- 4. Tính quá trình quá độ hệ thống theo phương pháp số TUSTIN và lập chương trình bằng ngôn ngữ PASCAL hoặc C (chương trình bắt buộc phải in máy tính) với K bất kỳ và với K_1 bằng $0,8 K_1$ tới hạn (hệ đã ổn định).
- 5. Từ phương trình hàm truyền đạt, hãy viết phương trình trạng thái toàn hệ thống và xác định điều kiện điều khiển được và quan sát được qua việc tính hạng ma trận P và L theo giá trị K_1 bằng $0,8 K_1$ tới hạn.

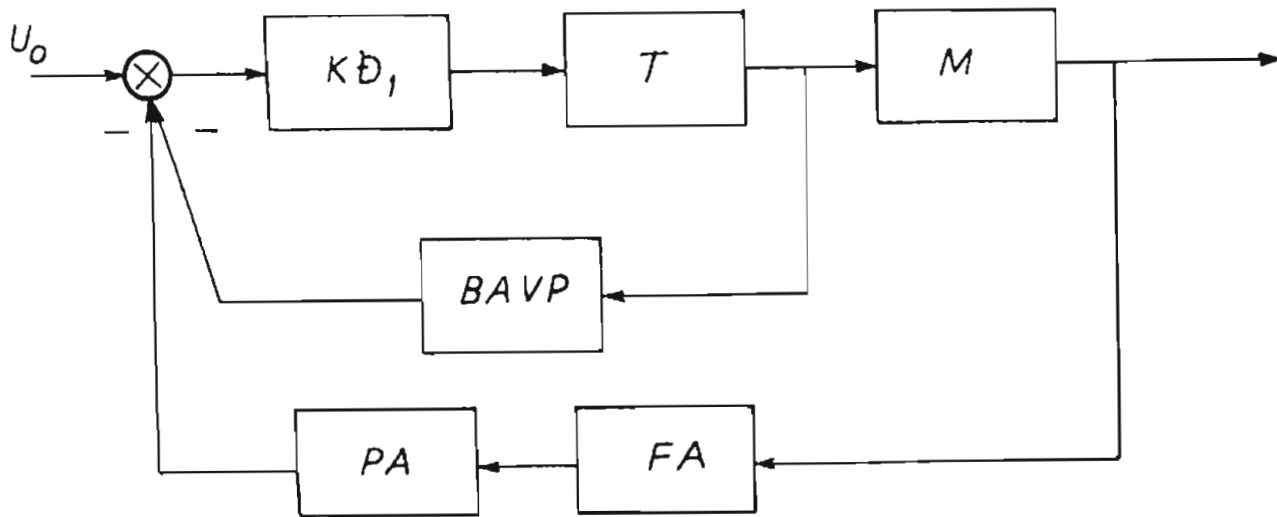
Các số liệu tính toán cho từng nhóm sinh viên

Nhóm	C_1	C_2	Họ tên học sinh
1	1 MF	10 MF	
2	2	8	
3	3	6	
4	4	5	
5	5	4	
6	6	3	
7	7	1	

Nhóm	C ₁	C ₂	Họ tên học sinh
8	8	2	
9	3	5	
10	1	5	
11	5	1	
12	4	2	
13	6	1	
14	7	3	
15	8	5	
16	5	5	
17	6	2	
18	6	4	
19	3	2	
20	3	1	
21	3	4	
22	3	8	
23	3	3	
24	4	1	

Bài 1

Cho hệ thống ĐKTD theo sơ đồ sau đây



Trong đó :

Transistor $W_T(p) = \frac{K}{t_1 p + 1} = \frac{12}{0,01p + 1}$

Động cơ $W_M(p) = \frac{7}{0,1p^2 + 0,2p + 1}$

Máy phát tốc $K_{pt} = 0,125$

Biến áp vi phân $W_{BAVP}(p) = \frac{0,08p}{0,08p + 1}$

1. Đơn giản sơ đồ khối để tìm W kín của hệ thống
2. Xác định phương trình đặc tính của hệ kín

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

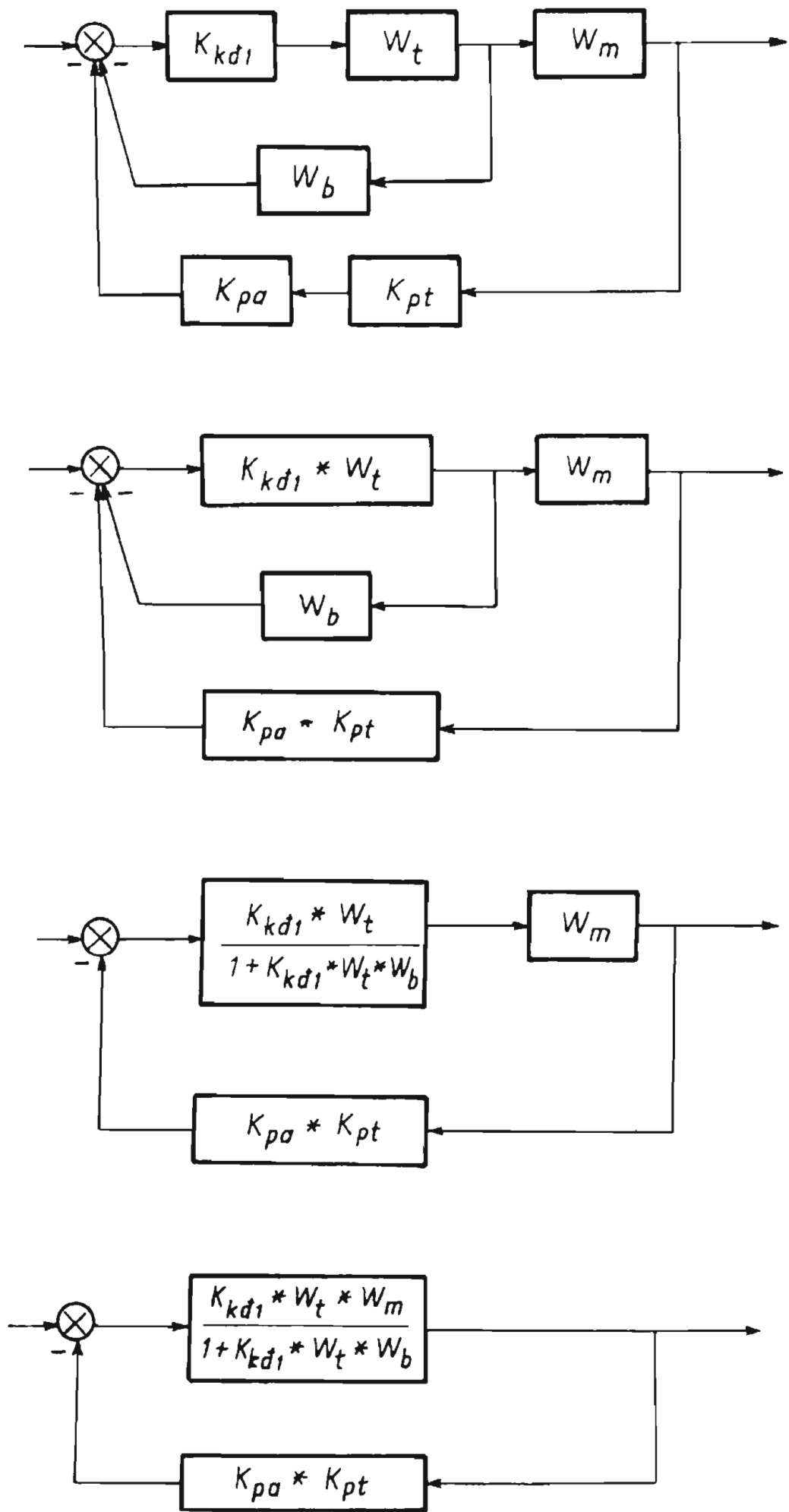
3. Viết phương trình trạng thái hệ thống

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

4. Tính quá trình quá độ của hệ thống theo phương pháp số TUSTIN hay Runge-Koutta (bằng C hoặc Pascal)

5. Xét điều kiện điều khiển được và quan sát được của hệ thống



Hình BT1-4b.

6 Tính quá trình quá độ theo phương pháp trạng thái và đối chiếu kết quả với câu 4.

Câu 1

Bằng cách áp dụng các sơ đồ biến đổi cấu trúc, ta biến đổi sơ đồ trên như hình BT1-1. Vậy ta có W_{kin} của hệ thống sẽ là

$$W_{kin} = \frac{\frac{K_{kdl} * W_t * W_m}{1 + K_{kdl} * W_t * W_b}}{1 + \frac{W_{kdl} * W_t * W_m}{1 + K_{kdl} * W_t * W_b} * K_{pa} * K_{pt}}$$

Trong đó ta có các giá trị như sau

$$\text{Transistor} \quad W_T(p) = \frac{K}{t_{lp} + 1} = \frac{12}{0,01p + 1}$$

$$\text{Motor :} \quad W_M(p) = \frac{7}{0,1p^2 + 0,2p + 1}$$

$$\text{Máy phát tốc} \quad K_{pt} = 0,125$$

$$\text{Biến áp vi phân} \quad W_{BAVP(p)} = \frac{0,08p}{0,08p + 1}$$

Thay vào ta tính được

$$W_{kin} = \frac{420(0,08p + 1)}{0,00008p^4 + 0,48916p^3 + 1,0788p^2 + 5,51p + 6,25}$$

Câu 2 :

Phương trình đặc tính của hệ thống :

$$A(p) = 0,00008p^4 + 0,48916p^3 + 1,0788p^2 + 5,51p + 6,25$$

Các hệ số :

$$a_0 = 0,00008$$

$$a_1 = 0,48916$$

$$a_2 = 1,0788$$

$$a_3 = 5,51$$

$$a_4 = 6,25$$

$$k_0 = 33,6$$

$$k_1 = 420.$$

Nhận thấy các hệ số a_i của phương trình đặc tính đều dương nên hệ có khả năng ổn định.

Xét tính ổn định theo tiêu chuẩn của Routh

Từ phương trình đặc tính của hệ thống, ta thành lập bảng Routh như sau :

0,00008	1,0788	6,25
0,48916	5,51	
0,52727	3,05725	
1,40977		
3,2094		

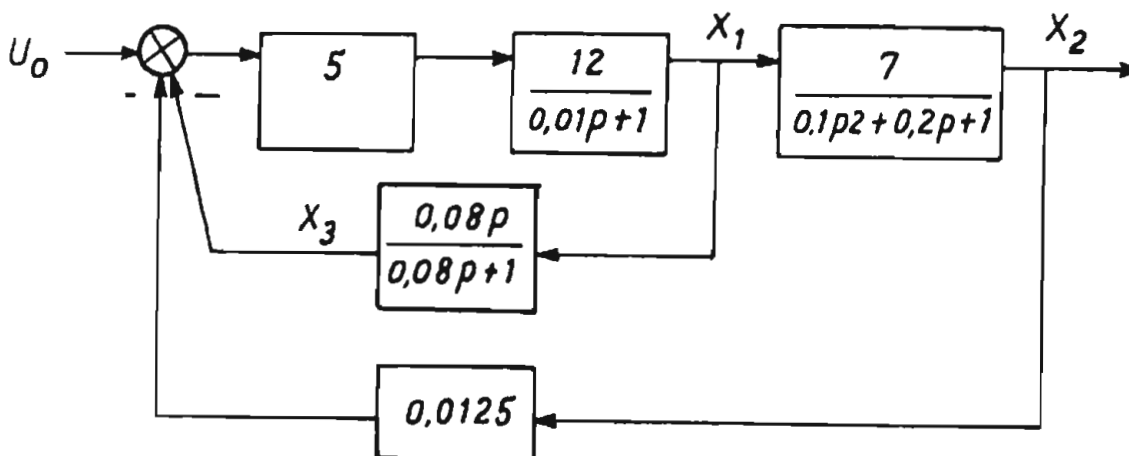
Như vậy, các số hạng ở cột thứ nhất của bảng Routh dương, nên hệ thống đã cho là ổn định.

Câu 3

Viết phương trình trạng thái hệ thống

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

Ta chọn các biến trạng thái như sau



Hình BT1-2

Với các biến trạng thái như trên, ta có các phương trình

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{7}{0,1p^2 + 0,2p + 1}$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{0,08p}{0,08p + 1}$$

$$\frac{x_1}{U_0 - x_3 - 0,0125x_2} = \frac{60}{0,01p + 1}$$

Từ các phương trình trên suy ra

$$\begin{cases} 0,1p^2x_2 + 0,2px_2 = 7x_1 + x_2 \\ 0,08px_3 - 0,08px_1 = -x_3 \\ 0,01px_1 = x_1 - 60x_3 \quad 0,0125x_2 + 60u_0 \end{cases}$$

Đặt $x_4 = p x_2$

Tương ứng ta có

$$px_1 = \dot{x}_1$$

$$px_2 = \dot{x}_2$$

$$px_3 = \dot{x}_3$$

$$px_4 = \dot{x}_4$$

Vậy ta có :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 100x_1 - 1.25x_2 & 6000x_3 + 0x_4 + 6000u_0 \\ \dot{x}_2 = & x_4 \\ \dot{x}_3 = 100x_1 - 1.25x_2 & 6012.5x_3 + 6000u_0 \\ \dot{x}_4 = 70x_1 + x_2 & 2x_4 \end{cases}$$

Phương trình viết dưới dạng ma trận $\dot{X} = AX + BU$ với

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1,25 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 1,25 & 6012,5 & 0 \\ 70 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nhận thấy $y = x_2$, vậy phương trình $Y = CX$ có các ma trận như sau

$$Y = y_2$$

$$C = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

Câu 4

Tính quá trình quá độ của hệ thống t phương pháp số Tustin
Ta có hàm truyền như sau

$$W_{\text{kin}}(p) = \frac{k_0 p + k_1}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}$$

Đổi biến

$$p = \frac{2}{T} \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad \text{ta có}$$

$$W_{\text{kin}}(Z) = \frac{k_0 \frac{2(Z-1)}{T(Z+1)} + k_1}{a_0 \left(\frac{2(Z-1)}{T(Z+1)} \right)^4 + a_1 \left(\frac{2(Z-1)}{T(Z+1)} \right)^3 + a_2 \left(\frac{2(Z-1)}{T(Z+1)} \right)^2 + a_3 \left(\frac{2(Z-1)}{T(Z+1)} \right) + a_4}$$

$$= \frac{k_0 2(Z-1)T^3(Z+1)^3 + k_1 T^4(Z+1)^4}{16a_0(Z-1)^4 + 8a_1 T(Z-1)^3(Z+1) + 4a_2 T^2(Z-1)^2(Z+1)^2 + 2a_3 T^3(Z-1)(Z+1)^3 + a_4 T^4(Z+1)^4}$$

$$\text{Xét tử số} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

trong đó

$$A_0 = 2k_0T^3 + k_1T^4)Z^4$$

$$A_1 = (4k_0T^3 + 4k_1T^4)Z^3$$

$$A_2 = 6k_1T^4Z^2$$

$$A_3 = (-4k_0T^3 + 4k_1T^4)Z$$

$$A_4 = 2k_0T^3 + k_1T^4$$

$$\text{Xét mẫu số} = -B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

trong đó

$$B_0 = (16a_0 + 8a_1T + 4a_2T^2 + 2a_3T^3 + a_4T^4)Z^4$$

$$B_1 = (64a_0 + 16a_1T + 4a_3T^3 + 4a_4T^4)Z^3$$

$$B_2 = (96a_0 - 4a_2T^2 + 6a_4T^4)Z^2$$

$$B_3 = (-64a_0 + 16a_1T - 4a_3T^3 + 4a_4T^4)Z$$

$$B_4 = (16a_0 - 8a_1T + 4a_2T^2 - 2a_3T^3 + a_4T^4)$$

Phương trình đại số

$$B_0Z^4Y(Z) + B_1Z^3Y(Z) + B_2Z^2Y(Z) + B_3Z^1Y(Z) + B_4Y(Z)$$

$$= A_0Z^4U_0(Z) + A_1Z^3U_0(Z) + A_2Z^2Y_0(Z) + A_3Z^1U_0(Z) + A_4U_0$$

Phương trình sai phân tương ứng :

$$B_0Y[k+4] + B_1Y[k+3] + B_2Y[k+2] + B_3Y[k+1] + B_4Y[k]$$

$$= A_0U_0[k+4] + A_1U_0[k+3] + A_2U_0[k+2] + A_3U_0[k+1] + A_4U_0[k].$$

Giả thiết tín hiệu vào là $U_0(t) = U_0$ với $t \geq 0$ ta có
 $U_0[k+4] = U_0[k+3] = U_0[k+2] = U_0[k+1] = U_0[k] = U_0$

Thay vào trên ta được :

$$B_0Y[k+4] + B_1Y[k+3] + B_2Y[k+2] + B_3Y[k+1] + B_4Y[k]$$

$$= (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4)U_0$$

Vậy ta có :

$$Y[k+4] = \frac{-(B_1 Y[k+3] + B_2 Y[k+2] + B_3 Y[k+1] + B_4 Y[k])}{B_0} + \frac{(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4)U_0}{B_0}$$

Từ đó ta có thể tính được $Y[k]$ của hệ thống (chương trình tính viết bằng C kèm theo).

Câu 5

Xét điều kiện điều khiển được các quan sát được của hệ thống

Ta đã có các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1,25 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 1,25 & 6012,5 \\ 70 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 6000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta lập ma trận P như sau

$$P = [BAB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

Hệ là điều khiển được khi P có hạng bằng n (ở đây $n = 4$).

Tính cụ thể các giá trị ta có ma trận P sau khi biến đổi có bốn hàng và bốn cột, mặt khác $\det(P) = (525)^4 10^{16}$ khác 0, vậy $\text{rank}(P) = 4$. Hệ thống là điều khiển được.

Xét điều kiện quan sát được của hệ thống

Lập ma trận L như sau

$$L = [C' \quad A'C' \quad A'^2C' \quad A'^3C']$$

Hệ là quan sát được nếu L có hạng bằng 4

Ta đã có

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 1.25 & 6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 1.25 & 6012,5 & 0 \\ 70 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

Cuối cùng ta tính được $\det(L)$ khác 0 và L là ma trận (4,4)
Do đó $\text{rank}(L) = 4$ và hệ thống đã cho là quan sát được.

TUSTIN.C

```
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <graphics.h>
#include "menugrp.c"
#define u0 1
#define FALSE 0
#define TRUE 1
const numpoint=450 ;
void getdata() ;
void quit() ;
void input() ;
void calculate() ;
void goodbye() ;
float a[8] = {0.00008, 0.48916, 1.0788, 5.52, 6.25, 0.1, 33.6, 420}
DUTY duty1_list[] =
{
    {1, "DATA", getdata},
    {2,"QUIT",quit }
} ;
```

```

DUTY duty2_list[] =
{
    {1,"a0",input},
    {2,"a1",input},
    {3,"a2",input},
    {4,"a3",input},
    {5,"a4",input},
    {6,"t",input},
    {7,"k0",input},
    {8,"k1",input}
} ;
ITEM item1_list[] =
{
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""}
} ;
ITEM item2_list[] =
{
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
    {0,0,0,0,""},
} ;
ITEM *last1-item,*last2-item ;
int start_left, start_top ;
int space ;
int heigh,width ;

```

```
int item1_num = 2 ;
int item2_num = 8 ;
int hold,ok ;
int k,imax,*gd,*gm ;
float AT,BT,CT,DT,ET,AM,BM,CM,DM,EM ;
float max ;
float y[500] ;
void setup()
{
    foreground-item = lightgray ;
    foreground-str = blue ;
    OFSX = 2 ; OFSY = 2 ;
    backgrouns-passive = white ;
    background-active = darkgray ;
    background-select = yellow ;
    backgrouns-frame = green ;
    maxscrX = getmaxx() ;
    maxscrY = getmaxy() ;
    /* khoi tao cac bien rieng cho menu theo chieu doc */
    start_left = 20 ;
    start_top = 20 ;
    space = 5 ;
    heigh = 30 ;
    width = 50 ;
    ok = 0 ;
}

ITEM *getting_from(DUTY*duty_list,ITEM*item_list,int item_num)
/* thu tuc nay thuc hien dinh vi cac item */
{
    inti ;
    DUTY *duty_pointer ;
```

```

ITEM *item_pointer ;
duty_pointer = duty_list ; item_pointer = item_list ;
for(i=1 ;i<=item_num ;i++)
{
    item_pointer->left = start_left
    item_pointer->top = start_top ;
    item_pointer->right = start_left + width ;
    item_pointer->bottom = start_top + height ;
    strcpy(item_pointer->name,duty_pointer->name)
    start_top = item_pointer->bottom + space ;
    duty_pointer++ ; item_pointer++ ;
}
return(-item_pointer) ;
}
void show_menu(ITEM *item_list,int item_num)
{
    ITEM *item_pointer ;
    int i ;
    item_pointer = item_list ; for (i=1 ;i<=item_num ;i++)
    {
        drawicon(item_pointer,1,0) ;
        item_pointer++ ;
    }
}
void do_it(DUTY *duty_list,int identifier)
{
    DUTY *duty_pointer ;
    duty_pointer = duty_list ;
    while (((*duty_pointer).identifier) != identifier)
{

```

```

        duty_pointer++ ;
    }
    ((*duty_pointer).duty() ;
}

void task(DUTY *duty_list,ITEM *item_list,ITEM *last_item,int item-num)
{
    int ch,identifier ;
    ITEM *CURRENT_ITEM ;
    identifier = 1 ;
    CURRENT_ITEM = item_list ;
    show_menu(item_list,item-num) ;
    drawicon(item_list,0,1) ;
    ch=0 ;
    while(ch !=27)
    {
        ch=getch() ;
        switch(ch)
        {
            case 72 :/* up */
                drawicon(CURRENT_ITEM,0,0) ;
                identifier-- ;
                CURRENT_ITEM-- ;
                if(identifier==0)
                {
                    identifier = item-num ;
                    CURRENT_ITEM=last_item ;
                }
                drawicon(CURRENT_ITEM,0,1) ;
                break ;
            case 80 :/* down */

```

```

        drawicon(CURRENT_ITEM,0,0) ;
        identifier++ ;
        CURRENT_ITEM++ ;
        if(identifier==item_num+ 1)
        {
            identifier=1 ;
            CURRENT_ITEM=item_list ;
        }
        drawicon(CURRENT_ITEM,0,1) ;
        break ;
    case 13 :/* select */
        /*handsome(CURRENT_ITEM) ;*/
        hold=identifier ;
        do_it(duty_list,identifier) ;
        break ;
    case 27 /*finish*/
        break ;
    }
}

void display()
{
    setcolor(YELLOW) ;
    moveto(100,400) ;
    for(k=1 ;k<numpoint ; k++)
        lineto(100+ k,400-(300*y[k]/max)) ;
}

void input()

```

```
char str[7],*s ;
setfillstyle(CLOSE_DOT_FILL,BLACK) ;
bar(215,140,370,160) ;
hold— ;
if(hold==5)
    strcpy(str,"t") ;
else
    if(hold==6)
        strcpy(str,"k0") ;
    else
        if(hold==7)
            strcpy(str,"k1") ;
        else
        {
            strcpy(str,"a") ;
            itoa(hold,s,10) ;
            strcat(str,s) ;
        }
    strcat(str,"=") ;
outtextxy(230,148,str) ;
gotoxy(33,10) ;
scanf("%f",&a[hold]) ;
setfillstyle(SOLID_FILL,DARKGRAY) ;
bar(81,41,619,439) ;
calculate() ;
setcolor(BLUE) ;
setlinestyle(SOLID_LINE,0,1) ;
line(100,400,100,45) ;
```

```

line(100,400,610,400) ;
if(test()==FALSE)
{
    sound(300) ;
    delay(100) ;
    nosound() ;
    outtextxy(215,140,"He thong khong on dinh") ;
    delay(1000) ;
    setfillstyle(SOLID_FILL,DARKGRAY) ;
    bar(215,140,570,160) ;
}
else
{
    setcolor(YELLOW) ;
    if(ok==TRUE)
        display() ;
    setcolor(BLUE) ;
}

settextstyle(1,0,1) ;
outtextxy(480,370,"Tin hieu ra y(t)") ;
settextstyle(0,0,1) ;
}
vod getdata()
{
    setfillstyle(SOLID_FILL,getbkcolor()) ;
    bar(0,0,73,100) ;
    show_menu(item2_list,8) ;
    drawicon(item2_list,0,1) ;
    task(duty2_list,item2_list,LAST2_ITEM,8) ;
    setfillstyle(SOLID_FILL,getbkcolor()) ;

```

```

        bar(0,0,73,480) ;
        show_menu(item1_list,2) ;
        drawicon(item1_list,0,1) ;
    }
int test()
{
    float b0,b1,b2,c0 ;
    b0 = (a[1]*a[2]-a[0]*a[3])/a[1] ;
    b2 = a[4] ;
    b1 = (a[3]*b0-a[1]*b2)/b0 ;
    c0 = b2 ;
    if (a[0]*b0*b1*c0>0)
        return(TRUE) ;
    else
        return(FALSE)
}

void calculate()
{
    float p1,p2,p3,p4 ;
    p1 = a[5] ;
    p2 = p1*a[5] ;
    p3 = p2*a[5] ;
    p4 = p3*a[5] ;

    AT = 2*a[6]*p3 + a[7]*p4 ;
    BT = 4*a[6]*p3 + 4*a[7]*p4 ;
    CT = 6*a[7]*p4 ;
    DT = 4*a[6]*p3 + 4*a[7]*p4 ;
    ET = 2*a[6]*p3 + a[7]*p4 ;

    AM = 16*a[0]+8*a[1]*p1 + 4*a[2]*p2 + 2*a[3]*p3 +
a[4]*p4 ;
    BM = 64*a[0] - 16*a[1]*p1 + 4*a[3]*p3 + 4*a[4]*p4 ;
    CM = 96*a[0] - 8*a[2]*p2+6*a[4]*p4 ;

```

```

DM = 64*a[0] + 16*a[1]*p1 - 4*a[3]*p3 + 4*a[4]*p4 ;
EM = 16*a[0] - 8*a[1]*p1 + 4*a[2]*p2 - 2*a[3]*p3 + a[4]*p4 ;
y[0] = 0 ;
y[1] = 0 ;
y[2] = 0 ;
y[3] = 0 ;
max = 0 ;
if ( !AM)
{
    sound(300) ;
    delay(1000) ;
    nosound() ;
    outtextxy(215,140,"Khong tinh duoc tin hieu ra") ;
    ok = FALSE ;
}
else
{
    max = 0 ;
    for(k = 0 ; k<numpoint - 4 ; k++)
    {
        y[k+4] = (-(BM*y[k+3] + CM*y[k+2]
                    + DM*y[k+1] + EM*y[k]) +
                    (AT + BT + CT + DT + ET)*u0)/AM ;
        if (y[k+4]>max)
            max = y[k+4] ;
    }
    ok = TRUE ;
}
}

```

```
void quit()
{
    closegraph() ;
    goodbye() ;
    exit(0) ;
}

void ready()
{
    rectangle(80,40,620,440) ;
    setfillstyle(SOLID_FILL,DARKGRAY) ;
    bar(81,41,618,438) ;
    setcolor(BLUE) ;
    setlinestyle(SOLID_LINE,0,1) ;
    line(100,400,100,45) ;
    line(100,400,610,400) ;
    settextstyle(1,0,1) ;
    outtextxy(130,450,"Do thi ham qua do cua he thong bac 4")
    outtextxy(480,370,"Tin hieu ra y(t)") ;
    outtextxy(240,15,"Phuong phap TUSTIN") ;
    ok = TRUE ;
    settextstyle(0,0,1) ;
}

void goodbye()
{
    clrscr()
    printf("\n Program Tinh qua trinh qua do he thong DKTD\n
    printf(" Copyright 10/1994\n") ;
}

id main()
```

```
{
    initialgraph() ;
    ready() ;
    setup() ;
    LAST1_ITEM=getting_form(duty1_list,item1_ ;list,2) ;
    LAST2_ITEM=getting_form(duty2_list,item2_list,8) ;
    task(duty1_list,item1_list,LAST1_ITEM,2) ;
    closegraph() ;
    goodbye() ;
}
```

menugrp.c

```
#include<graphics.h>
```

```
#include<alloc.h>
```

```
#include "menugrp.h"
```

```
void show_str(int x,int y,char*str,int color)
```

```
//thu tuc nay hien dong chu tai toa do x,y voi mau
```

```
{
    int old_color ;
    old_color=getcolor() ;
    setcolor(color) ;
    outtextxy(x,y,str) ;
    setcolor(old_color) ;
}
```

```
void initialgraph()
```

```
{
    int gdriver=DETECT, gmode,errorcode ;
    initgraph(&gdriver,&gmode,"C :\\TC\\\"bgi\"") ;
    errorcode=graphresult()
    if(errorcode !=grOk)
    {
        printf("Graphics error :%s\\n",grapherrormsg(errorcode)) ;
        printf("Press any key to halt :)") ;
    }
}
```

```

    getch() ;
    exit(1) ;
}
}

void rectangles(int left,int top,int right,int bottom,int line_style, int color)
//thu tục này vẽ hình chữ nhật với đường kẻ, màu kẻ cho trước
{
    int old_color ;
    struct linesettingstype*old_style ;
    old_color = getcolor() ;
    getlinesettings(ols_style) ;
    setcolor(color) ;
    setlinestyle(line_style,1,1) ;
    rectangle(left,top,right,bottom) ;
    setcolor(old_color) ;
    setlinestyle(old_style->linestyle,1,old_style->thickness) ;
}

void bars(int left,int top,int right,int bottom,int fill_type,int color)
//thu tục này tô màu hình chữ nhật với màu tô, kiểu tô
cho trước
{
    setfillstyle(fill_type, color) ;
    bar(left,top,right,bottom) ;
}

void stars(int x,int y,int time)
{
    delay(time) ;
    putpixel(x,y,DARKGRAY) ;
    putpixel(x+ 1,y,DARKGRAY) ;
    putpixel(x,y+ 1,DARKGRAY) ;
}

```

```

    putpixel(x+ 1,y+ 1,DARKGRAY) ;
    delay(time) ;
    putpixel(x,y,LIGHTGRAY) ;
    putpixel(x+ 1,y,LIGHTGRAY) ;
    putpixel(x+ 1,y+ 1,LIGHTGRAY) ;
    putpixel(x,y+ 1,LIGHTGRAY) ;
    delay(time) ;
    putpixel(x,y,WHITE) ;
    putpixel(x+ 1,y,WHITE) ;
    putpixel(x,y+ 1,WHITE) ;
    putpixel(x+ 1,y+ 1,WHITE) ;
}

#pragma warn-sus
void fillpolys(int num_point,char*poly_point[],int fill_type,int color)
//thu tuc nay to mau mot da giac
{
    setfillstyle(fill_type,color) ;
    fillpoly(num_point,poly_point) ;
}

#pragma warn.sus
void drawicon(ITEM*current_item,int mode,int swapping)
//thuc hien ve mot item va voi day du thuc tinh cua no
{
    int old_color,centerx,centery,top,bottom ;
    itn p1[12],p2[12] ;
    p1[0] = current_item->left ;
    p1[1] = current_item->bottom ;
    p1[2] = current_item->left ;

```

```

p1[3] = current_item->top ;
p1[4] = current_item->right ;
p1[5] = current_item->top ;
p1[6] = current_item->right - OFSX ;
p1[7] = current_item->top + OFSY ;
p1[8] = current_item->left } OFSX ;
p1[9] = current_item->top + OFSY ;
p1[10] = current_item->left + OFSX ;
p1[11] = current_item->bottom - OFSY ;
p2[0] = current_item->left ;
p2[1] = current_item->bottom ;
p2[2] = current_item->right ;
p2[3] = current_item->bottom ;
p2[4] = current_item->right ;
p2[5] = current_item->top ;
p2[6] = current_item->right - OFSX ;
p2[7] = current_item->top + OFSY ;
p2[8] = current_item->right - OFSX ;
p2[9] = current_item->bottom - OFSY ;
p2[10] = current_item->left + OFSX ;
p2[11] = current_item->bottom - OFSY ;
if(mode)==1)//chi ve nen khi goi lan dau tien
{
    //rectangles(p1[0]-2,p1[3]-2,p1[4]+ 2,SOLIDLINE,GREEN) ;
    bars(p1[0],p1[3],p1[4],p1[1],SOLID_FILL,FOREGROUND_ITEM) ;
    centerx=(p1[0] + p1[4] - textwidth(current_item->name) 1)/2 ;
    centery=(p1[3] + p1[1] - 10)/2 ;
    show_str(centerx,centery,current_item->nama,FORE_ROUND_STR);
    //rectangles(centerx-2,centery-
2,centerx+ 20,centery+ 20,DOTTED_LINE,BLACK) ;
}

```

```

if(swapping==1)
    {
        //select
        pragma warn-sus
        fillpolys(6,p1,SOLID_FILL,BACKGROUND_ACTIVE) ;
        fillpolys(6,p2,SOLID_FILL,BACKGROUND_PASSIVE) ;
        pragma warn.sus
    }
else
    {
        pragma warn-sus
        fillpolys(6,p1,SOLID_FILL,BACKGROUND_PASSIVE) ;
        fillpolys(6,p2,SOLID_FILL,BACKGROUND_ACTIVE) ;
        pragma warn.sus
    }
}

/*void handsome(ITEM*current_item)
//thu tuc nay thuc hien viec lam dep trai
{
    void *ptr ;
    unsigned int size ;
    size=imagesize(current_item->left,current_item->top, current_item->right,\
        current_item->bottom) ;

    ptr=farmalloc(size) ;
    getimage(current_item->left,current_item->top,current_item->right,\
        current_item->bottom,ptr) ;

    putimage(current_item->left,current_item->top,ptr,XOR_PUT) ;
    putimage(current_item->left+ 5,current_item->top,ptr,XOR_PUT) ;
    delay(200) ;
}

```

```
    putimage(current_item->left+ 5,current_item->top,ptr,XOR_PUT) ;
    putimage(current_item->left,current_item->top,ptr,XOR_PUT)
    farfree(ptr) ;
}*/
```

MENUGRP.H

```
/*định nghĩa ca khai bao kieu va cac bien chung*/
```

```
typedef struct
```

```
{
    int identifier ;
    char name[8] ;
    void (*duty)() ;
} DUTY ;
```

```
typedef struct //cac toa do cua mot item
```

```
{
    int left ;
    int top ;
    int right ;
    int bottom ;
    char name[8] ;
} ITEM ;

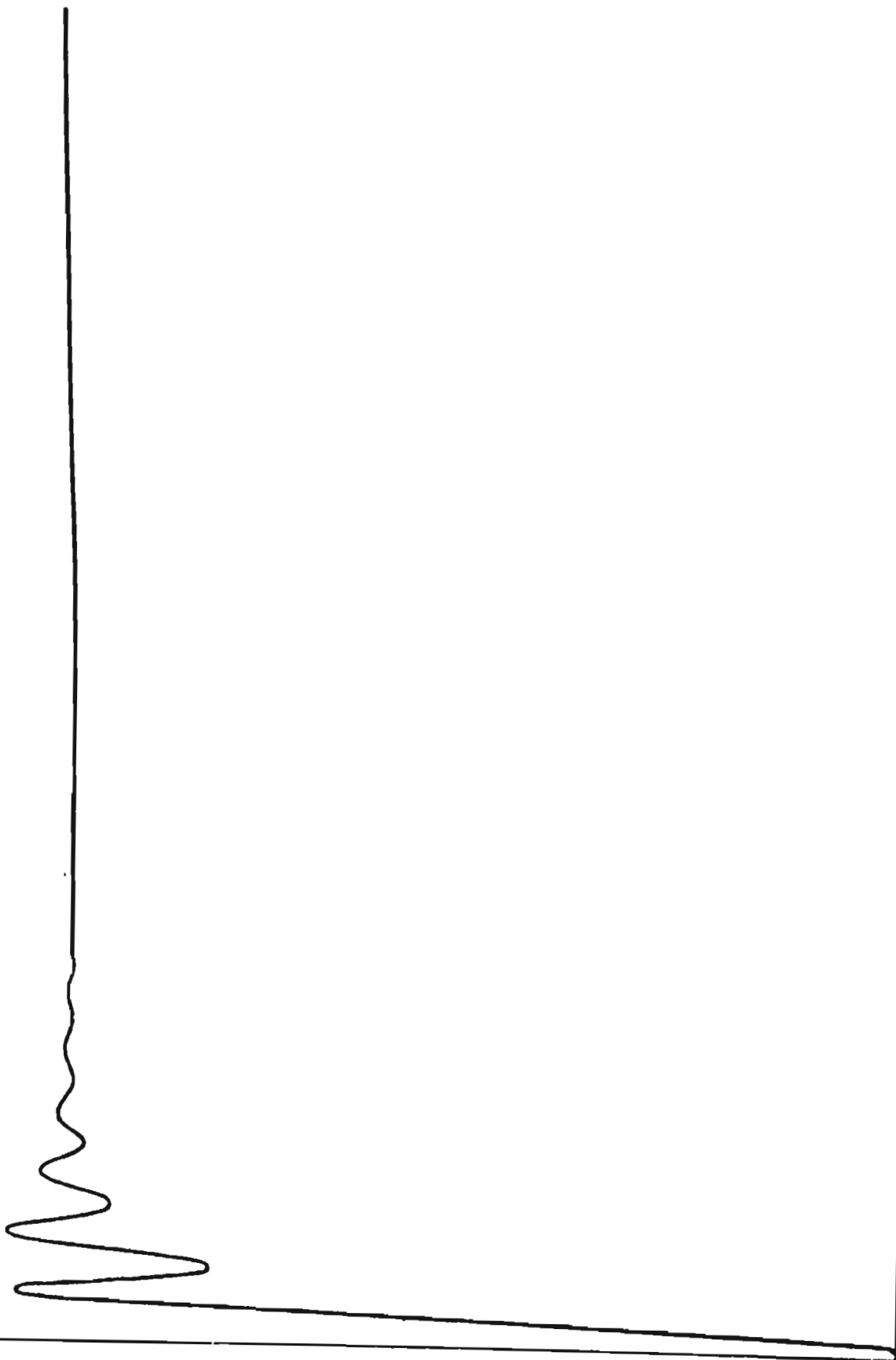
int OFSX ;
int OFSY ;
int maxscrX,maxscrY ;
int BACKGROUND_ACTIVE ; //phia duoi
int BACKGROUND_PASSIVE ; //phia tren
int BACKGROUND_SELECT ; //mau cua item selected
int BACKGROUND_FRAME ; //duong vien ngoai
int FOREGROUND_ITEM ; //mau nen cua item
int FOREGROUND_STR ; //mau chu ten item
```

$y(t)$

t

DATA

QUIT



Do thi ham qua do cua he thong bac 4

Bài 2

PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI HỆ THỐNG LIÊN TỤC

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

$$Y(t) = C.X(t)$$

MA TRẬN A

$$\begin{pmatrix} -112,500 & 1,000 & 0,000 \\ 2400,000 & 0,000 & 1,000 \\ -12500,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN B

$$\begin{pmatrix} 0,000 \\ -26250,000 \\ 0,000 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN C

$$(1,000 \quad 0,000 \quad 0,000)$$

MA TRẬN A_h

$$\begin{pmatrix} -112,500 & 1,000 & 0,000 \\ -2250,000 & 0,000 & 1,000 \\ -12500,000 & 0,000 & 1,000 \\ -12500,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN B_h

$$\begin{pmatrix} 0,000 \\ 52500,000 \\ 0,000 \end{pmatrix}$$

PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI HỆ THỐNG XUNG SỐ

$$X(i+1) = A_d.X(i) + B_d.U(i)$$

$$Y(i) = C_d.X(i)$$

MA TRẬN A_d

$$\begin{pmatrix} -1,039 & -0,002 & -0,000 \\ -45,115 & -1,256 & -0,013 \\ 24,125 & 1,000 & 1,000 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN B_d

$$\begin{pmatrix} 2,533 \\ 335,645 \\ -1583,233 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN C_d

$$(1,00 \quad 0,000 \quad 0,000)$$

MA TRẬN A_{dh}

$$\begin{pmatrix} -0,855 & 0,007 & 0,000 \\ -20,814 & -0,041 & 0,048 \\ -90,498 & -4,525 & 0,774 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN B_{dh}

$$\begin{pmatrix} 19,005 \\ 2518,100 \\ -11877,828 \end{pmatrix}$$

XÉT TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC CỦA HỆ THỐNG !

MA TRẬN M

$$\begin{pmatrix} 4,359 & -3,126 & 2,533 \\ 803,886 & -515,519 & 335,645 \\ -1983,146 & -1212,730 & -1583,233 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank}(M)=3$$

HỆ THỐNG LÀ ĐIỀU KHIỂN HOÀN TOÀN

MA TRẬN N

$$\begin{pmatrix} 1,000 & -1,039 & 1,163 \\ 0,000 & -0,002 & 0,004 \\ 0,000 & -0,000 & 0,000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank}(N)=3$$

Hệ thống là quan sát được hoàn toàn.

Ma trận điều khiển tối ưu $K'[i]$ LA

$$\begin{pmatrix} -0,045 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{pmatrix}$$

TÌN HIEU DIEU KHIEN TOI UU $U[i] = -K[i]*X[i] !$

program ltdk ;

uses crt ;

type mt=array[1..3,1..3] of real ;

tenma=string[4] ;

var A,B,C,Ah,Bh,Ad,Adh,Bd,Bdh,Cd,M,N :mt ;

K,P,TP,TPP,TPPBdh,TPPAdh,Bdk,BKA,TPA :array [1..50] of mt

detM,detN :real ;

(*****)

procedure suma(a,b :mt ;var c :mt ;m,n :integer) ;

var i,j :integer ;

begin

for i :=1 to m do

for j :=1 to n do

c[i,j] :=a[i,j]+ b[i,j] ;

end ;

(*****)

procedure tmt(a,b :mt ;var c :mt ;m,n,l :integer) ;

var i,j,l :integer ;

begin

for i :=1 to m do

for j :=1 to n do

begin

c[i,j] :=0 ;

for l :=1 to n do c[i,j] :=c[i,j]+ a[i,j]*b[l,j] ;

end ;

```

    end ;
    (*****)
    procedure cvma(a :mt ;var ap :mt ;m,n :integer) ;
    var ij :integer ;
    begin
        for i :=1 to m do
            for j :=1 to n do ap[j,i] :=a[i,j] ;
        end ;
    (*****)
    procedure prinma(ten :tenma ;a :mt ;m,n :integer) ;
    var ij :integer ;
    begin
        writeln('MA TRAN ',ten) ;
        for i :=1 to m do
            begin
                for j :=1 to n do
                    write(a[i,j] :3 :3,' ') ; writeln ;
                end ;
            end ;
        end ;
    (*****)
    procedure detma(a :mt ;var det :real ;n :integer) ;
    var ij,k :integer ;t,t1 :boolean ;d :real ;
    begin
        det :=1 ;i :=1 ;t1 :=true ;
        while t1 and (i<=n) do
            begin
                if a[i,i]=0 then
                    begin
                        t :=true ;k := i+1 ;

```

```
    while t and (k<=n) do
        if a[k,i]<>0 then
            begin
                for j :=i to n do
                    begin
                        d :=a[i,j] ;
                        a[i,j] :=a[k,j] ;
                        a[k,j] :=d ;
                    end ;
                det :=-det ;
                t :=false ;
            end
        else k :=k+1 ;
    if k>n then
        begin
            t1 :=false ; det :=0 ;
        end ;
    end ;
if a[i,i]<>0 then
    begin
        d :=a[i,i] ;
        for j :=i+1 to n do a[i,j] :=a[i,j]/d ;
        for k :=i+1 to n do
            begin
                d :=a[k,i] ;
                for j :=i+1 to n do a[k,j] :=a[k,j]-a[i,j]*d ;
            end ;
        end ;
    end ;
```



```

                                a[k,j] :=d ;
                                end ;
                                t :=false ;
                                end
                                else k :=k+ 1 ;
                                if k+ n+ 1 then
                                    if a[i,k-1]=0 then t1 :=false ;
                                end ;
                                if a[i,i]<>0 then
                                    begin
                                        d :=a[i,i] ;
                                        for j :=i to 2*n do a[i,j] :=a[i,j]/d ;
                                    end ;
                                for k :=1 to n do
                                    if k<>i then
                                        begin
                                            d :=a[k,i] ;
                                            for j :=i to 2*n do
                                                a[k,j] :=a[k,j]-a[i,j]*d ;
                                            end ;
                                            i :=i+ 1 ;
                                        end ;
                                    if t1 then
                                        for i :=1 to n do
                                            for j :=n+ 1 to 2*n do ap[i,j-3] :=a[i,j] ;
                                        end ;
                                    end ;
                                (*****)
                                procedure tsma(a :mt ;var ta :mt ;m,n :integer ;so :real) ;
                                var ij :integer ;

```

```

begin
    for i :=1 to m do
        for j :=1 to n do ta[i,j] :=so*a[i,j] ;
    end ;
    (*****)
    procedure ptttlt(var A,B,C,Bh :mt) ;
    var k1,k3,k4,Tu,Tc,Tk,a0,a1,a2,a3,a22,b2,b22 :real ;
    ij :integer ;
    begin
        k1 :=0.42 ;k3 :=10 ;k4 :=0.5 ;
        Tc :=0.1 ;Tk :=0.08 ;Tu :=0.01 ;
        a0 :=Tu*Tk*Tc ;a1 :=(Tc*(Tk+ Tu)/a0) ;
        a2 :=(Tk+ Tc=(k1*k3*k4))/a0 ;a3 :=1/a0 ;
        a22 :=(Tk+ Tc)/a0 ;b2 :=(-k1*k3*k4)/a0 ;
        b22 :=(k3*k1)/a0 ;
        a[1,1] :=-a1 ;a[1,2] :=1 ;a[1,3] :=0 ;
        a[2,1] :=-a2 ;a[2,2] :=0 ;a[2,3] :=1 ;
        a[3,1] :=-a3 ;a[3,2] :=0 ;a[3,3] :=0 ;
        ah[1,1] :=-a1 ;ah[1,2] :=1 ;ah[1,3] :=0 ;
        ah[2,1] :=-a22 ;ah[2,2] :=0 ;ah[2,3] :=1 ;
        ah[3,1] :=-a3 ;ah[3,2] :=0 ;ah[3,3] :=0 ;
        for i :=1 to 3 do
            for j :=1 to 1 do b[i,j] :=0 ; b[2,1] :=b2 ;
        for i :=1 to 3 do
            for j :=1 to 1 do bh[i,j] :=0 ; bh[2,10] :=b22 ;
                c[1,1] :=1 ;c[1,2] :=0 ;c[1,3] :=0 ;
        end ;
        (*****)
        procedure ptttxs(var Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh :mt) :

```

```

var A,B,C,Ah,Bh,a1,a2,ad1,ad2,add1,add2,bd1,dv :mt ;
    ij :integer ; T :real ; ah1,
ah2,adh1,adh2,addh1,addh2,bdh1 :mt ;
begin
    ptttlt(A,B,C,Ah,Bh) ;T :=0.1 ;
    tsm(a,a1,3,3,(-T/2) ;tsma(a,a2,3,3,(T/2)) ;
    dv[1,1] :=1 ;dv[1,2] :=0 ;dv[1,3] :=0 ;
    dv[2,1] :=0 ;dv[2,2] :=1 ;dv[2,3] :=0 ;
    dv[3,1] :=0 ;dv[3,2] :=0 ;dv[3,3] :=1 ;
    suma(dv,a1,ad1,3,3) ;suma(dv,a2,ad2,3,3) ;
    invma(ad1,add1,3) ;tmt(add1,ad2,Ad,3,3,3) ;
    tsm(b,bd1,3,1,T) ;t,t(add1,bd1,Bd,3,3,1) ;
    tsm(c,Cd,1,3,1) ;
    tsm(ah,ah1,3,3,(-T/2)) ;tsma(ah,ah2,3,3,(T/2)) ;
    suma(dv,ah1,adh1,3,3) ;suma(dv,ah2,adh2,3,3) ;
    invma(adh1,addh1,3) ;tmt(addh1,adh2,Adh,3,3,3) ;
    tsm(bh,bdh1,3,1,T) ;tmt(addh1,bdh1,Bdh,3,3,1) ;
end ;
(*****)
procedur dkvas(var detM,detN :real ;var M,N :mt) ;
var ad22,m2,m1,cdp,adp,adp2,n2,n3,Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh :mt ;
ij :integer ;
begin
    ptttxs(Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh) ;
    tmt(ad,ad,ad22,3,3,3) ;tmt(ad,bd,m2,3,3,1) ;
    tmt(ad22,bd,m1,3,3,1) ;
    for i :=1 to 3 do
        for j :=1 to 1 do M[i,j] :=m1[i,j] ;
    for i :=1 to 3 do
        for j :=1 to 1 do M[i,j]1 :=m2[i,j] ;

```

```

for i :=1 to 3 do
    for j :=1 to 1 do M[i,j]2] :=Bd[i,j] ;
detma(M,detM,3) ;cvma(Ad,adp,3,3) ;cvma(Cd,cdp,1,3) ;
tmt(adp,cdp, n2,3,3,1) ;
tmt(adp,adp,adp2,3,3,3) ;tmt(adp2,cdp,n3,3,3,1) ;
for i :=1 to 3 do
    for j :=1 to 1 do N[i,j] :=Cdp[i,j] ;
for i :=1 to 3 do
    for j :=1 to 1 do N[i,j+ 1] :=n2[i,j] ;
for i :=1 to 3 do
    for j :=1 to 1 do N[i,j+ 2] :=n3[i,j] ;
end ;
(*****)
procedure qrr ;
var R1,Adp,Bdp,Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh,Bdh1 :mt ;
    ij,l :integer ;ok :boolean ;R2,epsilon :real ;
    K1 :array[1..50] of real ;
begin
    ptttxs(Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh) ;
    cvma(Bdh,Bdp,3,1) ;cvma(Adh,Adp,3,3) ;
    tsma(Bdh,Bdh1,1,3,(-1)) ;
    for i :=1 to 3 do
        for j :=1 to 3 do
            R1[i,j] :=0 ;R1[1,1] :=1 ; R2 :=0.29 ;epsilon :=0.09 ;
        for i :=1 to 3 do
            for j :=1 to 3 do
                P[50][i,j] :=0 ;i :=49 ;ok :=true ;
            while ok and (i<=50) do
                begin

```

```

        suma(R1,P[i+ 1],TP[i+ 1],3,3) ;
        tmt(Bdp,TP[i+ 1],TPP[i+ 1],1,3,3) ;
        tmt(TPP[i+ 1],Bdh,TPPBdh[i+ 1],1,3,1) ;
        K1[i] :=1/(R2+ TPPBdh[i+ 1][1,1]) ;
        tmt(TPP[i+ 1],Adh,TPPAdh[1+ 1],1,3,3) ;
        tsma(TPPAdh[i+ 1],K[i],1,3,K1[i] ;
        tmt(Adp,TP[i+ 1],TPA[i+ 1],3,3,3) ;
        tmt(Bdh1,K[i],BdK[i],3,1,3) ;
        suma(Adh,Bdk[i],BKA[i],3,3) ;
        tmt(TPA[i+ 1],BKA[i],P[i],3,3,3) ;
for j :=1 to 1 do
    for l :=1 to 3 do
        if abs(K[i+ 1][j,l]-K[i][j,l] <= epsilon then
            begin
                writeln('MA TRAN DIEU KHIEN TOI UU K[i] LA :)') ;
                writeln ;
                for j :=1 to 1 do
                    for l :=1 to 3 do
                        begin
                            write(K[i][j,l] :3 :3,' ') ; writeln ;
                            ok :=false ;
                        end ; writeln ;
                    end
                else write('khong tim thay K[i]') ;
                    i :=i-1 ;
                end ;
            end ;
        (*****)
BEGIN

```

Giải nó ta sẽ tìm được các giá trị $P[i,j]$ của ma trận P .

Xét Q tối ưu của hệ liên tục

$$p_{13}[2]=0.000125$$

$$p_{11} = 20187.644$$

$$p_{33} = 0.014$$

$$p_{12} = p_{21} = 179.443$$

$$p_{23} = p_{32} = 8.7074829932E-11$$

MA TRẬN P

$$\begin{pmatrix} 20187.643675 & 179.443222 & 0.000125 \\ 179.443222 & 0.000125 & 0.000000 \\ 0.000125 & 0.000000 & 0.014354 \end{pmatrix}$$

$$\det(P) \text{ cap2} = -3.2197346309E+04$$

$$\det(P) \text{ cap3} = -4.6217142178E+02$$

MA TRẬN LÀ XÁC ĐỊNH DƯƠNG

Ma trận KJ

$$(78596409.432000 \quad 54.687479 \quad 0.000038)$$

Tín hiệu điều khiển tối ưu $U(T) = -K(T).K(T)$

Program toi-uu ;

uses crt ;

type

day=array[1..30] of real ;mt=array[1..3,1..3] of real ;

var

ij :integer ; p13 : day ;

p11,t,p33,p12,ah1,detp2,ah2,ah3,bh,r2,p32 : real ;

epsi,pt,detp3 :real ;d1 :boolean ;p,b,br,K :mt ;

(*****)

procedure tmt(a,b :mt ;var c :mt ;m,n,k :integer) ;

var i,j,l :integer ;

begin

for i :=1 to m do

for j :=1 to k do

begin

c[i,j] :=0 ;

for l :=1 to n do c[i,j] :=c[i,j]+ a[i, ;]*b[l,j] ;

end ;

end ;

(*****)

procedure tsma(a :mt ;var ta :mt ;m,n :integer ;so :real) ;

var i,j :integer ;

begin

for i :=1 to m do

for j :=1 to n do ta[i,j] :=so*a[i,j] ;

end ;

(*****)

function f(p13 :real) :real ;

var a4,a2,a1,a0,ah1,ah2,ah3,bh,r2,p32 :real ;

begin

ah1 :=-112.5 ;

ah2 :=-2250 ;ah3 := -12500 ;bh :=52500 ;r2 :=0.12 ;

p32 :=(2*r2)/(bh*bh) ;

a4 :=(sqr(bh)*sqr(bh)*sqr(bh))/(4*(r2*r2*r2)) ;

a2 :=((ah2*bh*bh)/r2)-(ah2*ah2*bh*bh)/r2) ;

```

ptttlt(A,B,C,Ah,Bh) ;
clrscr ;gotoxy(2,2) ;
writeln('PHUONG TRINH TRANG THAI HE THONG LIEN
TUC!') ;
writeln('X(t)=A.X(t)+ B.U(t)' ;
writeln('Y(t)=C.X(t)' ;writeln ;
prinma(' A,A,3,3) ;gotoxy(2,11) ;prinma(' B',3,1) ;
gotoxy(2,16) ;prinma(' C',C,1,3) ;readln ;
gotoxy(2,19) ;prinma(' Ah',Ah,3,3) ;
gotoxy(2,24) ;prinma(' Bh',Bh,3,1) ;readln ;
ptttxs(Ad,Bd,Cd,Adh,Bdh) ;clrscr ;gotoxy(2,2) ;
writeln('PHUONG TRINH TRANG THAI HE THONG XUNG SO !') ;
writeln('X(i+ 1)=Ad.X(i)+ Bd.U(i)') ;
writeln('Y(i)=Cd.X(i)') ;writeln ;
prinma(' Ad',Ad,3,3) ;gotoxy(2,11) ;prinma(' Bd',Bd,3,1) ;
gotoxy(2,16) ;prinma(' Cd' ;Cd,1,3) ;readln ;
gotoxy(2,19) ;prinma(' Adh',Adh,3,3) ;
gotoxy(2,24) ;prinma(' Bdh',Bdh,3,1) ;readln ;clrscr ;
writeln('XET TINH DIEU KHIEN DUOC VA QUAN SAT
DUOC CUA HE THONG !') ;
writeln ;
dkvqs(detM,detN,M,N) ;prinma(' M',M,3,3) ;writeln ;
if detM<>0 then
begin
writeln('Rank(M)=3') ;
writeln('He thong la dieu khien duoc hoan toan') ;
end
else writeln('He thong la khong dieu khien duoc hoan toan') ;
writeln ;prinma('N',N,3,3) ;writeln ;

```

```

if detN<>0 then
  begin
    writeln('Rank(N)=3') ;
    writeln('He thong la quan sat duoc hoan toan ') ;
  end
else writeln('He thong la khong quan sat duoc hoan toan ') ;
  readln ; qrr ;
  writeln('TIN HIEU DIEU KHIEN TOI UU U[i]=-K[i]*X[i] !')
  readln ;
END.

```

Xét phiếm hàm Q cho hệ liên tục

Áp dụng phương trình Riccati cho hệ liên tục

$$P.A + A'.P + R1 - P.B.inv(R2).B'.P = 0.$$

trong đó các ma trận A,B là các ma trận của hệ hở đã xét còn ma trận R1,R2 là các ma trận hằng đặt các hệ số của ma trận A là

$$A = \begin{pmatrix} a1 & 1 & 0 \\ a2 & 0 & 1 \\ a3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad R2=r2$$

Khai triển phương trình Riccati ta có hệ sau :

$$2.a1.p11 + a2.(p12 + p21) + 2.a3.p13 + 1 - b.b.p12.p21/r2 = 0 \quad (1)$$

$$a1.p12 + a2.p13 + a3.p32 + p11 - b.b.p12.p13/r2 = 0 \quad (2)$$

$$a1.p13 + a2.p23 + a3.p13 + p12 - b.b.p12.p23/r2 = 0 \quad (3)$$

$$p21 + p12 - b.b.p13.p13/r2 = 0 \quad (4)$$

$$2.p13 - b.b.p13.p23/r2 = 0 \quad (5)$$

$$p32 + p23 - b.b.p32.p23/r2 = 0 \quad (6)$$

Giải hệ này ta được

$$p12=p21$$

$$p23=p32$$

đồng thời ta có phương trình bậc 4 đối với p13.

```

a1 :=(2*ah3)-(2*ah2*ah1) ;a0 :=1-(2*ah2*p32) ;
f :=(a4*p13*p13*p13*p13)+(a2*p13*p13)+(a1*p13)+ a0 ;
end ;
(*****)
function fp(p13 :real) :real ;
var a4,a2,a1,ah1,ah2,ah3,bh,r2,p32 :real ;
begin
    ah1 :=-112.5 ;ah2 :=-2250 ;
    ah3 :=-12500 ;bh :=52500 ;r2 :=0.12 ;
    p32 :=(2*r2)/(bh*bh) ;
    a4 :=(sqr(bh)*sqr(bh)*sqr(bh))/(4*(r2*r2*r2)) ;
    a2 :=((ah2*bh*bh)/r2)-((ah2*ah2*bh*bh)/r2) ;
    a1 :=(2*ah3)-(2*ah2*ah1) ;
    fp :=(4*a4*p13*p13*p13)+(2*a2*p13)+ a1 ;
end ;
(*****)
procedure detma(a :mt ;var det :real ;n :integer) ;
var ij,k :integer ;t,t1 :boolean ;d :real ;
begin
    det :=1 ;i :=1 ;t1 :=true ;
    while t1 and (i<=n) do
        begin
            if a[i,i]=0 then
                begin
                    t :=true ;k :=i+ 1 ;
                    while t and (k<=n) do
                        if a[k,i]<>0 then

```

```
begin
    for j := i to n do
        begin
            d := a[i,j] ;
            a[i,j] := a[k,j] ;
            a[k,j] := d ;
        end ;
    det := -det ;
    t := false ;
end
else k := k + 1 ;
if k > n then
    begin
        t1 := false ; det := 0 ;
    end ;
end ;
if a[i,i] <> 0 then
    begin
        d := a[i,i] ;
        for j := i + 1 to n do a[i,j] := a[i,j] / d ;
        for k := i + 1 to n do
            begin
                d := a[k,i] ;
                for j := i + 1 to n do
                    a[k,j] := a[k,j] - a[i,j] * d ;
                end ;
            end ;
        end ;
    end ;
end ;
```

```

        i :=i+ 1 ;
end ;
if t1 then
    for i :=1 to n do det :=det*a[i,i] ;
end ;
(*****)
BEGIN
    clrscr ;gotoxy(1,2) ;
    writeln('XET Q TOI UU CUA HE LIEN TUC !') ;writeln ;
    i :=1 ;epsi :=0.00025 ;
    p13[1] :=0.0001 ;d1 :=true ;
    for i :=1 to 30 do
        begin
            p13[i+ 1] :=p13[i]+ f(p13[i])/fp(p13[i]) ;
            t :=abs(p13[i+ 1]- p13[i] ;
            if t<=epsi then begin pt :=p13[i+ 1] ;
                                writeln('p13[',i+ 1,']= ',pt :3 :6) ; end
            else d1 :=false ;
        end ;
        ah1 :=-112.5 ;ah2 :=-2250 ;ah3 :=-12500 ;
        bh :=52500 ;r2 :=0.12 ;
        p11 :=(ah3*p32)-(ah1*bh*bh*pt*pt)/(2*r2)-(ah2*pt) ;
        p33 :=(1/ah3)*((-ah2*p32)-((bh*bh*pt*pt)/(2*r2))-(ah1*pt)) ;
        p12 :=((bh*bh)/(2*r2))*pt*pt ;p32 :=(2*r2/(bh*bh) ;
        writeln('p11=',p11 :3 :3) ; writeln('p33=',p33 :3 :3) ;
        writeln('p12=p21=',p12 :3 :3) ;   writeln('p23=p32=',p32) ;

```

```

p[1,1] :=p11 ;p[1,2]"=p12 ; p[1,3] :=pt ;p[1,2] :=bh
p[2,1] :=p12 ;p[2,2] :=pt ; p[2,3] :=p32 ;b[1,1] :=0
p[3,1] :=pt ; p[3,2] :=p32 ; p[3,3] :=p33 ;b[1,3] :=
writeln ;writeln('MA TRAN P') ;
for i :=1 to 3 do
    begin
        ,for j :=1 to 3 do write(p[i,j] :3 :6,'') ;
writeln ;end ;writeln ; detma(p,detp2,2) ;
writeln('det(P) cap2=',detp2) ; writeln ; detma(p,detp3,
writeln('det(P)cap3=',detp3) ; writeln ;
writeln('MA TRAN P LA XAC DINH DUONG !') ;
writeln ;
tsma(b,br,1,3,(1/r2)) ;
tmt(br,p,K,1,3,3) ;
writeln('MA TRAN K ') ;
for i :=1 to 1 do
    begin
        for j :=1 to 3 do
            write(k[i,j] :3 :6,'') ;writeln ;
        end ;
writeln ;
writeln('TIN HIEU DIEU KHIEN TOI UU U(t)=(t).X(t)')
readln ;

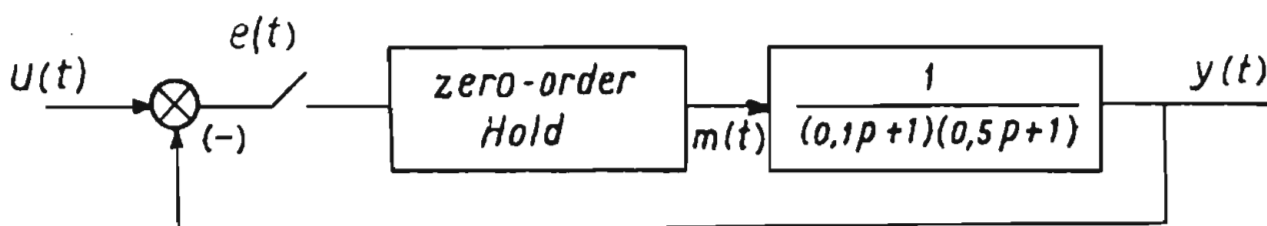
end.

```

Bài 3

Hệ thống điều khiển xung - số

1) Xác định W_{LTQD} dạng Z và tìm hàm truyền đạt của thống ở trạng thái kín.



Hình BT 3 - 1.

Theo đầu bài ta có $W_{LG}(p) = \frac{1 - e^{-pt}}{p}$

do đó $Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} = Z\left\{W_{LT} \frac{(p)}{p} - e^{-pT} \frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}$

Nếu đặt $f_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}$ thì $L^{-1}\left\{\frac{e^{-pt} W_{LT}(p)}{p}\right\} = f_1(t - T)$

Do đó

$$Z\left\{e^{-pT} \frac{W_{LP}(p)}{p}\right\} = Z\left\{f_1(iT - T)\right\} = Z^{-1}Z^1\left\{f_1(i)\right\} = Z^{-1}Z\left\{\frac{W_{LP}(p)}{p}\right\}$$

Vậy $Z\{W_{LG}(p) \cdot W_{LT}(p)\} = W_{LTQD}(Z) = (1 - Z^{-1})Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\}$

$$\frac{W_{LT}(p)}{p} = \frac{1}{p(0,1p + 1)(0,5p + 1)} \text{ phân tích ra ta được}$$

$$\frac{W_{LT}(p)}{p} = \frac{1}{p} + \frac{0,025}{0,1p + 1} - \frac{0,625}{0,5p + 1}$$

$$Z\left\{\frac{W_{LT}(p)}{p}\right\} = \frac{Z}{Z - 1} + 0,025 \frac{Z}{Z - e^{-10T}} - 1,25 \frac{Z}{Z - e^{-2}}$$

$$W_{LTQD}(Z) = \frac{Z-1}{Z} Z \left[\frac{1}{Z-1} + \frac{0,25}{Z-e^{-10T}} - \frac{1,25}{Z-e^{-2T}} \right]$$

$$W_{LTQD}(Z) = \frac{-Z[1,25e^{-2T}-0,25e^{-10T}-1] + [e^{-12T}+0,25e^{-2T}-1,25e^{-10T}]}{(Z-e^{-10T})(Z-e^{-2T})}$$

$$W_K(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{Z\{W_{LTQD}(p)\}}{1+Z_{LTQD}(p)} = \frac{W_{LTQD}(Z)}{1+W_{LTQD}(Z)}$$

$$W_K(Z) = \frac{-Z[1,25e^{-2T}-0,25e^{-10T}-1] + [e^{-12T}+0,25e^{-2T}-1,25e^{-10T}]}{Z^2 - Z[2,25e^{-2T}+0,75e^{-10T}-1] + 2e^{-12T}+0,25e^{-2T}-1,25e^{-10T}}$$

2) Xét ổn định hệ thống theo tiêu chuẩn Routh.

Ta có phương trình đặc tính của hệ thống như sau

$$Z^2 - Z[2,25A + 0,75B - 1] + 2AB + 0,25A - 1,25B = 0$$

với $A = e^{-2T}$; $B = e^{-10T}$

thay $Z = \frac{V+1}{V-1}$, ta được :

$$\begin{aligned} & (V^2 + 2V + 1) - (V^2 - 1)(2,25A + 0,75B - 1) \\ & + (V - 1)^2(2AB + 0,25A - 1,25B) = \\ & = V^2[2AB - 2A - 2B + 2] + 2V[1 - 2AB - 0,25A + 1,25B] \\ & + 2,5A + 2AB - 0,5B = 0 \end{aligned}$$

theo tiêu chuẩn Routh thì $a_0, a_1, b_1 > 0$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_2 \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & a_1 \\ & \swarrow \quad \searrow \\ b_0 & \end{array}$$

$$\rightarrow b_0 = \frac{- \begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2}{a_1} = a_2$$

Vậy điều kiện là $a_0, a_1, a_2 > 0$ vậy

$$\begin{cases} 2(e^{-2T}e^{-10T} - e^{-2T}e^{-10T} + 1) > 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - e^{-2T}e^{-10T} - 0,25e^{-2T} + 1,25e^{-10T} > 0 & (2) (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5e^{-2T} + 2e^{-2T}e^{-10T} - 0,5e^{-10T} > 0 & (3) \end{cases}$$

Phân tích (1)(2)(3) ta được

$$\begin{cases} (e^{-2T} - 1)(e^{-10T} - 1) > 0 & (1) \\ 2(e^{-2T} + e^{-10T}) + 0,5(e^{-2T} - e^{-10T}) > 0 & (2) \\ e^{-2T}[0,75(e^{-2T} - e^{-10T}) + 0,25(e^{-2T} - 1) + 1,25(e^{-8T} - e^{-10T})] > 0 & (3) \end{cases}$$

Với $T > 0$ ta thấy rằng

$$\begin{aligned} 0 < e^{-2T} < 1 \\ 0 < e^{-10T} < 1 \\ e^{-10T} < e^{-8T} < e^{-2T} \end{aligned}$$

do vậy ta thấy rằng (1) (2) (3) luôn luôn thoả mãn với $T > 0$.

Vậy hệ luôn ổn định với mọi T ($T > 0$).

3) Tính quá trình quá độ trong hệ thống theo phương trình trạng thái.

$$W_{LT}(p) = \frac{1}{(0,1p + 1)(0,5p + 1)} \quad (*)$$

$$e(t) = U(t) \quad y(t)$$

$$e(iT) = U(iT) \quad y(iT).$$

Từ ta có phương trình trạng thái sau

$$\frac{y}{m} = \frac{1}{0,05p^2 + 0,6p + 1}$$

$$0,05p^2y + 0,6py + y = m.$$

$$0,05 \frac{d^2y}{dt^2} + 0,6 \frac{dy}{dt} + y = m$$

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ x'_1 &= x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0m \\ x'_2 = -20x_1 - 12x_2 + 20m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} m$$

Phương trình trạng thái phân liên tục ở dạng rời rạc là

$$\begin{cases} x(i+1) = Adx(i) + Bdm(i) \\ y(i) = Cdx(i) \end{cases}$$

$$Ad = \Phi(T) ; \quad Bd = \int_0^T \Phi(t)Bdt ;$$

$$Cd = [1 \quad 0]$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\}$$

$$[pI - A] = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p+12 \end{bmatrix}$$

$$\det(pI - A) = p^2 + 12p + 20 = (p + 2)(p + 10)$$

$$\text{adj}(pI - A) = \begin{bmatrix} p + 12 & 1 \\ -20 & p \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p + 12}{(p + 10)(p + 2)} & \frac{1}{(p + 10)(p + 2)} \\ \frac{-20}{(p + 10)(p + 2)} & \frac{p}{(p + 10)(p + 2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\}$$

$$Ad = \Phi(T) = \begin{bmatrix} -0,25e^{-10T} + 1,25e^{-2T} & 0,125[e^{-2T} - e^{-10T}] \\ -2,5(e^{-2T} - e^{-10T}) & 0,125[10e^{-10T} - 2e^{-2T}] \end{bmatrix}$$

$$Bd = \int_0^T \Phi(t)Bdt = \int_0^T \begin{bmatrix} 2,5[e^{-2T} - e^{-10T}] \\ 2,5[10e^{-10T} - 2e^{-2T}] \end{bmatrix} dt$$

$$Bd = \begin{bmatrix} 2,5[-0,5e^{-2T} + 0,1e^{-10T}] \\ 2,5[-e^{-10T} + e^{-2T}] \end{bmatrix}_0^T$$

$$Bd = \begin{bmatrix} -1,25e^{-2T} + 0,25e^{-10T} + 1 \\ -2,5e^{-10T} + 2,5e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = Ad \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} + Bd.e(iT)$$

$$y(it) = x_1(it)$$

$$e(iT) = U(iT) \quad y(iT) = U(iT) \quad x_1(iT) \text{ vậy}$$

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = Ad \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} - Bd.x_1(iT) + Bd.U(iT)$$

Ta thu được :

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5e^{-10T} + 2,5e^{-2T} - 1 & \frac{1}{8}(e^{-2T} - e^{-10T}) \\ 5e^{-10T} - 5e^{-2T} & \frac{1}{8}(10e^{-10T} - 2e^{-2T}) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - 1,25e^{-2T} + 0,25e^{-10T} \\ 2,5(e^{-2T} - e^{-10T}) \end{bmatrix} U(iT)$$

$$y(iT) = x_1(iT)$$

Ta tính quá trình quá độ của hệ thống với 4 giá trị của kỳ cắt mẫu $T = 0,1 ; 0,3 ; 1 ; 2$.

$$U(iT) = 1 \quad i = 0, 1, 2 \dots$$

$$\text{Điều kiện đầu } x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

+ $T = 0,1$ có

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)0,1) \\ x_2((i+1)0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 & 0,056 \\ -2,254 & 0,255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,1i) \\ x_2(0,1i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0685 \\ 1,127 \end{bmatrix}$$

$i = 0$	$y(0) = x_1(0) = 0$	$x_2(0) = 0$
$i = 1$	$y(0,1) = x_1(0,1) = 0,0685$	$x_2(0,1) = 1,127$
$i = 2$	$y(0,2) = x_1(0,2) = 0,1907$	$x_2(0,2) = 1,2599$
$i = 3$	$y(0,3) = x_1(0,3) = 0,3036$	$x_2(0,3) = 1,0184$
$i = 4$	$y(0,4) = x_1(0,4) = 0,38753$	$x_2(0,4) = 0,7024$
$i = 5$	$y(0,5) = x_1(0,5) = 0,4422$	$x_2(0,5) = 0,4326$
$i = 6$	$y(0,6) = x_1(0,6) = 0,4743$	$x_2(0,6) = 0,2406$
$i = 7$	$y(0,7) = x_1(0,7) = 0,49129$	$x_2(0,7) = 0,1193$
$i = 8$	$y(0,8) = x_1(0,8) = 0,49916$	$x_2(0,8) = 0,0500$
$i = 9$	$y(0,9) = x_1(0,9) = 0,50207$	$x_2(0,9) = 0,0146$
$i = 10$	$y(1) = x_1(1) = 0,50260$	$x_2(1) = 0,0323$

ta thấy rằng y sau khi dao động thì đã ổn định.

+ $T = 0,3$ có

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)0,3) \\ x_2((i+1)0,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,347 & 0,0624 \\ -2,495 & 0,075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,3i) \\ x_2(0,3i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3264 \\ 1,248 \end{bmatrix}$$

$i = 0$	$y(0) = 0$	$x_2 = 0$
$i = 1$	$y(0,3) = 0,3264$	$x_2(0,3) = 1,248$
$i = 2$	$y(0,6) = 0,5175$	$x_2(0,6) = 0,3400$
$i = 3$	$y(0,9) = 0,5272$	$x_2(0,9) = -0,0686$
$i = 4$	$y(1,2) = 0,5050$	$x_2(1,2) = 0,0622$
$i = 5$	$y(1,5) = 0,4977$	$x_2(1,5) = -7,31 \cdot 10^{-3}$
$i = 6$	$y(1,8) = 0,4986$	$x_2(1,8) = 6,786 \cdot 10^{-3}$
$i = 7$	$y(2,1) = 0,4998$	$x_2(2,1) = 3,484 \cdot 10^{-3}$
$i = 8$	$y(2,4) = 0,5000$	$x_2(2,4) = 7,377 \cdot 10^{-4}$
$i = 9$	$y(2,7) = 0,4999$	$x_2(2,7) = 4,446 \cdot 10^{-4}$

Ta thấy rằng y (khi $i = 9$) đã ổn định xung quanh 0,4999.

+ $T = 1$.

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)1) \\ x_2((i+1)1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,662 & 0,0169 \\ 0,571 & 0,0338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i.1) \\ x_2(i.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,831 \\ 0,338 \end{bmatrix}$$

$i = 0$	$y(0) = 0$	$x_2(0) = 0$
$i = 1$	$y(1) = 0,831$	$x_2(1) = 0,338$
$i = 2$	$y(2) = 0,2865$	$x_2(2) = -0,235$
$i = 3$	$y(3) = 0,6373$	$x_2(3) = 0,1522$
$i = 4$	$y(4) = 0,4116$	$x_2(4) = -0,098$
$i = 5$	$y(5) = 0,557$	$x_2(5) = 0,063$
$i = 6$	$y(6) = 0,4633$	$x_2(6) = -0,040$
$i = 7$	$y(7) = 0,5236$	$x_2(7) = 0,026$
$i = 8$	$y(8) = 0,4848$	$x_2(8) = 0,0168$
$i = 9$	$y(9) = 0,5097$	$x_2(9) = 0,0108$
$i = 10$	$y(10) = 0,4937$	$x_2(10) = -6,92.10^{-3}$

y (khi $i = 10$) đã ổn định xung quanh 0,4937

+ $T = 2$.

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)2) \\ x_2((i+1)2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,954 & 2,29.10^{-3} \\ -0,092 & -4,579.10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i.2) \\ x_2(i.2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,977 \\ 0,0458 \end{bmatrix}$$

$i = 0$	$y(0) = 0$	$x_2(0) = 0$
$i = 1$	$y(2) = 0,977$	$x_2(2) = 0,0458$
$i = 2$	$y(4) = 0,045$	$x_2(4) = -0,0443$
$i = 3$	$y(6) = 0,934$	$x_2(6) = 0,042$
$i = 4$	$y(8) = 0,086$	$x_2(8) = -0,0403$
$i = 5$	$y(10) = 0,894$	$x_2(10) = 0,038$
$i = 6$	$y(12) = 0,1242$	$x_2(12) = 0,0366$
$i = 7$	$y(14) = 0,8584$	$x_2(14) = 0,0345$
$i = 8$	$y(16) = 0,1581$	$x_2(16) = -0,0333$
$i = 9$	$y(18) = 0,826$	$x_2(18) = 0,0314$

Vậy y ổn định nhưng dao động mạnh do T lớn.

4) Chương trình Pascal tính quá trình quá độ theo phương trình trạng thái.

Từ phương trình trạng thái của hệ ta có

$$y_1((i+1)T) = Ax_1(iT) + Cx_2(iT) + E$$

$$y_2((i+1)T) = Bx_1(iT) + Dx_2(iT) + F$$

trong đó

$$A = -0,5e^{-10T} + 2,5e^{-2T} - 1$$

$$B = 5(e^{-10T} - e^{-2T})$$

$$C = 0,125(e^{-2T} - e^{-10T})$$

$$D = 0,125(10e^{-10T} - 2e^{-2T})$$

Program qua-trinh-qua-do;

USES crt, graph ;

Var A, B, C, D, E, F, T : real ;

x2, x2 array [0..640] real ;

gd, gm, i : integer ;

Begin

Repeat

CLRSCR ;

write(' Cho T = ') ;

Readln (T) ;

x1[0] := x2[0] := 0 ;

For i := 0 to 639 do

Begin

A := -0,5 exp(-10*T) + 2.5*exp(-2*T) - 1 ;

B := 5 (exp (-10 T) - exp (-2 T)) ;

C := 0,125 + (exp (-2 T) - exp (-10 T)) ;

D := 0,125 (10 exp (-10 T) - 2*exp (-2*T)) ;

E := 1 - 1,25*exp(-2 T) + 0.25*exp (-10 T)) ;

F := 2.5 (exp (-2 T) - exp (-10 T)) ;

x1[(i+1)*T] := A*x1[i*T] + C*x2[i*T] + E;

x2[(i+1)*T] := B*x1[i*T] + D*x2[i T] + F ;

write ('i = ', i+1, 'x1[i] = ', x1[i] : 6 : 2);

```

        write ('x2['i,'] = ',x2[i] 6 : 2);
    end ;
{vẽ đồ thị y1(t), y2(t)}
    gd = detect ;
    initgraph (gd, gm, '') ;
    Setbkcolor (green);
    Setlinestyle (0, 0, 3) ;
    Setcolor (red);
    rectangle (2, 2, 637, 477) ;
    Outtextxy (240, 40, ' quá trình quá độ ') ;
    moveto (2, 240) ;
    for i := 2 to 635 do
        Begin
            line (i, 240 - Round (2* x1[i])) ;
        end ;
    Outtextxy (400, 230 - Round (2* x1[i], 'y1(t)') ;
    Setcolor (yellow) ;
    moveto (2, 240);
    for i := 2 to 635 do
        Begin
            lineto(k, 240- Round (2* x2[i])) ;
        end ;
    outtextxy (400, 230 - Round (2 x2[i]), 'y2(t)') ;
    outtextxy (10, 250, ' 0 ') ;
    outtextxy (20, 466, 'gõ 0 để thoát ') ;
    Readln (U) ;
    Until U = 0 ;
    Closegraph ;

```

END.

5) Xét tính điều khiển được của hệ thống.

Phương trình trạng thái của hệ xung số

$$\begin{bmatrix} x_1((i+1)T) \\ x_2((i+1)T) \end{bmatrix} = Ad \begin{bmatrix} -0,5e^{-10T} + 2,5e^{-2T} - 1 & \frac{1}{8}(e^{-2T} - e^{-10T}) \\ 5e^{-10T} - 5e^{-2T} & \frac{1}{8}(10e^{-10T} - 2e^{-2T}) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} x_1(iT) \\ x_2(iT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - 1,25e^{-2T} + 0,25e^{-10T} \\ 2,5(e^{-2T} - e^{-10T}) \end{bmatrix} U(iT)$$

$$y(iT) = [1 \quad 0] x(iT)$$

$$M = [Add^{n-1} \quad Bd, \quad Ad^{n-2} \quad Bd \quad \dots \quad Bd] \quad n = 2 \text{ vậy}$$

$$M = [Ad.Bd \quad Bd]$$

đặt $A = e^{-10T}$, $B = e^{-2T}$ ta có

$$M = \begin{bmatrix} 0,1875A^2 - 2,8125B^2 + 0,625AB - 0,75A + 3,75B - 1 & 1 - 1,25B + 0,25A \\ (A - B)(-1,875A - 5,625B + 5) & 2,5(B - A) \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = (B - A)[2,5 \quad AB \quad 2,5 \quad A - 2,5 \quad B + 2,5]$$

$$\det(M) = (B - A)(1 - A)(1 - B) \quad 2,5$$

$$\Rightarrow \det(M) > 0$$

$$T > 0 \text{ vậy } B > A, \quad A, B < 1$$

Vậy $\text{Rank}(M) = 2 = n \Rightarrow$ hệ là điều khiển được.

6) Xét tính quan sát được của hệ thống.

$$N = [C'd \quad A'd.C'd \quad \dots \quad (A'd)^{n-1} C'd] \quad n = 2 \text{ vậy}$$

$$N = [C'd \quad A'd.C'd]$$

$$C'd = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A'd = \begin{bmatrix} -0,5e^{-10T} + 2,5e^{-2T} - 1 & 5(e^{-10T} - e^{-2T}) \\ \frac{1}{8}(e^{-2T} - e^{-10T}) & \frac{1}{8}(10e^{-10T} - 2e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

Vậy ta có

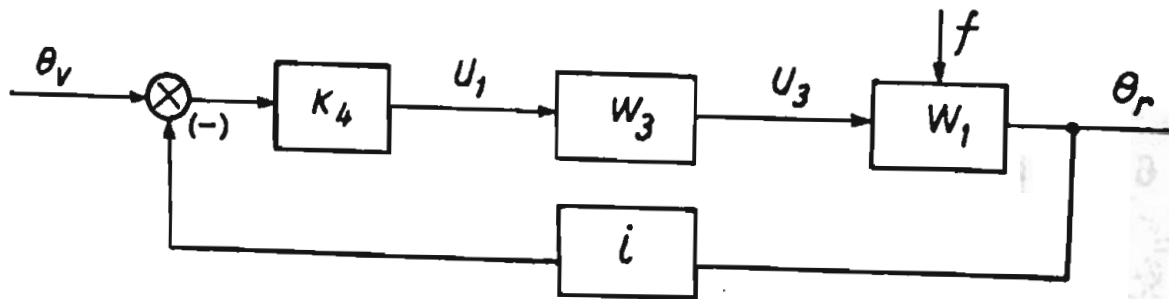
$$N = \begin{bmatrix} 1 & -0,5A + 2,5B - 1 \\ 0 & 0,125(B - A) \end{bmatrix}$$

$$\det(N) = 0,125(B - A) > 0 \Rightarrow \text{Rank}(N) = 2 = n$$

Vậy hệ này là quan sát được.

Bài 4

Cho hệ thống điều khiển sau :



Phương trình động cơ

$$(T_c T_{\text{tr}} P^2 + T_c P + 1) \frac{1}{P} \theta_r = K_1 U_2 + K_2 f$$

Phương trình bộ CLKĐBĐ

$$(T_k P + 1) U_3 = K_2 U_1$$

Phương trình xenxin :

$$K_4(\theta_r - \theta_v) = U_1$$

Cho giá trị bằng số

$$k_1 = 0.42 ; k_2 = 1 ; k_z = 10 ; k_4 = 0.5 ; i = 1$$

$$T_e = 0.1 \text{ sec} ; T_k = 0.08 ; T_{\text{tr}} = 0.01$$

1. Viết phương trình hệ thống dạng chính tắc :

$$\dot{x} = Ax + Cu$$

$$Z = Hx$$

Tính A, C, H

2. Tính ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$

3. Chuyển đổi hệ liên tục sang hệ rời rạc. Tính A_d, C_d, H_d .

CÁC BÀI TẬP LỚN

4. Xác định tính điều khiển được & quan sát được của hệ liên tục và rời rạc.

5. Hãy xác định điều khiển tối ưu liên tục $U^0(t)$ khi biết phiếm tối ưu dạng

$$I = \int_{t_0}^{t^1} [X_1^2 + \rho U_2^2] dt \quad \text{với } \rho = 0.12$$

phương trình Riccati

$$U^0(t) = -F^0 \quad X(t)$$

$$F^0(t) = R_2^{-1} \quad C^T \cdot P$$

$$0 = PA + ATP + R_1 \quad RCR_2^{-1}C^TP$$

6. Tổng hợp điều kiện tối ưu nếu phiếm hàm cho dạng rời rạc

$$I = \sum_{k=0}^{k_i-1} [X_1^2(k+1) + \rho U_1^2(k)] \quad \text{với } \rho = 0.12$$

$$T = 0.1$$

$$K = 50 \text{ step}$$

7. Lập chương trình

Bài giải

1. Viết phương trình hệ thống dạng chính tắc :

với giả thiết

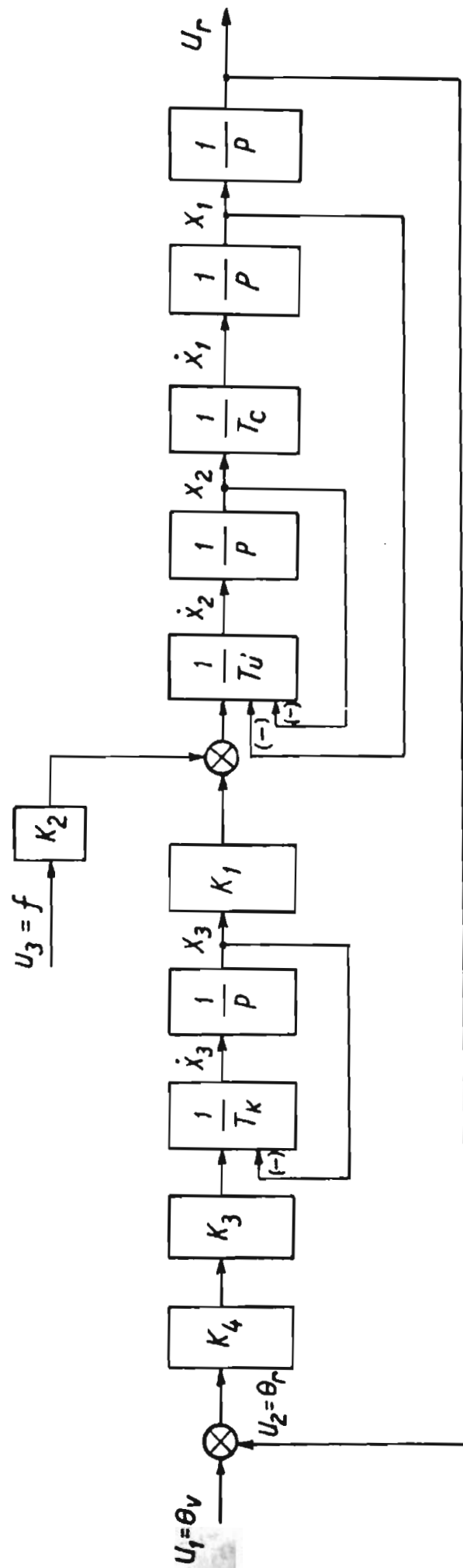
$$\begin{cases} z = x_1 & \theta_1 = u_1 \\ \theta_t = u_2 & f = u_3 \end{cases}$$

ta có :

$$\dot{x}_3 = -1 \frac{1}{T_k} x_3 + \frac{k_3 k_4}{T_k} \theta_v - \frac{k_3 k_4}{T_k} \theta_r$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_u} x_1 - \frac{1}{T_u} x_2 + \frac{k_1}{T_u} x_3 + \frac{k_2 f}{T_u}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_c} x_2$$



Sơ đồ hệ thống

$$\text{Vậy } \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_c} & 0 \\ -\frac{1}{T_u} & -\frac{1}{T_u} & \frac{k_1}{T_u} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_k} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{T_u} \\ \frac{k_3 k_4}{T_k} & -\frac{k_3 k_4}{T_k} & 0 \end{bmatrix} XU$$

$$Z = [1 \quad 0 \quad 0]X$$

Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 62,5 & -62,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad 0 \quad 0]$$

2. Tính ma trận chuyển trạng thái $\Phi(t)$:

Dùng biến đổi Laplace

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[pI - A]^{-1}\}$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & -10 & 0 \\ 100 & p+100 & -42 \\ 0 & 0 & p+12,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } (pI - A) &= (p + 12,5)(p + 11,27)(p + 88,73) = \\ &= (p + 1)(p + b)(p + c) ; \end{aligned}$$

Vậy ta có :

$$[pI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p+100}{(p+b)(p+c)} & \frac{10}{(p+b)(p+c)} & \frac{420}{(p+a)(p+b)(p+c)} \\ \frac{-100a}{(p+b)(p+c)} & \frac{p}{(p+b)(p+c)} & \frac{42}{(p+a)(p+b)(p+c)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(p+a)} \end{bmatrix}$$

Biến đổi $\mathcal{L}^{-1}$

$$\Phi_{11} = 1.146 e^{-11,27t} - 0.146 e^{-88,73t}$$

$$\Phi_{12} = 0.13 e^{-11,27t} - 0.13 e^{-88,73t}$$

$$\Phi_{13} = -4.480 e^{-12,5t} + 4.41 e^{-11,27t} + 0.071 e^{-88,73t}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{21} &= -1,2.910 e^{-11,27t} + 1,2.91 e^{-88,73t} \\ \Phi_{22} &= -0,146 e^{-11,27t} + 1,146 e^{-88,73t} \\ \Phi_{23} &= 56.e^{-12,5t} - 49,689 e^{-11,27t} - 6,311.e^{-88,27t} \\ \Phi_{31} &= 0 \\ \Phi_{32} &= 0 \\ \Phi_{33} &= e^{-12,5t}\end{aligned}$$

3. Chuyển đổi từ hệ liên tục sang hệ rời rạc :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}d \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}d.U(k) \\ \mathbf{Z}(k) = \mathbf{H}d.\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Theo phương pháp hình thang

$$\begin{cases} \mathbf{A}d = \left[\mathbf{I} - \frac{T}{2}\mathbf{A} \right]^{-1} \left[\mathbf{I} + \frac{T}{2}\mathbf{A} \right] \\ \mathbf{C}d = \left[\mathbf{I} - \frac{T}{2}\mathbf{A} \right]^{-1} T.C \\ \mathbf{H}d = \mathbf{H}^2 \end{cases}$$

Với $t = 0,1$ sec ta có :

$$\left[\mathbf{I} - \frac{T}{2}\mathbf{A} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ 5 & 6 & -2,1 \\ 0 & 0 & 1,625 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{I} - \frac{T}{2}\mathbf{A} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,706 & -0,059 & 0,076 \\ -0,588 & 0,118 & 0,152 \\ 0 & 0 & 0,615 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{I} - \frac{T}{2}\mathbf{A} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ -5 & -4 & 2,1 \\ 0 & 0 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Vậy :

$$\mathbf{A}d = \begin{bmatrix} 0,706 & 0,059 & 0,076 \\ -0,588 & 0,118 & 0,152 \\ 0 & 0 & 0,615 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ -5 & -4 & 2,1 \\ 0 & 0 & 0,375 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,411 & 0,117 & 0,152 \\ -1,178 & -0,766 & 0,305 \\ 0 & 0 & 0,231 \end{bmatrix}$$

$$Cd = \left[I - \frac{T}{2}A \right]^{-1} TC = \begin{bmatrix} 0,475 & -0,475 & 0,59 \\ 0,95 & -0,95 & 1,18 \\ 3,84 & 3,84 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Hd = H = [1 \ 0 \ 0]$$

4. Xác định tính điều khiển được và quan sát được

a. Hệ liên tục :

Quan sát được :

Ta có :

$$A'H' = \begin{bmatrix} 0 & -100 & 0 \\ 10 & -100 & 0 \\ 0 & 42 & -12,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A'^2H' = \begin{bmatrix} 0 & -100 & 0 \\ 10 & -100 & 0 \\ 0 & 42 & -12,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ -1000 \\ 420 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Rank } \{H' \ A'H' \ A'^2H'\} &= \\ &= \text{Rank } \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1000 \\ 0 & 10 & -1000 \\ 0 & 0 & 420 \end{bmatrix} \right\} = 3 \end{aligned}$$

⇒ Hệ quan sát được hoàn toàn.

Tính điều khiển được

$$\text{Rank } \{C \ AC \ A^2C\}$$

$$A.C = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -1,25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 62,5 & -62,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1000 \\ 2625 & -2625 & -10000 \\ -781,25 & 781,25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2.C = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -1,25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1000 \\ 2625 & -2625 & -10000 \\ 781,25 & 781,25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -26250 & -100000 \\ -295312,5 & 2953145 & 900000 \\ 9765,625 & -9765,625 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank } \{C \ AC \ A^2C\} = 3.$$

Vậy hệ điều khiển được hoàn toàn.

b. Hệ rời rạc :

Tính quan sát được :

Ta có :

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, -\tau) = e^{A(t-\tau)} = I + A(t-\tau) = I + A.T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix} \cdot 0,1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -10 & -9 & 4,2 \\ 0 & 0 & -0,25 \end{bmatrix}$$

$$\Phi'H' = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 1 & -9 & 0 \\ 0 & 42 & -0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi'^2 H' = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 1 & -9 & 0 \\ 0 & 4,2 & -0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ 4,2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank } \{H' \ \Phi' H' \ \Phi'^2 H'\} = \text{Rank } \begin{Bmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4,2 \end{Bmatrix} = 3$$

Vậy hệ quan sát được hoàn toàn.

Tính điều khiển được

$$\text{Ad.Cd} = \begin{bmatrix} 0,411 & 0,117 & 0,152 \\ -1,178 & -0,766 & 0,305 \\ 0 & 0 & 0,231 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,475 & -0,475 & 0,59 \\ 0,95 & -0,95 & 1,18 \\ 3,84 & -3,84 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,98 & -0,89 & 0,381 \\ -0,116 & 0,116 & -1,599 \\ 0,887 & -0,887 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 dCd = \begin{bmatrix} 0,411 & 0,117 & 0,152 \\ -1,178 & -0,766 & 0,305 \\ 0 & 0 & 0,231 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,98 & -0,89 & 0,381 \\ -0,116 & 0,116 & -1,599 \\ 0,887 & -0,887 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,478 & -0,487 & 0,03 \\ -0,718 & 0,718 & 0,776 \\ 0,205 & -0,205 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank } \{Cd \ \text{AdCd} \ A^2 dCd\} =$$

$$\text{Rank} \begin{Bmatrix} 0,475 & -0,475 & 0,59 & 0,98 & -0,89 & 0,381 & 0,478 & -0,487 & 0,03 \\ 0,95 & -0,95 & 1,18 & -0,116 & 0,116 & -1,599 & -0,718 & 0,718 & 0,776 \\ 3,84 & -3,84 & 0 & 0,887 & -0,887 & 0 & 0,205 & -0,205 & 0 \end{Bmatrix}$$

$=3 \Rightarrow$ Hệ điều khiển được hoàn toàn.

5. Xác định điều khiển tối ưu liên tục $U^o(t)$

Phiếm hàm tối ưu :

$$I = \int_{t_0}^h [X_1^2 + \rho u_1^2] dt \text{ với } \rho = 0,12$$

Phương trình Riccati

$$\begin{cases} U^0(t) = -F^0 X(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} F^0 = R_2^{-1} C^T P \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0 = PA - A^T P + R_1 \quad P_1 C R_2^{-1} C^T P \end{cases} \quad (3)$$

Các ma trận số liệu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 62,5 & 62,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = E \rho = 0,12.E; \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Theo phương trình (3) ta có

$$PA - A^T P + R_1 \quad P.C R_2^{-1} C^T P = 0$$

Đặt

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{bmatrix}$$

P : ma trận đối xứng

Thay vào

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -100 & -100 & 42 \\ 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -100 & 0 \\ 10 & -100 & 0 \\ 0 & 42 & -12,5 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 62,5 & -62,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{0,12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 62,5 \\ 0 & 0 & -62,5 \\ 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} P = 0$$

Từ (3) rút ra $\Rightarrow PA + A^T P + R_1 = PC R_2^{-1} C^T P$

Rút ra hệ :

$$\begin{cases} 7812,5p_3^2 + 10000p_2^2 = 1 & 0,12 \\ 7812,5p_5^2 + 10000p_4^2 = 0 \\ 7812,5p_6^2 + 10000p_5^2 = 0 \\ 7812,5p_6p_5 + 10000p_4p_5 = -100p_5 - 42p_2 + 12,5p_3 \\ 7812,5p_3p_5 + 10000p_2p_4 = 10p_1 - 100p_2 + 100p_4 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$p_4 = p_5 = p_6 = 0$$

$$p_1 = 0,01105$$

$$p_3 = 0,003712$$

$$p_2 = 0,004105$$

Vậy ma trận P

$$P = \begin{bmatrix} 0,01105 & 0,001165 & 0,003712 \\ 0,001105 & 0 & 0 \\ 0,003712 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có :

$$F^0 = R_2^{-1} C^T P =$$

$$= \frac{E}{0,12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 62,5 \\ 0 & 0 & -62,5 \\ 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,01105 & 0,001165 & 0,003712 \\ 0,001105 & 0 & 0 \\ 0,003712 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,9333 & 0 & 0 \\ -1,9333 & 0 & 0 \\ 0,9208 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^0(t) = -F^0 \cdot X(t)$$

$$U^0(t) = -1,9333X_1 + 1,9333X_2 - 0,9208X_3.$$

6. Tổng hợp điều khiển tối ưu rời rạc

Phiếm hàm tối ưu

$$I = \sum_{k=0}^{k_1} [X_1^2(k+1) + \rho u_2^2(k)] \quad \text{với} \quad \rho = 0,12$$

$$T = 0,1 \text{ sec}$$

$$k_1 = 50$$

Ta có :

$$\begin{cases} U(k) = -F(k) X(k) \\ F(k) = \{R_2(k) + C_d^T(k)[R_1(k+1) + P(k+1)].C_d(k)\}^{-1} \times \\ \quad \times C_d^T(k)[R_1(k+1) + P(k+1)] Ad(k). \\ P(k) = A_d^T(k) [R_1(k+1) + P(k+1)] [Ad(k).C_d(k)F(k)] \end{cases}$$

Kết quả tính toán : $U(k) = -F(k) X(k).$

$$F(11) = \text{const}$$

$$U(k) = - \begin{bmatrix} 1,87656 & 0,03994 & 1,02647 \\ 1,26021 & 0,02634 & 0,70806 \\ -1,27518 & -0,27518 & -0,64288 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0,12 \end{bmatrix}; \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Lập chương trình

```

/*=====*/
/*  XAC DINH PHUONG TRINH SAI PHAN DANG  */
/*           $X(K+1) = Ad * X(K) + Cd * U(K)$           */
/*           $Z(K) = Hd * X(K)$           */
/*  PHUONG PHAP HINH THANG  */
/*  INPUT  A, C, H  OUTPUT : Ad, Cd, Hd  */
/*=====*/

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define n 3                      /* So bien trang thai */
#define m 3                      /* So bien dieu khien */
#define T 0.05
#define ro 0.12
main()
{
    void vaomat() ; void ramat() ; void nhanm() ;
    void congm() ; void trum() ; void nhan-lso() ;
    void chuyenvi() ; void daomat() ;
    float a[n][n], l[n][n], c[n][m], d[n][n], e[n][n], f[n][n], x[n][n], h[1][n] ;
    float T1, Ad[n][n], Cd[n][m], y[n][n], Adt[n][n], Cdt[n][n], R1[n][n], P[n][n] ;
    float F[n][n], R2[n][n] ;
    int ij ;
    T1=T/2 ;
    printf("\n Vao ma tran A\n") ;
    vaomat(a,n,n) ;
    printf("\n Vao ma tran C\n") ;
    vaomat(c,n,m) ;
    printf(" Vao ma tran H\n") ;

```

```
vaomat(h,1,n) ;
printf(" Vao ma tran R1\n") ;
vaomat(R1,n,n) ;
printf("\n MA TRAN A\n\n") ;
ramat(a,n,n) ;
printf("\n MA TRAN C\n\n") ;
ramat(c,n,m) ;
printf("\n MA TRAN H\n\n") ;
ramat(h,1,n) ;
getch() ;
nhan_lso(a,d,n,n,T1) ;
for(i=0 ; i<n ; ++i)
    for(j=0 ; j<n ; ++j)
        if(i==j) I[i][j]=1 ;
        else I[i][j]=0 ;
trum(I,d,e,n,n) ;
daomat(e,x,n) ;
congm(I,d,f,n,n) ;
nhanm(x,f,Ad,n,n,n) ;
printf("\n MA TRAN Ad\n\n") ;
ramat(Ad,n,n) ;
nhan_lso(x,y,n,n,T) ; nhanm(y,c,Cd,n,n,m) ;
printf("\n MA TRAN Cd\n\n") ;
ramat(Cd,n,m) ;
printf("\n MA TRAN Hd\n\n") ;
ramat(h,1,n) ;
getch() ;
```

```

/* ===== */
/      TONG HOP DIEU KHIEN TOI UU      */
/*      TUYEN TINH ROI RAC              */
/*      GIAI PHUONG TRINH RICCATI       */
/* ===== */

```

```

chuyenvi(Ad,Adt,n,n) ;
printf("\n MA TRAN Ad' \n\n") ;
ramat(Adt,n,n) ;
getch() ;
chuyenvi(Cd,Cdt,n,n) ;
printf("\n MA TRAN Cd' \n\n") ;
ramat(Cdt,n,n) ;
printf("\n MA TRAN R1 \n\n") ;
ramat(R1,n,n) ;
for(i=0 ;i<n ;i++)
for(j=0 ;j<n ;++j)
{
    R2[i][j]=ro ;
    P[i][j]=0 ;
}
printf("\n MA TRAN R2\n\n") ;
ramat(R2,n,n) ;
getch() ;
i=50 ;
printf("\n P(%d) = \n",i) ;
ramat(P,n,n) ;
i-- ;
while(i>0)

```

```

{
    congm(R1,P,d,n,n) ;           /* R1+ P=d */
    nhanm(Cdt,d,f,n,n,n) ;       /* Cd'*d=f */
    nhanm(f,Cd,I,n,n,n) ;        /* f*Cd=I */
    congm(R2,I,e,n,n,n) ;        /* R2+ I=e */
    daomat(e,x,n) ;
    nhanm(x,d,I,n,n,n) ;         /* x*d=I */
    nhanm(I,Ad,F,n,n,n) ;        /* I*Ad=F */
    printf("\n F(%d) =\n ",i) ;
    ramat(F,n,n) ;
    nhanm(Cd,F,f,n,n,n) ;        /* Cd*F=f */
    trum(Ad,f,e,n,n) ;           /* Ad-f=e */
    nhanm(Adt,d,I,n,n,n) ;       /* Ad'*d=I */
    nhanm(I,e,P,n,n,n) ;         /* I*e=P */
    printf("\n P(%d) =\n ",i) ;
    ramat(P,n,n) ;
    i-- ;
}

#undef m ;
#undef n ;
    getch() ;
    return 0 ;
}

/*****/
/* vao so lieu cho mot ma tran */
void vaomat(pa,m,n)
float *pa ;
int m,n ;

```

```

{
    float x ;
    int k=m*n,t,i,j ;
    for(t=0 ; t<k ; t++ )
    {
        i=t/n ;
        j=t-i*n ;
        printf("\n phan tu %d, %d =",i+ 1,j+ 1) ;
        scanf("%f",&x) ;
        *(pa+ t)=x ;
    }
}

void ramat(pa,m,n)      /* in ra ma tran */
float *pa ;
int m,n ;
{
    int k=m*n,t,s ;
    for(t=0 ; t<k ; ++t)
    {
        s=(t+ 1)%n ;
        printf(" %10.5f%c", *(pa+ t),s ?' ':'\n') ;
    }
    printf("\n\n") ;
}

/*****/
void nhanm(pa,pb,pc,m,n,k)      /*nhan 2 ma tran*/
float *pa, *pb, *pc ;
int m,n,k ;

```

```

{
    int j,i,t ;
    for(i=0 ; i<m ; ++i)
    for(j=0 ; j<k ; ++j)
    {
        *(pc+i*k+j)=0 ;
        for(t=0 ; t<n ; ++t)
            *(pc+i*k+j)+=*(pa+i*n+t)* *(pb+t*k+j) ;
    }
}

/*****/
void congm(pa,pb,pc,m,n)                /*cong 2 ma tran*/
float *pa, *pb, *pc ;
int m,n ;
{
    int k=m*n ;
    while(k--)
        *pc++ = *pa++ + *pb++ ;
}

/*****/
void trum(pa,pb,pc,m,n)                /* tru 2 ma tran */
float *pa, *pb, *pc ;
int m,n ;
{
    int k=m*n ; while(k--)
        *pc++ = *pa++ - *pb++ ;
}

```

```

/*****/
void nhan_lso(pa,pd,m,n,t)
float *pa,t,*pd ;
int m,n ;
{
    int i,j ;
    for(i=0 ;i<m ;++i)
        for(j=0 ;j<n ;++j)
            *(pd+i*m+j)=*(pa+i*m+j)*t ;
}

/*****/
/* chuyen vi mot ma tran */
void chuyenvi(pa,px,m,n)
float *pa, *px ;
int m,n ;
{
    int i,j ; float x ;
    for(i=0 ;i<m ;i++)
        for(j=0 ;j<n ;j++)
            *(px+i*m+j)=*(pa+i*m+j) ;
    for(i=0 ;i<m ;++i)
        for(j=i ;j<n ;++j)
        {
            x=*(px+i*m+j) ;
            *(px+i*m+j)=*(px+j*m+i) ;
            *(px+j*m+i)=x ;
        }
}

```

```

/*****/
void daomat(pa,px,n)
float *pa,*px ;
int n ;
{
    float dt,am,bm,ap,xp,dv,ep=0.000001 ;
    int i,j,k,im ;
    for(i=0 ;i<n ;++i)
    for(j=0 ;j<n ;++j)
        if(i==j) *(px+i*n+j)=1 ;
        else *(px+i*n+j)=0 ;
        dt=1 ;
    for(k=0 ;k<n ;++k)
    {
        if(k>=n) goto tt ;
        im=k ;
        am=fabs(*(pa+k*n+k)) ;
        for(i=k+1 ;i<n ;++i)
        if(am<fabs(*(pa+i*n+k)))
        {
            im=i ;
            am=fabs(*(pa+i*n+k)) ;
        }
        if(im==k) goto tt ;
        for(j=0 ;j<n ;++j)
        {
            ap=*(pa+im*n+j) ;
            *(pa+im*n+j)=*(pa+k*n+j) ;

```

```

        *(pa+ k*n+j)=ap ;
        xp=*(px+ im*n+j) ;
        *(px+ im*n+j)=*(px+ k*n+j) ;
        *(px+ k*n+j)=xp ;
    }
    dt=-dt ;
    tt    if(fabs(*(pa+ k*n+ k))<=ep) goto kt ;
    dt=dt* *(pa+ k*n+ k) ;
    dv=*(pa+ k*n+ k) ;
    for(j=0 ;j<n ;++j)
    {
        *(pa+ k*n+j)=*(pa+ k*n+j)/dv ;
        *(px+ k*n+j)=*(px+ k*n+j)/dv ;
    }
    for(i=0 ;i<n ;++i)
        if(i !=k)
        {
            bm=*(pa+ i*n+ k) ;
            for(j=0 ;j<n ;++j)
            {
                *(pa+ i*n+j)= *(pa+ i*n+j)-bm***(pa+ k*n+j) ;
                *(px+ i*n+j)= *(px+ i*n+j)-bm***(px+ k*n+j) ;
            }
        }
    }
    }
    kt :getch() ;
}

```

MA TRAN A

0.00000	1.00000	0.00000
-1000.00000	-100.00000	420.00000
0.00000	0.00000	-12.50000

MA TRAN C

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1000.00000
62.50000	-62.50000	0.00000

MA TRAN H

1.00000	0.00000	0.00000
---------	---------	---------

KET QUA

MA TRAN Ad

0.69697	0.01212	0.09697
-12.12121	-0.51515	3.87879
0.00000	0.00000	0.52381

MA TRAN Cd

0.15152	-0.15152	0.30303
6.06061	-6.06061	12.12121
2.38095	-2.38095	0.00000

MA TRAN Hd

1.00000	0.00000	0.00000
---------	---------	---------

MA TRAN Ad'

0.69697	-12.12121	0.00000
0.01212	-0.51515	0.00000
0.09697	3.87879	0.52381

MA TRAN Cd'

0.15152	6.06061	2.38095
-0.15152	-6.06061	-2.38095
0.30303	12.12121	0.00000

MA TRAN R1			
	1.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000
MA TRAN R2			
	0.12000	0.12000	0.12000
	0.12000	0.12000	0.12000
	0.12000	0.12000	0.12000
P(50)=			
	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000
F(49)=			
	0.00000	0.00000	0.00000
	0.00000	0.00000	0.00000
	0.69697	0.01212	0.09697
P(49)=			
	0.33856	0.00589	0.04710
	0.00589	0.00010	0.00082
	0.04710	0.00082	0.00655
F(48)=			
	39.82789	0.61836	7.92273
	-0.76320	-0.01203	-0.14623
	-35.46271	-0.55129	-7.03187
P(48)=			
	2.83863	0.04443	0.5535
	0.05868	0.00092	0.01123
	0.09814	0.00134	0.02554

F(47)=

42.17680	0.46787	16.35261
10.41751	0.11528	4.05447
-43.56704	-0.48366	-16.86747

P(47)=

5.38067	0.06082	2.04148
0.09885	0.00115	0.03646
0.33434	0.00329	0.14756

F(46)=

43.25064	0.42495	17.61986
19.01394	0.23579	9.89355
-37.57708	-0.46649	-19.26884

P(46)=

6.17947	0.07757	3.11460
0.09358	0.00120	0.04565
0.62703	0.00746	0.35099

F(45)=

28.8411	0.33529	18.398384
18.83502	0.21873	12.05154
-30.53317	-0.35577	-19.33632

P(45)=

5.85289	0.06901	3.65184
0.08409	0.00102	0.05083
0.68997	0.00762	0.48169

F(44)=

24.27701	0.29383	17.21724
17.53266	0.21201	12.47877
-25.20091	-0.30580	-17.68022

P(44)=

5.52842	0.06779	3.82269
0.07942	0.0010	0.05314
0.67379	0.00779	0.52962

F(43)=

21.61860	0.25751	16.45892
16.17066	0.19242	12.35956
-12.07360	-0.26384	-16.57782

P(43)=

5.15690	0.06235	3.81434
0.07353	0.00091	0.05245
0.63785	0.00721	0.54488

F(42)=

19.67362	0.23758	15.42870
15.07794	0.18191	11.87307
-19.85286	-0.24060	-15.32266

P(42)=

4.82846	0.05920	3.66825
0.06840	0.00086	0.04998
0.60184	0.00690	0.53479

F(41)=

18.33014	0.22109	14.52035
14.15484	0.17055	11.26179
-18.39352	-0.22274	-14.31372

P(41)=

4.55773	0.05587	3.48925
0.06459	0.00081	0.04747
0.56550	0.00645	0.51242

$F(40)=$

17.40945	0.21116	13.70706
13.47983	0.16333	10.66129
-17.42446	-0.21220	-13.46161

 $P(40)=$

4.36104	0.05378	3.31245
0.06187	0.00078	0.04503
0.53710	0.00615	0.48720

 $F(39)=$

16.82668	0.20435	13.07997
12.99561	0.15766	10.14944
-16.82952	-0.20524	-12.82866

 $P(39)=$

4.21852	0.05211	3.15981
0.05994	0.00076	0.04296
0.51542	0.00590	0.46405

Phụ lục

Bảng biến đổi Laplace và biến đổi z

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(\tau)$	1	1
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{(z - 1)}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T.z}{(z - 1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z.(z + 1)}{2(z - 1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{(p + a)}$	$\frac{z}{(z - B)}$; $B = e^{-aT}$
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T.zB}{(z - B)^2}$
$\frac{1}{2}t^2.e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^3}$	$\frac{1}{2} T^2(z + B). \frac{zB^2}{(z - B)^3}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\frac{(1 - B).z}{(z - 1)(z - B)}$
$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{a}{p^2(p + a)}$	$-\frac{(1 - B).z}{a(z - 1)(z - B)} + \frac{z.T}{(z - 1)^2}$

$e^{-at} \cdot (1 - at)$	$\frac{p}{(p + a)^2}$	$\frac{z^2 - zB(1 + a \cdot T)}{(z - B)^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\frac{z \cdot \sin aT}{z^2 - 2 \cdot Z \cdot \cos aT + 1}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos(aT)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos cT + 1}$
$e^{-at} \cdot \sin c \cdot t$	$\frac{a}{(p + a)^2 + c^2}$	$\frac{z \cdot B \cdot \sin cT}{z^2 - 2z \cdot B \cdot \cos cT + B^2}$
$e^{-at} \cdot \cos c \cdot t$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + c^2}$	$\frac{z(z - B \cdot \cos cT)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot B \cdot \cos CT + B^2}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1) Digital Control System Analysis and Design
Prentice – Hall International Editions 1990
Charles L. Phillips Ø H.Troy Nagle.
- 2) Feedback Control System
Prentice – Hall International, Inc 1990
Printed in The United States of America
John Van Devegte
- 3) Linear Control System Analysis and Design
D'Azzo, and C.H. Houpis
New York: Mc Graw–Hill Book Company 1988
- 4) Feedback Control Systems
Prentice–Hall, Inc, 1988
Phillips, C.L and R.. Harbor
- 5) Mordern Control Systems
R.C. Dorf
Addison – Wesley Publishing Company, Inc, 1989
- 6) Digital Control Systems
B.C. Kuo
New York: Holt, Rinehart and Winston 1980.
Tokyo: Holt – Saunders Japan
- 7) Theory And Problems of State Space and Linear Systems
Donald M. Wiberg
MC Graw–Hill Book Company 1971
- 8) State Variables for Engineers
De Russo, P.M; R.J. Roy and C.M. Close
New York John Wiley & Sons, Inc. 1965
- 9) Linear Optimal Control Systems.
Kwakernaak H (Twente University of Technology Enschede, The Netherlands)

Raphael Sivan (Technion, Israel Institute of Technology Haifa, Israel).

Printed in USA by John Wiley & Sons, Inc 1972

10) Regeltechnik

J.C. Cool, F.J. Schijff, T.JJ. Viersma

Agon Elsevier – Amsterdam / Brussel 1986

11) Основы Автоматики Технической Кибернетики.

Г.С. Поспелов и А.А. Красовский

Москва 1962

12) Modern Control Principles and Applications

Say C. Hsu; Anrew U. Meyer

McGraw – Hill Book Company

New York – Toronto – London – Sydney 1972

13) Теория Автоматического Управления Т1, Т2, Т3 1977, 1984

А.А. Воронов, Москва (Высшая Школа)

14) Optimal Control

Michael Athans; Peter L. Falb

McGraw – Hill Book Company 1968.

15) Теория Автоматического Управления

Т1, Т2

А.Б.Нетушил 1972, 1978

Москва (Высшая школа)

16) Principles of Signals and Systems

Fed J. Taylor. Mc Graw Hill, 1992

17) Intel Microprocessors Hardware, Software and Applications

8085 – 8086 – 8088 – 80486.

Roy. W. Goody Mc Graw Hill, 1994

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu	3
Chương 1. Mô tả toán học hệ thống điều khiển tự động	5
1-1. Các khái niệm cơ bản	5
1-1.1. Các phần tử cơ bản của hệ thống điều khiển tự động (ĐKTD)	5
1-1.2. Các nguyên tắc điều khiển cơ bản	8
1-1.3. Phân loại các hệ thống ĐKTD	9
1-1.4. Nhiệm vụ phân tích và thiết kế hệ thống	10
1-2. Phép biến đổi Laplace	11
1-3. Phép tính ma trận	16
X 1-4. Phương trình trạng thái, không gian trạng thái, khảo sát hệ thống trong miền thời gian	26
1-4.1. Phương trình trạng thái dạng tổng quát	26
1-4.2. PTTT biểu diễn bằng sơ đồ cấu trúc theo dạng toán tử Laplace	33
1-4.3. Sơ đồ cấu trúc và graph tín hiệu để biến đổi đơn giản hóa hệ thống phức tạp	45
1-4.4. Graph tín hiệu để xác định hàm truyền đạt hệ thống điều khiển	50
Chương 2. Đặc tính động học của các khâu và của hệ thống TĐĐK khảo sát trong miền tần số	55
2-1. Khái niệm chung	55
2-2. Tín hiệu tác động vào và phản ứng của khâu (hay hệ thống) tuyến tính	56
2-2.1. Tín hiệu tác động vào của một khâu (hay hệ thống)	56
2-2.2. Phản ứng của một khâu (hay hệ thống)	58
X 2-3. Đặc tính tần số của một khâu	60
2-3.1. Đặc tính tần số biến - pha	60
2-3.2. Đặc tính tần số logarit	63



2-4. Phân loại các khâu động học điển hình	65
2-4.1. Các khâu bậc 1, bậc 2	65
2-4.2. Khâu vi phân	65
2-4.3. Khâu tích phân	65
2-5. Đặc tính động học của các khâu bậc 1, bậc 2	66
2-5.1. Khâu khuếch đại	66
2-5.2. Khâu quán tính bậc một	67
2-5.3. Khâu dao động	71
2-5.4. Khâu không ổn định bậc một	75
2-6. Đặc tính động học của các khâu vi phân	77
2-6.1. Khâu vi phân lý tưởng	77
2-6.2. Khâu vi phân bậc một	78
2-7. Đặc tính động học của khâu tích phân lý tưởng	79
2-8. Đặc tính động học của khâu chậm trễ	81
2-9. Đặc tính tần số của hệ thống Đ.K.T.Đ	82
Chương 3. Ổn định của hệ thống Điều khiển tự động	87
3-1. Khái niệm chung	87
3-2. Tiêu chuẩn ổn định đạo số Routh-Hurwitz	88
3-2.1. Điều kiện ổn định cần thiết của hệ thống ĐKTD	90
3-2.2. Tiêu chuẩn Routh	91
3-2.3. Tiêu chuẩn Hurwitz	96
3-3. Tiêu chuẩn ổn định tần số Nyquist-Mikhailov	
3-3.1. Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính tần số logarit biên pha	97
3-3.2. Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính tần số logarit	104
3-3.3. Tiêu chuẩn Nyquist theo đặc tính biên pha có khâu chậm trễ	106
3-3.4. Tiêu chuẩn ổn định Mikhailov	106
3-4. Phương pháp chia miền D	108
3-5. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số	
3-5.1. Đặt vấn đề	118
3-5.2. Phương pháp xây dựng quỹ đạo nghiệm số	118

3-5.3. Trình tự xây dựng quỹ đạo nghiệm số và ví dụ áp dụng	125
Chương 4. Phân tích chất lượng hệ thống điều khiển	129
4-1. Tính sai số của hệ thống ở trạng thái xác lập	
4-2. Tính quá trình quá độ hệ thống	133
4-2.1. Phương pháp số Runge-Kutta	134
4-2.2. Phương pháp số Tustin	140
4-3. Giải phương trình trạng thái	
4-3.1. Phương trình trạng thái dừng, thuần nhất	156
4-3.2. Các phương pháp xác định ma trận chuyển trạng thái (t)	159
4-3.3. Phương trình trạng thái dừng, không thuần nhất	162
4-3.4. Phương trình trạng thái hệ thống không dừng, có hệ số biến thiên theo thời gian	166
4-4. Đánh giá chất lượng hệ thống qua tiêu chuẩn tích phân	171
Chương 5. Tổng hợp hệ thống điều khiển tự động tuyến tính	178
5-1. Tổng hợp hệ thống bằng cách thay đổi thông số	178
5-2. Tổng hợp hệ thống bằng cách thay đổi cấu trúc	180
5-3. Nguyên lý bất biến và điều khiển bù	181
5-4. Thiết bị điều khiển tỉ lệ - tích phân - vi phân	184
5-5. Xác định điều kiện phân li của hệ thống nhiều chiều	187
5-6. Tính điều khiển được và quan sát được của hệ thống tuyến tính liên tục	190
Chương 6. Hệ thống điều khiển xung số	195
6-1. Mô tả toán học hệ thống xung số	196
6-2. Phương trình trạng thái hệ điều khiển xung số	199
6-3. Phép biến đổi z	207
6-4. Hàm truyền đạt hệ thống xung số	214
6-5. Tính ổn định của hệ thống xung số	222
6-6. Tính quá trình quá độ trong hệ thống xung số	225

6-7. Phân tích hệ thống có máy tính số	232
6-8. Điều khiển PID số	237
6-9. Tính điều khiển được và quan sát được của hệ xung - số	240
Chương 7. Hệ thống Điều khiển tự động tối ưu	244
7-1. Khái niệm chung	
7-2. Thiết lập bài toán điều khiển tối ưu	2
7-3. Các phương pháp giải bài toán tối ưu	25
7-4. Phương pháp biến phân cổ điển	251
7-5. Phương pháp quy hoạch động	261
7-6. Nguyên lý cực đại	273
7-7. Mối liên hệ giữa ba phương pháp, đặc điểm và phạm vi ứng dụng	281
7-7.1. Mối liên hệ giữa nguyên lý cực đại và phương trình Euler	
7-7.2. Mối liên hệ giữa nguyên lý cực đại và phương pháp quy hoạch động	
7-7.3. Đặc điểm và phạm vi áp dụng của các phương pháp gián tiếp	
7-8. Tổng hợp hệ thống điều khiển tối ưu	286
7-9. Tổng hợp hệ thống điều khiển gần tối ưu	293
7-10. Điều khiển tối ưu đối với phiến hàm dạng toàn phương	296
7-10.1. Điều khiển tối ưu đối với hệ thống liên tục	
7-10.2. Điều khiển tối ưu đối với hệ thống xung-số	
Các bài tập lớn	311
Phụ lục	397
Tài liệu tham khảo	

GLÁ 27.500^d